

MOCANU FLORENTINA

REZISTENȚA MATERIALELOR

PARTEA a-II-a

NOȚIUNI RECAPITULATIVE

ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

SOLICITĂRI COMPUSE

BARE CURBE

SOLICITĂRI DINAMICE PRIN ȘOC

VASE CU PEREȚI SUBȚIRI

CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA OBOSEALĂ

Cuprins

CAPITOLUL 1. NOȚIUNI RECAPITULATIVE

1.1. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane.....	5
1.2. Elemente de statică.....	16
1.3. Sarcini.....	19
1.4. Reazeme și reacțiuni.....	20
1.5. Eforturi.....	22
1.6. Tensiuni.....	24
1.7. Relații între eforturi și tensiuni.....	25
1.8. Deplasări și deformații.....	26
1.9. Sollicitări simple.....	27
1.10. Teoreme și metode energetice.....	43

CAPITOLUL 2. ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

2.1. Starea de tensiuni într-un punct al unui corp.....	55
2.1.1. Starea generală de tensiuni.....	55
2.1.2. Starea plană și uniaxială de tensiuni.....	59
2.2. Variația tensiunilor în jurul unui punct. Tensiuni principale.....	60
2.2.1 Starea spațială de tensiuni.....	60
2.2.2. Starea plană de tensiuni (biaxială).....	62
2.2.3. Starea liniară de tensiuni (monoaxială).....	67
2.3. Starea de deformații într-un punct al unui corp.....	69
2.3.1. Starea generală de deformații.....	69
2.3.2. Variația deformațiilor în jurul unui punct.....	72
2.4. Ecuațiile fundamentale ale Teoriei Elasticității.....	74
2.4.1. Ecuații de echilibru (Cauchy).....	74
2.4.2. Ecuații geometrice (între deformații și deplasări).....	76
2.4.3. Ecuații constitutive (fizice).....	80
2.5. Teorii de rezistență.....	82
2.6.1. Ipoteza tensiunii normale maxime.....	84
2.6.2. Ipoteza deformației specifice liniare maxime.....	84
2.6.3. Ipoteza tensiunii tangențiale maxime.....	85
2.6.4. Ipoteza energiei de deformație.....	85
2.6.5. Ipoteza energiei de deformație modificatoare de formă.....	85
2.6.6. Teoria stării limită a lui Mohr.....	86
Probleme propuse.....	91

CAPITOLUL 3. SOLICITĂRI COMPUSE

3.1. Generalități	93
3.2. Solicități compuse la care apar tensiuni pe aceeași direcție	94
3.2.1. <i>Solicitarea axială excentrică</i>	94
3.2.1.1. Sâmbure central.....	98
3.2.2. <i>Solicitarea de încovoiere oblică (dublă)</i>	102
3.2.3. <i>Solicitarea compusă de încovoiere și forță axială</i>	106
3.2.3.1. Grinzi cotite (cadre).....	108
3.2.3.2. Cadre static determinate (grinzi cotite).....	109
3.2.3.3. Cadre static nedeterminate exterior.....	113
3.2.3.4. Cadre static nedeterminate interior.....	132
3.2.3.5. Cadre static nedeterminate exterior și interior.....	136
3.2.4. <i>Deformația sistemelor plane</i>	143
Probleme propuse.....	145
3.3. Solicități la care apar tensiuni pe direcții diferite	153
3.3.1. <i>Solicitarea de încovoiere cu torsiune</i>	153
Bare cotite spațiale.....	153
Calculul arborilor drepecți la torsiune cu încovoiere.....	156
Probleme propuse.....	161

CAPITOLUL 4. BARE CURBE

4.1. Generalități	167
4.2. Bare curbe sub formă de arc de cerc	168
4.2.1. <i>Calculul coeficientului de formă</i>	173
4.2.2. <i>Axa neutră a secțiunii unei bare curbe</i>	175
4.3. Deformația barelor curbe sub formă de arc de cerc	185
4.4. Diagrame de eforturi la bare curbe sub formă de arc de cerc	186
4.4.1. <i>Bare curbe sub formă de arc de cerc static determinate</i>	187
4.4.2. <i>Bare curbe sub formă de arc de cerc static nedeterminate exterior</i>	197
4.4.3. <i>Bare curbe sub formă de arc de cerc static nedeterminate interior</i>	199
Probleme propuse.....	204
4.5. Bare curbe cu rază mare de curbură. Arce parabolice	207
Probleme propuse.....	219

CAPITOLUL 5. SOLICITĂRI DINAMICE PRIN ȘOC

5.1. Considerații generale	220
5.2. Calculul la solicitări dinamice prin șoc	221
Probleme propuse	236

CAPITOLUL 6. VASE CU PEREȚI SUBȚIRI

6.1. Generalități.....	240
6.2. Ecuația lui Laplace.....	241
6.3. Vase cu pereți subțiri care conțin gaz.....	245
6.4. Vase cu pereți subțiri care conțin lichid.....	247
Probleme propuse	250

CAPITOLUL 7. CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA OBOSEALĂ

7.1. Considerații generale.....	252
7.2. Clasificarea solicitărilor variabile.....	255
7.3. Rezistența la oboseală. Curba Wöhler.....	258
7.4. Diagrame ale rezistențelor la oboseală.....	261
7.5. Factori care influențează rezistența la solicitări variabile.....	264
7.5.1. Materialul și tehnologia de fabricație.....	265
7.5.2. Natura solicitării.....	265
7.5.3. Concentratorii de tensiune.....	265
7.5.4. Dimensiunile piesei.....	274
7.5.5. Starea suprafeței.....	278
7.5.6. Temperatura.....	280
7.6. Calculul coeficientului de siguranță al solicitării variabile.....	281
Probleme propuse	295
Bibliografie.....	297

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI RECAPITULATIVE

În acest capitol se prezintă o recapitulare minimală a principalelor noțiuni studiate în cursul de Rezistența materialelor I, absolut necesare abordării disciplinei de Rezistența materialelor II.

1.1. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane

Pentru o suprafață plană, care poate fi cea a secțiunii transversale a unei bare, raportată la un sistem de referință zOy (axa Ox fiind aleasă pe direcția axei barei) au fost definite următoarele caracteristici geometrice ale suprafețelor plane: *aria, momentele statice, momentele de inerție, modulele de rezistență, razele de inerție.*

Se consideră o figură plană de formă oarecare, de arie A , raportată la un sistem de axe rectangulare zOy (figura 1.1).

Aria secțiunii are ca unitatea de măsură $[\text{mm}^2]$ și se calculează cu integrala:

$$A = \int_A dA \quad (1.1)$$

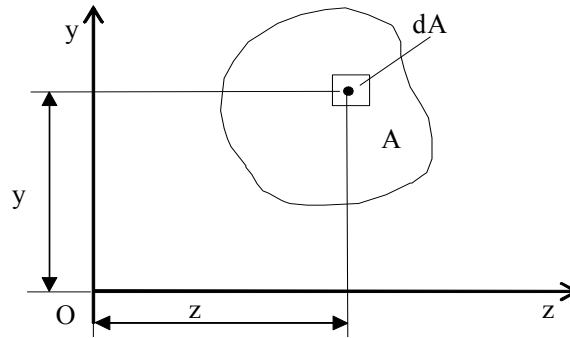


Figura 1.1.

S-a considerat secțiunea compusă dintr-o infinitate de arii elementare dA , integrala semnificând extinderea calculului pe toată secțiunea.

Momentele statice ale suprafeței față de axele Oz , respectiv Oy se calculează cu relațiile:

$$S_z = \int_A y dA; S_y = \int_A z dA \quad (1.2)$$

Momentul static se măsoară în $[mm^3]$.

Momentele statice se poate utiliza pentru determinarea poziției centrului de greutate G al ariei secțiunii transversale. Dacă se notează cu z_G și y_G coordonatele centrului de greutate G al unei figuri (*figura 1.2*) se pot scrie relațiile:

$$S_z = A \cdot y_G; S_y = A \cdot z_G \quad (1.3)$$

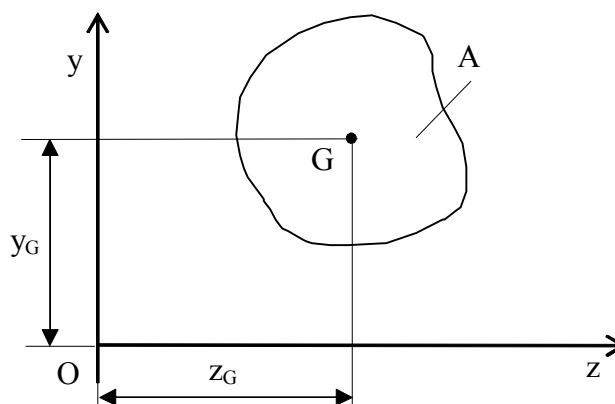


Figura 1.2.

Din relațiile (1.3) rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{A} \\ y_G &= \frac{S_z}{A} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dacă o suprafață oarecare este compusă aceasta se divide în figuri simple, pentru care se cunosc aria și poziția centrului de greutate, iar momentele statice ale întregii figuri se determină prin sumarea algebrică a momentelor statice ale figurilor componente. Prin urmare:

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_{i=1}^n A_i y_{Gi} \\ S_y &= \sum_{i=1}^n A_i z_{Gi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pentru o suprafață oarecare, care poate fi descompusă în figuri simple, coordonatele centrului de greutate se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{Gi}}{A} \\ y_G &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A} \end{aligned} \quad (1.6)$$

în care: $A = \sum_{i=1}^n A_i$ este aria întregii figuri;

A_i - aria figurii i ;

z_{Gi} , y_{Gi} - coordonatele centrului de greutate al figurii i .

De reținut

- *Orice axă de simetrie conține centrul de greutate al figurii.*
- *La intersecția a două axe de simetrie se găsește centrul de greutate.*
- *Ariile și momentele statice ale unor goluri sunt considerate negative.*

- *Momentul static al secțiunii față de o axă care trece prin centrul de greutate al secțiunii este nul.*
- *Sistemul de axe care are originea în centrul de greutate al secțiunii transversale se numește **sistem de axe central**, iar axele sunt **axe centrale***

Pentru suprafața plană din *figura 1.3* au fost definite: *momentele de inerție axiale, momentul de inerție centrifugal, momentul de inerție polar.*

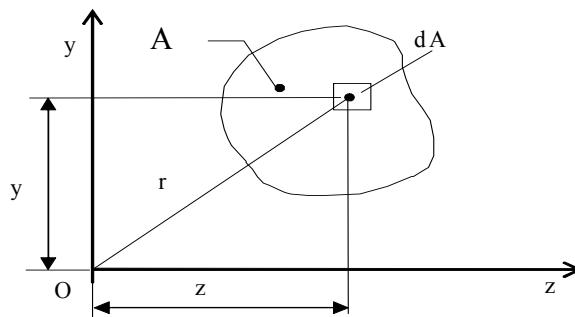


Figura 1.3.

Momentele de inerție axiale ale unei figuri, față de axele **Oz** și respectiv **Oy**, sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_A y^2 dA \\
 I_y &= \int_A z^2 dA
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Momentul de inerție centrifugal se determină cu relația:

$$I_{zy} = \int_A z y dA
 \tag{1.8}$$

Momentul de inerție polar se determină cu relația:

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (1.9)$$

Dacă se aplică teorema lui Pitagora pentru unul din triunghiurile formate în figura 1.3 rezultă $r^2 = z^2 + y^2$ și înlocuind în relația (1.9) se obține:

$$I_p = I_z + I_y \quad (1.10)$$

De reținut:

- Momentele de inerție axiale și polare sunt întotdeauna pozitive.
- Momentul de inerție centrifugal poate fi pozitiv, nul sau negativ.
- Unitatea de măsură pentru toate momentele de inerție este $[mm^4]$.
- Momentele de inerție ale golurilor se consideră negative.
- Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale față de două axe perpendiculare oarecare care trec prin polul considerat.
- Axele în raport cu care $I_{zy} = 0$ se numesc **axe principale de inerție**. Față de aceste axe, momentele de inerție axiale I_z și I_y au valori **maxime**, respectiv **minime**.
- Axele de simetrie sunt și axe principale.
- Axele principale care trec prin centrul de greutate al figurii se numesc **axe principale centrale**.

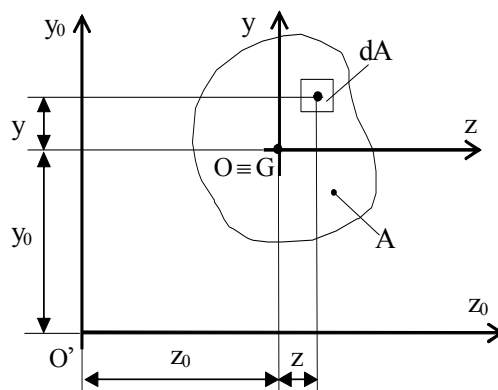


Figura 1.4.

Pentru o suprafață plană de arie A raportată la un sistem de referință central, față de care momentele de inerție ale suprafeței sunt I_z , I_y și I_{zy} (figura 1.4) s-au determinat momentele de inerție ale suprafeței față de un alt sistem de referință, având axele paralele cu primul. Aceste momente sunt date de *relațiile* (1.11) numite **relațiile lui Steiner**.

$$\begin{cases} I_{z_o} = I_z + y_o^2 A \\ I_{y_o} = I_y + z_o^2 A \\ I_{z_o y_o} = I_{zy} + z_o y_o A \end{cases} \quad (1.11)$$

unde: coordonatele z_o și y_o sunt luate cu semnul lor și reprezintă coordonatele originii sistemului vechi în noul sistem de coordonate.

Relațiile (1.11) indică faptul că: momentul de inerție axial față de o axă paralelă cu o axa centrală este egal cu momentul de inerție față de axa centrală plus produsul dintre aria secțiunii și pătratul distanței dintre cele două axe, iar momentul de inerție centrifugal este egal cu momentul de inerție centrifugal față de axele centrale plus produsul distanțelor (dintre cele două axe) cu aria.

Pentru momentul de inerție polar s-a stabilit următoarea expresie:

$$I_{p_o} = I_p + (z_o^2 + y_o^2) A \quad (1.12)$$

Dacă se cunosc momentele de inerție în raport cu niște axe oarecare, atunci pentru axele care trec prin centrul de greutate al figurii, paralele cu axele date, momentele de inerție sunt date de relațiile:

$$\begin{cases} I_z = I_{z_o} - y_o^2 A \\ I_y = I_{y_o} - z_o^2 A \\ I_{zy} = I_{z_o y_o} - z_o y_o A \end{cases} \quad (1.13)$$

De reținut:

- *Relațiile (1.11) se folosesc frecvent pentru calculul momentelor de inerție ale figurilor compuse.*

- *Momentele de inerție în raport cu axele centrale au cea mai mică valoare în comparație cu momentele de inerție pentru oricare alte axe paralele cu primele.*

Pentru o suprafață plană de arie A raportată la un sistem de referință central, față de care momentele de inerție ale suprafeței sunt I_z , I_y și I_{zy} (figura 1.5) s-au determinat momentele de inerție ale suprafeței față de un alt sistem de referință rotit cu unghiul α față de primul.

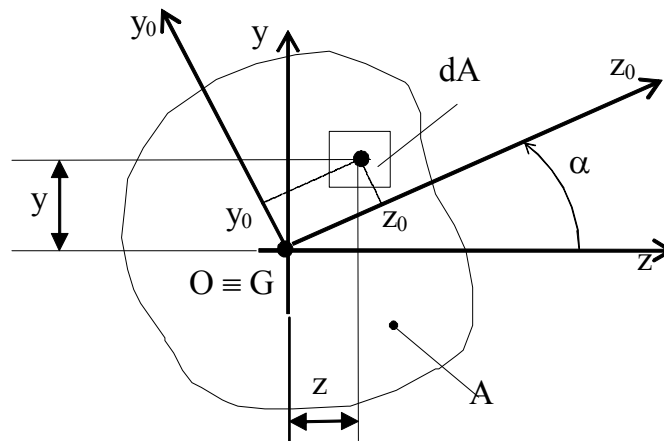


Figura 1.5.

Față de sistemul de axe rotit momentele de inerție sunt date de următoarele expresii:

$$\begin{cases} I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \\ I_{y_0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \\ I_{z_0 y_0} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (1.14)$$

Dacă se adună primele două relații (1.14) rezultă:

$$I_{z_0} + I_{y_0} = I_z + I_y = I_p = \text{constant} \quad (1.15)$$

Valorile extreme (maxime și minime) ale momentelor, numite **momente de inerție principale** se notează cu I_1 și I_2 și se determină cu relația:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{4}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (1.16)$$

Pentru $I_1 = I_{max}$ se consideră semnul (+), iar pentru $I_2 = I_{min}$ semnul (-).

Direcțiile principale (direcțiile axelor principale) sunt date de ecuația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (1.17)$$

Valorile extreme ale momentului de inerție centrifugal I_{zy} corespund unui sistem de axe care fac un unghi de 45° față de axele principale și se calculează cu relația:

$$I_{zy1,2} = \pm \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (1.18)$$

De reținut:

- *Suma momentelor de inerție axiale în raport cu orice pereche de axe ortogonale care trec printr-un pol dat este constantă și egală cu momentul de inerție polar indiferent de poziția pe care aceste axe o ocupă prin rotirea în jurul originii.*
- *Axele de simetrie ale unei figuri sunt axe principale de inerție.*
- *Axele față de care momentele de inerție axiale au valori extreme se numesc axe principale de inerție și se notează cu **1** și **2**.*
- *Direcțiile principale sunt ortogonale.*
- *Pentru $I_{zy} < 0$ axa principală **1** (față de care momentul de inerție este maxim) trece prin primul cadran, iar pentru $I_{zy} > 0$ prin cadranul al doilea.*
- *Pentru secțiunile cu o singură axă de simetrie aceasta este axă principală, iar a doua este perpendiculara pe aceasta prin centru de greutate.*

- Din punct de vedere practic un interes deosebit prezintă **momentele de inerție centrale principale** (momente calculate în raport cu axele principale care trec prin centrul de greutate al secțiunii).

Modulele de rezistență axiale W_z și W_y au fost definite de relațiile:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad (1.19)$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$$

unde: y_{max} = distanța de la axa Oz la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii;
 z_{max} = distanța de la axa Oy la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii.

Modul de rezistență polar s-a definit ca raport între momentul de inerție polar și distanța de la pol până la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii:

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}} \quad (1.20)$$

De reținut:

- **Modulele de rezistență se măsoară în $[mm^3]$.**

Razele de inerție sau **de girație** ale unei figuri, în raport cu un sistem de axe zOy sunt date de expresiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (1.21)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Pentru axele de inerție principale centrale razele de inerție principale sunt:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad (1.22)$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Aceste raze de rotație sunt semiaxele elipsei principale centrale de inerție a figurii a cărei ecuație este:

$$\frac{z^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} = 1 \quad (1.23)$$

De reținut:

- Unitatea de măsură pentru razele de inerție este cea de lungime [mm].

Pentru câteva **secțiuni simple** caracteristicile geometrice au următoarele expresii (ele au fost determinate în prima parte a cursului prin integrarea directă a relațiilor de definiție):

- secțiunea dreptunghiulară de înălțime **h** și bază **b**:

$$A = bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6} \quad (1.24)$$

- secțiunea pătrată de latură **a** ($b=h$):

$$A = a^2; \quad I_z = I_y = \frac{a^4}{12}; \quad W_z = W_y = \frac{a^3}{6} \quad (1.25)$$

- secțiunea circulară de diametru **d**:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad (1.26)$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

- secțiunea coroană circulară cu diametrul exterior **D** și cel interior **d**:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2); \quad I_z = I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4); \quad I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4); \quad W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4) \quad (1.27)$$

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi(D^2 - d^2)}} = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$$

- secțiunea *triunghi oarecare de lățime b și înălțime h* (în raport cu sistemul de axe central):

$$A = \frac{bh}{2}; \quad I_z = \frac{bh^3}{36}; \quad W_z = \frac{bh^2}{24} \quad (1.28)$$

- secțiunea *poligon regulat cu n laturi de lungime a* :

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{12\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2); \quad I_p = \frac{\pi R^4}{6\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2) \quad (1.29)$$

$$\text{unde: } \alpha = \frac{2\pi}{n}; \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

De reținut:

- În afară de secțiunile simple, ale căror caracteristicile geometrice sunt calculate, în practica inginerescă se folosesc profile standardizate (profil I, U, T cornier cu aripi egale și neegale) ale căror caracteristici geometrice se găsesc tabelate.

Pentru determinarea **caracteristicilor geometrice ale unei secțiuni compuse**, care poate fi descompusă în figuri simple, se vor parcurge următoarele etape:

1. Se descompune secțiunea compusă în figuri simple.
2. Se alege unui sistem de referință arbitrar.
3. Se determină poziția centrului de greutate al secțiunii, cu relația (1.6).
4. Se determină, utilizând relațiile (1.13), momentele de inerție axiale I_z , I_y și cel centrifugal I_{zy} față de sistemul de axe central (un sistem de axe cu originea în centrul de greutate al secțiunii și cu axele paralele cu cele ale sistemului inițial).
5. Se determină, cu relația (1.17) unghiul de rotire al axelor principale.
6. Cu relația (1.16) se determină momentele de inerție principale.
7. Cu relațiile (1.19) și (1.22) se determină modulele de rezistență axiale și respectiv razele de inerție centrale.

De reținut:

- *Modulele de inerție ale unei secțiuni compuse nu se pot calcula prin sumarea algebrică a modulelor de rezistență ale figurilor componente.*
- *Etapele menționate se aplică pentru cazul general. În cazul existenței axelor de simetrie calculul se simplifică.*

1.2. Elemente de statică

Momentul unei forțe se poate calcula față de un pol și în raport cu o axă.

Modulul momentului unei forțe \vec{F} față de un punct O (față de un pol) este egal cu **produsul dintre modulul forței și brațul acesteia**:

$$M = F \cdot b \quad (1.30)$$

Brațul forței b reprezintă *mărimea perpendicularei dusă din pol pe suportul forței (figura 1.9)*.

Momentul forței față de polul O mai poate fi exprimat și ca produs vectorial dintre vectorul de poziție al forței (care unește polul O cu punctul de aplicație al forței) și forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.31)$$

Momentul este perpendicular pe planul format de vectorii \vec{r} și \vec{F} , iar sensul momentului este dat de regula burghiului drept (burghiul este rotit în sensul de suprapunere a lui \vec{r} peste \vec{F} pe drumul cel mai scurt), iar mărimea momentului se determină cu *relația (1.47)*.

Modulul momentului unei forțe în raport cu o axă este egal cu modulul momentului proiecției forței pe planul normal la axă, calculat în raport cu punctul în care axa înțeapă planul.

Cuplul (figura 1.9) este format din două forțe paralele, egale și de sensuri contrare. Acesta produce numai rotație și se reprezintă printr-un vector liber, perpendicular pe planul cuplului.

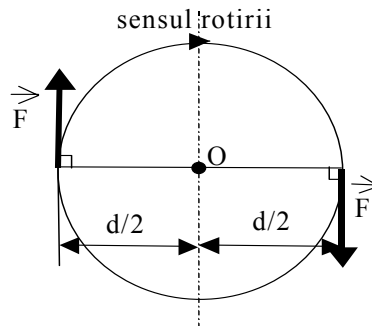


Figura 1.9.

Modulul momentului care caracterizează un cuplu se calculează cu relația:

$$M = F \cdot d \quad (1.32)$$

Reducerea unei forțe în raport cu un punct al corpului este prezentată în figura 1.10. Se pune problema reducerii în punctul O a forței \vec{F} , care acționează în B . Reducerea se face prin adăugarea și scăderea forței \vec{F} în punctul O . Astfel forța \vec{F} care acționează în B poate fi înlocuită cu o forță \vec{F} care acționează în O și momentul \vec{M} care caracterizează cuplul produs de cele două forțe barate. De obicei O este ales în centrul de greutate al secțiunii.

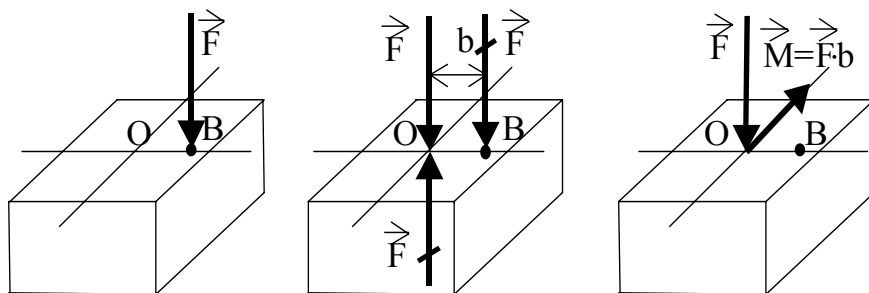


Figura 1.10.

Pentru ca un corp sau un sistem de corpuri, aflat sub acțiunea forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, să fie în echilibru, este *necesar și suficient* ca forța rezultantă și momentul rezultat să fie nule ($\vec{R} = \mathbf{0}$; $\vec{M} = \mathbf{0}$). Prin urmare trebuie satisfăcute condițiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_{i(ox)} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{i(oy)} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{i(oz)} = 0 \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Relațiile (1.33) exprimă faptul că sumele algebrice ale proiecțiilor tuturor forțelor și ale momentelor față de cele trei axe trebuie să fie nule.

Dacă forțele sunt *coplanare* (sunt situate în planul \mathbf{xOy}), *relațiile (1.33)* se reduc la următoarele **trei ecuații de echilibru independente**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{i(o)} = 0 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

unde: X_i - proiecția forței \vec{F}_i pe axa \mathbf{Ox} ;

Y_i - proiecția forței \vec{F}_i pe axa \mathbf{Oy} ;

$M_{i(o)}$ - momentul forței \vec{F}_i față de \mathbf{O} în care axa \mathbf{Oz} înțeapă planul \mathbf{xOy} .

Observație:

- În unele situații primele două ecuații din relațiile (1.34) pot fi înlocuite cu ecuații de momente, obținându-se un sistem de trei ecuații, format astfel:

- o ecuație de proiecție a forțelor și două de moment, cu precizarea că proiecția forțelor nu se face pe o direcție normală la dreapta determinată de cele două puncte față de care se scriu ecuațiile de momente;
 - trei ecuații de momente, scrise față de trei puncte care nu sunt coliniare.
- Dacă nu se respectă aceste condiții ecuațiile scrise nu sunt toate independente, unele fiind combinații liniare ale celorlalte.

1.3. Sarcini

Forțele și momentele care solicită corpul se numesc **sarcini**. În **Rezistența materialelor** se consideră forțele și momentele concentrate ca fiind vectori legați (nu este permisă deplasarea punctului de aplicație pe dreapta suport) și se operează mai mult cu modulul acestora. După cum s-a prezentat în prima parte a cursului *sarcinile* se pot clasifica astfel:

1) după mărimea suprafeței pe care acționează:

- *sarcini concentrate* (forțe și momente care acționează pe suprafețe ale corpurilor care pot fi considerate mici în raport cu dimensiunile corpului);
 - *sarcini distribuite* (forțe și momente care acționează pe suprafețe mari).
- Sarcinile pot fi uniform distribuite, liniar distribuite, sarcini distribuite după legi parabolice, exponențiale, etc.

De reținut:

- *Intensitatea forțelor distribuite în plan se exprimă în $[N/mm]$ sau în $[N/mm^2]$ (în cazul forțelor provenite din presiune, a greutateii unei învelitori sau a unei plăci).*
- *Intensitatea forței rezultante concentrate (măsurată în $[N]$), static echivalentă cu cea distribuită, este numeric egală cu aria suprafeței, cuprinsă între curba de variație a forței distribuite și grindă. Punctul*

de aplicație al forței rezultante coincide cu abscisa centrului de greutate al suprafeței respective.

- Înlocuirea forțelor distribuite cu forțe concentrate nu este posibilă decât într-un număr limitat de situații (de ex. calculul reacțiilor) când corpul încă este considerat rigid. Ulterior înlocuirea nu mai este admisă, deoarece ar modifica modul de deformare al corpului.
- Pentru o bară de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, greutatea este o forță uniform distribuită. Intensitatea acestei forțe distribuite poate fi aflată împărțind greutatea barei la lungimea acesteia $[N/mm]$ și reprezintă deci greutatea unității de lungime. Greutatea este înlocuită cu o forță rezultantă concentrată, static echivalentă, care acționează în centrul de greutate al corpului.

2) după variația lor în timp:

- sarcini statice (figura 1.11a). Intensitatea sarcinii crește într-un timp relativ îndelungat și rămâne constantă după ce a atins intensitatea maximă;

- sarcini dinamice, care pot fi periodice sau aperiodice (figura 1.11c) sau sarcinile care se aplică cu viteză mare (intensitatea sarcinii variază de la zero la o valoare maximă într-un timp foarte scurt (figura 1.11b)).

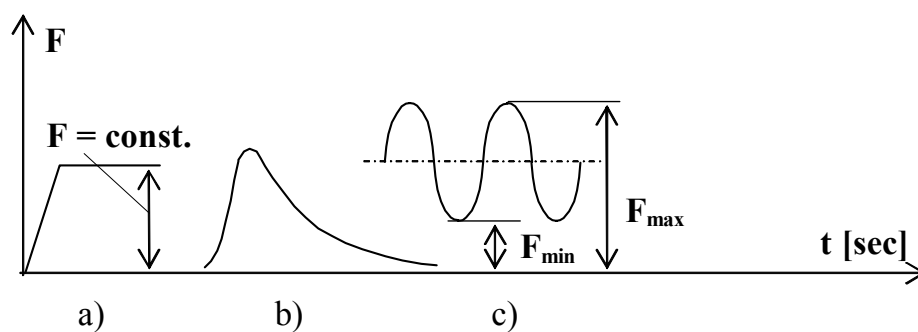


Figura 1.11

1.4. Reazeme și reacțiuni

Tipurile de reazeme, reprezentările schematizate și reacțiunile care apar în fiecare tip de reazem sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

<i>Denumirea reazemului</i>	<i>Nr de grade de libertate suprimate</i>	<i>Reprezentări schematizate</i>
Rezemare simplă	1	
Articulația cilindrică (simplă)	2	
Încastrarea	3	

Reazemele au rolul de a suprima anumite grade de libertate ale corpului. Acest lucru se realizează prin apariția în reazem a unor forțe (care împiedică una sau două translații) și/sau momente (care împiedică rotirea). Forțele și momentele care apar în reazeme se numesc **reacțiuni** (împreună cu sarcinile care solicită corpul reacțiunile formează un sistem în echilibru).

De reținut:

1) Calculul analitic al reacțiunilor se efectuează cu respectarea următoarelor etape:

- schematizarea formei corpului;
- schematizarea modului de rezemare (stabilirea tipului de reazem și figurarea reacțiunilor corespunzătoare);
- schematizarea modului de încărcare (stabilirea forțelor și a cuplurilor);
- scrierea ecuațiilor de echilibru pentru sistemul de sarcini coplanare (relațiile (1. 50)) cu alegerea arbitrară a convențiilor de semne;

- rezolvarea sistemului de ecuații, determinarea și verificarea reacțiunilor.

2) În plan pot fi scrise numai trei ecuații independente. De obicei, acestea sunt: două ecuații de proiecții a forțelor și o ecuație de momente (relațiile (1. 51)).

3) Dacă numărul reacțiunilor este cel mult egal cu numărul ecuațiilor de echilibru, acestea pot fi calculate din ecuațiile staticii. Asemenea sisteme se numesc static determinate. Condiția pentru ca un sistem să fie static determinat poate fi scrisă:

$$NN \leq NE \quad (1.35)$$

unde: NN = numărul necunoscutelor (reacțiuni sau uneori eforturi);

NE = numărul ecuațiilor staticii care nu sunt identic nule.

4) Dacă numărul necunoscutelor (reacțiunilor) depășește pe cel al ecuațiilor de echilibru sistemul este static nedeterminat. La aceste sisteme:

$$NN > NE \quad (1.36)$$

Diferența dintre numărul de necunoscute și numărul ecuațiilor de echilibru poartă numele de grad (ordin) de nedeterminare. În acest caz reacțiunile se determină prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile de echilibru completate cu un număr de ecuații scrise în urma studierii deformațiilor corpului, egal cu gradul de nedeterminare.

1.5. Eforturi

Componentele **eforturilor** \vec{R} și \vec{M}_R după cele trei axe ale un sistem triortogonal de axe *principal central* cu originea în G (centrul de greutate al secțiunii transversale) în care axa Ox coincide cu axa geometrică a corpului sunt indicate în figura 1.12:

- componenta N , normală la secțiune, se numește **forță axială** și apare în cazul solicitărilor axiale;

- componentele T_y și T_z sunt în *planul secțiunii* și se numesc **forțe tăietoare**;

- componenta M_x este *normală* pe secțiune, apare la torsiunea (răsucirea) barelor și se numește **moment de torsiune**;

- componentele M_z și M_y sunt în *planul secțiunii*, se numesc **momente de încovoiere (momente încovoietoare)** și apar la solicitarea de încovoiere.

Cele șase componente ale eforturilor se determină astfel (în plan se există cel mult trei componente nenule):

- **forța axială N** este egală cu suma algebrică a tuturor proiecțiilor forțelor exterioare pe axa Ox (axa barei);

- **forțele tăietoare T_y și T_z** sunt egale cu suma algebrică a proiecțiilor tuturor forțelor exterioare pe axa Oy și respectiv Oz ;

- **momentul de torsiune M_x** este egal cu suma algebrică a tuturor cuplurilor exterioare dirijate după axa Ox ;

- **momentele încovoietoare M_z și M_y** sunt egale cu suma algebrică a tuturor momentelor exterioare față de axa Oy și respectiv Oz .

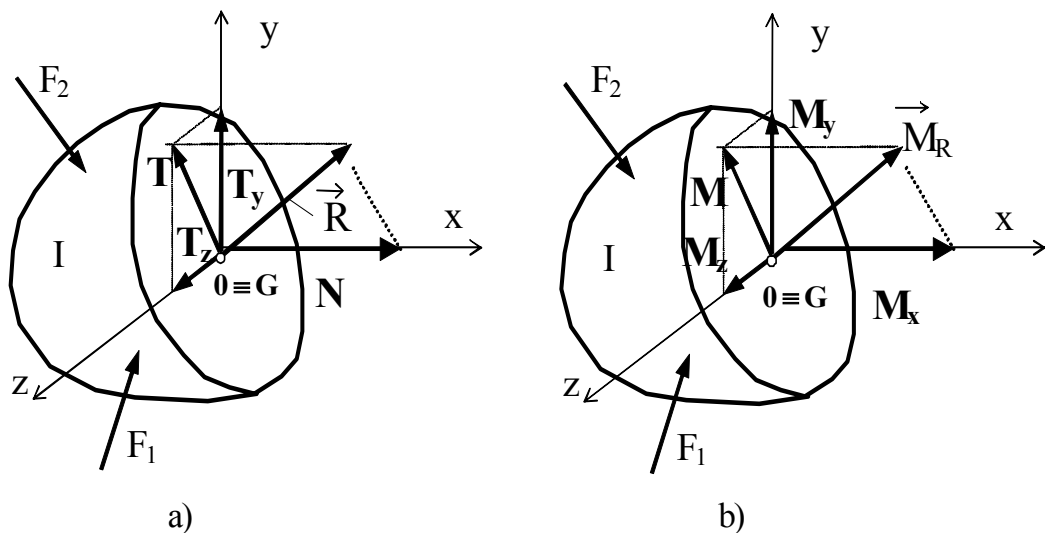


Figura 1.12.

Așa cum s-a studiat în cursul de *Rezistența materialelor I*, utilizând definițiile de mai sus se pot stabili eforturile în orice secțiune a corpului și se pot trasa curbele lor de variație, numite **diagrame de eforturi**.

1.6. Tensiuni

În cursul de *Rezistența materialelor I* s-a definit **tensiunea medie** pe un element suprafața ΔA , din jurul punctului M , (figura 1.14a) prin următoarea relație (rezultanta $\Delta \vec{R}$ a forțelor de legătură fiind aplicată în centrul de greutate al elementului):

$$\bar{p}_{med\Delta A} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \quad (1.37)$$

iar valoarea **tensiunii** în punctul M prin relația:

$$\bar{p}_M = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA} \quad (1.38)$$

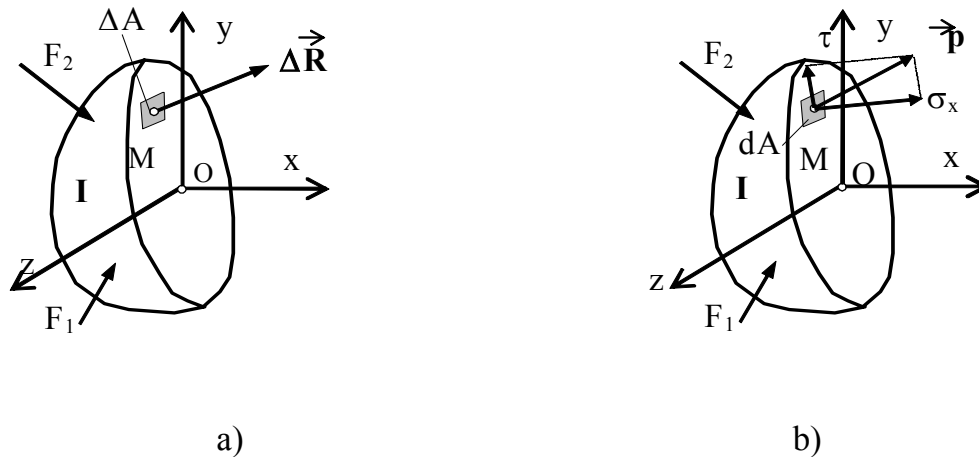


Figura 1.14

De reținut:

- Unitatea de măsură a tensiunii este $[N/mm^2 = MPa]$ și depinde atât de $d\vec{R}$ cât și de orientarea elementului de suprafață dA (tensiunea fiind o mărime tensorială).

Tensiunea poate fi descompusă (figura 1.14b) în două componente:

- pe direcția normalei în componenta σ_x , numită **tensiune normală** (orientată de direcția axei Ox);

- pe planul secțiunii în componenta τ , numită **tensiune tangențială**.

La rândul său, componenta τ poate fi descompusă în planul yOz , (la care Ox este normală) obținându-se componentele τ_{xy} și τ_{xz} (figura 1.15) care sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz .

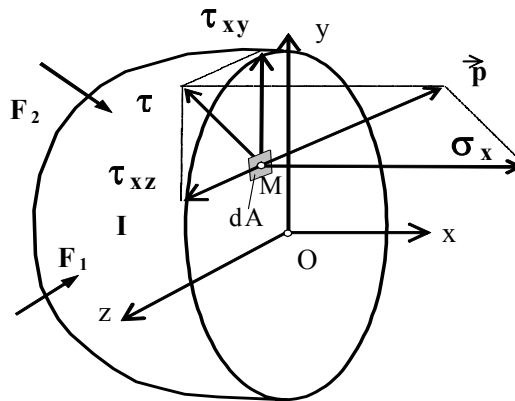


Figura 1.15

Pentru cele două tensiuni tangențiale semnificația indicilor este următoarea: primul indice desemnează axa normală la planul secțiunii (axa Ox) iar al doilea axa cu care tensiunea este paralelă (axele Oy și respectiv Oz).

1.7. Relații între eforturi și tensiuni

În cursul de *Rezistența materialelor I*, s-au demonstrat următoarele relațiile între eforturi și tensiuni numite **ecuații de echivalență**:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (1.39)$$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (1.40)$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (1.41)$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA = \int_A \tau r dA \quad (1.42)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (1.43)$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \quad (1.44)$$

unde: N , T_y , T_z respectiv M_x , M_y , M_z reprezintă cele șase eforturi;

- σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} cele trei tensiunile într-un punct M al secțiunii (figurile 1.16a și 1.16b), situat la distanțele z , y față de cele două axe respectiv r față de centrul de greutate.

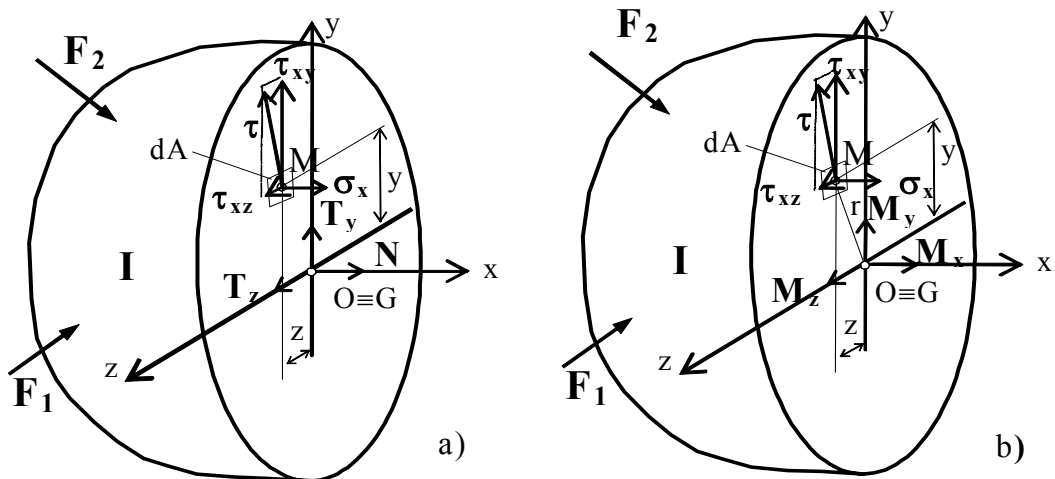


Figura 1.16

De reținut:

- Deoarece nu conțin caracteristici fizice de material ecuații de echivalență sunt valabile pentru orice corp solid.

1.8. Deplasări și deformații

În cursul de *Rezistența materialelor I*, s-au definit următoarele noțiuni:

- **deplasarea** reprezintă modificarea poziției unui punct sau a unei secțiuni a corpului. Se studiază deplasări elastice sau elasto-plastice produse ca urmare a deformării corpului, atunci când acesta își modifică dimensiunile și forma geometrică inițială;

- **deformația** reprezintă modificarea distanței dintre puncte sau secțiuni, sau a unghiurilor dintre două segmente duse printr-un punct. Modificările lungimilor segmentelor se numesc **deformații liniare** iar modificările unghiurilor **deformații unghiulare** sau **lunecări**.

De reținut:

- *Deformațiile depind de forma și dimensiunile corpului, de mărimea și modul de aplicare al sarcinilor și de anumite caracteristici mecanice ale materialelor.*
- *Dacă deformațiile dispar după înlăturarea sistemului de sarcini (corpul revine la forma și dimensiunile inițiale), se spune că avem deformații elastice.*
- *Pentru majoritatea materialelor utilizate la realizarea structurilor de rezistență deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor confecționate din aceste materiale. Se face precizarea că, în cele ce urmează ne vom referi la deformații elastice mici.*

1.9. Solicitări simple

În practică se întâlnesc **solicități simple** (atunci când pe secțiunea corpului apare o singură componentă a eforturilor și respectiv a tensiunilor) și **solicități compuse** (atunci când în secțiunea corpului apar simultan cel puțin două componente ale eforturilor și tensiunilor). În cursul de *Rezistența materialelor I*,

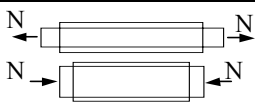
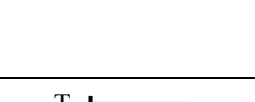

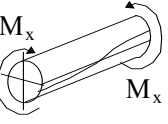
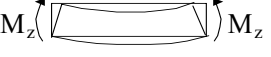
au fost studiate următoarele patru solicitări simple: **solicitările axiale** (*tracțiune* sau *compresiune*), **forfecare**, **torsiune** și **încovoiere** (tabelul 2). Solicitățile compuse vor fi studiate în cursul de *Rezistența materialelor II*.

Se vor prezenta în continuare principalele noțiuni definite și relații demonstrate în cursul de *Rezistența materialelor I*, referitoare la cele patru solicitări simple.

1.9.1. Solicitarea axială (tracțiune - compresiune)

Tracțiunea și compresiunea se numesc **solicitări axiale** deoarece suporturile forțelor sunt dirijate tangent la axa geometrică a barei. La acestea diferă între ele numai semnul eforturilor, tensiunilor și alungirilor specifice: *pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune*.

Tabelul 2

Solicitarea	Schema de solicitare	Efortul nenul	Tensiunea
Tracțiune		$N > 0$	$\sigma > 0$
Compresiune		$N < 0$	$\sigma < 0$
Forfecare (Tăiere)		T_y (sau T_z)	τ
Torsiune (Răsucire)		M_x	τ
Încovoiere		M_z (sau M_y)	σ

În ceea ce privește solicitarea de compresiune a barelor de lungime mare, trebuie făcută precizarea că este posibil să apară fenomenul de *flambaj longitudinal*,

studiat în prima parte a cursului (pierderea stabilității înainte ca tensiunea de compresiune să atingă vreo stare limită).

De reținut:

- În cazul în care suportul forțelor exterioare nu coincide cu axa barei, dar este paralel cu ea, bara va fi supusă, în afara solicitării de întindere sau compresiune și la încovoiere. Această situație constituie **solicitarea axială excentrică** care va fi studiată în cadrul solicitărilor compuse.

Pentru o bară dreaptă confecționată dintr-un material omogen și izotrop, cu secțiunea transversală constantă solicitată axial s-a stabilit că tensiunea normală sunt constantă pe secțiunea transversală ($\sigma_x = constant$) și este dată de relația:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (1.45)$$

unde: σ_x – tensiunea normală într-o secțiune curentă a barei;

N - forța axială în secțiunea respectivă, care se determină din diagrama de forțe axiale;

A – aria secțiunii transversale a barei.

Calculul de dimensionare se face la proiectarea pieselor și permite stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale a piesei solicitate axial. Dimensionarea prin *metoda tensiunilor admisibile* presupune că tensiunile maxime din piesă (luate în modul) nu vor depăși pe cele admisibile conform relației:

$$\sigma_{x\max} \leq \sigma_a \quad (1.46)$$

Ținând cont și de *relația (1.64)* formula de dimensionare este:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} \quad (1.47)$$

Calculul de verificare se face pentru piese la care se cunosc dimensiunile secțiunii transversale. De obicei, acest calcul constă în verificarea inegalității din relația (1.65). Dacă inegalitatea se verifică, piesa rezistă la sarcinile propuse.

O altă variantă a acestui calcul presupune determinarea sarcinii maxime pe care o poate suporta piesa, numită *sarcină capabilă*. Calculul se face cu o relație de forma:

$$N_{cap} = A\sigma_a \quad (1.48)$$

În cazul barelor sau porțiunilor de bară de secțiune constantă, supuse la eforturi axiale constante (tensiuni constante), **deformația** se determină cu relația:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (1.49)$$

unde: l - lungimea barei;

E - modulul de elasticitate longitudinală.

Se observă că deformația este cu atât mai mică cu cât produsul dintre modulul de elasticitate E al materialului și aria secțiunii transversale A este mai mic. Ca urmare acest produs se numește *modul de rigiditate la întindere-compresiune* a secțiunii transversale.

În cazul în care tensiunile variază pe lungimea barei alungirea totală a barei se calculează cu relația:

$$\Delta l = \int \varepsilon_x(x) dx = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (1.50)$$

De reținut:

- În relația (1.50) forța axială și aria pot fi funcții de x .
- Relațiile (1.49) și (1.50) pot fi folosite pentru calculul deplasării relative, adică deplasarea unei secțiuni a barei față de altă secțiune, respectiv a deplasării unui punct de pe axa barei.
- În cazul barelor cu mai multe regiuni deplasările absolute ale secțiunilor acestor bare (față de un reper fix) se calculează prin însumarea algebrică

a deplasărilor porțiunilor de bară (pe fiecare regiune, deplasările au semnul tensiunilor).

Energia specifică de deformație pentru cazul solicitărilor axiale centrice, pentru o porțiune de lungime l a barei, se calculează cu relația:

$$U = \int \frac{N^2(x)}{2A(x)E} dx \quad (1.51)$$

Dacă pentru porțiunea studiată forța axială și aria sunt constante (nu depind de x), expresia energiei din *relația (1.51)* devine:

$$U = \frac{N^2 l}{2AE} \quad (1.52)$$

Dacă bara are mai multe regiuni, energia totală acumulată va fi suma algebrică a energiilor corespunzătoare de pe cele n regiuni:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (1.53)$$

1.9.2. Solicitarea de forfecare

Atunci când în secțiunea transversală a unui corp acționează numai o forță tăietoare (T_z sau T_y), acesta este solicitat la **forfecare (tăiere) pură**. În secțiunea barei apar în acest caz numai **tensiuni tangențiale**. În practică este însă extrem de dificil să se realizeze o solicitare de forfecare pură, de cele mai multe ori forfecarea fiind însoțită de încovoiere.

De reținut:

- În cursul de Rezistența materialelor I, s-au studiat situațiile în care tensiunile normale, provenite din încovoiere, sunt neglijabile în raport cu cele tangențiale, produse de forfecare și în care calculul convențional la forfecare dă rezultate satisfăcătoare.

Forfecarea unei bare este produsă de către două forțe *coliniare, normale* pe axa acesteia, *egale și de sens contrar*, așa cum este prezentat în figura 1.17.

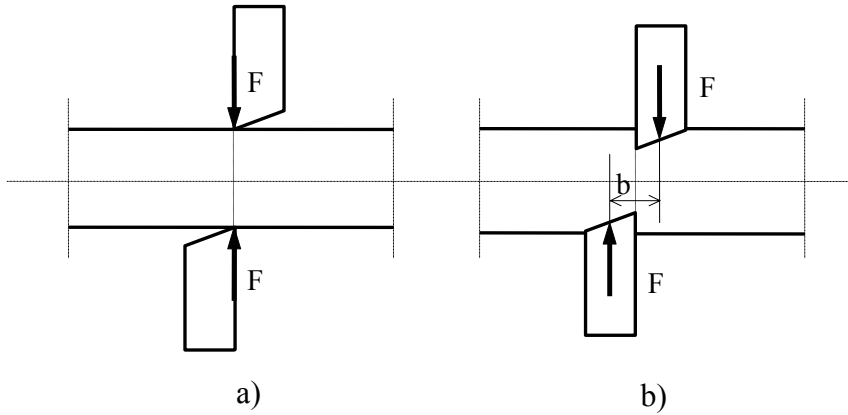


Figura 1.17

Pentru calculul convențional al barelor la forfecare s-a presupus că tensiunile tangențiale sunt uniform distribuite pe secțiune. Această ipoteză se verifică în practică numai pentru forfecarea pieselor de grosime mică (table, șuruburi mici, nituri, știfturi, pene, etc.). În aceste condiții tensiunile tangențiale se calculează cu relația:

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \quad (1.54)$$

Observație:

- *Relația (1.54) rămâne valabilă și pentru forfecarea pe direcția axei Oz, dacă se înlocuiește indicele y cu z.*

Relația (1.54) permite rezolvarea următoarele trei categorii de probleme:

- **calculul de dimensionare** (se determină aria secțiunii transversale):

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a} \quad (1.55)$$

- **calculul de verificare** (se determină tensiunea tangențială maximă care se compară cu tensiunea admisibilă sau cu cea de rupere). Bara rezistă dacă:

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A} \leq \tau_a \quad (1.56)$$

- **calculul forței tăietoare capabile** sau a celei **de rupere** prin forfecare:

$$T_{cap} = A\tau_a \quad \text{respectiv} \quad T_r = A\tau_r \quad (1.57)$$

Expresia energiei de deformație înmagazinată de către bara supusă la forfecare se poate fi determina cu relația:

$$U = \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx \quad (1.58)$$

Pentru $T = \text{const.}$ se obține:

$$U = \frac{T^2 l}{2GA} \quad (1.59)$$

unde: l - este lungimea porțiunii de bară deformată;

G – modulul de elasticitate transversală;

A – aria secțiunii transversale.

GA – modulul de rigiditate la forfecare a secțiunii transversale.

De reținut:

- *Deoarece volumul de material deformat este mic energia potențială de deformație înmagazinată la forfecare va fi mică, comparativ cu alte solicitări și va fi uzual neglijată.*

1.9.3. Solicitarea de torsiune

Așa cum s-a precizat în *cursul de Rezistența materialelor I*, o bară dreaptă este solicitată la torsiune dacă efortul din secțiunea transversală este un moment M_x care, în reprezentare vectorială, este dirijat după axa Ox (aleasă convențional pe direcția axei barei). Practic are loc deformarea barei sub acțiunea unor cupluri

de forțe cuprinse în plane perpendiculare pe axa geometrică a acesteia, iar suporturile forțelor nu intersectează axa. S-au stabilit relațiile necesare efectuării calculelor de rezistență și de rigiditate pentru cazul *barelor drepte de secțiune circulară* supuse *la torsiune (răsucire)*.

Pentru calculul *tensiunii tangențiale* a fost stabilită relația:

$$\tau(r) = \frac{M_x \cdot r}{I_p} \quad (1.60)$$

Relația (1.60) arată că tensiunea tangențială este distribuită liniar pe direcția razei: tensiunea tangențială este nulă în centru de greutate al barei (la $r = 0$), variază liniar cu raza r și este maximă pe conturul secțiunii, așa cum este reprezentat în *figura 1.18*.

Pe conturul barei, pentru $r = R$, se obține:

$$\tau(R) = \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{M_x}{\frac{I_p}{R}} \quad (1.61)$$

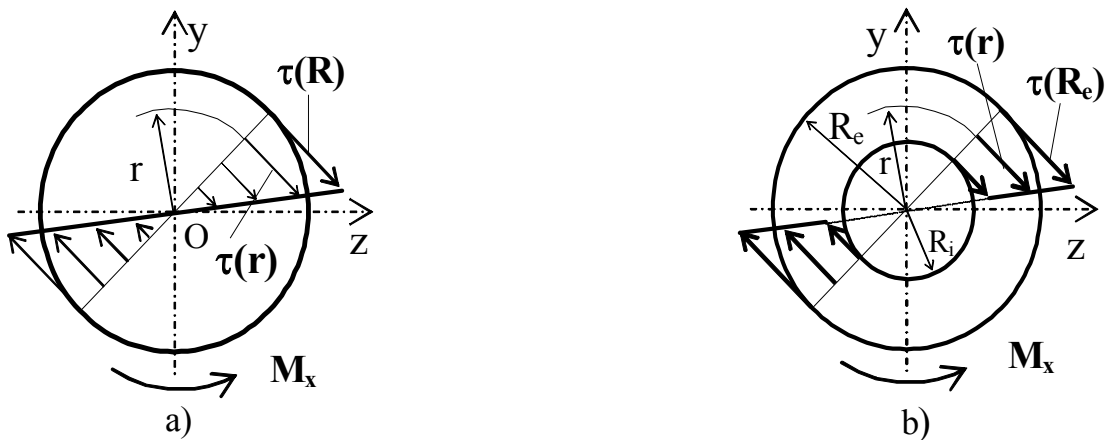


Figura 1.18.

Tensiunea tangențială maximă se calculează cu relația:

$$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{M_x}{W_p} \quad (1.62)$$

unde: I_p - momentul de inerție polar;

W_p - modulul de rezistență polar.

Relația (1.62) poate fi folosită pentru **calculul din condiția de rezistență** (*dimensionare sau verificare*), limitând tensiunile din bară. Ea se mai numește **criteriul de rezistență**. Astfel:

- **pentru dimensionare** se calculează diametrul barei impunând condiția ca tensiunea tangențială maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:

$$\tau_{\max} \leq \tau_a \quad (1.63)$$

- în **calculul de verificare** toate mărimile sunt cunoscute și se verifică doar dacă este satisfăcută *inegalitatea (1.63)*.

De reținut:

- În relația (1.63) $\tau_{\max} = |\tau(R)|$ reprezintă tensiunea tangențială în secțiunea (sau regiunea) periculoasă, care se stabilește în urma trasării diagramelor M_x și $\tau(R)$.

Pentru calculul **deformației unghiulare** la răsucire s-a stabilit relația:

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \quad (1.64)$$

unde: G – modulul de elasticitate transversală.

Se observă ca deformația la răsucire este cu atât mai mică cu cât produsul GI_p este mai mare. Ca urmare acest produs poartă numele de *modul de rigiditate la torsiune* al barei cu secțiune circulară.

Pentru deformații mici s-a determinat unghiul de rotire al secțiunii transversale ca fiind:

$$\phi = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (1.65)$$

Relația (1.64) poate fi folosită pentru **calculul din condiția de rigiditate** (*dimensionare sau verificare*), limitând astfel deformațiile și nu tensiunile. Ea se mai numește **criteriul de rigiditate**. Astfel:

- **pentru dimensionare** se calculează diametrul barei impunând condiția ca rotirea specifică maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:

$$\theta \leq \theta_a \quad (1.66)$$

- în **calculul de verificare** toate mărimile sunt cunoscute și se verifică doar dacă este satisfăcută *inegalitatea* (1.66).

De reținut:

- *Unghiul de rotire specific admisibil se ia funcție de regimul de lucru al arborelui ($\theta_a = (0,15 \dots 0,3)^\circ/m$).*
- *Pentru calculul de dimensionare relațiile (1.63) și (1.66) vor furniza două valori pentru aceeași mărime (diametrul barei). Rezolvarea problemei constă în alegerea valorii celei mai mari din cele două, întrucât aceasta va satisface ambele condiții.*

Expresia *momentului de torsiune cunoscând puterea și turația* a fost stabilită ca fiind:

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{n} \quad (1.67)$$

unde: M_t - momentul de torsiune [Nm];

P – puterea [W];

n - turația [rot/sec].

Dacă turația este în rot/min *relația* (1.86) devine:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = 9,55 \frac{P}{n} \quad (1.68)$$

De reținut:

- *Relația (1.68) poate avea în membrul din dreapta diverși coeficienți, care provin din utilizarea altor unități de măsură.*

Energia potențială de deformație înmagazinată de către o bară dreaptă de secțiune circulară sollicitată la torsiune se calculează cu relația:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (1.69)$$

Dacă $M_x = \text{const.}$ pe toată lungimea barei, *relația (1.88)* devine:

$$U = \frac{M_x^2 l}{2GI_p} \quad (1.70)$$

iar dacă bara are n regiuni, energia totală se determină prin însumarea energiilor corespunzătoare fiecărei regiuni, adică:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (1.71)$$

1.9.4. Solicitarea de încovoiere

Solicitarea de încovoiere poate fi *încovoiere pură* și *încovoiere simplă*.

Prin *încovoiere pură* se înțelege deformarea unei grinzi produsă de un sistem de forțe static echivalente care produc în secțiunea transversală un moment încovoiător, la cărui vector este dirijat după una din axele principale ale secțiunii transversale. În cazul solicitării de *încovoiere simplă* în secțiunea transversală a grinzii apare pe lângă un moment încovoiător și o forță tăietoare.

De reținut:

- La încovoiere, axa Oy se consideră pozitivă în jos datorită faptului că majoritatea forțelor exterioare (sarcini) provin din greutate și sunt orientate în această direcție.
- Deplasările în sensul axei Oy sunt considerate pozitive.
- În cazul încovoierii pure în secțiunea barei apare numai unul din eforturile M_z sau M_y (prezența simultană a eforturilor M_z și M_y se produce în cazul solicitării compuse la încovoiere oblică, care urmează să fie studiată în cursul de Rezistența materialelor II).

Pentru demonstrarea relației de calcul a *tensiunilor normale* (formula lui Navier) s-a considerat o grindă supusă la încovoiere pură (momentul încovoiător fiind constant pe lungimea grinzii: $M_z(x) = M = \text{const.}$, iar toate celelalte eforturi sunt nule). S-a considerat că materialul grinzii este omogen și izotrop, cu caracteristică liniar-elastică (admite *legea lui Hooke*). În secțiunea grinzii apar numai tensiuni normale σ_x , care se calculează cu relația:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y \quad (1.72)$$

Egalitatea (1.72) poartă numele de *relația lui Navier*.

De reținut:

- Rezultă că sistemul de axe al secțiunii transversale este unul principal central (M_z este orientat după axa Oz , care este și axă principală de inerție).

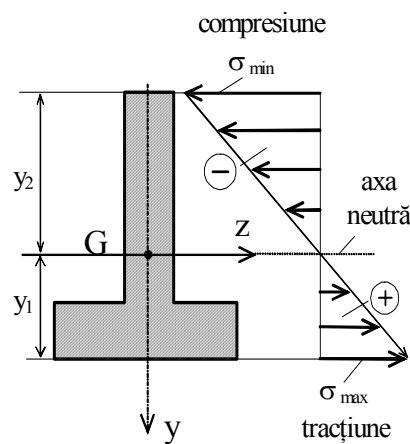


Figura 1.19

Deoarece în cazul încovoierei pure a grinzilor drepte de secțiune constantă efortul M_z este constant, rezultă că tensiunea σ_x este funcție numai de y : este nulă în planul neutru, care conține și axa neutră ($y = 0$) și este maximă sau minimă pe fața inferioară și respectiv superioară a grinzilor (figura 1.19). În calculele de

rezistență interesează tensiunile normale σ_x maxime și minime, care apar în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră.

Dacă Oz este *axă de simetrie*, atunci $y_1 = y_2 = y_{max}$ și modulul de rezistență se poate scrie:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad (1.73)$$

unde: y_{max} - distanța de la axa Oz la fibra cea mai îndepărtată a secțiunii.

Pentru o grindă confecționată dintr-un material tenace ($\sigma_{at} = \sigma_{ac}$), cu secțiuni transversale la care Oz este axă de simetrie, *relația lui Navier* se utilizează sub următoarea formă:

$$\sigma_{x\ max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (1.74)$$

Dacă axa Oz nu este o axă de simetrie atunci:

$$W_{z_1} = \frac{I_z}{y_1}; W_{z_2} = \frac{I_z}{y_2} \quad (1.75)$$

Pentru materiale având limita de curgere la tracțiune σ_{at} diferită de cea la compresiune σ_{ac} , se determină atât tensiunea maximă (la tracțiune) cât și cea minimă (la compresiune). Pentru dimensionare se vor limita atât tensiunile maxime cât și cele minime. Valorile raționale pentru y_1 și y_2 se obțin din condițiile $\sigma_{max} = \sigma_{ab} / \sigma_{min} = \sigma_{ac}$. Cu notațiile (1.75), relația (1.74) poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M_z}{W_{z_1}} \leq \sigma_{at} \\ |\sigma_{min}| &= \left| -\frac{M_z}{W_{z_2}} \right| \leq \sigma_{ac} \end{aligned} \quad (1.76)$$

La *încovoierea simplă*, momentul M_z variază de obicei pe lungimea grinzii. Tensiunea normală va fi o funcție de două variabile și *formula lui Navier* poate fi rescrisă astfel:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M_z(x) \cdot y}{I_z} \quad (1.77)$$

Valoarea momentului $M_z(x)$ se determină din diagrama de moment încovoietor.

Pentru efectuarea calcului de rezistență *tensiunile maxime* în modul nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă:

$$|\sigma_x|_{max} \leq \sigma_a \quad (1.78)$$

De reținut:

- Pentru grinzile de secțiune constantă, tensiunea maximă se va produce în secțiunea în care momentul este maxim ($M_{z,max}$).
- La grinzile cu secțiune variabilă, tensiunea maximă se poate produce și în alte secțiuni.
- Cu toate că formula lui Navier a fost dedusă pentru solicitarea la încovoiere pură, ea este utilizată, în anumite condiții, și pentru calculul tensiunilor normale care apar în grinzile supuse la încovoiere simplă. În acest caz, este necesar ca, pe lângă condițiile menționate mai sus, axa Oy să fie axa de simetrie a secțiunii transversale iar planul xOy să conțină toate forțele tăietoare (încovoiere plană).
- Formula lui Navier dă rezultate acceptabile chiar în cazul grinzilor lungi, care prezintă o variație lentă a secțiunii transversale pe lungimea grinzii. În cazul unor variații bruște a secțiunii apare fenomenul concentrării tensiunilor și tensiunile maxime în modul sunt mai mari decât cele calculate cu această formulă.
- În cazul profilelor laminate, caracteristicile geometrice W_z sunt indicate în tabele.

Pentru **calculul de dimensionare** se determină dimensiunea caracteristică a secțiunii transversale, rezolvând *inecuația* (1.78).

Calculul de verificare se face pentru grinzi la care se cunosc dimensiunile secțiunii transversale. Acest calcul constă în verificarea *inegalității* (1.78). Dacă inegalitatea se verifică, grinda rezistă la sarcinile propuse.

În cazul **încovoierii simple**, în secțiunea transversală a grinzii apar atât tensiuni normale (care vor fi determinate tot cu *formula lui Navier*, în condițiile prezentate mai sus) cât și tensiuni tangențiale. Relația pentru calculul tensiunilor tangențiale este:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \quad (1.79)$$

unde: $T_y(x)$ - forța tăietoare din secțiunea x (se ia din diagrama de forțe tăietoare);

$S_z(y)$ - momentul static al suprafeței aflată deasupra sau sub secțiunea y , față de axa Oz (care trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale);

$b(y)$ - lățimea fibrei în secțiunea în care se calculează tensiunea tangențială;

I_z - momentul de inerție al întregii secțiuni a grinzii, față de axa Oz .

Relația (1.98) se numește **formula lui Juravski**.

De reținut:

- La grinzile lungi ($l/h > 10$) cu secțiune masivă, supuse la încovoiere simplă, distrugerea este provocată de către tensiunile normale. În asemenea cazuri, tensiunile tangențiale pot fi neglijate. Din contră, în cazul grinzilor scurte sau a celor cu secțiune compusă, tensiunile tangențiale pot avea un rol predominant în distrugerea grinzii.

Expresia energiei potențiale de deformație, luând în considerație numai tensiunile normale, este data de relația:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx \quad (1.80)$$

unde: $M_z(x)$ - expresia momentului încovoietor;

l - lungimea regiunii grinzii;

I_z - momentul de inerție axial.

Expresia (1.80) a energiei este valabilă pentru o regiune a grinzii. Energia potențială de deformație a întregii grinzi se obține prin însumarea algebrică a energiilor calculate pe cele n regiuni, adică:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (1.81)$$

În cazul *încovoierii simple*, la *energia potențială de deformație* a grinzii își aduc contribuția atât tensiunile normale cât și cele tangențiale. Energia potențială de deformație datorată tensiunilor tangențiale poate fi estimată cu relația:

$$U = k \int_0^l \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (1.82)$$

unde k reprezintă un coeficientul care depinde de forma secțiunii care este dat de relația:

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)} dA \quad (1.83)$$

Energia potențială de deformație a unei grinzi supuse la încovoiere simplă va fi egală cu suma algebrică a energiilor date de *relațiile* (1.82) și (1.83). Prin urmare:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx + k \int_0^l \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (1.84)$$

De reținut:

- *Contribuția tensiunilor tangențiale la energia potențială de deformație este semnificativă în cazul grinzilor scurte. În cazul grinzilor lungi, cu secțiuni masive această contribuție este mică și de obicei poate fi neglijată.*

Într-o secțiune oarecare *starea deformată* a grinzii este caracterizată de următoarele mărimi geometrice (*figura 1.20*):

- *săgeata* care reprezintă deplasarea v , pe direcția axei Oy , a centrului de greutate a secțiunii transversale;

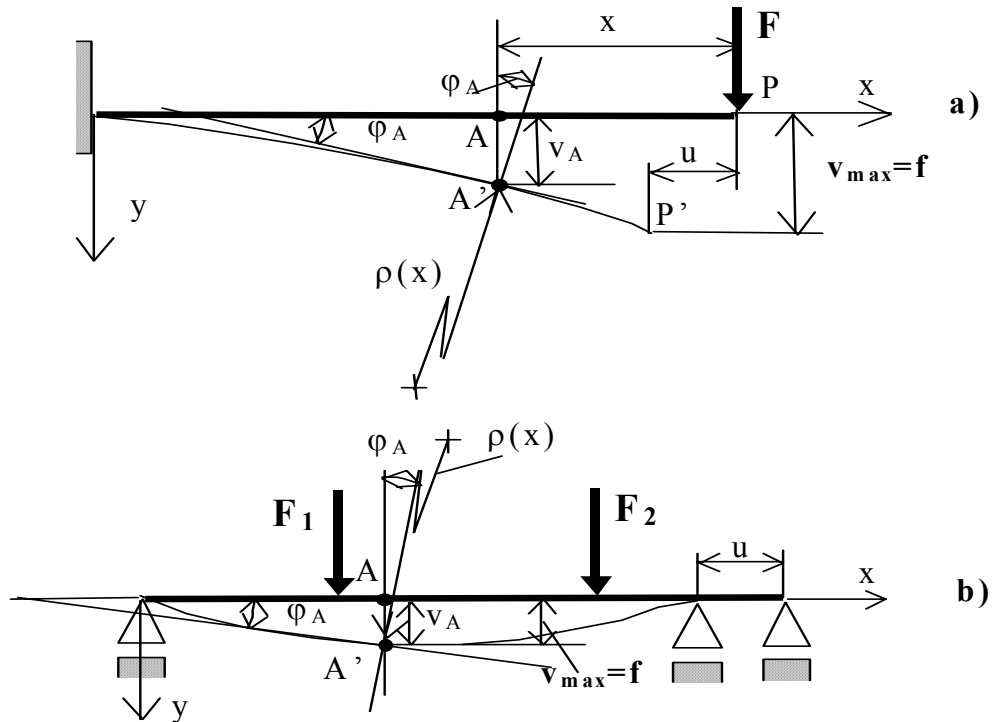


Figura 1.20

- *rotirea* care reprezintă înclinarea φ secțiunii transversale;

- *deplasarea u pe direcția axei Ox* (în cele ce urmează se neglijează deplasările u pe direcția axei Ox). Prin urmare prin calculul deplasărilor la încovoiere se înțelege calculul într-o secțiune oarecare.

Pentru calculul *săgeții* și a *rotirii* în cadrul cursului de *Rezistența materialelor I* au fost prezentate mai multe metode.

1.10. Teoreme și metode energetice

În *Rezistența materialelor* există multe metode pentru determinarea deplasărilor, ridicarea nedeterminărilor, calculul la sollicitări compuse bazate pe legea conservării energiei și deci pe calculul energiei de deformație.

Ipotezele pe baza cărora au fost demonstrate în cursul de *Rezistența materialelor I* principalele teoreme referitoare la energie precum și metodele de calcul care fac apel la aceasta (metode energetice) sunt:

- materialul este solicitat cel mult până la limita de elasticitate (are o comportare perfect elastică), fiind valabilă *legea lui Hooke*;
- forțele exterioare sunt aplicate static (viteza de deformare este foarte mică, deci energia cinetică este practic nulă);
- se neglijează efectele termice, piezoelectrice, emisiile ultrasonore care însoțesc fenomenul deformației corpurilor, energia disipată de aceste fenomene fiind mult mai mică decât cea de deformație elastică;
- se neglijează frecările interioare și frecările în reazeme.

Vom face referire la următoarele teoreme pe care le vom folosi în partea a doua a cursului de rezistență:

1.10.1. Teoremele lui Castigliano

S-a considerat un corp elastic încărcat cu un sistem de forțe concentrate $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n$ în echilibru. S-a presupus că forțele acționează independent una în raport cu cealaltă. Sub acțiunea acestor forțe corpul se deformează și înmagazinează o energie potențială de deformație egală cu:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta_i \quad (1.85)$$

unde: δ_i deplasarea punctului i , pe direcția forței F_i , produsă de sistemul de forțe considerat.

Deoarece deplasările pot fi exprimate funcție de forțe (vezi *relația 1.108*), rezultă că energia potențială de deformație este funcție de forțele care solicită corpul: $U = f(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n)$.

După încărcarea corpului cu sistemul de sarcini, se dă uneia dintre forțe, de exemplu forței F_i , o creștere infinit mică dF_i (*figura 1.21a*). Ca urmare a acestui fapt, energia potențială de deformație va crește cu o cantitate infinit mică dU și energia înmagazinată de către corpul elastic devine:

$$U' = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i \quad (1.86)$$

Se inversează apoi ordinea aplicării forțelor, aplicând mai întâi forța dF_i . Punctul de aplicație i a forței suferă o deplasare foarte mică $d\delta_i$ pe direcția forței dF_i și corpul înmagazinează o energie de deformație elementară:

$$\frac{1}{2} dF_i \cdot d\delta_i \quad (1.87)$$

Apoi, s-a aplicat sistemul de sarcini $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n$. Acesta va deforma corpul care va înmagazina o energie potențială de deformație U dată de relația (1.87). În plus forța dF_i (care era la intensitatea maximă când s-a aplicat sistemul de sarcini) rămâne constantă și se deplasează cu δ_i (figura 1.21b). Energia înmagazinată de către corp, în acest caz, va fi:

$$U'' = U + \frac{1}{2} dF_i \cdot d\delta_i + dF_i \cdot \delta_i \quad (1.88)$$

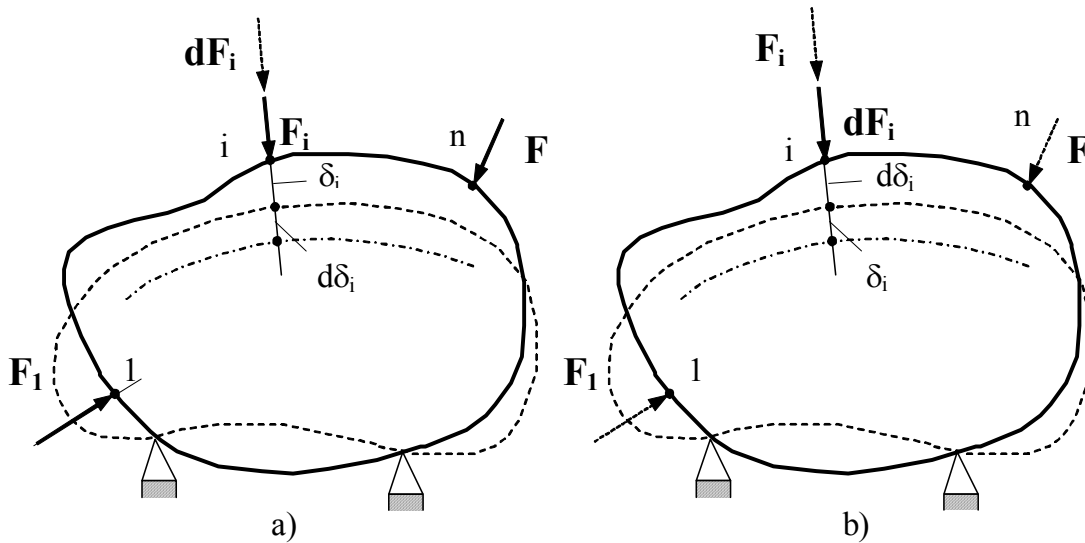


Figura 1.21.

Dar valoarea energiei potențiale de deformație nu depinde de ordinea aplicării forțelor, deci $U' = U''$. Egalând relațiile (1.86) și (1.88) rezultă:

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = U + \frac{1}{2} dF_i \cdot d\delta_i + dF_i \cdot \delta_i \quad (1.89)$$

După efectuarea reducerilor și neglijarea infinitului mic de ordinul al doilea rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i \quad (1.90)$$

Relația (1.90) reprezintă expresia primei teoreme a lui Castigliano, care se enunță astfel: derivata parțială a energiei potențiale de deformație înmagazinată de către un corp elastic, în raport cu o forță concentrată este numeric egală cu deplasarea punctului de aplicație al forței, în sensul și pe direcția forței.

Dacă se consideră corpul elastic încărcat cu un sistem de momente concentrate, s-a demonstrat, în mod similar, următoarea relație, care reprezintă **a doua teoremă a lui Castigliano**:

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \phi_i \quad (1.91)$$

Enunțul teoremei este: *derivata parțială a energiei de deformație, în raport cu un moment concentrat, este numeric egală cu rotirea punctului de aplicație al momentului în sensul de rotire al acestuia.*

De reținut:

- *Deplasarea δ_i dată de relația (1.90) are loc în sensul forței F_i dacă rezultă pozitivă și în sens contrar forței dacă rezultă negativă.*
- *Rotirea ϕ_i dată de relația (1.91) are loc în sensul momentului M_i dacă este pozitivă și în sens contrar dacă este negativă.*
- *Teoremele lui Castigliano pot fi aplicate la calculul sistemelor static nedeterminate.*

1.10.2. Metoda Maxwell-Mohr pentru determinarea derivatelor eforturilor

S-a considerat că expresia momentului încovoietor dintr-o secțiune curentă a unei grinzi, solicitată de un sistem de sarcini concentrate, este scris sub următoarea formă:

$$M_z(x) = M_1 + \dots + M_i + \dots + M_n + F_1 \cdot b_1 + \dots + F_j \cdot b_j + \dots + F_m \cdot b_m \quad (1.92)$$

unde: $M_1 \dots M_n$ - momentele concentrate care soliciță grinda;

$F_1 \dots F_m$ - forțele concentrate care sunt aplicate pe grindă;

$b_1 \dots b_m$ - brațele forțelor.

Dacă se derivează funcția $M_z(x)$ în raport cu F_j și M_i se obține:

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = b_j; \quad \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = 1 \quad (1.93)$$

Aceleași relații se obțin dacă se egalează cu unitatea sarcina în raport cu care se face derivarea și se anulează toate celelalte sarcini. Astfel, dacă se consideră succesiv că $M_i = 1$, respectiv $F_i = 1$ și toate celelalte momente și forțe concentrate se fac zero se obține:

$$M_z(x) = 1 = \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = m(x) \quad (1.94)$$

respectiv:

$$M_z(x) = b_j = \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = m(x) \quad (1.95)$$

S-au introdus în cursul de *Rezistența materialelor I* următoarele notații:

$M_z(x)$ - momentul încovoietor în secțiunea x , pentru încărcarea corpului cu sarcinile reale;

$m(x)$ - momentul încovoietor fictiv, determinat în aceeași secțiune x , cu toate sarcinile nule, cu excepția celei în raport cu care se face derivarea, care este egală cu unitatea.

Determinat în aceste condiții, momentul fictiv $m(x)$ este egal cu derivata parțială, deci:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} \\ \text{sau} \quad m(x) &= \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Metoda Mohr-Maxwell poate fi aplicată similar și pentru celelalte eforturi: forțe axiale, forțe tăietoare și momente de răsucire. În acest caz s-au introdus notațiile:

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{\partial N(x)}{\partial F_i}; \\ t(x) &= \frac{\partial T_y(x)}{\partial F_i}; \\ m_t(x) &= \frac{\partial M_t(x)}{\partial F_i} \end{aligned} \quad (1.97)$$

$n(x)$, $t(x)$, $m(x)$, $m_t(x)$ se numesc *coeficienți de influență* și reprezintă eforturile secționale într-o secțiune curentă cauzate de o sarcină egală cu unitatea, având același punct de aplicație și aceeași direcție ca și sarcina în raport cu care se face derivarea. Sarcina unitară se aplică singură pe corp într-o a doua stare de solicitare în care toate celelalte sarcini se anulează.

Practic relațiile stabilite arată că derivatele parțiale reprezintă eforturile secționale cauzate de o sarcină egală cu unitatea, aplicată singură pe corp în locul sarcinii în raport cu care se face derivarea.

De reținut:

- *Raționamentul anterior este valabil și în cazul în care pe grinda sunt aplicate și sarcini distribuite.*
- *Metoda Maxwell-Mohr simplifică calculul derivatelor parțiale ale eforturilor dintr-o secțiunea curentă a corpului în raport cu o forță concentrată sau un moment concentrat.*

1.10.3. Metoda Mohr-Vereșceaghin

Calculul unor integrale de tipul: $\int M_z(x) \cdot m(x) dx$, $\int N(x) \cdot n(x) dx$, etc. se poate face analitic dar, în unele situații, calculul poate fi simplificat prin aplicarea *metodei de integrare grafo-analitică Mohr-Vereșceaghin*, denumită și *metoda de înmulțire a diagramelor*. Metoda este aplicabilă tuturor integralelor,

care conțin un produs de două funcții continue, dintre care una este o funcție liniară.

Deoarece toate integralele sunt identice ca structură, se va face în continuare referire la integrala $\int M_z(x) \cdot m(x) dx$. În general $M_z(x)$ este o funcție oarecare. Funcția $m(x)$ este momentul încovoietor dat de către un moment concentrat sau o forță concentrată unitară și în consecință poate fi constantă sau poate avea cel mult o variație liniară.

Se reprezintă în *figura 1.22* diagramele de variație a momentelor încovoietoare, atât pentru încărcarea dată, M_z cât și pentru sarcina –unitate, m . Prima diagramă de momente este delimitată de o curbă oarecare, iar a doua de o linie dreaptă. S-a prezentat în prima parte a cursului modul cum se calculează integrala:

$$I = \int_{l_1}^{l_2} M_z(x) \cdot m(x) dx \quad (1.98)$$

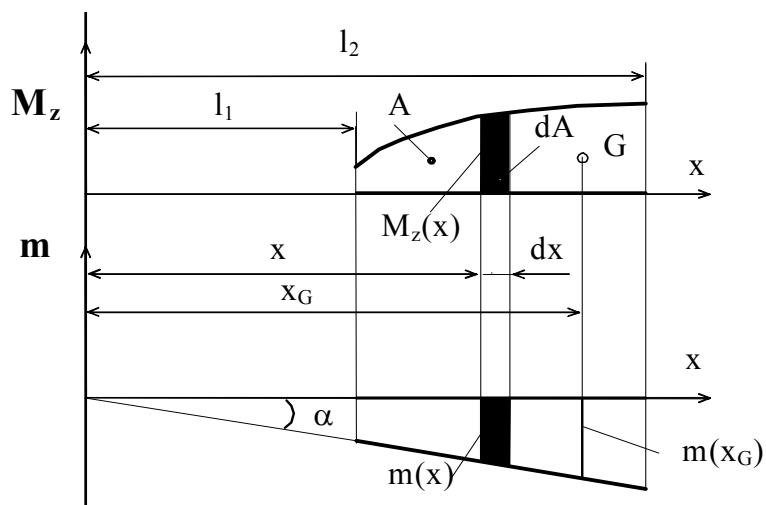


Figura 1.22.

În *figura 1.22* din prima diagramă rezultă:

$$M_z(x) \cdot dx = dA \quad (1.99)$$

iar din diagrama m rezultă:

$$m(x) = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (1.100)$$

Înlocuind (1.100) și (1.99), relația (1.98) devine:

$$I = \text{tg} \alpha \cdot \int_A x dA = \text{tg} \alpha \cdot S_y \quad (1.101)$$

unde: S_y - momentul static al suprafeței diagramei M_z față de axa ordonatelor, care poate fi scris:

$$S_y = x_G \cdot A \quad (1.102)$$

unde: A – aria diagramei M_z ;

x_G - abscisa centrului de greutate al diagramei M_z .

Înlocuind (1.102) în relația (1.101) rezultă:

$$I = x_G \cdot \text{tg} \alpha \cdot A \quad (1.103)$$

Din figura 1.22 se poate scrie:

$$x_G \cdot \text{tg} \alpha = m(x_G) \quad (1.104)$$

Înlocuind (1.104) în (1.103) și ținând cont de relația (1.99) se obține:

$$I = \int_{l_1}^{l_2} M_z(x) \cdot m(x) dx = A \cdot m(x_G) \quad (1.105)$$

Pe această relație se bazează **metoda Mohr-Vereșceaghin**. Relația (1.105) arată că integrala definită din produsul funcțiilor $M_z(x) \cdot m(x)$ este numeric egală cu produsul dintre suprafața diagramei $M_z(x)$, luată între limitele de integrare, și valoarea funcției $m(x)$, calculată în dreptul centrului de greutate al primei diagrame.

De reținut:

- În cazul în care și diagrama $M_z(x)$ este liniară rolul celor două diagrame poate fi inversat.
- Metoda de integrare grafo-analitică Mohr-Vereșceaghin se aplică pentru fiecare porțiune a sistemului de bare, atât pentru solicitarea de încovoiere cât și pentru celelalte solicitări.

1.11.8. Metoda eforturilor

Pentru un corp elastic de n ori static nedeterminat, încărcat cu un sistem oarecare de sarcini (figura 1.21a), se înlocuiesc n reazeme cu reacțiunile care apar în ele $X_1...X_n$, astfel încât sistemul să devină static determinat. Sistemul astfel obținut (figura 1.21b) se numește *sistem de bază*.

Mai întâi se studiază sistemul de bază încărcat numai cu sarcinile exterioare, necunoscutele static nedeterminate fiind nule ($X_1 = ... = X_n = 0$). Pentru această variantă de încărcare se notează cu δ_{i0} deplasarea punctului de aplicare a forței X_i , pe direcția acesteia, cu $i = 1...n$. Se studiază apoi sistemul de bază fără sistemul de sarcini exterior, dar încărcat pe rând numai cu câte una din necunoscutele static nedeterminate, care devine egală cu unitatea. În acest caz se notează cu $\delta_{1i}... \delta_{ii}... \delta_{ni}$ deplasările punctelor de aplicație ale necunoscutelor static nedeterminate, pe direcția acestora pentru $X_i=1$. Ca urmare a proporționalității dintre sarcini și deformații, rezultă că deplasările produse de către sarcina reală $X_i \neq 1$, care acționează singură asupra sistemului de bază, vor fi: $\delta_{1i}X_i, \dots, \delta_{ii}X_i, \delta_{ji}X_i, \dots, \delta_{ni}X_i$.

Într-un punct j deplasările produse de către cele n necunoscutele static nedeterminate vor fi: $\delta_{j1}X_1... \delta_{jn}X_n$. Deplasările punctului j , pe direcția necunoscutei X_j , atunci când necunoscuta considerată egală cu unitatea este aplicată succesiv în punctele $1...n$, vor fi: $\delta_{j1}... \delta_{jn}$.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, se determină deplasarea punctului j sub acțiunea simultană a tuturor necunoscutelor static nedeterminate $X_1...X_n$:

$$\delta'_j = \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n \quad (1.106)$$

Dar punctul j se află la contactul cu un reazem rigid și prin urmare deplasarea sa totală (suma algebrică a tuturor deplasărilor din acest punct) trebuie să fie nulă, deci:

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n + \delta_{j0} = 0 \quad (1.107)$$

Relații similare se pot scrie pentru toate celelalte rezazeme. Se obține astfel următorul sistem:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases} \quad (1.108)$$

Sistemul obținut este format dintr-un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor static nedeterminate și reprezintă *sistemul de ecuații canonice folosit de metoda eforturilor*. El poate fi scris astfel indiferent de forma corpului sau a sistemului de corpuri și prin rezolvarea lui se determină valorile necunoscutelor static nedeterminate $X_1 \dots X_n$.

Calculul necesită determinarea prealabilă a coeficienților de influență δ_{ij} (care reprezintă deplasări fictive) și a termenilor liberi. Pentru aceasta se folosește *metoda Mohr-Maxwell* sau în cazul sistemelor formate din bare drepte *metoda Mohr-Vereșceaghin*.

Coeficienții de influență δ_{ij} , pentru care $i=j$ se numesc *principali* și aceștia sunt întotdeauna pozitivi. Cei pentru care $i \neq j$ poartă denumirea de *secundari* și pot fi pozitivi, negativi sau egali cu zero. Ca o consecință a teoremei reciprocității deplasărilor, în *sistemul (1.143)*, se poate scrie: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Pentru un corp încărcat cu sarcini și supus la dilatări termice împiedicate (acestea produc tensiuni în corp) *sistemul (1.143)* devine:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} + \delta_{1t} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} + \delta_{nt} = 0 \end{cases} \quad (1.109)$$

unde: $\delta_{1t} \dots \delta_{nt}$ - deplasările fictive produse de către temperatură în punctele $1 \dots n$ ale sistemului de bază, pe direcția necunoscutelor $X_1 \dots X_n$.

În cazul sistemelor plane, la care se neglijează influența forței tăietoare, coeficienții și termenii liberi ai *sistemului (1.144)* pot fi determinați cu următoarele relații:

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \sum_i \left(\int_{l_i} \frac{m_i m_j}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{n_i n_j}{EA} dx_i \right) \\
\delta_{i0} &= \sum_i \left(\int_{l_i} \frac{M_o m_j}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{N_o n_j}{EA} dx_i \right) \\
\delta_{it} &= \sum_i \int_{l_i} n_i \alpha_i \Delta t_i dx_i
\end{aligned} \tag{1.110}$$

unde: M_o, N_o - momentul încovoietor și forța axială produse în sistemul de bază de către sarcinile exterioare;

m_i, n_i - momentul încovoietor și forța axială atunci când sistemul de bază este încărcat numai cu $X_i = 1$.

CAPITOLUL 2

ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

Problema generală a teoriei elasticității o reprezintă determinarea stării de tensiuni, deformații și deplasări dintr-un corp elastic, atunci când se cunosc: forma și dimensiunile acestuia, modul de încărcare și rezemare, precum și caracteristicile elastice ale materialului.

Ecuțiile fundamentale ale *Teoriei elasticității* (care vor fi prezentate în cele ce urmează) sunt scrise pentru un element de volum infinitezimal și sunt grupate astfel:

- *ecuații de echilibru (Cauchy);*
- *ecuații geometrice (relații între deformații și deplasări);*
- *ecuații constitutive (legea lui Hooke).*

În ecuațiile din primele două grupe nu intervin caracteristici de material și, în consecință, ele sunt universal valabile. În ecuațiile constitutive intervin aceste caracteristici și prin urmare acestea depind de natura materialului.

Modelul clasic al *Teoriei elasticității* și *Rezistenței materialelor* adecvat comportării oțelului și altor materiale (în special metalice) are la bază următoarele ipoteze simplificatoare:

- continuitatea materiei;
- omogenitatea;
- elasticitatea perfectă și izotropia materialelor;
- ipoteza deformațiilor mici;
- proporționalitatea dintre tensiuni și deformații;
- principiul lui Saint Venant;
- ipoteza stării naturale.

Ipoteza lui *Bernoulli* este admisă numai în *Rezistenței materialelor*.

2.1. Starea de tensiuni într-un punct al unui corp

2.1.1. Starea generală de tensiuni

Se consideră cazul general al unui corp solid sollicitat de un sistem oarecare de sarcini. Într-un punct oarecare din interiorul corpului se poate duce un număr nedefinit de fațete orientate diferit. La fiecare din aceste fațete elementare corespunde un anumit vector-tensiune \vec{p} (figura 2.1).

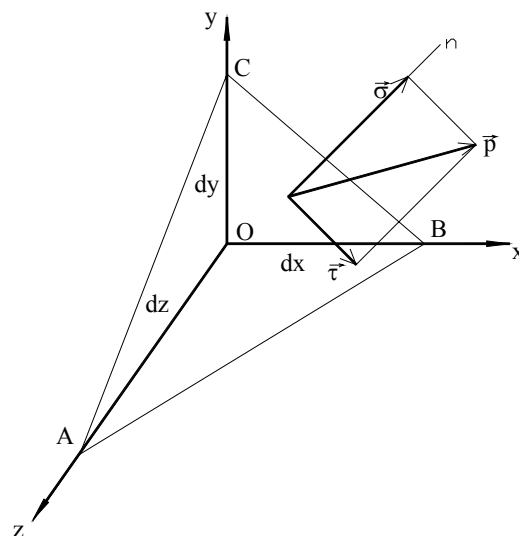


Figura 2.1.

Ansamblul vectorilor tensiune care acționează pe fațetele elementare ce trec prin punctul considerat caracterizează starea de tensiune din acest punct și poartă denumirea de *fascicolul tensiunilor*. Ansamblul fascicolelor tensiunilor într-un volum poartă denumirea de *câmp de tensiune*. Câmpul de tensiune poate fi *uniaxial*, *biaxial*, *triaxial*.

S-au definit în cursul de *Rezistența materialelor*:

- **tensiunea medie** pe un element de arie ΔA ;
- **tensiunea** într-un punct al corpului, care poate fi descompusă (figura 2.2b) în două componente: - pe direcția normalei în componenta σ_{xx} , numită **tensiune normală** (orientată de direcția axei Ox) și pe planul secțiunii în componenta τ , numită **tensiune tangențială**.

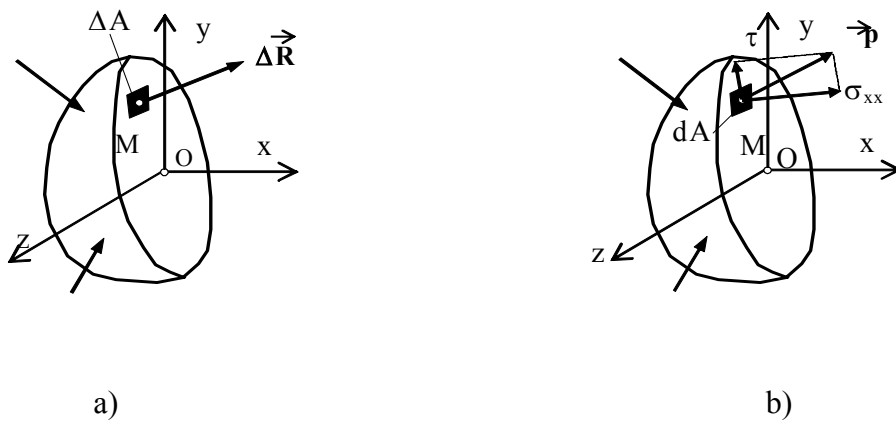


Figura 2.2.

La rândul său, componenta τ se poate fi descompusă în planul yOz , (la care Ox este normală) obținându-se componentele τ_{xy} și τ_{xz} (figura 2.3) care sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz .

De reținut:

- Starea de tensiuni dintr-un punct oarecare al corpului este perfect determinată dacă se cunosc tensiunile pe trei plane de coordonate care trec prin acel punct. Dacă poziția planelor de coordonate este arbitrară,

pe fiecare dintre aceste plane există, în cazul general, atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale.

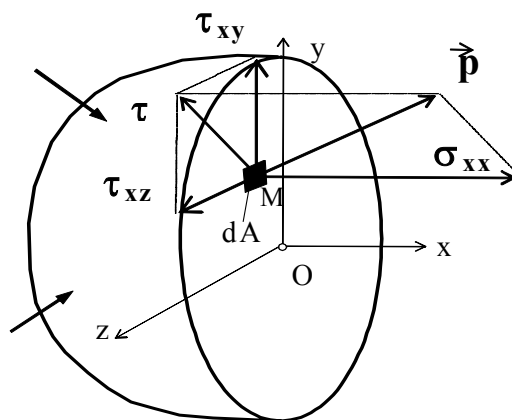


Figura 2.3.

Din interiorul unui corp solid elastic aflat în echilibru, într-o stare generală de tensiuni, se izolează un paralelipiped elementar infinitezimal de dimensiuni dx , dy , dz (figura 2.4.). Paralelipipedul se raportează la un sistem de axe triortogonal.

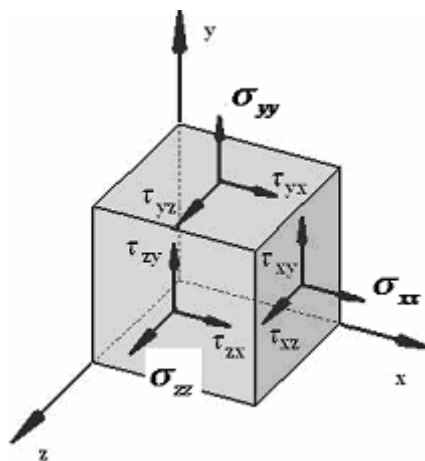


Figura 2.4.

În figura 2.4. se prezintă starea spațială de tensiuni. Toate tensiunile prezentate sunt pozitive.

Cunoașterea celor 9 componente ale tensiunilor în orice punct al unui corp înseamnă cunoașterea stării de tensiuni din acel corp. Aceasta este **starea generală de tensiuni**. Rareori toate aceste tensiuni apar simultan.

Tensiunea este o *mărimă tensorială*. Componentele tensorului tensiunilor pentru starea generală de tensiuni pot fi prezentate în formă matriceală astfel:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Semnificația indicilor este următoarea: *primul indice indică normala la fațeta pe care acționează tensiunea, iar al doilea axa cu care aceasta este paralelă*.

Fascicolul tensiunilor într-un punct poate fi reprezentat printr-un tensor de ordinul trei, pe care îl vom denumi *tensor-tensiune*. Datorită proprietății de dualitate a tensiunilor tangențiale ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$) componentele tensorului tensiunilor dispuse simetric față de diagonala principală a tensorului sunt egale între ele ceea ce ne permite să denumim *tensorul tensiunilor, tensor simetric de ordinul al doilea*.

Starea de tensiuni dintr-un punct al corpului este determinată dacă se cunosc tensiunile pe trei plane de coordonate care trec prin acel punct. În fiecare punct al unui corp există trei plane pentru care *tensiunile tangențiale τ sunt nule*, numite *plane principale*. Tensiunile de pe aceste plane se numesc *tensiuni (normale) principale* ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Intersecția planelor principale formează axele numite *direcțiile principale ale tensiunilor* (figura 2.5).

Se vor folosi următoarele notații pentru tensiunile principale:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

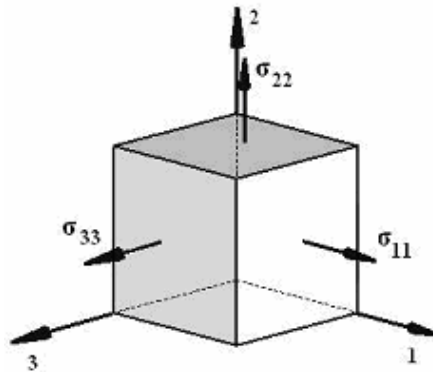


Figura 2.5.

tensiunile fiind ordonate algebric.

2.1.2. Starea plană și uniaxială de tensiuni

Din starea generală de tensiuni pot fi determinate următoarele cazuri particulare:

1. Starea plană de tensiuni (figura 2.6)

Pentru această stare: $\sigma_{zz} = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Pe fațetele opuse acționează tensiuni egale și de sensuri contrare.

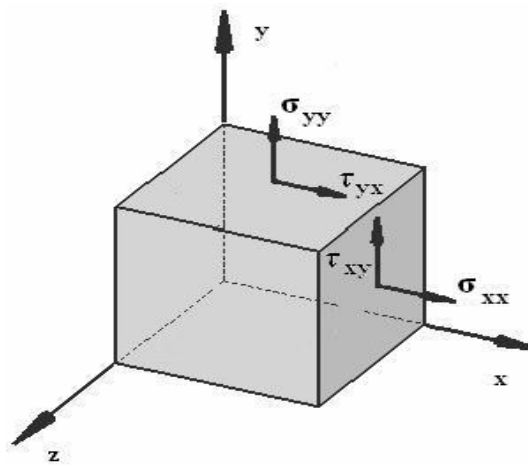


Figura 2.6.

În figura 2.7 este reprezentată starea de tensiuni principale în plan.

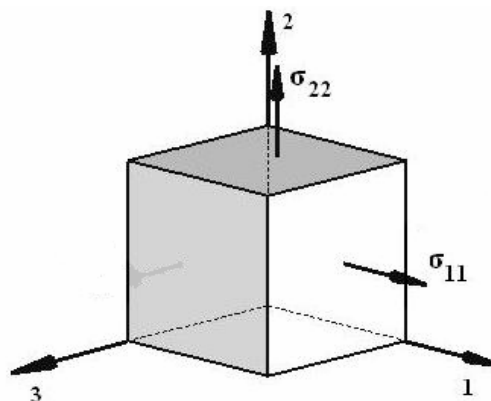


Figura 2.7.

2. Starea uniaxială de tensiuni (tracțiune pe direcția axei Ox (figura 2.8)).

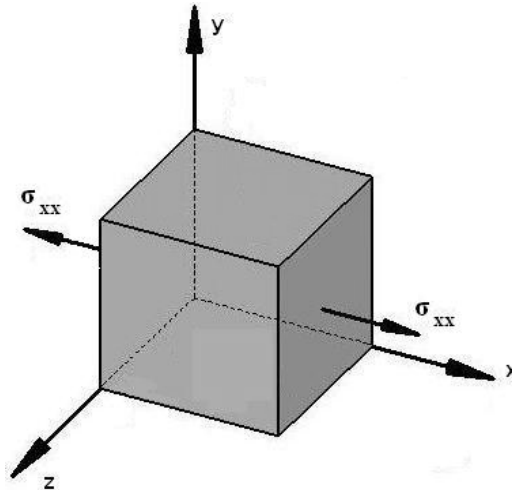


Figura 2.8.

2.2. Variația tensiunilor în jurul unui punct.

Tensiuni principale

2.2.1 Starea spațială de tensiuni

Tensiunile principale reprezintă cea mai simplă stare de tensiune dintr-un punct al unui corp. În fiecare punct al unui corp există trei plane pentru care tensiunile tangențiale τ sunt nule, numite *plane principale*, iar tensiunile de pe aceste plane se numesc *tensiuni principale* ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Intersecția planelor principale formează axele numite *direcțiile principale ale tensiunilor*.

În starea spațială de tensiuni direcțiile tensiunilor principale σ_1 respectiv σ_3 , dintr-un punct, (notate cu *1* și *3*) sunt reciproc perpendiculare. Direcția *2* este perpendiculară pe planul *103* astfel încât, împreună cu celelalte două, formează un sistem triortogonal drept.

Tensiunile principale sunt ordonate algebric, prin urmare între tensiuni există relația:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.2)$$

Observații:

- În starea spațială de tensiuni toate cele trei tensiuni principale sunt diferite de zero.
- Tensiunile normale principale sunt independente la schimbarea sistemului de coordonate.
- În planele principale tensiunile tangențiale sunt nule.
- Cele trei plane principale dintr-un punct al corpului deformat sunt reciproc perpendiculare.
- Intersecția planelor principale determină axele sau direcțiile principale.
- Într-un corp elastic, omogen și izotrop direcțiile principale sunt reciproc perpendiculare.
- Direcțiile principale se bucură de proprietatea că ele coincid cu normalele fețelor pe care tensiunea tangențială este nulă.

Prin raportare la acest sistem de referință, se obțin expresiile cele mai simple pentru tensiuni care reprezintă rădăcinile reale și distincte ale ecuației:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.3)$$

Relația (2.8) se numește **ecuație seculară**, iar coeficienții I_1 , I_2 , I_3 se numesc **invarianți** deoarece nu se modifică la rotirea sistemului de axe. I_1 , I_2 și I_3 se determină cu relațiile:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.4)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

În relații determinanții sunt simetrici față de diagonala principală.

Observații:

- Tensiunea principală cea mai mare σ_1 este totodată și cea mai mare posibilă dintre tensiunile ce acționează asupra elementului studiat, iar tensiunea principală minimă σ_3 este cea mai mică din ansamblul tensiunilor.
- O condiție necesară în cazul stării spațiale de tensiune (triaxială) este ca invariantul I_3 al ecuației seculare să fie diferit de zero.

Un model geometric al acestei stări de tensiune este **elipsoidul lui Lamé** sau **elipsoidul tensiunilor (figura 2.10)**: starea de tensiune dintr-un punct al unui corp poate fi reprezentată printr-un elipsoid care are ca semiaxe tensiunile normale principale și a cărui ecuație este:

$$\left(\frac{p_x^2}{\sigma_1^2}\right) + \left(\frac{p_y^2}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{p_z^2}{\sigma_3^2}\right) = 1$$

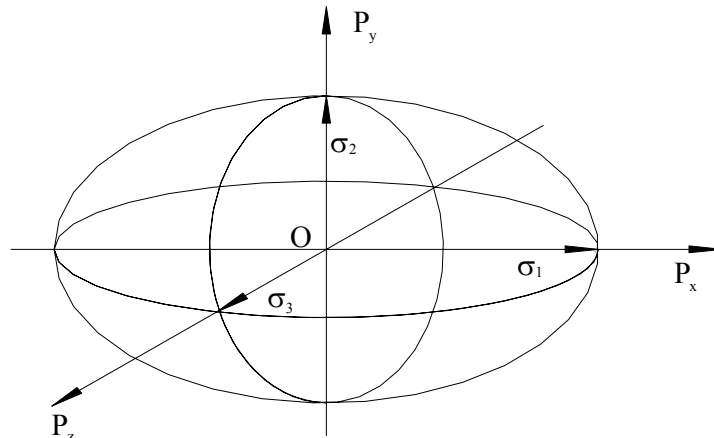


Figura 2.10

2.2.2. Starea plană de tensiuni (biaxială)

În această stare de tensiuni două dintre tensiunile principale sunt diferite de zero, iar a treia σ_3 este nulă. În acest caz suprafața elipsoidului tensiunilor se transformă în suprafața unei elipse numită *elipsa tensiunilor*. O condiție necesară pentru starea plană de tensiuni este ca cel de al doilea invariant I_2 să

fie diferit de zero, iar cel de al treilea invariant I_3 să fie egal cu zero. Prin urmare *ecuația seculară* (2.3) devine:

$$\sigma \left[\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 \right] = 0 \quad (2.7)$$

cu una dintre rădăcinile egală cu zero.

Dintr-un corp, aflat într-o stare plană de tensiuni, se decupează o prismă triunghiulară infinitezimală (se secționează corpul cu un plan înclinat) așa cum este indicat în *figura 2.11*.

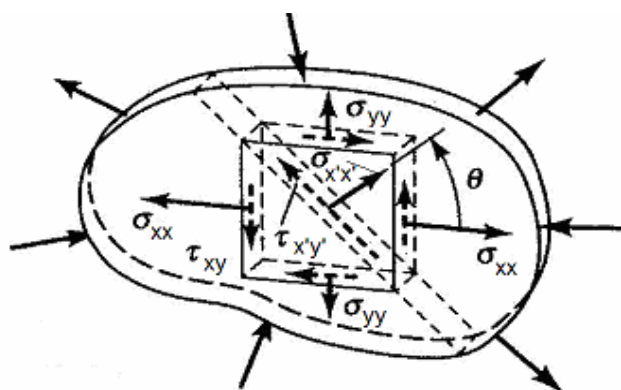


Figura 2.11.

Se pune problema determinării expresiilor pentru tensiunile σ și τ precum și a tensiunilor principale în funcție de unghiul θ atunci când se cunosc componentele σ_{xx} , σ_{yy} și τ_{xy} ale tensorului tensiunilor pe fețele **AO** și **OB** perpendiculare pe planul desenului, având ca normale pe **Ox** și **Oy** (*figura 2.12*). Se scrie echilibrul tensiunilor care acționează asupra acestui element și se obține:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau(\theta) &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

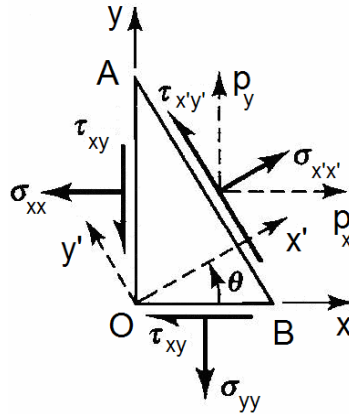


Figura 2.12.

Se exprimă relațiile în funcție de argumentul dublu cunoscând:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}; \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2};$$

și rezultă:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.9)$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.10)$$

Relațiile (2.9), (2.10) dau variațiile tensiunilor σ și τ în funcție de unghiul θ ce poate varia în intervalul $[0, \pi]$. Se dorește determinarea valorilor extreme. Pentru aceasta se derivează relația (2.10) în raport cu 2θ și se anulează derivata. Se obține:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d(2\theta)} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.11)$$

Din relațiile (2.10), (2.11) se observă că:

$$\tau(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d(2\theta)} \quad (2.12)$$

Prin urmare tensiunea normală (funcția $\sigma(\theta)$) prezintă un punct de extrem (avem tensiuni principale) atunci când $\tau(\theta) = 0$.

Pentru starea plană de tensiuni, **tensiunile principale** sunt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.13)$$

unde semnul (+) este pentru σ_1 , deci $\sigma_{max} = \sigma_1$ și $\sigma_{min} = \sigma_2$. Din *relația* (2.13) se observă că $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = \mathbf{constant}$ deci într-un punct dat suma tensiunilor normale în raport cu direcțiile principale este constantă.

Egalând cu zero expresia lui τ din *relația* (2.11) se obține:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{tg} 2\theta$$

deci **direcțiile principale** sunt date de soluțiile ecuației:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2.14)$$

Observații:

- *Direcțiile principale sunt reciproc perpendiculare (deoarece perioada funcției este π).*
- *Dacă tensiunile tangențiale sunt pozitive, direcția tensiunii normale maxime se află în primul cadran și se măsoară în sens trigonometric. Pentru tensiuni tangențiale negative, această direcție se află la un unghi negativ și ascuțit față de axa **Ox***
- *Planele normale la direcțiile principale se numesc **plane principale**.*
- *Pentru materialelor izotrope, direcțiile tensiunilor principale coincid cu cele ale deformațiilor principale.*

Direcțiile tensiunilor tangențiale extremale se determină din condiția $\frac{d\tau(\theta)}{d(2\theta)} = 0$. Se constată că tensiunile tangențiale extreme apar în plane înclinate la 45° față de direcțiile principale. Tensiunile tangențiale maxime și minime sunt date de relațiile:

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (2.15)$$

sau

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.16)$$

cu $\tau_{max} = \tau_1$ și $\tau_{min} = \tau_2$.

Relația (2.16) arată că cele două tensiuni tangențiale sunt egale dar de sensuri contrare, ceea ce indică faptul că se respectă dualitatea tensiunilor tangențiale. În secțiunile în care tensiunile tangențiale au valori extreme, tensiunile normale sunt diferite de zero.

Un model geometric al stării plane de tensiune este *elipsa lui Lamé* (figura 2.13): o elipsă cu semiaxa mare egală cu σ_1 și semiaxa mică egală cu σ_2 și a cărei ecuație este:

$$\left(\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} \right) + \left(\frac{p_y^2}{\sigma_2^2} \right) = 1 \quad (2.17)$$

Într-un punct oarecare **B** tensiunea **p**, aflată sub unghiul θ , se decompune în componentele p_x și p_y .

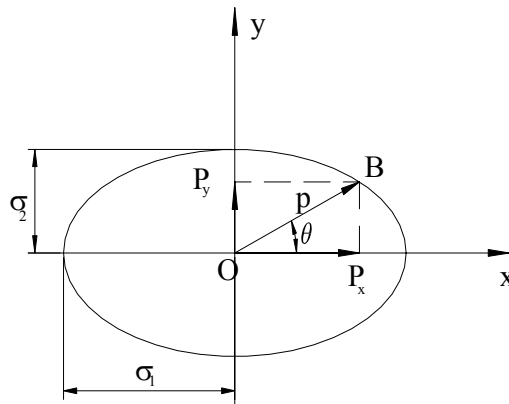


Figura 2.13.

Funcțiile $\sigma(\theta)$ și $\tau(\theta)$ din relațiile (2.9), (2.10) pot fi prezentate grafic în coordonate carteziene, în coordonate polare (cea mai sugestivă) și prin în cercul lui Mohr. Cea mai comodă este reprezentarea grafică prin cercul lui Mohr, în sistemul de coordonate σ, τ .

În sistemul axelor principale relațiile (2.9), (2.10) pot fi scrise sub forma:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

Se ridică la pătrat și se adună ultimele două relații rezultând:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (2.18)$$

Relația (2.18) reprezintă matematic ecuația **cercului lui Mohr** pentru starea plană de tensiune. Este un cerc cu centrul pe axa σ , la distanța $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ de origine și de rază $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ (figura 2.14).

Orice stare plană de tensiuni se reprezintă printr-o pereche de puncte diametral opuse de pe cerc.

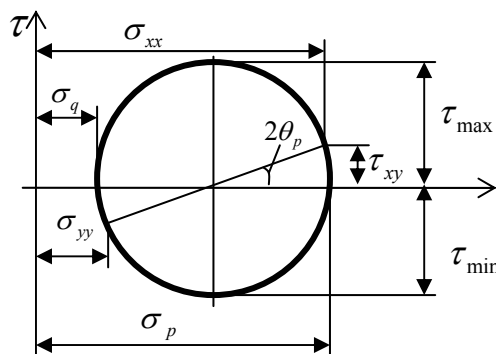


Figura 2.14.

2.2.3. Starea liniară de tensiuni (monoaxială)

Condiția necesară pentru a exista o stare de tensiune monoaxială este ca al doilea și al treilea invariant al tensiunilor să fie egali cu zero. În acest caz ecuația seculară devine:

$$\sigma^2[\sigma - I_1] = 0 \quad (2.19)$$

cu două rădăcini egale cu zero. Pentru starea de tensiune monoaxială elipsoidul tensiunilor se transformă într-un segment de dreaptă.

Starea monoaxială de tensiune este produsă de solicitările axiale. În acest caz numai tensiunea normală σ_{xx} este diferită de zero. Pentru studiul variației tensiunilor în jurul unui punct se păstrează modul de secționare de la starea plană de tensiuni. Se figurează tensiunile care apar și se scrie echilibrul elementului izolat:

$$\sigma(\theta) = \sigma_{xx} \cos^2 \theta$$

$$\tau(\theta) = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta$$

sau exprimând relațiile în funcție de argumentul dublu rezultă:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (2.20)$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta \quad (2.21)$$

Se pune problema stabilirii valorilor unghiului θ pentru care cele două tensiuni sunt maxime sau minime. Astfel tensiunea normală este maximă pentru $\cos 2\theta = 1$ deci pentru $2\theta = 0$, respectiv $\theta = 0$ (pentru normala pe direcția forțelor). Valoarea minimă se obține pentru $\cos 2\theta = -1$ sau $2\theta = \pi$ respectiv $\theta = \pi/2$ deci pentru secțiunea paralelă cu direcția forțelor. Tensiunile principale sunt:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_{xx} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = 0$$

Tensiunea tangențială are valoarea maximă pentru $\sin 2\theta = 1$ sau $2\theta = \pi/2$ respectiv $\theta = \pi/4$. Valoarea tensiunii este:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \quad (2.23)$$

Observații:

- *La solicitările axiale în secțiunile înclinate apar atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale.*
- *Tensiunile tangențiale maxime se obțin în secțiuni înclinate la 45° față de axa barei și sunt egale cu jumătatea efortului normal principal.*

Dacă în *relația (2.18)* se face σ_2 zero rezultă:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 \quad (2.24)$$

Relația (2.24) reprezintă **cercul lui Mohr** pentru sollicitarea monoaxială: un cerc cu centru pe axa σ , care trece prin origine și are raza $\sigma_1/2$ (*figura 2.15*).

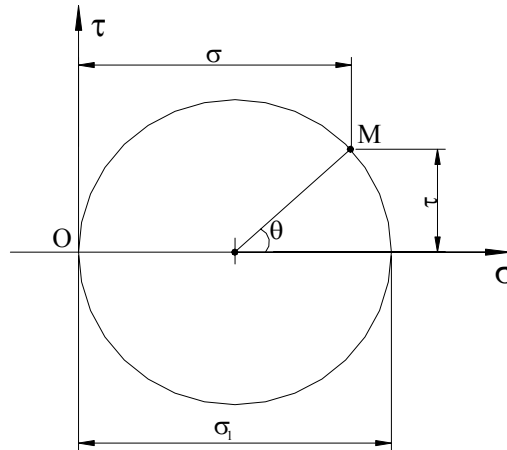


Figura 2.15.

Valorile tensiunilor σ și τ pentru orice secțiune diferită de unghiul θ sunt date de coordonatele punctelor de pe periferia cercului (de exemplu punctul M).

2.3. Starea de deformații într-un punct al unui corp

2.3.1. Starea generală de deformații

Prin **deformație** se înțelege modificarea distanței dintre puncte sau secțiuni, sau a unghiurilor dintre două segmente duse printr-un punct. Prin stare de deformație tridimensională sau spațială se înțelege deformarea unui corp solid oarecare. Se spune că un corp este deformat când pozițiile relative ale punctelor acestui corp au variat. Variația relativă a punctelor unui corp deformat se traduce prin deplasări, variații de lungime și unghi. Modificările lungimilor segmentelor se numesc **deformații liniare**, iar modificările unghiurilor **deformații unghiulare**.

sau *lunecări*. Se consideră că deformațiile corpului sunt deformații elastice mici adică deformațiile corpului dispar după înlăturarea sistemului de sarcini (corpul revine la forma și dimensiunile inițiale) și sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului.

În prima parte a cursului de *Rezistența materialelor* au fost definite deformațiile. S-a considerat un corp solid și punctele C, D din interiorul corpului care determină segmentul $[CD]$. Punctele M, O, N determină segmentele $[OM]$ și $[ON]$ astfel încât între acestea să existe un unghi drept (figura 2.16). După deformarea corpului punctele se deplasează în C', D', M', N' și O' . S-a definit ca fiind *deformație liniară absolută* variația lungimii segmentului $[CD]$:

$$\delta = \Delta l = [C'D'] - [CD] = l - l_0$$

S-a definit *deformația liniară specifică* sau *alungirea specifică* (alungirea unității de lungime) ca fiind limita raportului dintre deformația liniară absolută și lungimea inițială a segmentului $[CD]$:

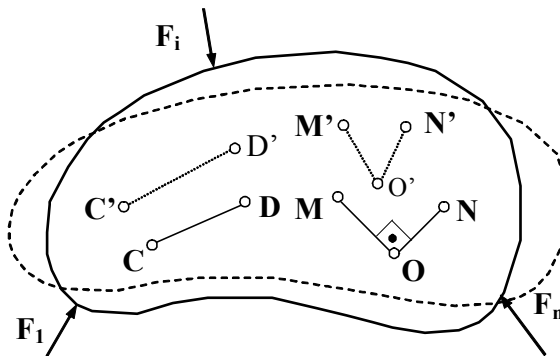


Figura 2.16

$$\varepsilon = \lim_{[CD] \rightarrow 0} \frac{[C'D'] - [CD]}{[CD]}$$

sau

$$\varepsilon = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{\delta}{l_0} = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{l - l_0}{l_0}$$

S-a definit *deformația unghiulară* sau *lunecarea specifică* ca fiind mărimea cu care variază unghiul drept construit în vecinătatea punctului O .

Totalitatea componentelor definesc *tensorul deformațiilor specifice* într-un punct al corpului. Componentele *tensorului deformațiilor*, corespunzător tensiunilor de mai sus (pentru starea generală de tensiuni), pot fi scrise matriceal astfel:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Cunoașterea celor 9 componente ale deformațiilor în orice punct al unui corp înseamnă cunoașterea stării de deformații din acel corp.

Observații:

- *Deformațiile specifice, la fel ca și tensiunile, sunt mărimi locale, determinate în vecinătatea unui punct.*
- *Pentru materiale izotrope lunecările specifice nu depind de sensul deformării (de la axa **Ox** spre **Oy** sau invers) și în consecință matricea componentelor tensorului deformațiilor (relația 2.35) este simetrică față de diagonala principală.*
- *Tensiunilor normale σ le corespund alungiri specifice ε , iar tensiunilor tangențiale τ lunecări γ .*
- *La materialele izotrope nu există influențe reciproce între alungirile specifice ε și lunecările γ .*
- *Nu există o coincidență între starea de tensiune și starea de deformație. Astfel, la o stare de tensiune monoaxială corespunde o stare de deformare triaxială și invers. De exemplu în cazul întinderii barelor de secțiune constantă, în secțiunea transversală apare o tensiune σ_x și corespund alungiri specifice ε pe toate cele trei direcții.*

În orice punct al corpului deformat există trei axe reciproc perpendiculare, numite *axele deformațiilor principale*, pentru care componentele deformației

unghiulare γ sunt nule. Unghiurile dintre aceste axe nu se modifica în urma deformării. Cele trei plane perpendiculare definite de aceste axe se numesc **planele principale ale deformației**. Deformațiile pe direcțiile principale ale deformațiilor au valorile ε_1 , ε_2 , ε_3 . Luând direcțiile principale ca axe tensorul deformațiilor devine:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ca rezultat al solicitării corpurile se deformează și apar deplasări. Prin **deplasare** se înțelege modificarea poziției unui punct sau a unei secțiuni a corpului. Se iau în considerație numai *deplasări elastice* sau *elasto-plastice* produse ca urmare a deformării corpului, atunci când acesta își modifică dimensiunile și forma geometrică inițială.

Observații:

- A cunoaște starea de deplasări dintr-un corp înseamnă să se cunoască componentele deplasării în orice punct al corpului.
- Vectorul deplasărilor unui punct are componentele u (pe Ox), v (pe Oy) și w (pe Oz).

2.3.2. Variația deformațiilor în jurul unui punct

Deformațiile specifice ca și tensiunile pot varia în jurul unui punct. Variația deformațiilor în jurul unui punct se exprimă prin următoarele relații, similare celor stabilite la tensiuni:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta) &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\gamma(\theta)}{2} &= -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.27)$$

În orice punct al corpului deformat există trei axe reciproc perpendiculare, numite **axele deformațiilor principale**, pentru care componentele deformației

unghiulare γ sunt nule. Unghiurile dintre aceste axe nu se modifică în urma deformării. Cele trei plane perpendiculare definite de aceste axe se numesc **planele principale ale deformației**.

Observație:

- Pe cele trei direcții principale de deformații alungirile specifice au valorile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, iar lunecările specifice sunt nule.

Pentru starea spațială deformațiile principale pot fi determinate ca rădăcini ale ecuației:

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0 \quad (2.28)$$

Invariantii J_1, J_2 și J_3 pot fi determinați din I_1, I_2 și I_3 , dați de relațiile (2.9), (2.10), (2.11), în care se înlocuiesc σ_{kk} cu ε_{kk} și τ_{ij} cu $\gamma_{ij}/2$.

Pentru materiale izotrope, direcțiile deformațiilor și tensiunilor principale coincid, iar deformațiile principale sunt date de relațiile:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.29)$$

Lunecarea maximă se determină cu relația:

$$\frac{\gamma_{max,min}}{2} = \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.30)$$

Ca și în cazul tensiunilor, variația deformațiilor în jurul unui punct poate fi prezentată în coordonate carteziene, polare sau prin cercul lui Mohr pentru deformații (cercul se trasează în coordonatele ε și $\gamma/2$).

Dacă se reprezintă cercurile tensiunilor și cel al deformațiilor suprapuse, se constată că ele sunt concentrice și raportul diametrelor este:

$$\frac{D_\varepsilon}{D_\sigma} = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

2.4. Ecuțiile fundamentale ale Teoriei Elasticității

Sub acțiunea unui sistem de sarcini corpul se deformează. Se pune problema să se determine noua formă luată după deformare și tensiunile care au luat naștere în corpul respectiv.

Ecuțiile fundamentale ale Teoriei elasticității pot fi grupate astfel:

1. *ecuații de echilibru (Cauchy);*
 2. *ecuații geometrice (relații între deformații și deplasări);*
 3. *ecuații constitutive (legea lui Hooke).*
- *Ecuțiile fundamentale ale Teoriei elasticității sunt scrise pentru un element de volum infinitezimal.*
 - *În ecuațiile din primele două grupe nu intervin caracteristici de material și, în consecință, ele sunt universal valabile.*
 - *În ecuațiile constitutive intervin aceste caracteristici și deci acestea depind de natura materialului.*

2.4.1. Ecuții de echilibru (Cauchy)

Aceste ecuații au la bază echilibrul de forțe, nu fac apel la caracteristici fizice și prin urmare sunt valabile pentru orice material.

Dintr-un corp cu grosimea egală cu unitatea se izolează un element cu dimensiunile dx , dy (figura 2.17).

Elementul trebuie să se afle în echilibru. Se scriu ecuațiile de echilibru luând în considerație forțele rezultate din tensiuni precum și forțele masice ale căror componente pe unitatea de volum se notează cu X și Y . Pe planele ce cuprind axele Ox și Oy apar tensiunile σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} și τ_{yx} . Dând creșteri infinitezimale tensiunilor de pe fețele opuse ale elementului de volum și scriind echilibrul forțelor se obține:

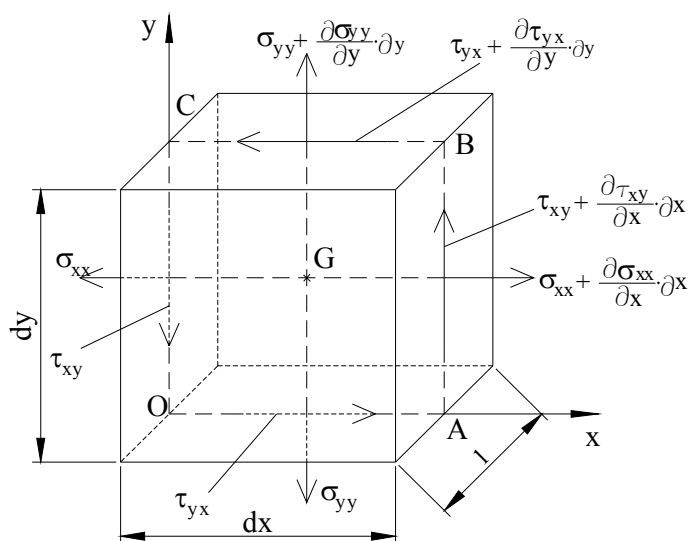


Figura 2.17

- proiecție pe orizontală:

$$\sigma_x \cdot dy \cdot 1 + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot 1 - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot 1 - \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 + X \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

- proiecție pe verticală:

$$\sigma_y \cdot dx \cdot 1 + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot 1 - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot 1 - \tau_{xy} \cdot dy \cdot 1 + Y \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

Se împart relațiile prin $dx \cdot dy$ se desfac parantezele și se reduc termenii asemenea.

Se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Prin generalizarea *relațiilor (2.31)* se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru pentru starea generală de tensiuni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Din a treia ecuație de echilibru (o sumă de momente față de centrul G al elementului) rezultă:

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot l \cdot \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot l \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot l \cdot \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot l \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

Împărțind ecuația prin $\frac{dx dy}{2}$ și apoi făcând $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$ se obține:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

În mod similar pentru starea generală de tensiuni se folosesc egalitățile:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ecuațiile (2.33) exprimă principiul dualității tensiunilor tangențiale.

2.4.2. Ecuații geometrice (între deformații și deplasări)

Ca rezultat al solicitării corpurile se deformează și apar deplasări. Se vor stabili relații geometrice între deformațiile specifice ϵ , \square și componentele deplasării volumului elementar u , v , w , ecuații valabile pentru orice material. Pentru ușurință demonstrația se va face pentru cazul *stării plane de deformații*. Prin *stare plană de deformație* se înțelege starea la care au loc deformații numai într-un singur plan (de exemplu deformațiile ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , γ_{xy} în planul xOy).

Sub acțiunea forțelor exterioare elementul din *figura 2.18* se deformează (își modifică lungimea laturilor precum și unghiul inițial drept dintre fețele acestuia). Întrucât studiul deformațiilor, pe care le obține elementul de volum în ansamblu, este o problemă dificilă se preferă să se studieze separat deformațiile proiecțiilor acestuia pe planele de coordonate. Se analizează proiecția $OABC$ a elementului de volum paralelipedic în planul xOy , înainte și după deplasare, respectiv deformarea acestuia (*figura 2.18*).

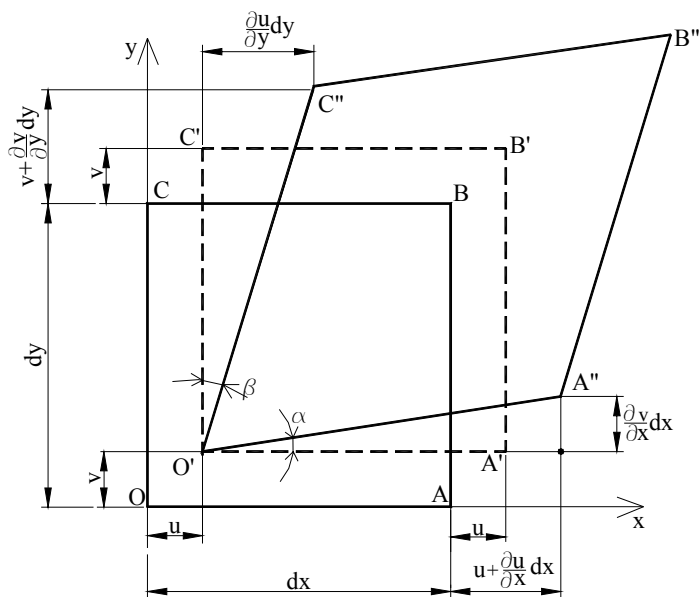


Figura 2.18

Componentele deplasărilor u , v pe axele Ox și Oy variază. Dacă punctul O are deplasările u și v atunci punctele A și C vor avea aceste deplasări plus creșterile diferențiale obținute prin modificarea coordonatelor punctelor (figura 2.18). Deplasarea totală a punctului A pe direcția Ox este $\Delta A_x = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, iar alungirea pe această direcție este:

$$\Delta dx = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Alungirea specifică pe aceeași direcție este dată de relația:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

În mod analog pe direcția Oy se obține:

$$\Delta dy = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

În mod analog se determină alungirea specifică în direcția Oz , încât pentru starea spațială de deformații se poate scrie:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.34}$$

În afara deplasării în lungul axei Ox punctul A are și o deplasare în lungul axei Oy : $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, iar punctul B are o deplasare în lungul axei Ox : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Dreptunghiul elementar $OABC$ se transformă în paralelogramul $O'A''B''C''$. Latura $O'A'$ se înclină cu unghiul α (întrucât unghiul este foarte mic, se poate accepta că este egal cu valoarea tangentei trigonometrice):

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

unde la numitor s-a neglijat $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$ față de unitate.

Latura $O'C'$ se rotește cu unghiul β și în mod analog rezultă:

$$\operatorname{tg} \beta \approx \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

În aceste condiții lunecarea specifică în planul xOy este dată de relația:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Prin permutări se obțin lunecările specifice în celelalte două plane. Pentru starea generală de deformații se poate scrie:

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

Așa cum deja s-a precizat pentru materialele izotrope lunecările specifice nu depind de sensul deformării și în consecință se poate scrie:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

Pentru starea plană de deformare *relațiile* (2.34), (2.35) se reduc la:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

Cele trei deformații nu sunt independente ele fiind funcții de u și v . Ele. Pentru a stabili relația dintre acestea se calculează:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}
\end{aligned}
\tag{2.38}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}
\tag{2.39}$$

Din relațiile anterioare se observă că:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (2.40)$$

Relația (2.40) exprimă faptul că materialul este continuu și poartă numele de *ecuația de continuitate* sau de *compatibilitate* a deformațiilor.

2.4.3. Ecuații constitutive (fizice)

Este absolut necesar să se stabilească o legătură între tensiuni și deformații. Acesta legătură se determină experimental, tensiunile și deformațiile fiind legate fizic prin legea de comportare a materialului sub acțiunea sarcinilor. Altfel spus: *un anumit material se deformează într-un anumit fel sub acțiunea unui anumit efort și invers în interiorul corpului se dezvoltă anumite tensiuni când acesta se deformează într-un anumit fel.*

Starea spațială de tensiuni

Elasticitatea materialului izotrop este definită de către *trei caracteristici elastice*:

E – modulul de elasticitate longitudinală (Young),

G - modulul de elasticitate transversală,

ν - coeficientul de contracție transversală (coeficientul Poisson),

dintre care numai *două sunt independente*.

Între aceste caracteristici există relația cunoscută din rezistența materialelor: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Pentru corpul izotrop aflat în stare spațială de tensiuni, relațiile constitutive pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \quad (2.41)$$

respectiv:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.42)$$

Relațiile reprezintă **legea lui Hooke pentru starea spațială de tensiuni** sau **legea lui Hooke generalizată** pentru materiale omogene și izotrope .

Din relațiile (2.41) pot fi determinate tensiunile funcție de deformații:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Starea plană de tensiuni

Pentru starea plană de tensiuni se obține din **legea lui Hooke generalizată** următoarele relații:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.45)$$

Din ultimile relații se exprimă tensiunile funcție de deformații:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Pentru direcțiile principale relațiile devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)\end{aligned}\tag{2.47}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)\end{aligned}\tag{2.48}$$

Starea uniaxială de tensiuni

Pentru starea uniaxială de tensiuni (de exemplu tracțiune pe direcția axei **Ox**) relațiile (2.44) devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= -\nu\sigma_{xx}\end{aligned}\tag{2.49}$$

Din prima relație (2.49), exprimând tensiunile funcție de deformații, rezultă binecunoscuta lege a lui Hooke:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}\tag{2.50}$$

2.5. Teorii de rupere (de rezistență)

Alegerea coeficientului de siguranță se face în raport cu valorile limită σ_c sau σ_r pentru stabilirea tensiunii admisibile, adică:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_L}{c}\tag{2.51}$$

unde σ_L reprezintă tensiunea normală care caracterizează starea limită.

Se consideră drept **stare de tensiune limită** a materialului starea de tensiuni care corespunde fie începerii ruperii materialului, fie începerii apariției

unui proces fizic care dintr-un motiv oarecare este considerat ca inadmisibil, nedorit sau periculos.

În starea monoaxială de tensiune aceste valori se obțin direct în urma încercărilor de laborator la întindere sau compresiune. Pentru un element aflat într-o stare de tensiune caracterizată prin tensiunile principale σ_1 , σ_2 , σ_3 determinate, calculul coeficientului de siguranță necesită determinarea experimentală a tensiunilor limită σ_{L1} , σ_{L2} , σ_{L3} și se determină cu relația:

$$c = \frac{\sigma_{L1}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{L2}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{L3}}{\sigma_3} \quad (2.52)$$

Aceste determinări experimentale se realizează rar în practică datorită numărului mare de încercări, a instalațiilor și a mașinilor complicate și costisitoare.

Necesitatea de a compara stările de tensiune din diferite puncte ale corpului, de a stabili punctul cel mai periculos și de a determina coeficientul de siguranță, impune găsirea unui criteriu de apariție a curgerii sau a unui criteriu de rezistență, adică a unui factor cu ajutorul căruia s-ar putea aprecia pericolul stării de tensiune și s-ar putea stabili locurile cele mai solicitate ale pieselor, fără a mai recurge la o încercare în fiecare caz în parte.

Compararea stărilor de tensiune se poate face ușor dacă se alege drept bază una din stările de tensiune, cea mai caracteristică și cea mai ușor de realizat experimental și apoi folosind criteriul adoptat se compară cu această stare de tensiune toate celelalte. Această stare de tensiune luată drept bază se numește ***echivalentă***. Drept ***stare echivalentă*** se ia starea monoaxială de tensiune, întrucât aceasta se poate realiza ușor fără a fi necesare mașini și dispozitive complicate, epruvetele au o formă simplă și sunt ușor de realizat, iar starea de tensiuni din porțiunea de calcul a epruvetei este omogenă.

Tensiunea echivalentă este tensiuna principală a unui element imaginar supus la întindere, executat din același material ca și elementul dat și care se află într-o stare de tensiuni tot atât de periculoasă ca și elementul dat.

S-au emis mai multe ipoteze asupra ruperii materialelor. Alegerea uneia dintre ipoteze este determinată de modul în care se verifică experimental aceasta pentru starea de tensiuni considerată. Prin urmare teoriile de rupere vor da expresiile tensiunii echivalente σ_{echiv} care fac posibilă compararea stării complexe de solicitare cu cea de întindere simplă. În urma determinării tensiunii echivalente relația de verificare pentru piesă este:

$$\sigma_{echiv} \leq \sigma_a \quad (2.53)$$

2.5.1. Ipoteza tensiunii normale maxime

Această ipoteză admite că starea limită se atinge atunci când tensiunea normală maximă din corp atinge valoarea tensiunii stării limită de la solicitarea de întindere monoaxială. Se aplică cu succes pentru predicția ruperii unor corpuri executate din materiale fragile supuse la solicitări statice.

Rezultatele experimentale confirmă această ipoteză în cazul ruperii materialelor fragile când tensiunea normală maximă este o tensiune de întindere. Ipoteza nu poate fi folosită drept criteriu de rezistență în cazul unei stării compuse de tensiuni deoarece în general conduce la supradimensionarea pieselor.

Utilizarea teoriei tensiunii normale maxime se face cu relația:

$$\sigma_{echiv} = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.54)$$

2.5.2. Ipoteza deformației specifice liniare maxime

După această ipoteză apariția stării periculoase este determinată de valoarea lungirii sau scurtării specifice maxime, atunci când aceasta este egală cu deformația periculoasă ε_{echiv} . Pentru calcule se folosește relația:

$$\sigma_{echiv} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.55)$$

2.5.3. Ipoteza tensiunii tangențiale maxime

Acest criteriu are la bază observațiile experimentale conform cărora la materialele ductile curgerea este rezultatul lunecărilor în lungul unor plane ale cristalelor sub acțiunea tensiunilor tangențiale. În baza acestei teorii, starea limită se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă atinge valoarea tensiunii tangențiale corespunzătoare stării limită de la încercarea de întindere monoaxială. Pentru cazul particular al barelor relația de calcul este:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.56)$$

Ipoteza tensiunii tangențiale maxime a fost verificată experimental mai ales pentru materialele tenace la solicitările de întindere biaxială și stările de tensiune biaxiale mixte. Ea este confirmată în cazul materialelor care au aceeași rezistență la întindere și la compresiune.

2.5.4. Ipoteza energiei de deformație

Această ipoteză consideră că starea periculoasă este atinsă atunci când energia de deformație specifică acumulată de piesă este egală cu energia specifică corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă.). Această ipoteză a fost verificată experimental în anumite cazuri de materialele tenace. Aceasta ipoteza se aplica printr-o relație de forma:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2} \quad (2.57)$$

2.5.5. Ipoteza energiei de deformație modificatoare de formă

Conform acestei ipoteze starea periculoasă este produsă nu de energia de deformație totală, ci numai de energia de deformație modificatoare de formă. Prin urmare se adoptă drept criteriu de rezistență cantitatea de energie potențială specifică de variație a formei acumulată de materialul deformat în punctul considerat. Acest criteriu se aplica prin următoarea relație:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (2.58)$$

Această ipoteză se verifică experimental pentru materialele tenace. De asemenea aceasta se verifică și pentru starea plastică a materialului. Această ultimă ipoteză corespunde mai bine cu realitatea decât toate celelalte ipoteze. De asemenea trebuie remarcat faptul că între această ipoteză de rupere și cea a tensiunilor tangențiale maxime există diferențe foarte mici, în momentul de față aceste două ipoteze având o largă utilizare.

De reținut:

Experiențele au arătat că nici una din teoriile de rezistență nu s-a impus ca o teorie general valabilă. Totuși în majoritatea stărilor de tensiune teoria lui Mohr, teoriile tensiunii tangențiale maxime și a energiei de deformație modificatoare de formă dau rezultatele cele mai apropiate de cele obținute experimental.

Pentru materialele tenace (oțel) se recomandă utilizarea teoriei tensiunii tangențiale maxime:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

și a teoriei energiei de deformație modificatoare de formă:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

Pentru materialele fragile se recomandă utilizarea ipotezei deformației specifice liniare maxime:

$$\sigma_{echiv} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

2.5.6. Teoria stării limită a lui Mohr

Conform acestei teorii starea periculoasă apare în momentul în care starea de tensiuni dintr-un punct a atins o stare limită care este caracteristică fiecărui material.

Teoria stării limită a lui Mohr nu necesită o verificare experimentală suplimentară deoarece se bazează în întregime pe date experimentale. Aceasta se aplică în special la materialele fragile când solicitarea dominantă este compresiunea.

Starea spațială de tensiuni principale (cu $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$) se poate reprezenta în plan cu ajutorul *cercului lui Mohr*. În baza ipotezei tensiunii tangențiale maxime starea limită este definită de tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ și este independentă de valoarea tensiunii principale } \sigma_2.$$

Prin urmare în definirea stării limită interesează numai cercul de diametru maxim $\sigma_1 - \sigma_3$ denumit *cerc determinant*.

În cazul materialelor tenace drept stare limită se consideră atingerea limitei de curgere σ_c . Pentru determinarea stării limită pentru un material se încarcă o serie de epruvete din materialul respectiv cu diferite feluri de solicitări, în urma cărora se obțin σ_{1L} și σ_{3L} (în cazul considerat σ_{1c} și σ_{3c}). Valorile astfel obținute se reprezintă în sistemul de axe rectangulare $\sigma\tau$ prin cercurile lui Mohr cu centre pe axa $O\sigma$ (figura 2.19).

În figură se reprezintă starea de tensiuni la un material care are rezistența de rupere la întindere diferită de cea de la compresiune ($\sigma_{cc} \neq \sigma_{ct}$), deci cercurile C_1 și respectiv C_2 care reprezintă întinderea și compresiunea simplă și care au diametre diferite. Înfășurătoarea acestor cercuri reprezintă starea limită pentru materialul respectiv și pentru un material dat este unică.

Dacă se cunoaște înfășurătoarea pentru studiul rezistenței se procedează astfel: pentru starea de tensiuni dată se determină σ_1 și σ_3 și se construiește *cercul lui Mohr*. Dacă acest cerc este în interiorul înfășurătoarei, starea de tensiuni studiată se găsește în zona de rezistență a materialului. Dacă cercul lui Mohr atinge curba înfășurătoare materialul trebuie să cedeze.

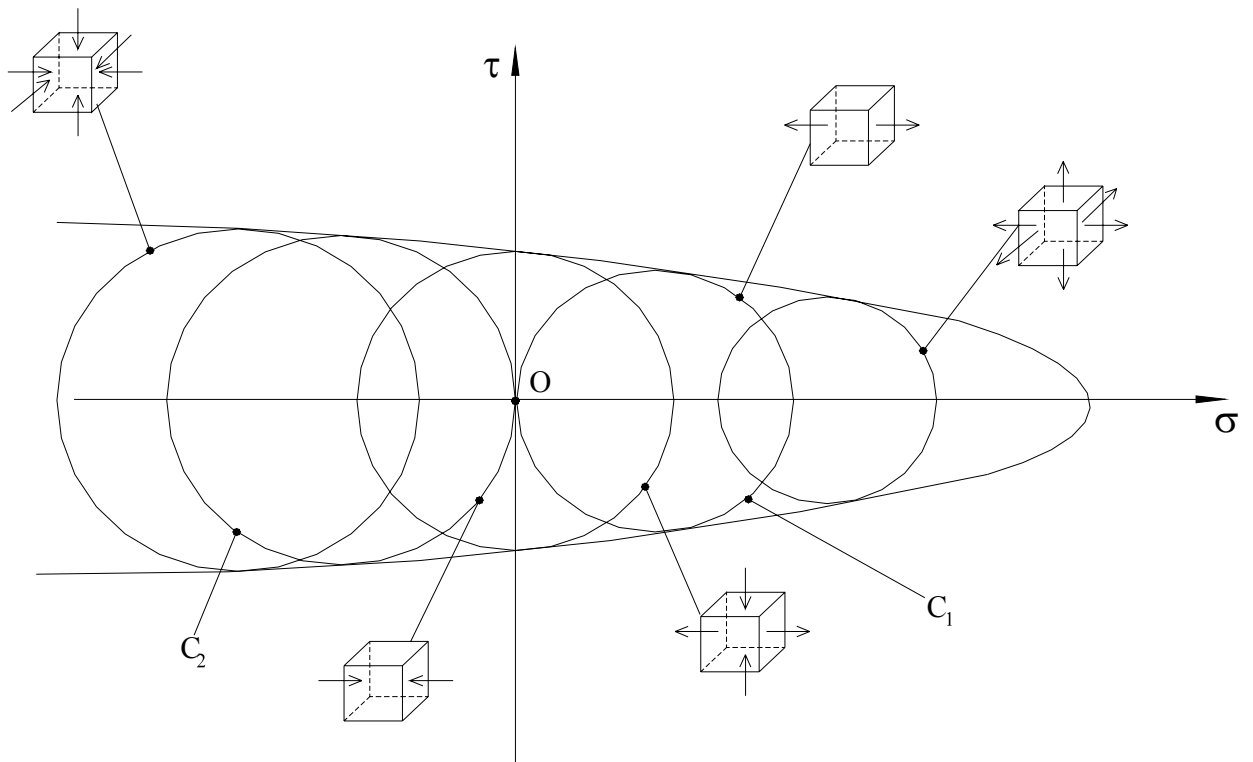


Figura 2.19

Când materialul rezistă la fel la întindere ca și la compresiune (materiale tenace) cecurile C_1 și C_2 au diametre egale și înfășurătoarea este reprezentată în acest caz prin două drepte tangente la aceste cercuri pe porțiunea dintre ele (figura 2.20).

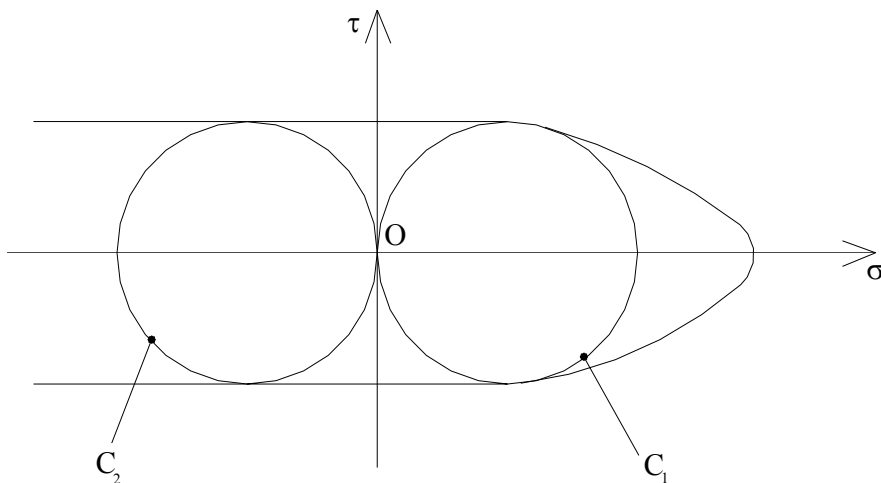


Figura 2.20.

Dacă pentru curba înfășurătoare ce reprezintă starea limită coeficientul de siguranță este $c=1$ atunci pentru curbele înfășurătoare corespunzătoare stărilor sub starea limită coeficientul de siguranță $c>1$, iar în afară $c<1$.

Coeficientul de siguranță este determinat în momentul în care se stabilește care dintre înfășurători este tangentă la cercul ce determină starea de tensiune studiată. Prin urmare, stabilirea coeficientului de siguranță pe baza acestei teorii este corectă, dar în același timp este foarte laborioasă deoarece pentru fiecare material trebuie construite astfel de înfășurători limită pe bază de date experimentale rezultate din încărcări.

Din această cauză, se consideră în mod simplificat că se înlocuiește curba stării limită cu dreapta MLN tangentă la cercurile lui Mohr, care reprezintă întinderea simplă și compresiunea simplă (*figura 2.21*). În acest caz înfășurătoarea se construiește numai pe baza a două încercări, una de întindere și alta de compresiune.

Cu notațiile din figură se poate scrie:

$$O_1K = O_1O + OK = \frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_1 = \frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{ci}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Pentru o stare de solicitare oarecare definită prin tensiunile principale σ_1 și σ_3 se construiește cercul cu centrul în K având raza $KL = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Se poate stabili o relație între tensiunile principale σ_1 , σ_3 și limitele de curgere σ_{ci} , σ_{cc} dată de condiția tangentei comune la cele trei cercuri.

Considerând triunghiurile asemenea O_1PK și O_1RO_2 și scriind proporționalitatea dintre laturi se obține:

$$\frac{O_1K}{O_1O_2} = \frac{KP}{O_2R}$$

sau

$$\frac{\frac{\sigma_{ci}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_{cc}}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{ci}}{2}}{\frac{\sigma_{cc}}{2} - \frac{\sigma_{ci}}{2}}$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\sigma_{ci} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}} \cdot \sigma_3 \quad (2.59)$$

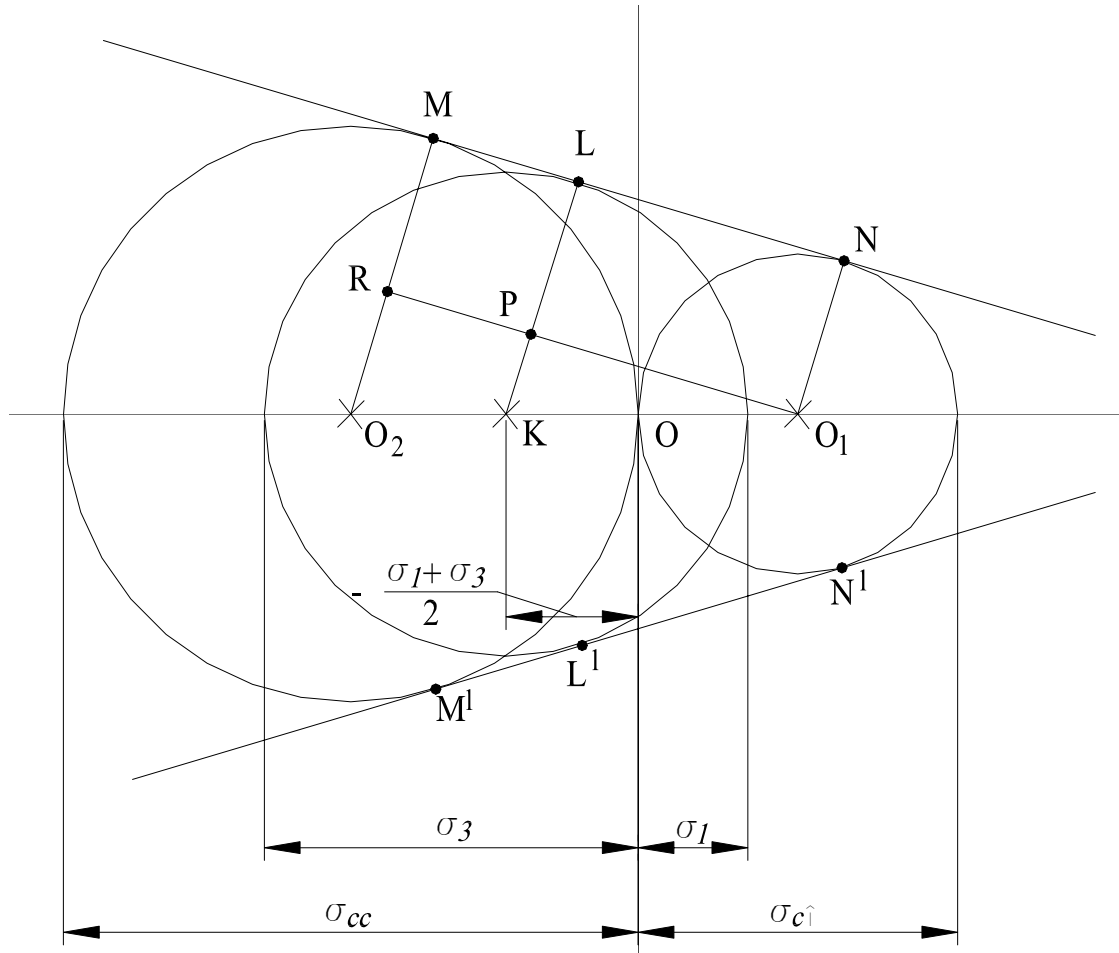


Figura 2.21

În relația (2.59) σ_{ci} reprezintă starea limită pentru încercarea de întindere simplă, luată egală cu limita de curgere. Prin urmare membrul din stânga al relației este tensiunea echivalentă stării limită. Relația (2.59) devine:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}} \cdot \sigma_3$$

sau notând $k = \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}}$ se obține:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \quad (2.60)$$

În cazul materialelor tenace $k=1$ și relația (2.60) devine:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2.61)$$

Ultima relație este similară cu relația care reprezintă criteriul de rezistență rezultat din ipoteza tensiunii tangențiale maxime.

Probleme propuse:

1. Asupra unui element separat dintr-un corp acționează tensiunile:

$\sigma_{xx} = 50MPa$, $\sigma_{yy} = 25MPa$, $\tau_{xy} = 35MPa$. Se cere:

- să se determine tensiunile normale principale și direcțiile principale;
- să se determine tensiunile tangențiale extreme și direcțiile principale;
- să se reprezinte stările de eforturi principale;
- să se traseze cercul lui Mohr și eplisa lui Lamé.

2. Se cunosc următoarele stări de tensiune date de tensorii tensiune:

$$T_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{\sigma_3} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\sigma_4} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{\sigma_5} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{\sigma_6} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dacă $\sigma_{xx} = 120MPa$, $\sigma_{yy} = 45MPa$, $\tau_{xy} = 50MPa$ se cere:

- să se evidențieze acțiunea tensiunilor pe volume paralelipedice elementare și să se specifice solicitările corespunzătoare;
- să se determine tensiunile normale principale și direcțiile principale;
- să se determine tensiunile tangențiale extreme;
- să se reprezinte grafic stările de tensiune prin cercul lui Mohr.

3. Să se calculeze tensiunile echivalente pe baza teoriilor de rezistență în cazul unei forfecari pure în care tensiunile tangențiale au valoarea de 55MPa .

4. Un cub cu latura de 100mm este solicitat pe trei direcții. În urma solicitării deformația cubului este: două laturi suferă o lungire de $50\mu\text{m}$ și respectiv $80\mu\text{m}$, iar a treia latură suferă o scurtare de $150\mu\text{m}$. Să se calculeze tensiunile normale ce acționează pe fețele cubului ($E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$, $\nu = 0,35$).

5. Grinda de oțel ($E = 2 \cdot 10^5\text{MPa}$) din figura 2.31 acumulează în urma solicitării o energie potențială de deformație $U = 39500\text{N}\cdot\text{mm}$.

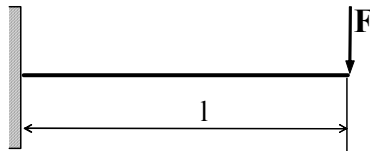


Figura 2.22.

Dacă grinda are secțiune circulară cu diametrul $d = 100\text{mm}$, $l = 1,2\text{m}$, să se verifice dacă materialul rămâne în domeniul elastic ($\sigma_e = 180\text{MPa}$).

6. Se cunosc următoarele stări de deformație date de tensorii deformație:

$$T_{\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{\varepsilon_2} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{yx}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dacă $\varepsilon_{xx} = 0,6 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{yy} = 0,4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = 0,7 \cdot 10^{-3}$ se cere:

- să se specifice solicitările corespunzătoare;
- să se determine deformațiile specifice principale și direcțiile lor;
- să se reprezinta grafic stările de deformație prin cercul lui Mohr.

CAPITOLUL 3

SOLICITĂRI COMPUSE

3.1. Generalități

Solicitarea care produce în secțiunea transversală două sau mai multe tensiuni se numeste *solicitare compusă*. Funcție de natura tensiunilor care iau naștere în secțiunea transversală solicitările compuse se pot clasifica astfel:

1. *Solicitări la care apar tensiuni pe aceeași direcție* (tensiuni de aceeași natură). Tensiunea rezultantă se calculează ca suma algebrică a tensiunilor componente (cu condiția ca tensiunea rezultantă și cele componente să nu depășească limita de proporționalitate) și se impune condiția:

$$\begin{aligned}\sigma_{rez} &= \sum_i \sigma_i \leq \sigma_a \\ \tau_{rez} &= \sum_i \tau_i \leq \tau_a\end{aligned}\tag{3.1}$$

În această categorie intră:

- solicitarea axială excentrică;
- solicitarea de încovoiere oblică (încovoiere dublă);
- solicitarea axială (întindere sau compresiune) și încovoiere;

- solicitarea de forfecare cu răsucire etc.

2. *Solicitări la care apar tensiuni pe direcții diferite* (tensiuni de natură diferită). Tensiunea echivalentă se calculează, în acest caz, pe baza uneia dintre teoriile de rezistență și se impune condiția:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a \quad (3.2)$$

În această categorie intră:

- solicitarea de încovoiere cu răsucire;
- solicitarea de răsucire cu forță axială etc.

3.2. Solicitări compuse la care apar tensiuni pe aceeași direcție

3.2.1. Solicitarea axială excentrică

În cazul solicitării axiale s-a considerat că toate forțele lucrează în centrul de greutate al secțiunii transversale, adică pe axa geometrică a barei. În practică forțele pot lucra și *excentric* fiind paralele cu axa barei. Dacă bara este solicitată de o forță care nu este aplicată pe direcția centrelor de greutate și deci nu coincide cu nici una din axele principale de inerție rezultă o *solicitare compusă de încovoiere cu forță axială*.

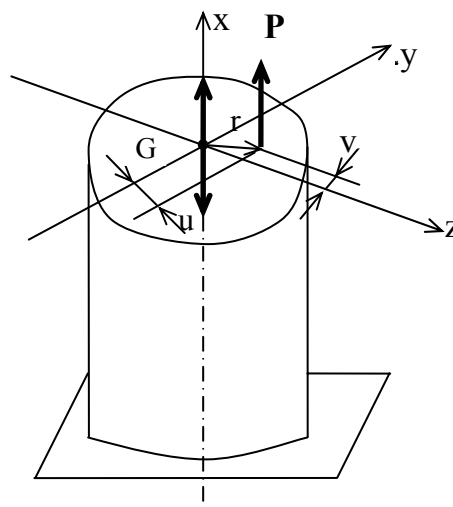


Figura 3.1.

Se consideră o bară de secțiune oarecare supusă la întindere de o forță P . Forța lucrează excentric, având raza de poziție r și coordonatele u și v (figura 3.1.). Se duc în centrul de greutate G al secțiunii două forțe P egale și de sens contrar. Se obține un cuplu egal cu $M = P \cdot r$ și o forță axială $N=P$. Se reprezintă vectorial momentul M (perpendicular pe planul pe care lucrează forța P). Se descompune acest moment după axele Gz și Gy (figura 3.2.).

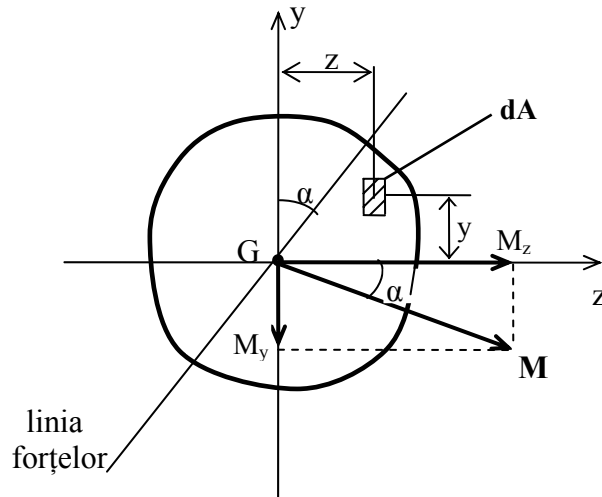


Figura 3.2.

Pe un element de arie oarecare dA , de coordonate z și y , apar tensiuni normale date de forța axială N și de momentele încovoietoare M_z și M_y . Tensiunea rezultantă este suma tensiunilor corespunzătoare celor trei solicitări simple:

$$\sigma = \sigma_{(N)} + \sigma_{(M_z)} + \sigma_{(M_y)} \quad (3.3.)$$

$$\sigma_{(N)} = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

unde:

$$\sigma_{(M_z)} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (3.4.)$$

$$\sigma_{(M_y)} = \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

Ținând cont de relația 3.4., relația 3.3. devine:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (3.5)$$

Dar:

$$\begin{aligned} M_z &= M \cdot \cos \alpha = P \cdot r \cdot \cos \alpha = P \cdot v \\ M_y &= M \cdot \sin \alpha = P \cdot r \cdot \sin \alpha = P \cdot u \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ținând cont de *relația (3.6.)*, *relația (3.5.)* devine:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot v \cdot y}{I_z} + \frac{P \cdot u \cdot z}{I_y} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{u \cdot z}{\frac{I_y}{A}} + \frac{v \cdot y}{\frac{I_z}{A}} \right) = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{u \cdot z}{i_y^2} + \frac{v \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (3.7)$$

unde: $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$, $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$ - razele de girație sau de inerție (în cazul studiat raze principale centrale de inerție ale secțiunii transversale).

Prin urmare expresia tensiunii într-un punct de coordonate z și y este:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{u \cdot z}{i_y^2} + \frac{v \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (3.8)$$

Observație:

- În relația (3.8.) semnul (+) se alege în cazul unei solicitari de **întindere excentrică**, iar semnul (-) pentru **compresiunea excentrică**.

Dacă ultima relație se egalează cu zero se obține ecuația axei neutre (locul geometric al punctelor pentru care tensiunile sunt nule). Deoarece $\frac{P}{A} \neq 0$ se obține:

$$1 + \frac{u \cdot z}{i_y^2} + \frac{v \cdot y}{i_z^2} = 0 \quad (3.9)$$

Observații:

- Se observă că poziția axei neutre nu depinde de mărimea forței ci numai de locul de aplicare al acesteia și de forma geometrică a secțiunii transversale.

- Se pot demonstra următoarele două proprietăți ale axei neutre:
 1. Când axa neutră se rotește în jurul unui punct, punctul de aplicație al forței se deplasează pe o dreaptă.
 2. Când punctul de aplicație al forței se îndepărtează de centrul de greutate al secțiunii axa neutră se apropie de secțiune (punctul de aplicație al forței și axa neutră au mișcări în același sens)

Poziția axei neutre se stabilește prin tăieturi:

$$z = 0 \Rightarrow y_o = -\frac{i_z^2}{v} \quad (3.10.)$$

$$y = 0 \Rightarrow z_o = -\frac{i_z^2}{u}$$

Deoarece pe axa neutră tensiunea este zero rezultă că aceasta împarte secțiunea în două: de o parte a axei avem solicitare de întindere, iar de cealaltă parte solicitare de compresiune. Tensiunile maxime și minime se găsesc în punctele cele mai îndepărtate ale secțiunii față de axa neutră: cunoscând poziția axei neutre se duc tangente la conturul secțiunii, paralele cu aceasta și se obțin punctele din secțiune unde tensiunea are valorile maxime și minime. Înlocuind în relația (3.9.) pe z și y , pe rând, cu coordonatele acestor puncte se determină σ_{max} și σ_{min} (figura 3.3.).

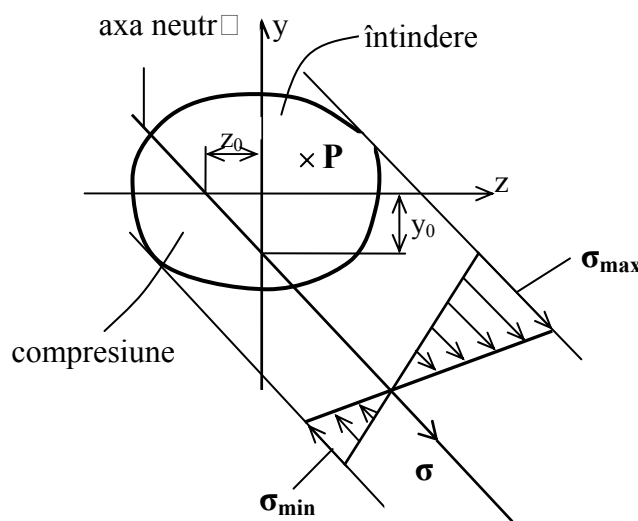


Figura 3.3.

Pentru solicitarea axială excentrică se poate efectua doar un *calcul de verificare*. Se procedează astfel:

- se stabilește poziția axei neutre;
- se caută punctele cele mai îndepărtate ale secțiunii față de această axă (punctele cele mai solicitate);
- se introduc coordonatele acestor puncte în *relația (3.9.)* și se verifică dacă este îndeplinită condiția:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_a \quad (3.11.)$$

3.2.1.1. Sâmbure central

S-a precizat anterior că axa neutră împarte secțiunea transversală în două zone: una solicitată la întindere și cealaltă la compresiune. Pentru materialele care se comportă diferit la întindere și compresiune se poate pune problema ca pe secțiune să existe un singur fel de solicitare. În acest caz axa neutră poate fi cel mult tangentă la secțiune. Există o zonă care conține centrul de greutate al secțiunii, având proprietatea că pentru orice poziție a punctului de aplicație al forței care aparține sâmburelui central axa neutră nu taie secțiunea (pe secțiune sunt numai tensiuni de același semn).

Prin definiție *locul geometric al tuturor punctelor de aplicație ale forței astfel încât pe secțiune să existe un singur fel de solicitare (axa neutră să fie tangentă la secțiune) poartă numele de sâmbure central*.

Pentru determinarea conturului sâmburelui central se caută să se găsească acele puncte de aplicație ale forței, pentru care axa neutră este tangentă la conturul secțiunii. Pentru a stabili sâmburele central se procedează la identificarea ecuației axei neutre cu ecuația tangentei la contur.

Aplicații:

Să se determine sâmburele central pentru secțiunile din *figurile 3.4. și 3.5.*

1. Secțiunea dreptunghiulară

Se consideră axa neutră tangentă la secțiune pe latura AB în poziția d_1 (figura 3.4.).

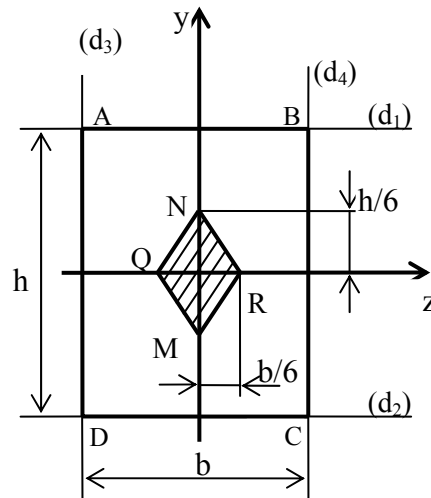


Figura 3.4.

Din ecuația dreptei d_1 efectuând calculele se obține:

$$y = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{2y}{h} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{2y}{h} = 0 \quad (3.12)$$

Din identificarea relațiilor (3.9.) și (3.12.) rezultă:

$$u = 0$$

$$v = -\frac{2 \cdot i_z^2}{h}$$

sau înlocuind raza de girație

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12}$$

se obține:

$$u = 0$$

$$v = -\frac{2}{h} \cdot \frac{h^2}{12} = -\frac{h}{6} \quad (3.13)$$

Valorile indicate de *relația* (3.13.) reprezintă coordonatele punctului $M(0, -h/6)$ indicat în *figura 3.4.* Dacă se consideră axa neutră în poziția simetrică d_2 se obține în mod similar punctul $N(0, h/6)$.

Se consideră apoi axa neutră tangentă la secțiune pe latura AD în poziția d_3 (*figura 3.4.*). Din ecuația dreptei d_3 efectuând calculele se obține:

$$z = -\frac{b}{2} \Rightarrow \frac{2z}{b} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{2z}{b} = 0 \quad (3.14)$$

Din identificarea *relațiilor* (3.9.) și (3.14.) rezultă:

$$u = \frac{2 \cdot i_y^2}{b}$$

$$v = 0$$

sau înlocuind raza de girație

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b^3 \cdot h}{12}}{b \cdot h} = \frac{b^2}{12}$$

se obține:

$$u = \frac{2}{b} \cdot \frac{b^2}{12} = \frac{b}{6}$$

$$v = 0 \quad (3.15)$$

Valorile indicate de *relația* (3.15.) reprezintă coordonatele punctului de aplicație al forței, punctul $R(b/6, 0)$ indicat în *figura 3.4.* Dacă se consideră axa neutră în poziția simetrică d_4 se obține în mod similar punctul $Q(-b/6, 0)$. Se figurează punctele M, N, R, Q care se unesc prin segmente de dreaptă și se obține sâmburele central (*un romb* cu diagonalele $h/3$ și $b/3$).

2. Secțiunea circulară

Întrucât secțiunea circulară admite o infinitate de tangente, sâmburele central se va obține nu prin particularizarea poziției tangentei la contur ci prin determinarea ecuației conturului sâmburelui central.

Se consideră un punct $C(z_0, y_0)$ de pe conturul secțiunii și se consideră tangenta la cerc în acest punct (*figura 3.5.*).

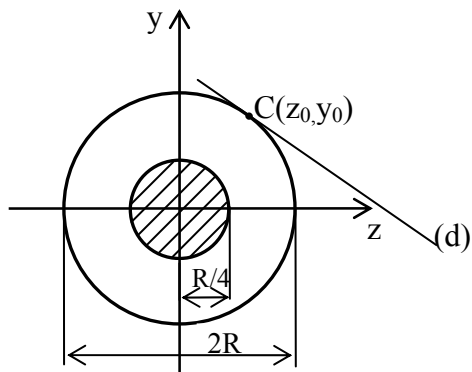


Figura 3.5.

Pornind de la ecuația cercului:

$$z^2 + y^2 = R^2$$

ecuația dreptei d (ecuația tangentei) este:

$$z \cdot z_0 + y \cdot y_0 = R^2$$

Prin efectuarea calculele se obține:

$$\frac{z_0}{R^2} \cdot z + \frac{y_0}{R^2} y = 1 \Rightarrow 1 - \frac{z_0}{R^2} \cdot z - \frac{y_0}{R^2} \cdot y = 0 \quad (3.16)$$

Din identificarea *relațiilor* (3.9.) și (3.16.) rezultă:

$$1 + \frac{u \cdot z}{i_y^2} + \frac{v \cdot y}{i_z^2} = 0$$

$$1 - \frac{z \cdot z_0}{R^2} - \frac{y \cdot y_0}{R^2} = 0$$

de unde:

$$-\frac{z_0}{R^2} = \frac{u}{i_y^2}$$

$$-\frac{y_0}{R^2} = \frac{v}{i_z^2}$$

sau

$$\begin{aligned} z_o &= -\frac{u \cdot R^2}{i_y^2} \\ y_o &= -\frac{v \cdot R^2}{i_z^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pentru secțiunea circulară:

$$i_z^2 = i_y^2 = \frac{\pi \cdot R^4}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{R^2}{4}$$

Înlocuind cele două raze de inerție în *relația (3.17)* se obține:

$$\begin{aligned} z_o &= -4u \\ y_o &= -4v \end{aligned}$$

Se particularizează ecuația cercului pentru punctul **C** și se obține ecuația sâmburelui central:

$$z_o^2 + y_o^2 = R^2 \Rightarrow 16u^2 + 16v^2 = R^2 \Rightarrow u^2 + v^2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 \quad (3.18)$$

Prin urmare sâmburele central este *un cerc* a cărui rază este un sfert din raza cercului (*figura 3.5.*).

3.2.2. Solicitarea de încovoiere oblică (dublă)

La solicitarea de încovoiere simplă s-a considerat că toate încărcările acționează într-un plan de simetrie longitudinal al grinzii sau în lipsa acestuia într-un plan ce conține una din axele centrale principale de inerție. **Încovoierea oblică** se produce atunci când toate încărcările lucrează într-un plan longitudinal oarecare care face un unghi α cu una din axele centrale principale.

Se consideră o grindă solicitată la încovoiere de o forță **P** ce face un unghi α cu axa centrală principală de inerție **Oy** (*figura 3.6.*).

Momentul încovoiător într-o secțiune **x**, respectiv momentul maxim **M** pentru grinda considerată sunt:

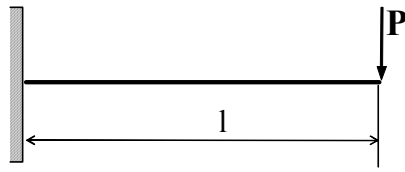


Figura 3.6.

$$M(x) = -P \cdot x$$

$$M_{max} = M = -P \cdot l$$

Se reprezintă momentul M și se descompune după axele Oz și Oy (figura 3.7.).

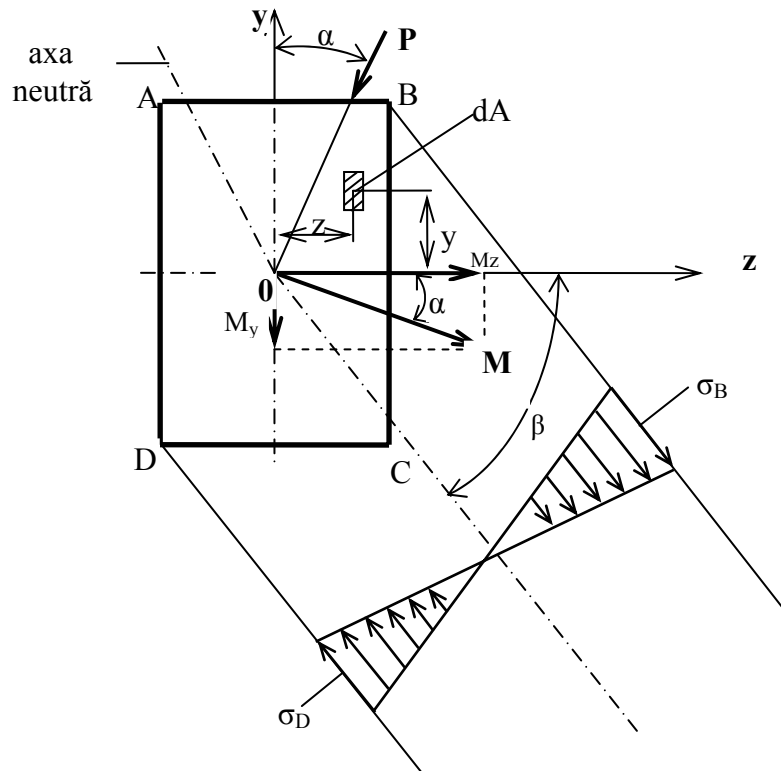


Figura 3.7.

Va rezulta în acest fel o încovoiere dublă în jurul axei Oz (dată de momentul M_z) și alta în jurul axei Oy (dată de momentul M_y). Pe un element infinitezimal de suprafață oarecare dA de coordonate z și y apar tensiunile normale date de cele două momente. Cele două tensiuni fiind tensiuni de aceeași

natură și deci vectori coliniari, rezultă că tensiunea totală va fi suma tensiunilor de la cele două încovoieri:

$$\sigma = \sigma_{(M_z)} + \sigma_{(M_y)}$$

Cele două tensiuni componente se calculează cu *relația lui Navier*. Prin urmare:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (3.19)$$

Ținând cont de expresiile celor două momente încovoietoare:

$$M_z = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha$$

expresia momentului din *relația (3.19.)* devine:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z} \cdot \cos \alpha + \frac{M \cdot z}{I_y} \cdot \sin \alpha \quad (3.20)$$

Ecuția axei neutre se obține impunând condiția $\sigma = 0$ și se obține:

$$\frac{M \cdot y}{I_z} \cdot \cos \alpha + \frac{M \cdot z}{I_y} \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow y = -z \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.21)$$

Relația (3.21.) reprezintă ecuația unei drepte a cărei pantă este:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.22)$$

Semnul minus din relația precedentă indică faptul că unghiul se măsoară sub axa Oz . Cum de regulă:

$$I_z > I_y \Rightarrow |\beta| > |\alpha|$$

rezultă că axa neutră nu mai corespunde cu direcția vectorului moment așa cum se întâmplă la solicitarea de încovoiere simplă.

Cunoscând poziția axei neutre se poate reprezenta variația tensiunilor și se pot determina valorile maxime ale acestora ducând tangente la secțiune paralele cu axa neutră. Ca și în cazul încovoierii simple tensiunile maxime și minime apar în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră (în cazul prezentat în punctele **B** și **D**). Valoarea maximă a tensiunii se determină cu relația:

$$\sigma_B = \sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I_z} \cdot \cos \alpha + \frac{M \cdot z_{max}}{I_y} \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \cos \alpha + \frac{M}{W_y} \cdot \sin \alpha \quad (3.23)$$

Pentru verificare se impune condiția $\sigma_{max} \leq \sigma_a$ sau ținând cont de relația (3.23.) rezultă:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin \alpha \right) \leq \sigma_a \quad (3.24)$$

Se notează:

$$\frac{W_z}{W_y} = k \quad (3.25)$$

și relația (3.24) devine:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \leq \sigma_a \quad (3.26)$$

În cazul secțiunii dreptunghiulare se știe că:

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; W_y = \frac{hb^2}{6} \Rightarrow k = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b}$$

Înlocuind coeficientul k relația (3.26) devine:

$$\sigma_{max} = \frac{6M}{b^2 h^2} \cdot (b \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha) \leq \sigma_a$$

Pentru dimensionare se consideră la limită în relația (3.26.) semnul de egalitate și se obține:

$$\frac{M}{W_z} \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) = \sigma_a \quad (3.27)$$

În relație apar două necunoscute W_z și W_y și din acest motiv dimensionarea nu se poate face decât prin încercări. Se procedează astfel:

- se dă o valoare arbitrară coeficientului k și se determină W_z cu relația:

$$W_z = \frac{M}{\sigma_a} \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha)$$

- cunoscând k și W_z se determină W_y din *relația (3.25)*.
- se verifică inegalitatea din *relația (3.26)*. Dacă inegalitatea nu este satisfăcută calculul se repetă.

Observație:

- Pentru profilele laminate valorile coeficientului k se determină ca raport $\frac{W_z}{W_y}$ la primul și ultimul profil din tabele.

3.2.3. Solicitarea compusă de încovoiere și forță axială

Această solicitare apare la grinzile drepte solicitate de sarcini oblice și la sistemele plane (grinzi cotite, cadre, bare curbe plane static determinate și static nedeterminate). În acest caz se tratează pe rând fiecare solicitare. Solicitarea de încovoiere conduce la o tensiune normală dată de *relația lui Navier* ($\sigma = \frac{M_{i\max}}{W_z}$), iar din solicitarea axială va rezulta o tensiune normală calculată

cu relația cunoscută $\sigma = \frac{N}{A}$.

Cele două tensiuni sunt de aceeași natură și prin urmare tensiunea rezultantă va fi suma tensiunilor de la cele două solicitări simple:

$$\sigma_{rez} = \frac{M_{i\max}}{W_z} \pm \frac{N}{A} \quad (3.28)$$

Pentru calcul se va rezolva separat solicitarea de încovoiere și de forță axială și se trasează diagramele de moment încovoietor și de forță axială. Cele două diagrame vor avea anumite semne corespunzătoare convențiilor de semne adoptate. Pentru efectuarea calculului de rezistență se folosește *relația (3.28)* înlocuindu-se valorile numerice pentru M și N cu semnele din diagramă și

alegându-se între termeni semnul plus sau minus astfel încât valoarea absolută a rezultatului să fie maximă. Acest mod de calcul este permis numai în cazul oțelurilor pentru că au aceeași rezistență la întindere și la compresiune. Pentru materialele care rezistă diferit la întindere și la compresiune trebuie studiată starea de tensiune pentru a determina tensiunea maximă din zona întinsă și din zona comprimată. Fiecare dintre acestea se compară separat cu tensiunea admisibilă la întindere sau compresiune.

Calculul de verificare și dimensionare

Pentru ***verificare*** se impune condiția:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_a$$

Având trasate cele două diagrame de moment încovoietor și de forță tăietoare pot rezulta următoarele două cazuri:

1. Momentul încovoietor și forța axială ating valoarea maximă în aceeași secțiune care va fi sigur secțiunea periculoasă și în care se verifică dacă este respectată inegalitatea anterioară.

2. Momentul încovoietor maxim și forța axială maximă nu corespund aceleiași secțiuni. În acest caz se face o verificare dublă atât în dreptul momentului încovoietor maxim cât și în dreptul forței axiale maxime.

Pentru ***dimensionare*** se consideră la limită în relația de verificare semnul de egalitate și se obține:

$$\frac{M_{i\ max}}{W_z} + \frac{N}{A} = \sigma_a$$

Relația anterioară conține două necunoscute: W_z și A . Cum ecuația nu poate fi rezolvată se ține cont că în mod obișnuit termenul $\frac{N}{A}$ este mult mai mic decât

$\frac{M_{i\ max}}{W_z}$ și se face o predimensionare numai din condiția de încovoiere. Se obține:

$$W_{z_{nec}} = \frac{M_{i_{max}}}{\sigma_a}$$

Pentru a ține cont că s-a neglijat termenul $\frac{N}{A}$ se micșorează rezistența admisibilă

σ_a cu un procent de 10% adică în calcul se folosește $\sigma'_a = 0,9 \cdot \sigma_a$. Prin urmare:

$$W_{z_{nec}} = \frac{M_{i_{max}}}{\sigma'_a}$$

După aceasta se determină și aria A . După această predimensionare având modulul de rezistență și aria secțiunii transversale se va proceda la un ultim calcul de verificare luând în considerație rezistența reală a materialului, adică:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{i_{max}}}{W_z} + \frac{N}{A} \leq \sigma_a$$

Dacă inegalitatea este satisfăcută dimensionarea este corectă. În caz contrar se va trece la mărirea secțiunii, prin încercări, până când $\sigma_{ef} \leq \sigma_a$.

Observație:

- Pentru solicitarea de încovoiere cu compresiune calculul se face în același mod. În acest caz pentru grinzi de lungime mare este necesar și un calcul de verificare la flambaj.

3.2.3.1. Grinzi cotite (cadre)

Un ansamblu de bare unite între ele prin noduri rigide se numeste **cadru**.

Cadrele se clasifică stfel:

- cadre static determinate (în mod uzual aceste cadre se numesc grinzi cotite);
- cadre static nedeterminate, care se pot clasifica la rândul lor astfel
 1. cadre static nedeterminate exterior (necunoscute sunt reacțiunile din reazeme);
 2. cadre static nedeterminate interior (necunoscute sunt eforturile din bare);

3. *cadre static nedeterminate exterior și interior* (necunoscute sunt atât reacțiunile din reazeme cât și eforturile din bare).

Cadrela sunt supuse la solicitarea compusă de încovoiere cu forță axială. Aceasta înseamnă că trebuie trasate diagramele de moment încovoietor și forță axială, iar pentru verificarea diagramei de moment și diagrama de forță tăietoare. Pentru trasarea acestor diagrame rămân valabile toate regulile stabilite la grinzile drepte exceptând doar regula de semne pentru moment încovoietor și modul de reprezentare a diagramei.

Pentru a stabili semnul momentului încovoietor într-o secțiune se imaginează o fibră din interiorul barei care se reprezintă punctat. Dacă această fibră este întinsă momentul se consideră pozitiv, iar dacă fibra este comprimată momentul se consideră negativ. Cele trei diagrame (de moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială) vor fi reprezentate de fiecare dată pe conturul cadrului.

3.2.3.2. *Cadre static determinate (grinzi cotite)*

Să se traseze diagramele de eforturi (M , N , T) pentru grinda cotită din figura 3. 8.

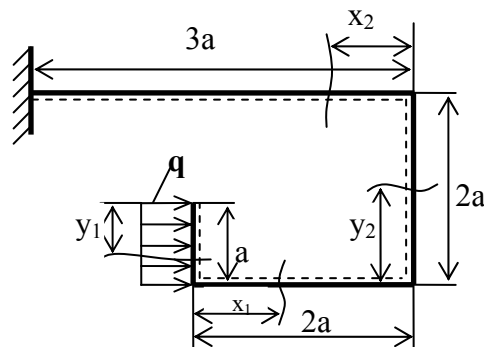


Figura 3.8.

Rezolvare:

Se poate porni de la capătul liber și nu mai este necesar calculul celor trei reacțiuni din încastrare.

Diagrama de moment încovoietor

Se consideră fibra punctată la interiorul cadrului. Se scriu expresiile momentului încovoietor pe cele patru regiuni și se studiază variația momentului.

$$y_1 \in [0, a]$$

$$M(y_1) = -q \cdot y_1 \cdot \frac{y_1}{2} = -\frac{q \cdot y_1^2}{2}$$

Se studiază variația momentului:

$$M(0) = 0; M(a) = -\frac{qa^2}{2}$$

$$M'(y_1) = -q \cdot y_1 \Rightarrow M'(y_1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \in [0, a]$$

$$M''(y_1) = -q < 0 \Rightarrow M_{max} = M(0) = 0$$

$$x_1 \in [0, 2a]$$

$$M(x_1) = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^2}{2} = const.$$

$$y_2 \in [0, 2a]$$

$$M(y_2) = q \cdot a \cdot \left(y_2 - \frac{a}{2} \right)$$

Momentul are o variație liniară, valorile pe capetele intervalului fiind:

$$M(0) = -\frac{qa^2}{2}; M(2a) = -\frac{3qa^2}{2}$$

$$x_2 \in [0, 3a]$$

$$M(x_2) = q \cdot a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3qa^2}{2} = const.$$

Pentru a trasa diagrama de moment încovoietor se consideră conturul cadrului fără încărcare și rezemare. Locul unde se reprezintă valorile pozitive și negative ale momentului nu se impune: reprezentarea se face în așa fel încât diagrama să rezulte cât mai clară (în diagramă să avem cât mai puține suprapuneri). Pentru grinda cotită prezentată s-a ales ca valorile pozitive ale momentului să fie reprezentate la interior (*figura 3.9.*).

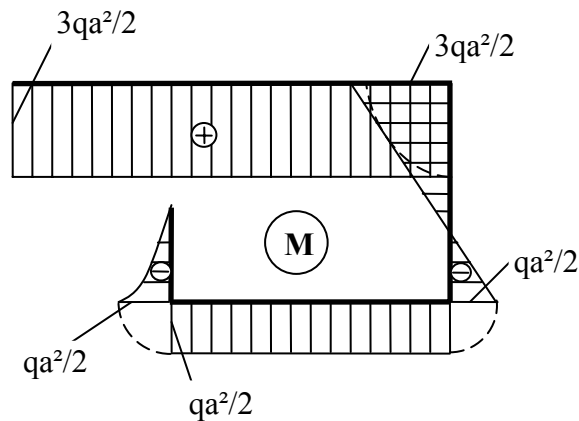


Figura 3.9.

Observații:

- În noduri, la trecerea de la o regiune, la alta momentul trebuie să se racordeze în diagramă.
- Există o singură situație în care nu se produce racordarea și anume atunci când în nod există un moment concentrat. În acest caz trecerea de la o regiune la alta se va face printr-un salt al momentului egal în valoare absolută cu mărimea momentului concentrat.
- Rămân valabile toate regulile de verificare pentru diagrama de moment încovoietor stabilite în cazul grinzilor drepte.

Diagrama de forță tăietoare

Expresiile forțelor tăietoare se scriu ținând cont de definiția și regula de semne stabilite la grinzile drepte. Expresiile forței tăietoare pe cele patru regiuni sunt:

$$y_1 \in [0, a]$$

$$T(y_1) = q \cdot y_1$$

Se studiază variația forței: $T(0) = 0; T(a) = qa$

$$x_1 \in [0, 2a]$$

$$T(x_1) = 0$$

$$y_2 \in [0, 2a]$$

$$T(y_2) = -qa$$

$$x_2 \in [0, 3a]$$

$$T(x_2) = 0$$

Pentru a trasa diagrama de forțe tăietoare (*figura 3.10*) nu este obligatoriu să se păstreze locul unde s-au reprezentat valorile pozitive și negative pentru moment.

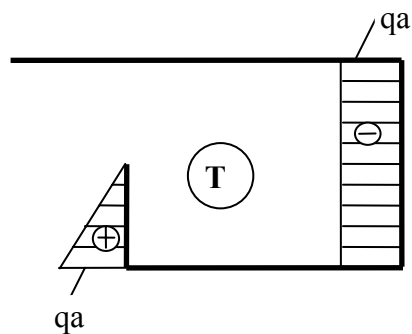


Figura 3.10.

Diagrama de forță axială

Expresiile forței axiale pe cele patru regiuni sunt (aceste expresii se scriu ținând cont de definiția și regula de semne stabilite la barele drepte):

$$y_1 \in [0, a]$$

$$N(y_1) = 0$$

$$x_1 \in [0, 2a]$$

$$N(x_1) = -qa$$

$$y_2 \in [0, 2a]$$

$$N(y_2) = 0$$

$$x_2 \in [0, 3a]$$

$$N(x_2) = qa$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 3.11*.

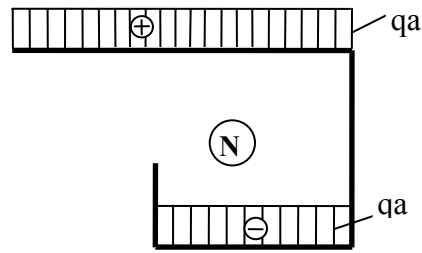


Figura 3.11.

Pentru grinda cotită studiată secțiunea periculoasă, în care se efectuează calculul de rezistență, se află pe bara orizontală unde avem simultan

$$M_{max} = \frac{3}{2} qa^2 \text{ și } N_{max} = qa .$$

3.2.3.3. Cadre static nedeterminate exterior

Cadrele static nedeterminate exterior sunt cadre deschise. Din modul lor de rezemare rezultă mai multe necunoscute (reacțiuni) decât cele trei ecuații de echilibru independente care se pot scrie. Există mai multe metode pentru ridicarea nedeterminării. Vor fi prezentate în continuare două metode: metoda bazată pe *teoremele lui Castigliano* și *metoda eforturilor*, ambele prezentate în *Capitolul 1, paragraful 1.11.*

Aplicații:

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din *figura 3.12*. Toate barele cadrului au aceeași rigiditate ($E \cdot I_z = const.$)

Rezolvare:

Se va ridica nedeterminarea folosind *prima teoremă a lui Castigliano*. Pentru a ridica nedeterminarea cadrului se parcurg aceleași etape ca și la grinzile drepte.

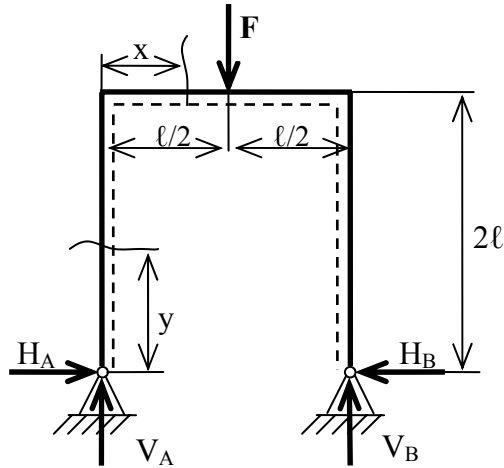


Figura 3.12.

Se scriu ecuațiile de echilibru independente:

$$H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H$$

$$V_A - F + V_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{F}{2} \Rightarrow V_A = \frac{F}{2}$$

Cadrul din *figura 3.12* este simetric și prin urmare:

- reacțiunile sunt simetrice (așa cum s-a văzut și din calcul $V_B = V_A = \frac{F}{2}$) și prin urmare condiția de simetrie poate înlocui una din ecuațiile de echilibru;
- se poate studia cadrul pe jumătate, iar pe cealaltă jumătate diagramele se trasează ținând cont de faptul că diagramele de moment încovoietor și forță axială sunt simetrice, iar diagrama de forță tăietoare este antisimetrică (pe axa de simetrie forță tăietoare este nulă)

Necunoscuta static nederminată în raport cu care se aplică *prima teoremă lui Castigliano* este **H**. Prin urmare:

$$\frac{\partial L}{\partial H} = 0 = 2 \cdot \int_0^{2l} \frac{M(y)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M(y)}{\partial H} \cdot dy + 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{M(x)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial H} \cdot dx \quad (3.29)$$

Pentru $y \in [0, 2l]$

$$M(y) = -H \cdot y \Rightarrow \frac{\partial M(y)}{\partial H} = -y$$

Pentru $x \in [0, l/2]$

$$M(x) = -H \cdot 2l + V_A \cdot x = -H \cdot 2l + \frac{F}{2} \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M(x)}{\partial H} = -2l$$

Se înlocuiesc expresiile momentelor încovoietoare și ale derivatelor parțiale în *relația (3.29)* și se obține:

$$0 = \frac{I}{E \cdot I_z} \left[\int_0^{2l} (-H \cdot y) \cdot (-y) \cdot dy + \int_0^{l/2} \left(-H \cdot 2l + \frac{F}{2} \cdot x \right) \cdot (-2l) \cdot dx \right] \Rightarrow$$

$$0 = \frac{I}{E \cdot I_z} \left(H \frac{8l^3}{3} + 2Hl^3 - \frac{Fl^3}{8} \right) \Rightarrow H = \frac{3F}{112}$$

Se înlocuiește reacțiunea în expresiile celor două momente și se studiază variația acestora. Rezultă:

$$M(y) = -H \cdot y = -\frac{3F}{112} \cdot y$$

Momentul are o variație liniară, valorile pe capetele intervalului fiind:

$$M(0) = 0$$

$$M(2l) = -\frac{3Fl}{56}$$

Pentru cea de a două regiune:

$$M(x) = -H \cdot 2l + V_A \cdot x = -\frac{3Fl}{56} + \frac{F}{2} \cdot x \Rightarrow$$

$$M(0) = -\frac{3Fl}{56}$$

$$M(l/2) = \frac{11Fl}{56}$$

Se reprezintă diagrama de moment încovoietor pe jumătatea stângă a cadrului, iar pe cealaltă jumătate se trasează prin simetrie. Se obține diagrama din *figura 3.13*.

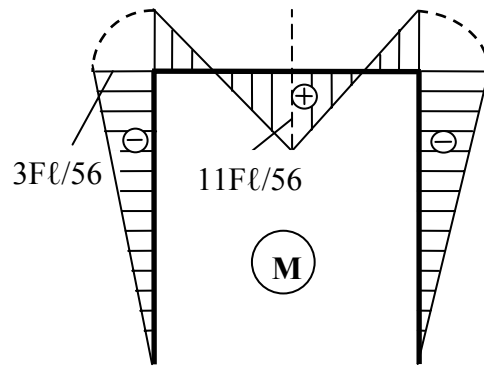


Figura 3.13.

Expresiile forțelor tăietoare sunt:

$$y \in [0, 2l]$$

$$T(y) = -H = -\frac{3F}{112}$$

$$x \in [0, l/2]$$

$$T(x) = V_A = \frac{F}{2}$$

Ambele sunt valori constante și se reprezintă pe conturul cadrului. Pe jumătatea din partea dreaptă diagrama se reprezintă prin antisimetrie. Se obține diagrama din figura 3.14.

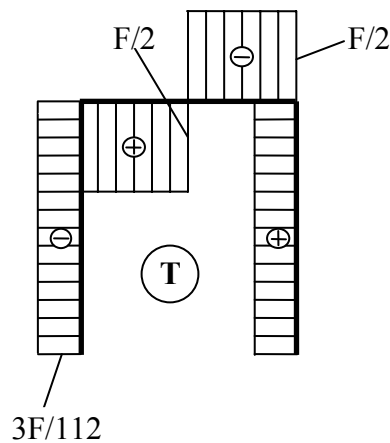


Figura 3.14.

Expresiile forțelor axiale sunt:

$$y \in [0, 2l]$$

$$N(y) = -V_A = -\frac{F}{2}$$

$$x \in [0, l/2]$$

$$N(x) = -H = -\frac{3F}{112}$$

Se reprezintă valorile pe jumătatea stângă a cadrului, iar pe cealaltă jumătate se trasează diagrama forței axiale prin simetrie. Se obține diagrama din figura 3.15.

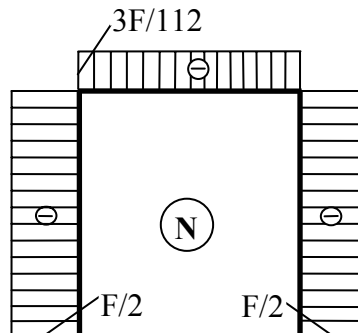


Figura 3.15.

Observație:

- Unui cadru care prezintă simetrie ca formă geometrică și rezemare și care este încărcat antisimetric îi corespunde o diagramă de forță tăietoare simetrică și diagrame ale momentului și forței axiale antisimetrice (cele două eforturi sunt nule pe axa de antisimetrie).

2. Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din figura 3.16. Toate barele cadrului au aceeași rigiditate ($E \cdot I_z = \text{const.}$).

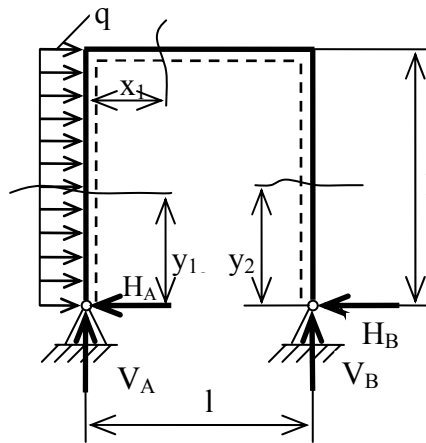


Figura 3.16.

Rezolvare:

Se scriu ecuațiile de echilibru independente:

$$\begin{aligned}
 H_A + H_B - ql &= 0 \\
 V_A + V_B &= 0 \Rightarrow V_A = -V_B \\
 \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_B \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{q \cdot l}{2} \Rightarrow V_A = -\frac{q \cdot l}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Cadrul este simplu static nedeterminat și nedeterminarea se va ridica folosind *metoda eforturilor*. Se vor parcurge etapele prezentate în *Capitolul 1, paragraful 1.11*.

Se alege sistemul de bază prezentat în *figura 3.17*.

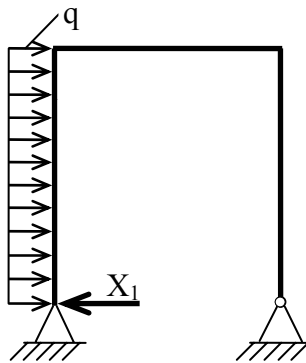


Figura 3.17.

Pentru a obține *sistemul de bază* se elimină un număr de legături pe care le are sistemul, egal cu numărul necunoscutelor static nedeterminate, până când devine static determinat (se înlocuiește reazemul articulat *A* cu un reazem simplu în care acționează necunoscuta static nedeterminată, efortul X_1).

Mai întâi se studiază sistemul de bază încărcat numai cu sarcina exterioară (*figura 3.18*), necunoscuta static nedeterminată fiind nulă ($X_1 = 0$).

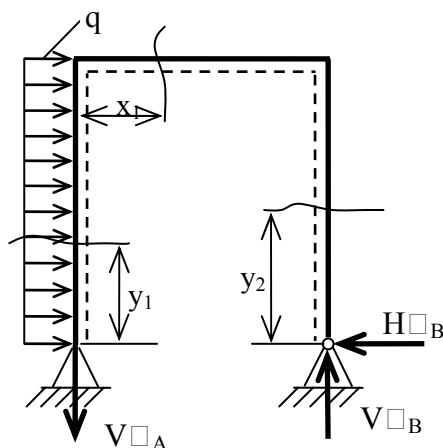


Figura 3.18.

Se studiază apoi sistemul de bază fără sarcina exterioară, dar încărcat numai cu necunoscuta static nedeterminată, care devine egală cu unitatea (*figura 3.19.*).

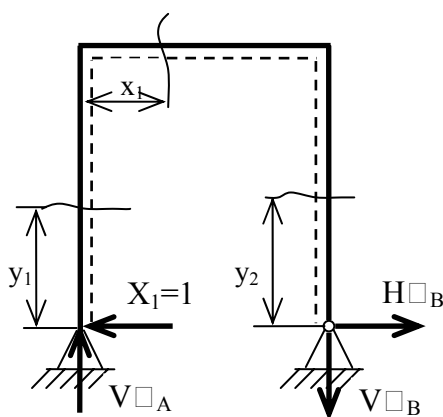


Figura 3.19.

Necunoscuta static nedeterminată se determină din ecuația:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (3.30)$$

Rezolvarea ecuației necesită determinarea prealabilă a coeficientului de influență δ_{11} și a termenului liber δ_{10} . Dacă se neglijează influența forței tăietoare și a forței axiale coeficientul de influență și termenul liber din ecuația precedentă pot fi determinați cu următoarele relații:

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{m_i m_i}{EI_z} dx_i \\ \delta_{i0} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{M_0 m_i}{EI_z} dx_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

unde: M_0 - momentul încovoietor când sistemul de bază solicitat de către sarcinile exterioare;

m_i - momentul încovoietor când sistemul de bază este încărcat numai cu $X_i = 1$.

Observație:

- Pentru calculul integralelor care apar în relația precedentă se poate folosi și metoda **Mohr-Vereșceaghin**, prezentată în Capitolul 1, paragraful 1.11.

Se studiază sistemul de bază încărcat numai cu sarcina exterioară (figura 3.18). Se scriu ecuațiile de echilibru și se determină reacțiunile:

$$\begin{aligned} H'_B &= ql \\ V'_A &= V'_B \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow V'_B \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow V'_B = V'_A = \frac{q \cdot l}{2} \end{aligned}$$

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele trei regiuni și se studiază variația acestora.

$$y_I \in [0, l]$$

$$M_o(y_I) = -q \cdot y_I \cdot \frac{y_I}{2} = -\frac{q \cdot y_I^2}{2}$$

Se studiază variația momentului:

$$M(0) = 0; M(l) = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$M'(y_1) = -q \cdot y_1 \Rightarrow M'(y_1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \in [0, l]$$

$$M''(y_1) = -q < 0 \Rightarrow M_{max} = M(0) = 0$$

$$x_1 \in [0, l]$$

$$M_o(x_1) = -V'_A \cdot x_1 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_o(0) = -\frac{q \cdot l^2}{2}; M_o(l) = -q \cdot l^2$$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$M_o(y_2) = -H'_B \cdot y_2$$

$$M_o(0) = 0; M_o(l) = -q \cdot l^2$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.20*.

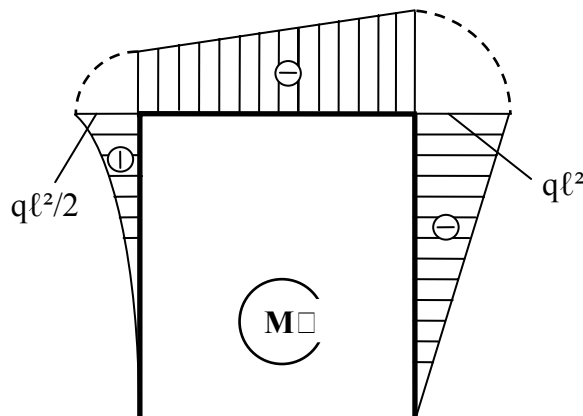


Figura 3.20.

Se studiază sistemul de bază încărcat numai cu necunoscuta static nedeterminată, care este egală cu unitatea (*figura 3.19*).

Se scriu ecuațiile de echilibru și se determină reacțiunile:

$$H_B'' = l$$

$$V_A'' = V_B''$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B'' \cdot l = 0 \Rightarrow V_B'' = V_A'' = 0$$

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele trei regiuni și se studiază variația acestora.

$$y_1 \in [0, l]$$

$$m_1(y_1) = X_1 \cdot y_1 = y_1$$

Se studiază variația momentului:

$$m_1(0) = 0; m_1(l) = l$$

$$x_1 \in [0, l]$$

$$m_1(x_1) = X_1 \cdot l = l$$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$m_1(y_2) = H_B'' \cdot y_2 = y_2$$

$$m_1(0) = 0; m_1(l) = l$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.21*.

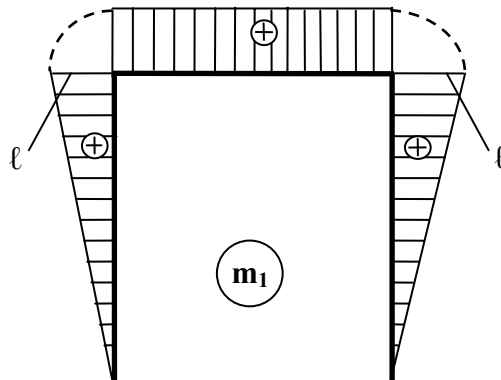


Figura 3.21.

Se calculează coeficienții din *relația (3.31)* folosind *metoda Mohr-Vereșceaghin*. Se obține:

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(-\frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{4} - \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot l - \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} \right) =$$

$$= \frac{ql^4}{E \cdot I_z} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{29ql^4}{24EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + l \cdot l \cdot l + \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} \right) = \frac{5l^3}{3EI_z}$$

Din relația (3.30) se obține:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{29ql^4}{24EI_z}}{\frac{5l^3}{3EI_z}} = \frac{29}{40} \cdot ql$$

Prin urmare $H_A = \frac{29}{40} \cdot ql$. Din relația (3.29), din ecuația de proiecții de forțe pe

orizontală, se obține $H_B = \frac{11}{40} \cdot ql$. Având reacțiunile calculate (nedeterminarea

cadrlui a fost ridicată) se revine la sistemul din figura 3.16. Se fac secțiuni pe cele trei regiuni și se scriu expresiile momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare și forțelor axiale și se studiază variația acestora.

Expresiile momentelor încovoietoare sunt:

$$y_1 \in [0, l]$$

$$M(y_1) = H_A \cdot y_1 - q \cdot y_1 \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{29}{40} ql \cdot y_1 - \frac{q \cdot y_1^2}{2}$$

Se studiază variația momentului:

$$M(0) = 0; M(l) = \frac{29}{40} ql^2 - \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{9}{40} ql^2 = 0,225ql^2$$

$$M'(y_1) = \frac{29}{40} ql - q \cdot y_1 \Rightarrow M'(y_1) = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{29}{40} l = 0,7l \in [0, l]$$

$$M''(y_1) = -q < 0 \Rightarrow M_{max} = M(0,7l) = 0,26ql^2$$

$$x_1 \in [0, l]$$

$$M(x_1) = V_A \cdot x_1 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + H_A \cdot l = -\frac{ql}{2} \cdot x_1 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + H_A \cdot l$$

$$M(0) = \frac{29}{40}ql^2 - \frac{q \cdot l^2}{2} = 0,225ql^2; M(l) = -\frac{11}{40}q \cdot l^2 = -0,275ql^2$$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$M(y_2) = -H_B \cdot y_2 = -\frac{11}{40}ql \cdot y_2$$

$$M(0) = 0; M(l) = -0,275q \cdot l^2$$

Diagrama de variație a momentului încovoietoar este prezentată în figura 3.22.

Expresiile forței tăietoare pe cele trei regiuni sunt:

$$y_1 \in [0, l]$$

$$T(y_1) = H_A - q \cdot y_1 = \frac{29}{40}ql - qy_1$$

Se studiază variația forței: $T(0) = \frac{29}{40}ql; T(l) = -\frac{11}{40}q \cdot l$

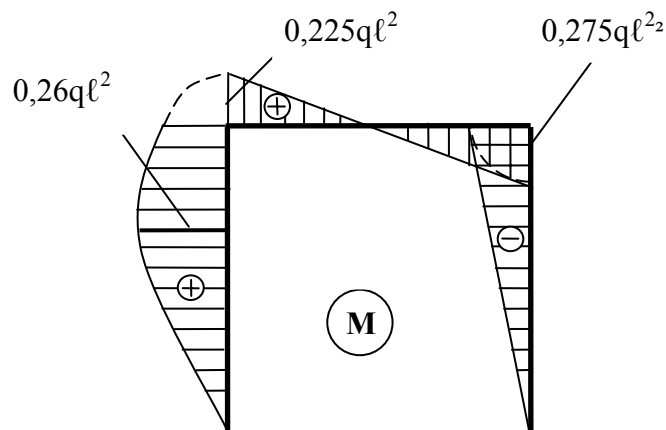


Figura 3.22.

$$x_1 \in [0, l]$$

$$T(x_1) = V_A = -\frac{ql}{2}$$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$T(y_2) = -H_B = -\frac{11}{40} \cdot ql$$

Se reprezintă variația forței tăietoare și se obține diagrama din *figura 3.23*.

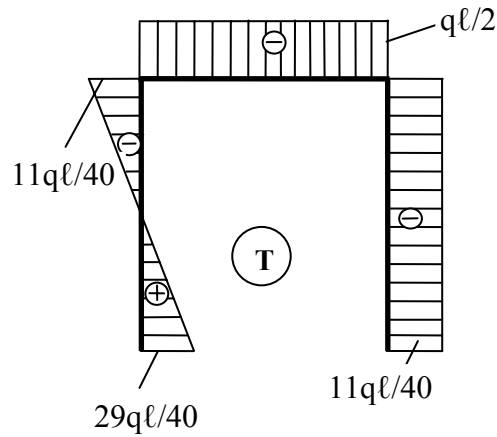


Figura 3.23.

Pentru forță axială se obține:

$$y_1 \in [0, l]$$

$$N(y_1) = -V_A = \frac{ql}{2}$$

$$x_1 \in [0, l]$$

$$N(x_1) = -q \cdot l + H_A = -ql + \frac{29}{40} ql = -\frac{11}{40} ql$$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$N(y_2) = -V_B = -\frac{ql}{2}$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 3.24*.

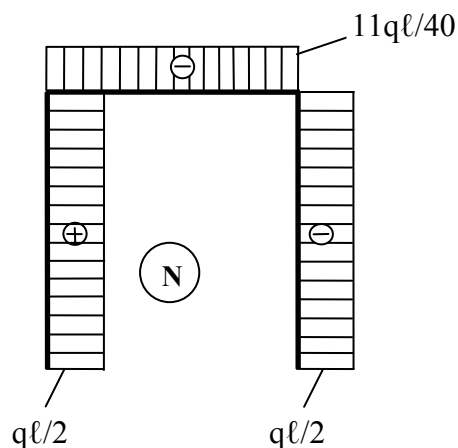


Figura 3.24.

3. Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din *figura 3.25*. Toate barele cadrului au aceeași rigiditate ($E \cdot I_z = const.$)

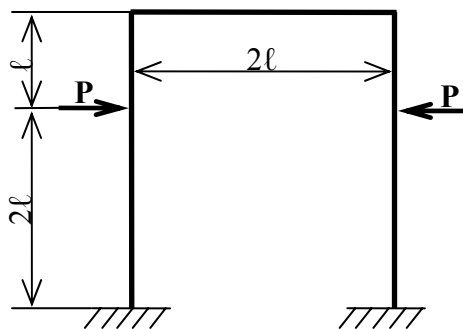


Figura 3.25.

Rezolvare:

Cadrul este triplu static nedeterminat și nedeterminarea se va ridica folosind *metoda eforturilor*. Ținând cont de faptul că acest cadru este încărcat antisimetric el poate fi studiat prin secționare pe axa de antisimetrie ceea ce reduce gradul de nedeterminare. Pe axa de antisimetrie momentul încovoietor și forță axială sunt nule, sistemul obținut fiind simplu static nedeterminat. Se alege *sistemul de bază* din *figura 3.26*, în secțiune acționând necunoscuta static nedeterminată, efortul X_1 .

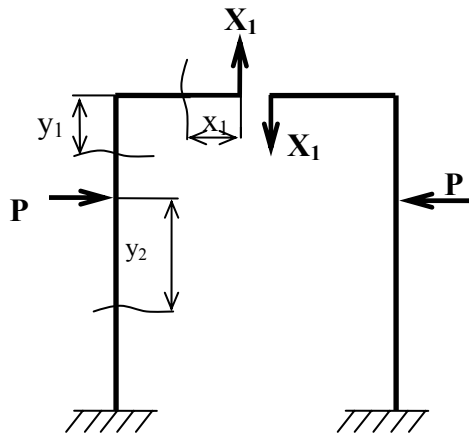


Figura 3.26.

Se ia în considerație jumătatea din partea stângă și se studiază, mai întâi, sistemul de bază încărcat numai cu sarcina exterioară (figura 3.27), necunoscuta static nedeterminată fiind nulă ($X_I = 0$).

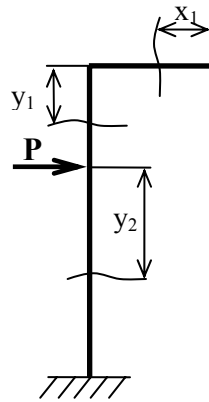


Figura 3.27.

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare și se studiază variația acestora.

$$x_I \in [0, l]$$

$$M_o(x_I) = 0$$

$$y_I \in [0, l]$$

$$M_o(y_1) = 0$$

$$y_2 \in [0, 2l]$$

$$M_o(y_2) = -P \cdot y_2$$

$$M_o(0) = 0; M_o(2l) = -2P \cdot l$$

Diagrama de variație a momentului încovoietoar este prezentată în figura 3.28.

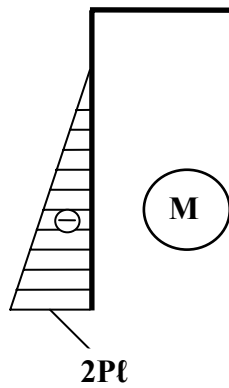


Figura 3.28.

Se studiază apoi sistemul de bază fără sarcina exterioară, încărcat numai cu necunoscuta static nedeterminată, care devine egală cu unitatea (figura 3.29.).

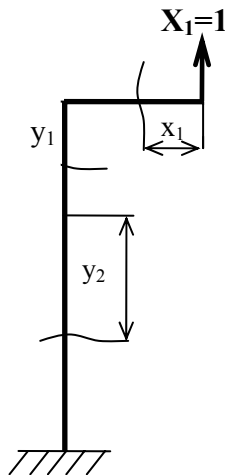


Figura 3.29.

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele trei regiuni.

$$x_1 \in [0, l]$$

$$m_1(x_1) = X_1 \cdot x_1 = x_1$$

Se studiază variația momentului:

$$m_1(0) = 0; m_1(l) = l$$

$$y_1 \in [0, l]$$

$$m_1(y_1) = X_1 \cdot l = l$$

$$y_2 \in [0, 2l]$$

$$m_1(y_2) = X_1 \cdot l = l$$

Diagrama de variație a momentului încovoietor este prezentată în figura 3.30.

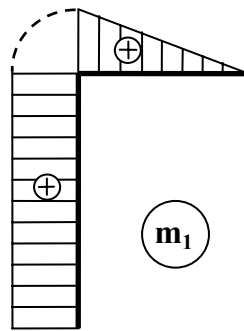


Figura 3.30.

Se calculează coeficienții din relația (3.31) folosind metoda Mohr-Vereșceaghin. Se obține:

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(-2Pl \cdot \frac{2l}{2} \cdot l \right) = -\frac{2Pl^3}{EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + l \cdot 3l \cdot l \right) = \frac{10l^3}{3EI_z}$$

Necunoscuta static nedeterminată se determină din ecuația:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$\text{Se obține: } X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{2Pl^3}{EI_z}}{\frac{10l^3}{3EI_z}} = \frac{3}{5}P$$

Având ridicată nedeterminarea se revine la sistemul din *figura 3.26*, se fac secțiuni pe cele trei regiuni, se scriu expresiile momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare și forțelor axiale și se studiază variația acestora. Se trasează diagramele de variație pentru jumătatea stângă a cadrului, iar pentru cealaltă jumătate prin simetrie pentru forța tăietoare și prin antisimetrie pentru momentul încovoietor și pentru forța axială.

$$x_1 \in [0, l]$$

$$M(x_1) = X_1 \cdot x_1 = \frac{3}{5}P \cdot x_1$$

Se studiază variația momentului: $M(0) = 0; M(l) = \frac{3}{5}Pl$

$$y_1 \in [0, l]$$

$$M(y_1) = X_1 \cdot l = \frac{3}{5}Pl$$

$$y_2 \in [0, 2l]$$

$$M(y_2) = X_1 \cdot l - P \cdot y_2 = \frac{3}{5}Pl - P \cdot y_2$$

Variația momentului este: $M(0) = \frac{3}{5}Pl; M(2l) = -\frac{7}{5}Pl$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.31*.

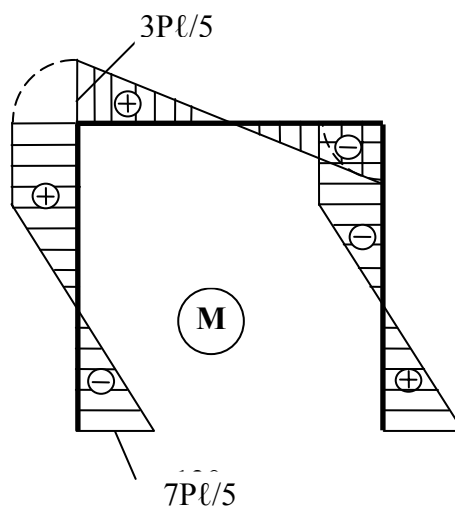


Figura 3.31

Expresiile forței tăietoare pe cele trei regiuni sunt:

$$x_1 \in [0, l]$$

$$T(x_1) = -X_1 = -\frac{3}{5}P$$

$$y_1 \in [0, l]$$

$$T(y_1) = 0$$

$$y_2 \in [0, 2l]$$

$$T(y_2) = P$$

Se reprezintă variația forței tăietoare și se obține diagrama din *figura 3.32*.

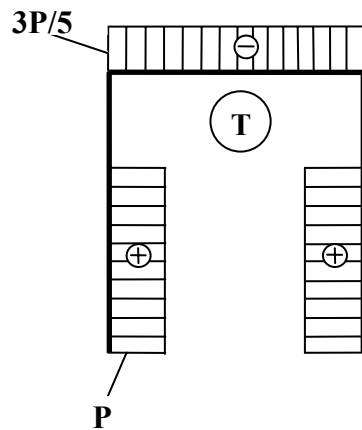


Figura 3.32.

Pentru forța axială se obține:

$$N(x_1) = 0$$

$$N(y_1) = X_1 = \frac{3}{5}P$$

$$N(y_2) = X_1 = \frac{3}{5}P$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 3.33*.

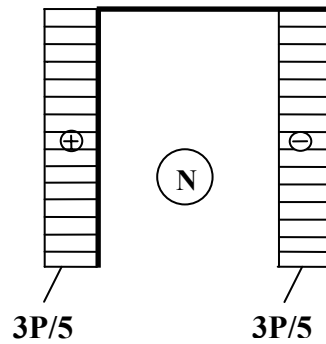


Figura 3.33.

3.2.3.4. Cadre static nedeterminate interior

Cadrele static nedeterminate interior sunt cadre închise. În cazul general aceste cadre sunt triplu static nedeterminate (necunoscutele static nedeterminate sunt în acest caz eforturile din bare: momentul încovoietor, forța tăietoare și forța axială). Ridicarea determinării se poate face prin aceleași metode ca și pentru cadrele static nedeterminate exterior.

Aplicație:

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din *figura 3.34*. Toate barele cadrului au aceeași rigiditate ($E \cdot I_z = \text{const.}$)

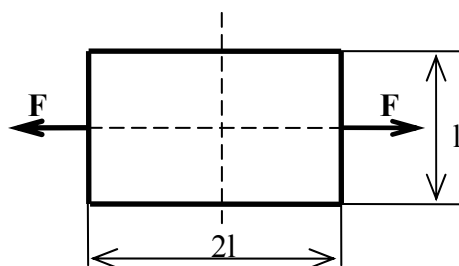


Figura 3.34.

Rezolvare:

Se secționează cadrul pe axa de simetrie și prin urmare $T=0$ (*figura 3.35*).

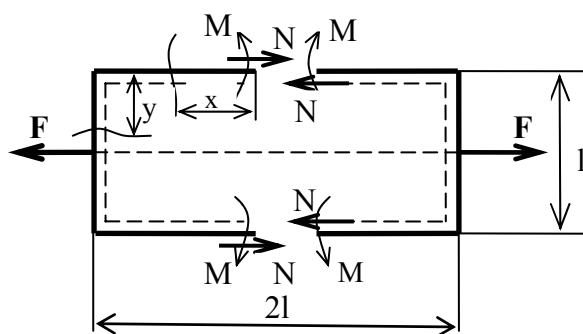


Figura 3.35.

Se pun în evidență cele două eforturi nenule care apar în secțiune (momentul încovoietor și forța axială). Se scrie echilibrul uneia dintre jumătăți și se obține:

$$F = 2N \Rightarrow N = \frac{F}{2}$$

Rămâne ca necunoscută static nedeterminată momentul încovoietor M . Se va ridica nedeterminarea folosind *a doua teoremă lui Castigliano* fiind parcurse aceleași etape ca și la grinzile drepte. Din motive de simetrie este suficient să se facă calculul doar pe un sfert de cadru. Prin urmare:

$$\frac{\partial L}{\partial M} = 0 = 4 \cdot \int_0^l \frac{M(x)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} \cdot dx + 4 \cdot \int_0^{l/2} \frac{M(y)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M(y)}{\partial M} \cdot dy \quad (3.32)$$

Se fac două secțiuni la distanțele x și y , se scriu expresiile momentelor încovoietoare și se calculează derivatele parțiale.

$$x \in [0, l]$$

$$M(x) = M \Rightarrow \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 1$$

$$y \in [0, l/2]$$

$$M(y) = M - \frac{F}{2} \cdot y \Rightarrow \frac{\partial M(y)}{\partial M} = 1$$

Se înlocuiesc expresiile momentelor încovoietoare și ale derivatelor parțiale în *relația (3.32)* și se obține:

$$0 = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[\int_0^l M \cdot I \cdot dx + \int_0^{l/2} \left(M - \frac{F}{2} \cdot y \right) \cdot I \cdot dy \right] \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(M \cdot l + M \cdot \frac{l}{2} - \frac{F}{2} \cdot \frac{l^2}{8} \right) \Rightarrow M = \frac{Fl}{24}$$

Se înlocuiește momentul cu valoarea determinată în expresiile celor două momente încovoietoare și se studiază variația acestora. Rezultă:

$$M(x) = M = \frac{Fl}{24} = \text{const.}$$

Pentru cea de a doua regiune:

$$M(y) = M - \frac{F}{2} \cdot y = \frac{Fl}{24} - \frac{F}{2} \cdot y$$

Momentul are o variație liniară, valorile pe capetele intervalului fiind:

$$M(0) = \frac{Fl}{24}$$

$$M(l/2) = -\frac{5Fl}{24}$$

Se reprezintă variația momentului încovoietor pe un sfert de cadru, iar pe restul conturului diagrama se trasează prin simetrie. Se obține diagrama din figura 3.36.

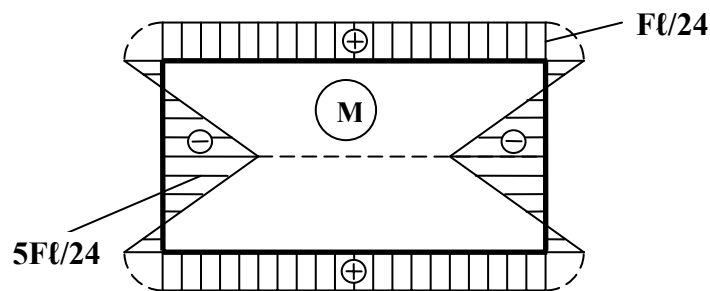


Figura 3.36.

Expresiile forțelor tăietoare sunt:

$$T(x) = 0$$

$$T(y) = \frac{F}{2}$$

Ambele sunt valori constante și se reprezintă pe conturul cadrului. Pe jumătatea din partea dreaptă diagrama se reprezintă prin antisimetrie. Se obține diagrama din *figura 3.37*.

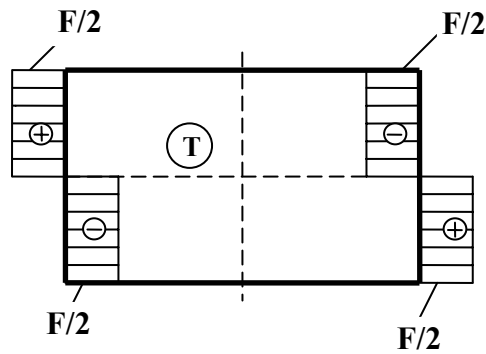


Figura 3.37.

Expresiile forțelor axiale sunt:

$$N(x) = N = \frac{F}{2}$$

$$N(y) = 0$$

Se reprezintă valorile pe jumătatea stângă a cadrului, iar pe cealaltă jumătate se trasează diagrama forței axiale prin simetrie. Se obține diagrama din *figura 3.38*.

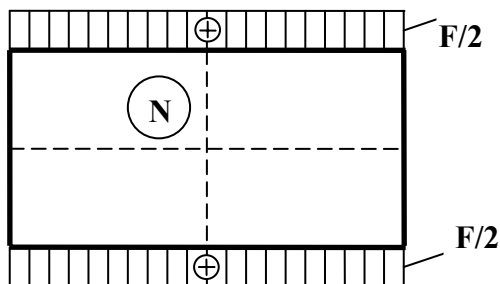


Figura 3.38.

3.2.3.5. Cadre static nedeterminate exterior și interior

În această categorie de cadre necunoscutele sunt atât reacțiunile din reazeme cât și eforturile din bare. În cazul general aceste cadre sunt triplu static nedeterminate interior la care se adaugă nedeterminarea care rezultă din modul de rezemare. Ridicarea determinării se poate face prin aceleași metode. Pentru a reduce gradul de nedeterminare se folosește simetria, respectiv antisimetria sistemului.

Aplicație:

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din *figura 3.39*. Toate barele cadrului au aceeași rigiditate ($E \cdot I_z = \text{const.}$)

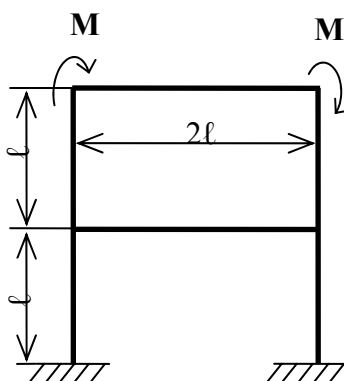


Figura 3.39.

Rezolvare:

Cadrul este triplu static nedeterminat interior și triplu static nedeterminat exterior. Nedeterminarea se va ridica folosind *metoda eforturilor*.

Ținând cont de faptul că acest cadru este încărcat antisimetric el poate fi studiat prin secționare pe axa de antisimetrie (pe axa de antisimetrie momentul încovoietor și forța axială sunt nule), sistemul rămânând în final dublu static nedeterminat. Se alege *sistemul de bază* din *figura 3.40*, în secțiune acționând necunoscutele static nedeterminate, eforturile X_1 și X_2 .

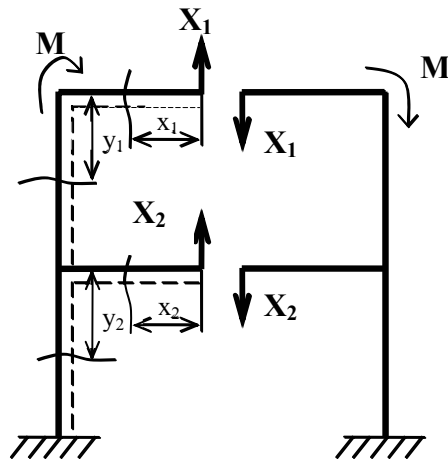


Figura 3.40.

Se ia în considerație jumătatea stângă și se studiază sistemul de bază încărcat numai cu sarcina exterioară (figura 3.41).

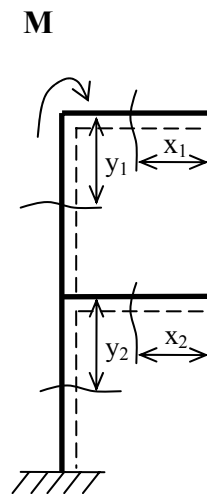


Figura 3.41.

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare:

$$M_o(x_1) = M_o(x_2) = 0$$

$$M_o(y_1) = M_o(y_2) = -M$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în figura 3.42.

Se studiază apoi sistemul de bază încărcat numai cu necunoscuta static nedeterminată $X_1 = 1$ (figura 3.43.).

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele patru regiuni.

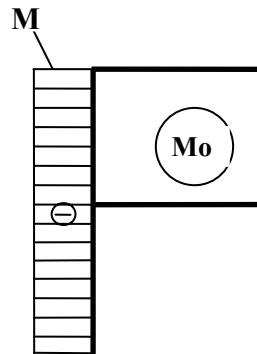


Figura 3.42.

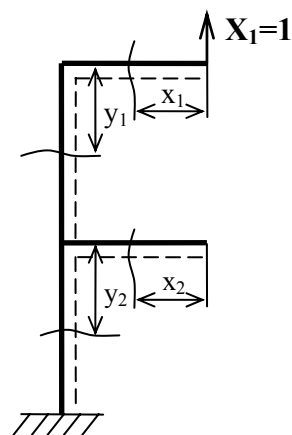


Figura 3.43.

$$m_1(x_1) = X_1 \cdot x_1 = x_1$$

Se studiază variația momentului:

$$m_1(0) = 0; m_1(l) = l$$

Pe celelalte trei regiuni momentele sunt:

$$m_1(y_1) = m_1(y_2) = X_1 \cdot l = l$$

$$m_1(x_2) = 0$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.44.*

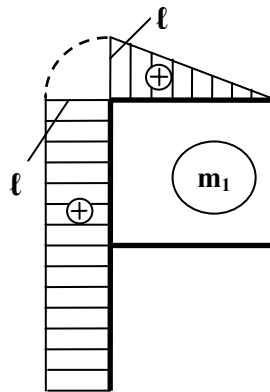


Figura 3.44.

Se studiază apoi sistemul de bază încărcat numai cu necunoscuta static nedeterminată $X_2 = 1$ (*figura 3.45.*).

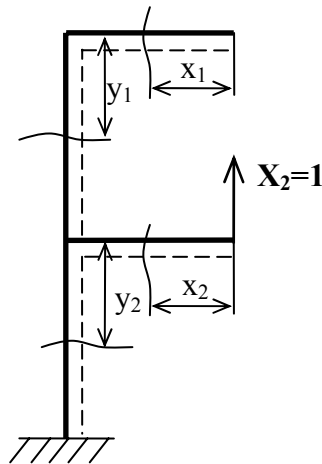


Figura 3.45.

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele patru regiuni.

$$m_2(x_1) = m_2(y_1) = 0$$

Pe celelalte două regiuni momentele sunt:

$$m_2(x_2) = X_2 \cdot x_2 \cdot x_2 \Rightarrow m_2(0) = 0; m_2(l) = l$$

$$m_2(y_2) = X_2 \cdot l \cdot y_2$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.46.*

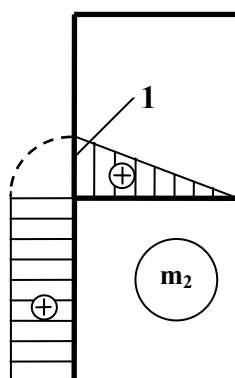


Figura 3.46.

Necunoscutele static nedeterminate se determină din sistemul de ecuații canonice (vezi *Capitolul 1, paragraful 1.11*):

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se calculează coeficienții din *relația (3.33)* folosind *metoda Mohr-Vereșceaghin*. Se obține:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + l \cdot 2l \cdot l \right) = \frac{7l^3}{3EI_z}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l \cdot l \cdot l}{E \cdot I_z} = \frac{l^3}{EI_z}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + l \cdot l \cdot l \right) = \frac{4l^3}{3EI_z}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{E \cdot I_z} (-M \cdot 2l \cdot l) = -\frac{2Ml^2}{EI_z}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{E \cdot I_z} (-M \cdot l \cdot l) = -\frac{Ml^2}{EI_z}$$

Se înlocuiesc valorile calculate în *relația (3.33)* și sistemul devine:

$$\begin{aligned} \frac{7l^3}{3EI_z} \cdot X_1 + \frac{l^3}{EI_z} \cdot X_2 - \frac{2Ml^2}{EI_z} &= 0 \\ \frac{l^3}{EI_z} \cdot X_1 + \frac{4l^3}{3EI_z} \cdot X_2 - \frac{Ml^2}{EI_z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Se rezolvă *sistemul* (3.34) și se determină necunoscutele static nedeterminate:

$$X_1 = \frac{15 M}{19 l}; X_2 = \frac{3 M}{19 l}$$

Se revine la sistemul din *figura 3.40*. Se fac secțiuni, se scriu expresiile momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare și axiale și se studiază variația.

Diagrama de moment încovoietor

$$x_1 \in [0, l]$$

$$M(x_1) = X_1 \cdot x_1 = \frac{15 M}{19 l} \cdot x_1$$

Se studiază variația momentului: $M(0) = 0; M(l) = \frac{15}{19} M$

$$y_1 \in [0, l]$$

$$M(x_1) = X_1 \cdot l - M = \frac{15}{19} M - M = -\frac{4}{19} M$$

$$x_2 \in [0, l]$$

$$M(x_2) = X_2 \cdot x_2 = \frac{3 M}{19 l} \cdot x_2$$

Se studiază variația momentului: $M(0) = 0; M(l) = \frac{3}{19} M$

$$y_2 \in [0, l]$$

$$M(y_2) = X_1 \cdot l - M + X_2 \cdot l = \frac{15}{19} M - M + \frac{3}{19} M = -\frac{1}{19} M$$

Diagrama de variație a momentului este prezentată în *figura 3.47*.

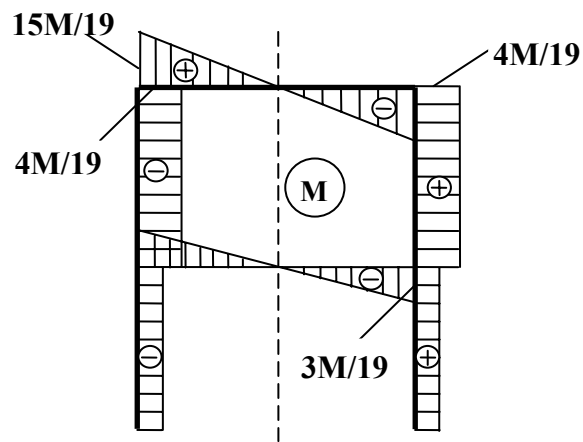


Figura 3.47.

Diagrama de forțe tăietoare

Expresiile forței tăietoare pe cele patru regiuni sunt:

$$T(x_1) = -X_1 = -\frac{15 M}{19 l}$$

$$T(y_1) = 0$$

$$T(x_2) = -X_2 = -\frac{3 M}{19 l}$$

$$T(y_2) = 0$$

Se reprezintă variația forței tăietoare și se obține diagrama din *figura 3.48.*

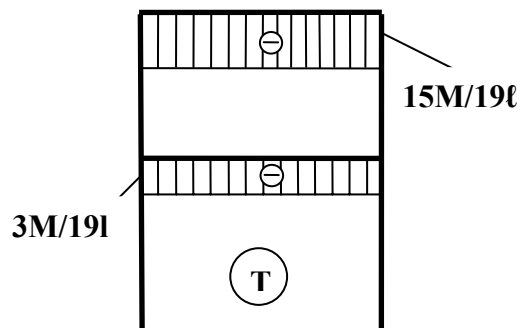


Figura 3.48.

Diagrama de forțe axiale

Pentru forța axială se obține:

$$N(x_1) = 0$$

$$N(y_1) = X_1 = \frac{15 M}{19 l}$$

$$N(x_2) = 0$$

$$N(y_2) = X_1 + X_2 = \frac{18 M}{19 l}$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 3.49*.

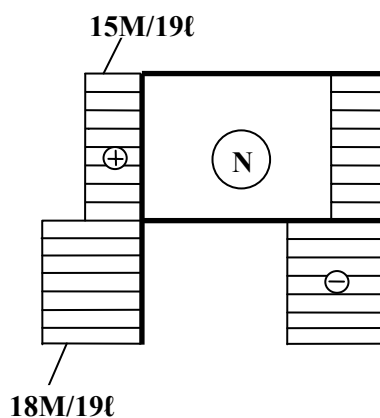


Figura 3.49.

3.2.4. Deformația sistemelor plane

Pentru calculul deformației grinzilor cotite și a cadrelor se pot folosi *teoremele lui Castigliano*. De exemplu deplasările diferitelor puncte se calculează prin aplicarea *primei teoreme a lui Castigliano*, cu ajutorul următoarei relații (dacă se neglijează influența forței tăietoare):

$$\delta = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{1}{EI_z} \int M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \frac{1}{EA} \int N \frac{\partial N}{\partial P} dx$$

Observație:

- În cazul când se dorește determinarea deplasării unui punct în care nu acționează o forță, se introduce în punctul respectiv o forță fictivă, corespunzătoare deplasării. După efectuarea calculelor în rezultatele obținute forța fictivă se anulează.

Metoda Mohr-Maxwell poate fi folosită de asemenea pentru calculul deformației sistemelor plane. Formulele sunt analoage celor folosite în cazul barelor drepte. Astfel, deplasarea δ a unui punct pe direcția Δ este dată de relația:

$$\delta = \int \frac{N \cdot n}{EA} dx + \int \frac{M_z \cdot m}{EI_z} dx$$

unde:

M_z , N - momentul încovoietor și forța axială într-o secțiune oarecare x , pentru încărcarea sistemului cu sarcinile reale;

m , n - momentul încovoietor și forța axială, determinate în aceeași secțiune x , cu toate sarcinile nule, cu excepția unei forțe egală cu unitatea care acționează în punctul în care se calculează deplasarea pe direcția Δ .

În mod similar se calculează și rotirea θ a unei secțiuni:

$$\theta = \int \frac{N \cdot n}{EA} dx + \int \frac{M_z \cdot m}{EI_z} dx$$

De data aceasta m și n reprezintă momentul încovoietor și respectiv forța axială care apar într-o secțiune oarecare x , atunci când în secțiunea a cărei deformație vrem să o calculăm acționează un cuplu, de moment egal cu unitatea.

Observație:

- Dacă nu se cunoaște direcția în care se deplasează punctul este necesar să se determine proiecțiile acestei deplasări pe două direcții fixe (de

exemplu pe direcție orizontală δ_h și pe cea verticală δ_v). Deplasarea totală este dată de relația: $\delta = \sqrt{\delta_h^2 + \delta_v^2}$.

Probleme propuse:

1. Să se verifice bara de secțiune dreptunghiulară din figura 3.50. Se cunosc: $b = 1m$, $h = 0,5m$, $u = 0,3m$, $v = 0,1m$, $P = 5 \cdot 10^4 N$, $\sigma_a = 140MPa$.

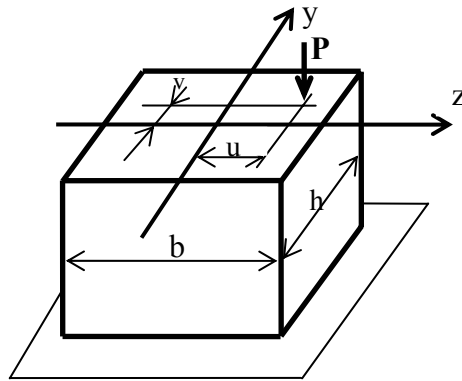


Figura 3.50.

2. Bara din figura 3.51 este comprimată excentric cu forța $P = 350kN$. Se cere să se traseze diagrama de variație a tensiunii normale în secțiune și să se traseze sâmburele central al secțiunii.

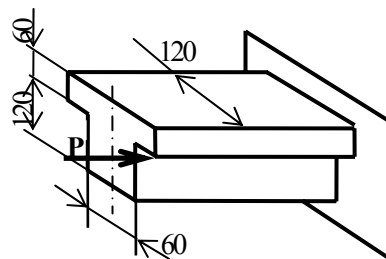


Figura 3.51.

3. Să se traseze sâmburele central pentru secțiunile din figura 3.52. și pentru o elipsă cu semiaxele a și b .

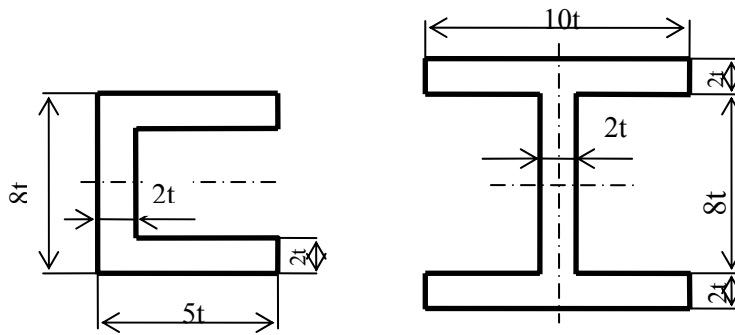


Figura 3.52.

4. Să se calculeze tensiunile rezultante în punctele *1*, *2*, *3*, *4* ale unei secțiuni transversale pătratică (figura 3.53) pentru bara dreaptă solicitată la întindere excentrică de către forța $F = 300\text{kN}$.

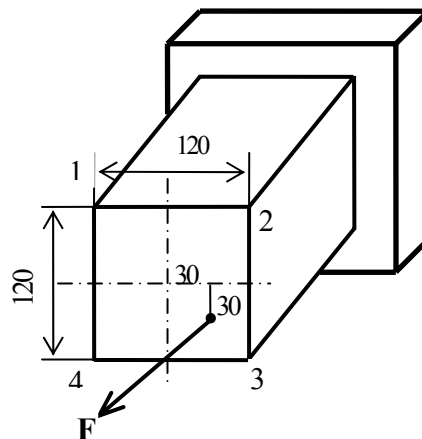


Figura 3.53.

5. Să se dimensioneze grinda încadrată, încărcată cu o sarcină concentrată (figura 3.54). Se cunosc: $F = 75\text{kN}$, $l = 2,5\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_a = 120\text{MPa}$, $h = 2b$.

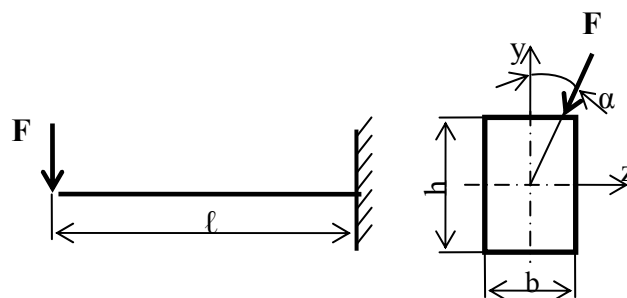


Figura 3.54.

6. O bară este solicitată excentric de forța $F = 55kN$ (figura 3.55). Se cere să se calculeze tensiunea maximă din bară. În calcule nu se ține cont de posibilitatea pierderii stabilității barei. Se cunosc: $a = 50mm$, $e = 2,5mm$.

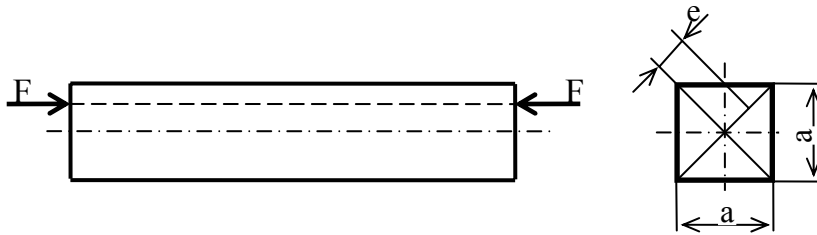


Figura 3.55.

7. Să se dimensioneze grinda profil U , solicitată ca în figura 3.56, pentru $q = 22,5N/mm$, $l = 0,9m$, $\alpha = 40^\circ$, $\sigma_a = 140MPa$.

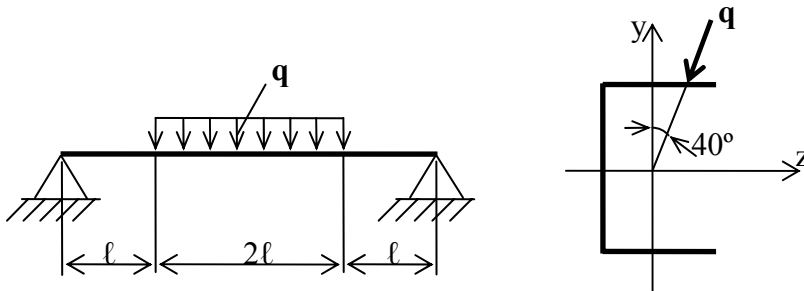


Figura 3.56.

8. Să se dimensioneze grinda din oțel, profil I , solicitată ca în figura 3.57 dacă $q = 19kN/m$, $l = 0,7m$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_a = 120MPa$.

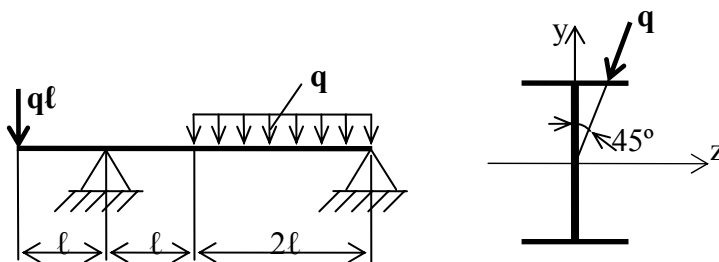


Figura 3.57.

9. O grindă simplu rezemată este solicitată de forțele $F = 850N$ aplicate într-un plan ce formează unghiul $\alpha = 50^\circ$ cu axa verticală a secțiunii transversale (figura 3.58). Grinda are secțiunea dreptunghiulară cu $b = 60mm$ și $h = 80mm$, iar $l = 500mm$. Cât este tensiunea maximă?

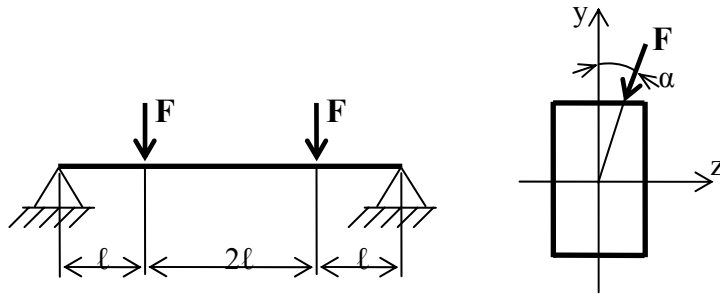


Figura 3.58.

10. Să se traseze diagramele de eforturi (M , T , N) la grinzile cotite din figurile 3.59-3.61.

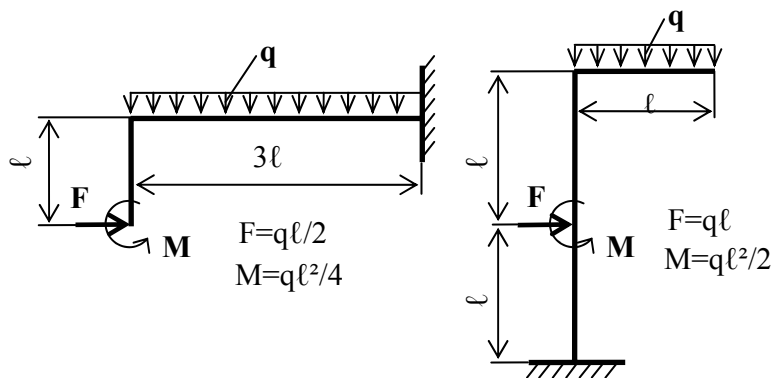


Figura 3.59.

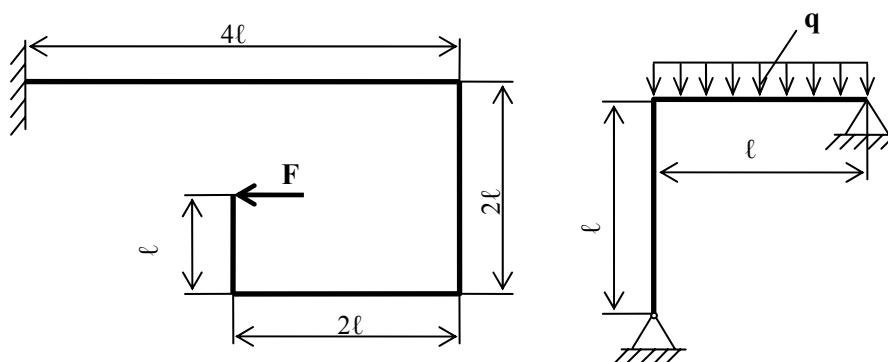


Figura 3.60.

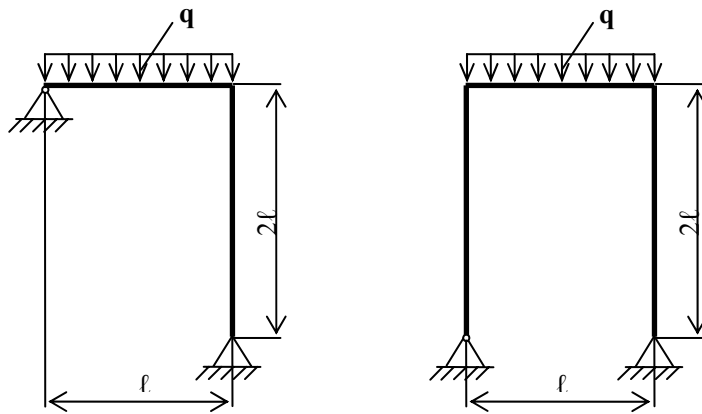


Figura 3.61.

11. Să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței F de la grinda cotită din figura 3.62. Se cunosc: $F = 225\text{kN}$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $l = 1,2\text{m}$, ambele bare au secțiune pătrată cu $a = 300\text{mm}$,

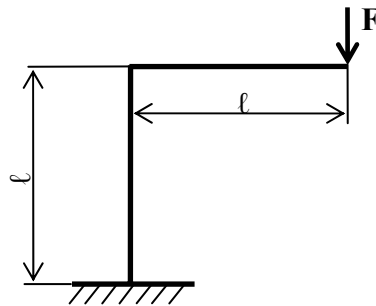


Figura 3.62.

12. Să se calculeze rotirea capătului liber de la grinda cotită din figura 3.63. Se cunosc: $EI_z = \text{const.}$, q , l .

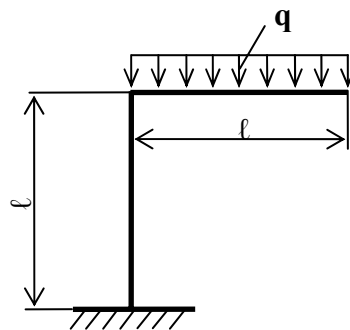


Figura 3.63.

13. Să se traseze diagramele de eforturi (M , T , N) la cadrele static nedeterminate din figurile 3.64-3.70. Toate barele au aceeași rigiditate la încovoiere.

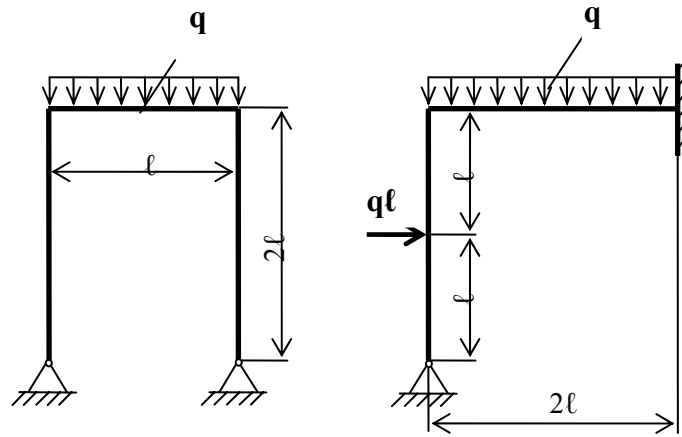


Figura 3.64.

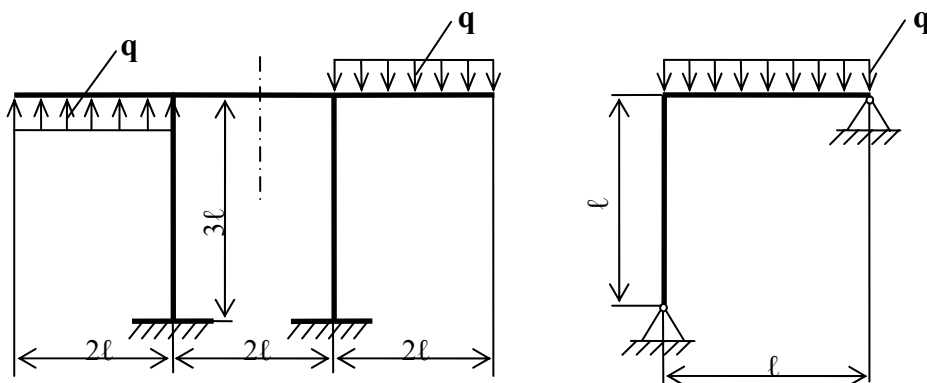


Figura 3.65.

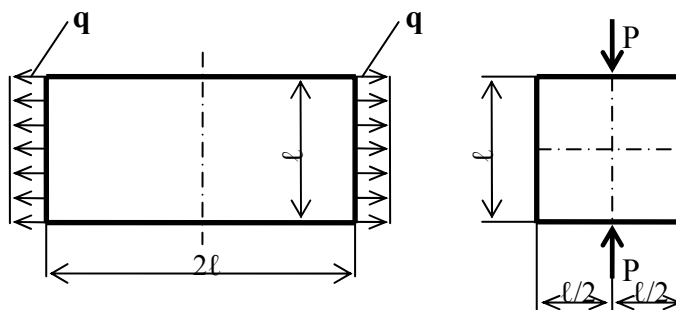


Figura 3.66.

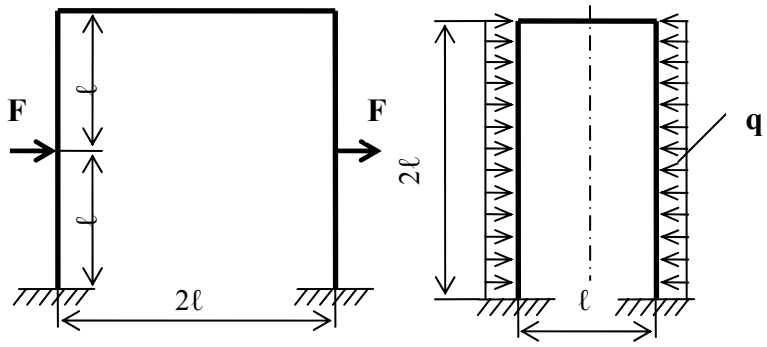


Figura 3.67.

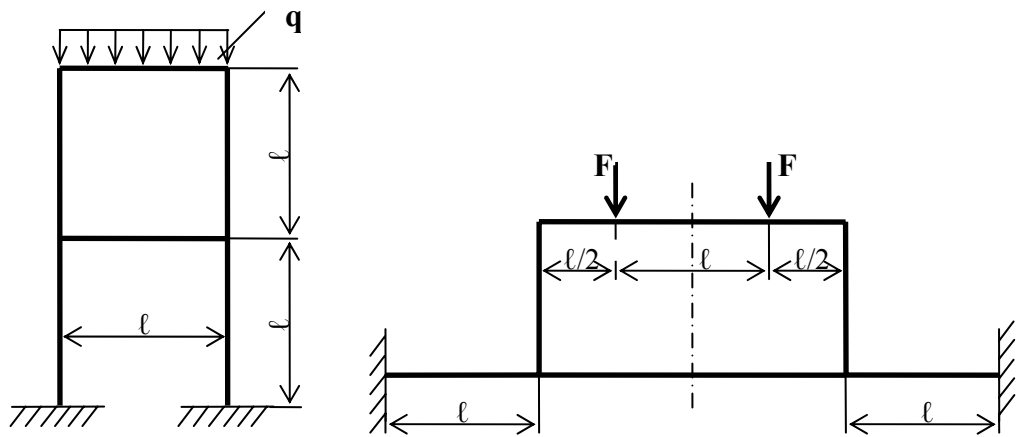


Figura 3.68.

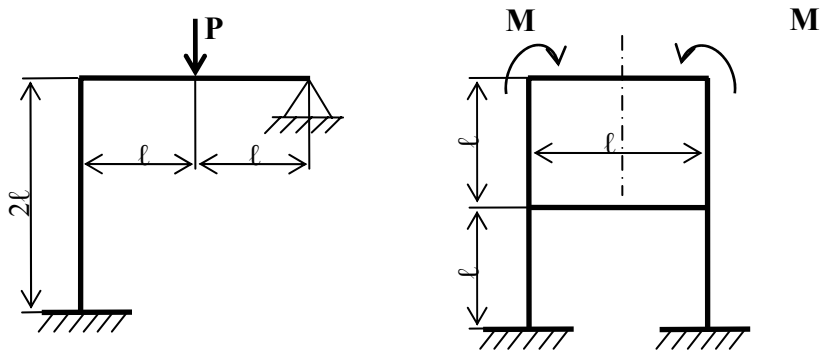


Figura 3.69.

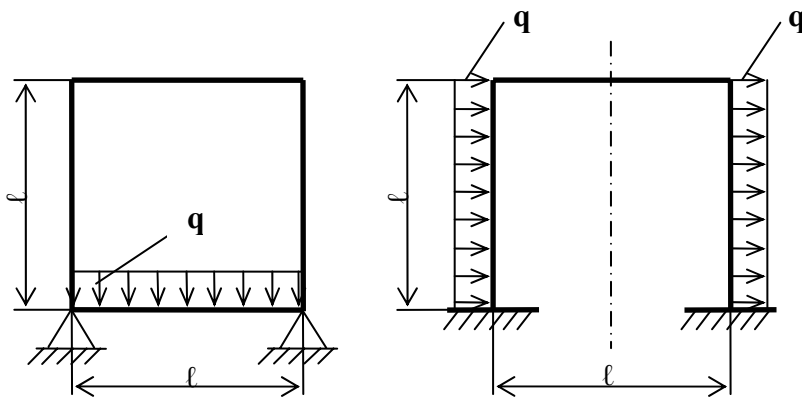


Figura 3.70.

14. Pentru grinda cotită din *figura 3.71* de secțiune transversală dreptunghiulară cu $h = 120\text{mm}$ și $b = 200\text{mm}$ se cere să se calculeze tensiunile maxime și minime din secțiunea periculoasă. În calcule se va ține cont numai de forța axială și de momentul încovoietor.

Se cunosc: $F = 2ql$, $l = 1\text{m}$, $E = 2,1 \cdot 10^5\text{MPa}$, $q = 2,5\text{kN/m}$.

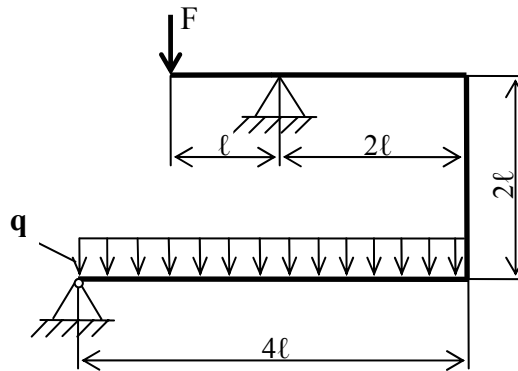


Figura 3.71.

15. Pentru sistemul din *figura 3.72* se cere să se calculeze reacțiunea din reazemul **D** și deplasarea pe verticală a punctului **B**. Se cunosc: F , l , $EI_z = \text{const}$.

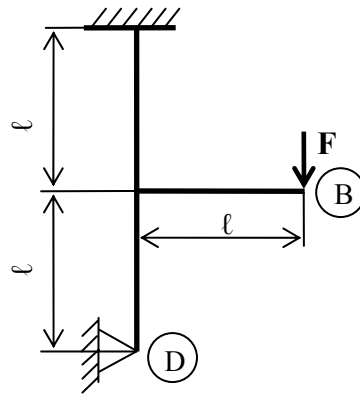


Figura 3.72.

3.3. Solicitări la care apar tensiuni pe direcții diferite

3.3.1. Solicitarea de încovoiere cu torsiune

Bare cotite spațiale

Barele cotite spațiale sunt formate din bare drepte cuprinse în plane perpendiculare îmbinate prin noduri rigide. Pentru această categorie de bare cotite pe lângă observațiile prezentate la barele cotite plane (cadrele plane) trebuie să se țină seama de faptul că prin efectul de nod rigid în spațiu momentul încovoiator dintr-o bară se transmite ca moment de torsiune pentru bara care se află într-un plan perpendicular pe planul forțelor și invers.

Aplicație:

Să se traseze diagramele de eforturi și să se dimensioneze sistemul de bare din *figura 3.73*. Sistemul este solicitat de forța F care acționează pe o direcție perpendiculară pe planul format de sistem. Barele au secțiune circulară.

Rezolvare:

Grinda 1-2-3 este conținută într-un plan, ea fiind solicitată în *punctul 1* de o forță concentrată a cărei direcție este perpendiculară pe *planul (123)*.

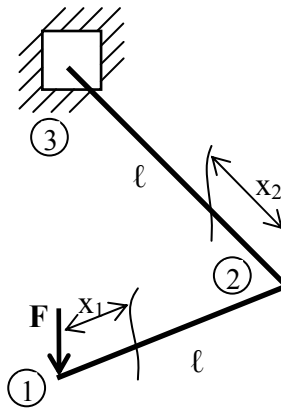


Figura 3.73.

Bara 1-2 este solicitată la încovoiere. Momentul încovoiitor în secțiunea x_1 are expresia:

$$x_1 \in [0, l]$$

$$M_i(x_1) = -F \cdot x_1$$

Se studiază variația momentului:

$$M_i(0) = 0; M_i(l) = -F \cdot l$$

Bara 2-3 este solicitată la încovoiere și torsiune. Momentul încovoiitor în secțiunea x_2 are expresia:

$$x_2 \in [0, l]$$

$$M_i(x_2) = -F \cdot x_2$$

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt:

$$M_i(0) = 0; M_i(l) = -F \cdot l$$

Momentul de torsiune în aceeași secțiune este dat de relația

$$M_t(x_2) = F \cdot l = \text{const.}$$

Observație:

- Se neglijează efectul forțelor tăietoare.
- Forțele axiale în ambele regiuni sunt nule.

Diagramele de variație ale momentelor încovoietor și de torsiune sunt prezentate în *figurile 3.74 și 3.75.*

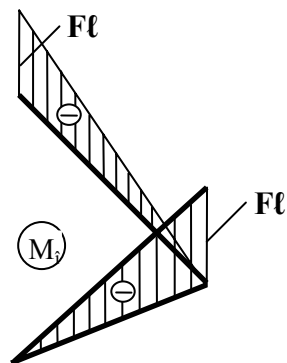


Figura 3.74.

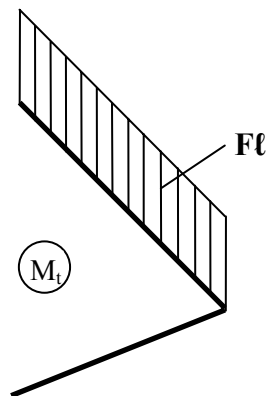


Figura 3.75.

Secțiunea periculoasă este în încastrare unde:

$$M_t = F \cdot l, \text{ iar tensiunea tangențială: } \tau = \frac{M_t}{W_p}$$

$$M_{i \max} = F \cdot l, \text{ iar tensiunea normală: } \sigma = \frac{M_{i \max}}{W_z}$$

Pentru secțiunea circulară: $W_p = \frac{\pi d^3}{16}; W_z = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow W_p = 2W_z$

Pentru că apar tensiuni de natură diferită calculul de rezistență se face folosind relațiile rezultate din teoriile de rezistență. Din *teoria tensiunii tangențiale maxime* rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_z}$$

Se înlocuiesc valorile de mai sus pentru momentele de încovoiere și de torsiune și se impune condiția cunoscută: $\sigma_{ech} \leq \sigma_a$

rezultă:

$$\sigma_{ech} = \frac{32\sqrt{(Fl)^2 + (Fl)^2}}{\pi d^3} = \frac{32\sqrt{2}Fl}{\pi d^3} \leq \sigma_a$$

De unde:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{2}Fl}{\pi\sigma_a}}$$

Calculul arborilor drepți la torsiune cu încovoiere

Pe un arbore drept intermediar (secundar), cu secțiune circulară, (*figura 3.76*) se află montate două roți dințate. *Roata 1* primește mișcarea de la un pinion montat pe arborele primar (nefigurat) cum este prezentat în *figura 3.77*. *Roata 2* transmite mișcarea la o roată dințată montată pe arborele terțiar nefigurat pe desen (*figura 3.78*). Se cere să se dimensioneze arborele secundar știind că $P = 1,4kW$, $n = 600rot/min$, $l = 200mm$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\sigma_a = 160MPa$. Diametrele de divizare ale roților dințate 1, 2 sunt $D_{d1} = 250mm$, $D_{d2} = 500mm$.

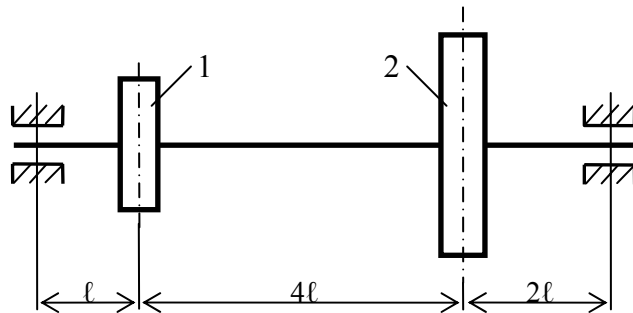


Figura 3.76.

Arborele se află într-o stare de solicitare compusă de torsiune cu încovoiere. Calculul de rezistență al arborelui se conduce pe etape. Se decompun

forțele în componente situate în două plane reciproc perpendiculare, spre exemplu în componente orizontale și verticale (*figurile 3.77, 3.78*).

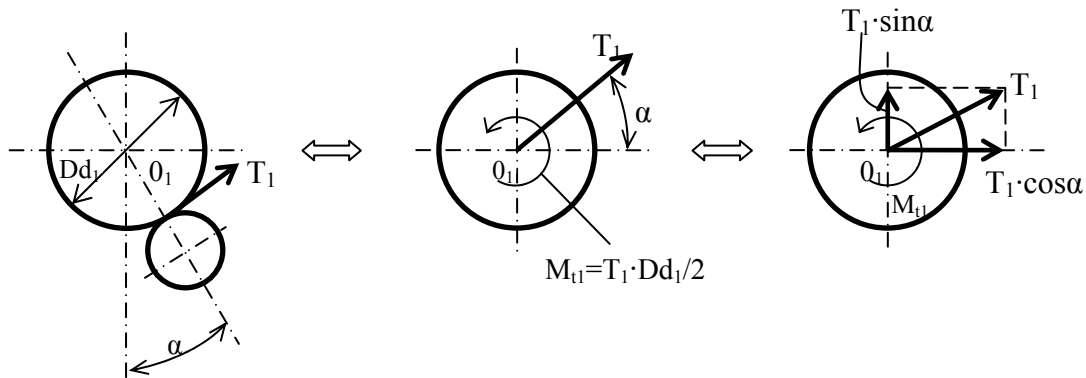


Figura 3.77.

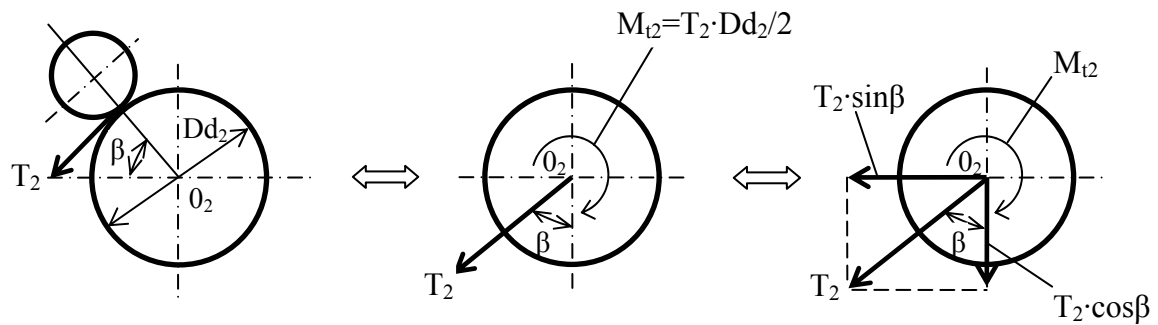


Figura 3.78.

În *figura 3.79* este indicată încărcarea arborelui (momentul de torsiune este constant pe lungimea dintre cele două roți dacă se neglijează frecarea în lagăre).

Momentul de torsiune, în funcție de puterea transmisă, se calculează cu relația

stabilită în prima parte a cursului de *Rezistența materialelor*: $M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n}$.

Înlocuind valorile date se obține:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{1,4 \cdot 10^3}{600} = 22,282 \text{ N} \cdot \text{m} = 22,3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\text{Dar } M_t = M_{t1} = T_1 \cdot \frac{D_{d1}}{2} \Rightarrow T_1 = \frac{2M_t}{D_{d1}} = \frac{2 \cdot 22,3 \cdot 10^3}{250} = 178,4 \text{ N}$$

$$M_t = M_{t2} = T_2 \cdot \frac{D_{d2}}{2} \Rightarrow T_2 = \frac{2M_t}{D_{d2}} = \frac{2 \cdot 22,3 \cdot 10^3}{500} = 89,2N$$

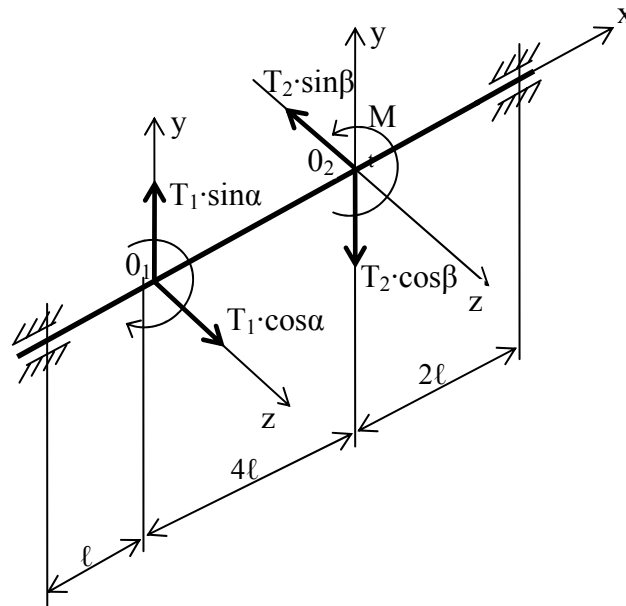


Figura 3.79.

Detaliat schema de încărcare a arborelui este prezentată în *figura 3.80*, fiind reprezentate în ordine: *încovoierea* în planul xOy , *încovoierea* în planul xOz și *torsiunea*.

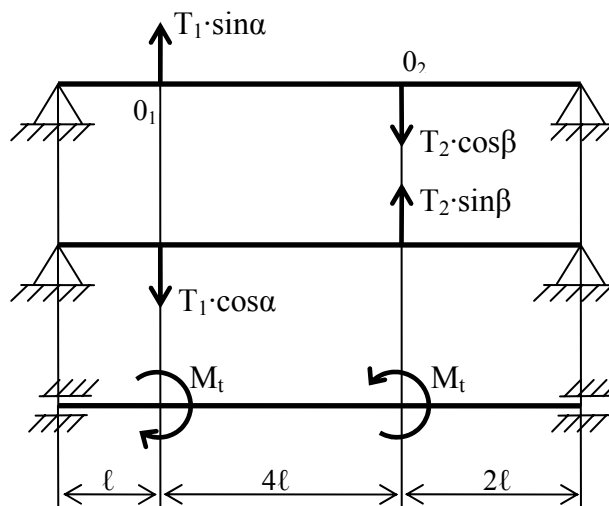


Figura 3.80.

Se studiază separate fiecare din cele trei solicitări și se trasează diagramele de variație ale eforturilor.

Încovoiere în planul xOy (figura 3.81)

Se scriu ecuațiile de echilibru și se calculează reacțiunile. Se obține:

$$V_1' + \frac{T_1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 + V_2' = 0$$

$$1) \frac{T_1}{2} \cdot l - \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 \cdot 5l + V_2' \cdot 7l = 0 \Rightarrow V_2' = 32,3N$$

$$2) V_1' \cdot 7l + \frac{T_1}{2} \cdot 6l - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_1' = -58,4N$$

Diagrama de variație a *momentului încovoiator* M_{iz} este prezentată în *figura 3.81*.

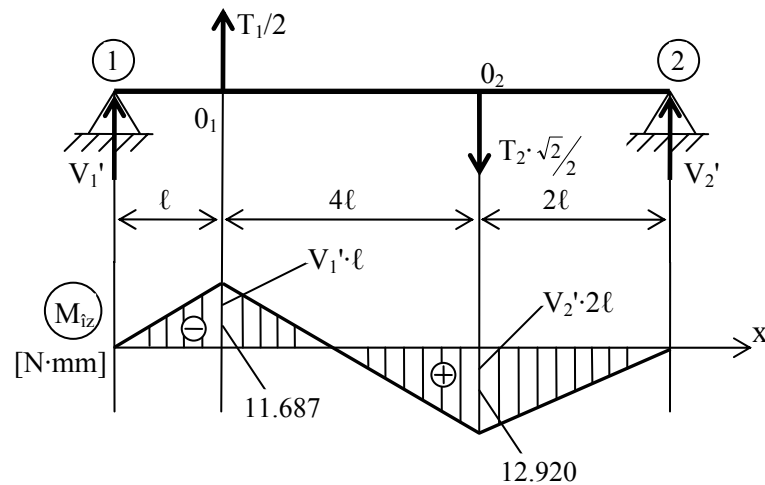


Figura 3.81.

Încovoiere în planul xOz (figura 3.82)

Se scriu ecuațiile de echilibru și se calculează reacțiunile. Se obține:

$$V_1'' - \frac{T_1 \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 + V_2'' = 0$$

$$1) -\frac{T_1 \sqrt{3}}{2} \cdot l + \frac{\sqrt{2}}{2} T_2 \cdot 5l + V_2'' \cdot 7l = 0 \Rightarrow V_2'' = -23N$$

$$2) V_1'' \cdot 7l - \frac{T_1 \sqrt{3}}{2} \cdot 6l + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l = 0 \Rightarrow V_1'' = 114,4N$$

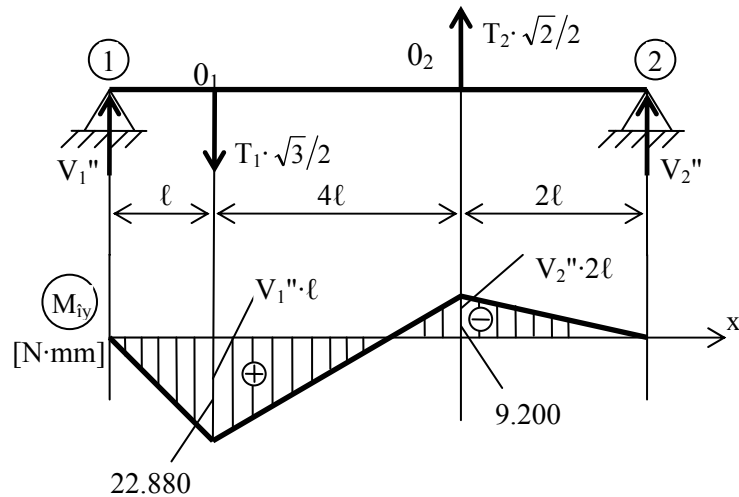


Figura 3.82.

Diagrama de variație a momentului încovoietor M_{iz} este prezentată în figura 3.82.

Momentul încovoietor rezultat M_{rez} se află prin compunerea punct cu punct a diagramei M_{iz} și M_{iy} . În orice punct $M_{rez} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}$ (se compune după regula paralelogramului), acesta exprimând mărimea momentului încovoietor rezultat care diferă de la o secțiune la alta atât ca mărime cât și ca direcție. Ținând cont de diagramele din figurile 3.81 și 3.82 se calculează:

$$M_{rez1} = \sqrt{11.687^2 + 22.880^2} \approx 25692 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{rez2} = \sqrt{12.920^2 + 9.200^2} \approx 15860,8 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Rezultă: $M_{rez \max} = M_{rez1} = 25692 \text{ N} \cdot \text{mm}$.

Diagrama de variație a momentului de torsiune M_t este prezentată în figura 3.83.

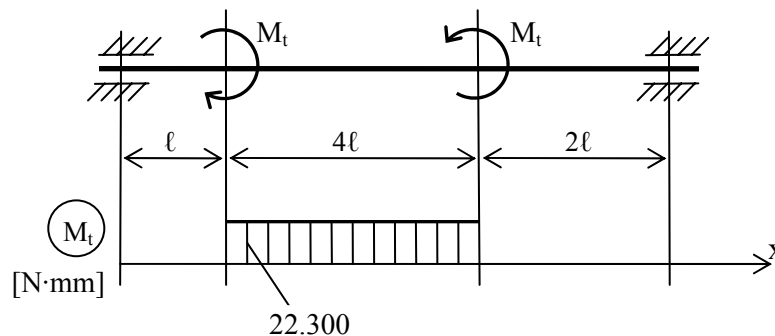


Figura 3.83.

Secțiunea periculoasă este în O_1 unde din încovoiere rezultă $\sigma = \frac{M_{rez\ max}}{W_z}$, iar din torsiune $\tau = \frac{M_t}{W_p}$. Pentru secțiunea circulară se cunosc:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; W_z = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow W_p = 2W_z.$$

Pentru că apar tensiuni de natură diferită calculul de rezistență se face folosind relațiile rezultate din teoriile de rezistență. Din *teoria tensiunii tangențiale maxime* rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{irez}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{irez}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{irez}^2 + M_t^2}}{W_z}$$

Se înlocuiesc valorile de mai sus pentru momentul de încovoiere resultant, pentru momentul de torsiune și se impune condiția cunoscută:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a$$

$$\text{rezultă: } \sigma_{ech} = \frac{32\sqrt{25692^2 + 22300^2}}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 34020,1}{\pi d^3} \leq 160$$

$$\text{De unde: } d \geq \sqrt[3]{2166,88} \Rightarrow d \geq 12,94\text{mm}.$$

Probleme propuse

1. Să se traseze diagramele de eforturi (N , M_z , M_y , M_t) pentru următorul sistem de bare.

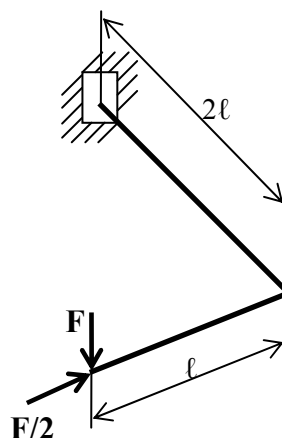


Figura 3.84.

2. Se dă bara cotită spațială, având secțiune tubulară cu $d = 60\text{mm}$, $D=80\text{mm}$ și încărcarea conform *figurii 3.85*. Se cere:

- să se traseze diagramele de eforturi (N , T_z , T_y , M_z , M_y , M_t);
 - să se calculeze valoarea forței capabile F_{cap} , folosind teoria tensiunii tangențiale maxime, luând în considerație numai efectul încovoierii și torsiunii.
- Se cunosc: $l = 0,5\text{m}$ și $\sigma_a = 150\text{MPa}$.

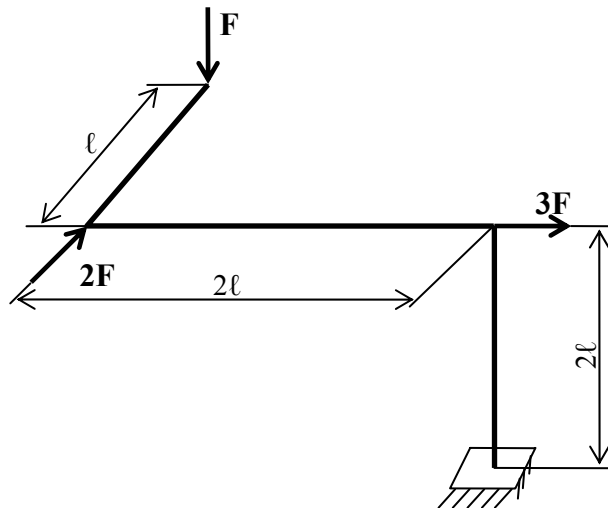


Figura 3.85.

3. Se dă bara cotită spațială, având secțiune circulară cu $d = 60\text{mm}$, și încărcarea conform *figurii 3.86*.

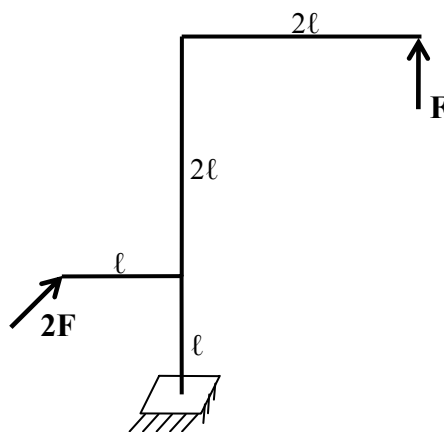


Figura 3.86.

Se cere:

- să se traseze diagramele de eforturi (N , T_z , T_y , M_z , M_y , M_t);
- să se verifice bara, folosind teoria tensiunii tangențiale maxime, luând în considerație numai efectul încovoierii și torsiunii. Se cunosc: $F=1kN$, $l = 0,7m$ și $\sigma_a = 150MPa$.

4. O bară cotită spațială are forma, dimensiunile și încărcarea din figura 3.87. Se cere:

- să se traseze diagramele de eforturi (N , T_z , T_y , M_z , M_y , M_t);
- să se dimensioneze bara cotită, având secțiunea transversală circulară, folosind teoria tensiunilor tangențiale maxime, luând în considerație numai efectul încovoierii și torsiunii. Se cunosc: $F=1,2kN$, $l= 0,6m$ și $\sigma_a = 100MPa$.

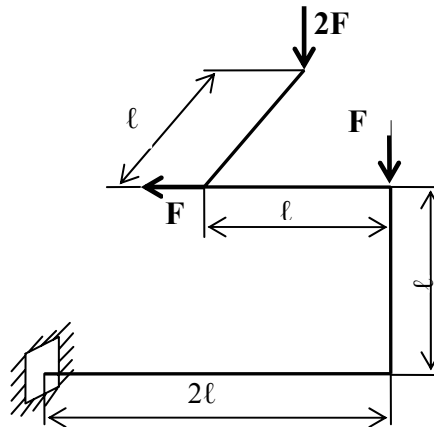


Figura 3.87.

5. O bară orizontală, cotită, de secțiune circulară constantă, are forma, dimensiunile și încărcarea din figura 3.88.

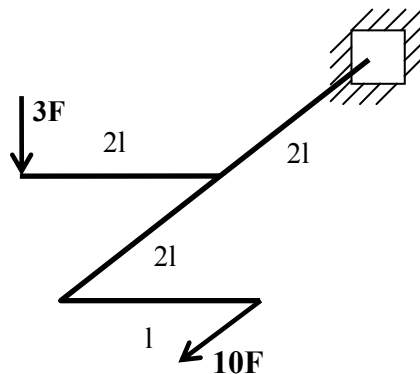


Figura 3.88.

Se cunosc: $d = 80\text{mm}$, $l = 0,8\text{m}$, $\sigma_a = 140\text{MPa}$. Se cer:

- diagramele de eforturi M_i , M_t , N ;
- valoarea forței capabile cu teoria tensiunilor tangențiale maxime (în calcule se va ține seama atât de N cât și de M_i și M_t ,

6. O bară cotită de secțiune circulară constantă, cu diametrul d este sollicitată ca în *figura 3.89*. Se cer:

- diagramele de eforturi M_i , M_t , N ;
- valoarea forței capabile cu teoria tensiunilor tangențiale maxime (în calcule se va ține seama atât de N cât și de M_i și M_t ,

Se cunosc: $d = 60\text{mm}$, $l = 0,5\text{m}$, $\sigma_a = 120\text{MPa}$.

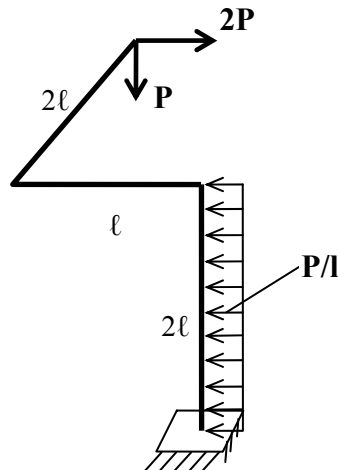


Figura 3.89.

7. Asupra arborelui **I** dintr-o cutie de viteze (*figura 3.90*) acționează momentul de torsiune constant $M = 800\text{Nm}$. Arborele **I** transmite mișcarea arborelui **II** prin intermediul unui angrenaj cu roți dințate. Să se verifice arborele **I** dacă se cunosc: raza de divizare a roții dințate $r = 80\text{mm}$, $a = 200\text{mm}$, $b = 100\text{mm}$, $D = 50\text{mm}$, $\sigma_a = 120\text{MPa}$. În calcule se va considera că prin angrenare asupra roții dințate acționează atât o forță tangențială cât și una radială ($P_2 = 0,4 \cdot P_1$).

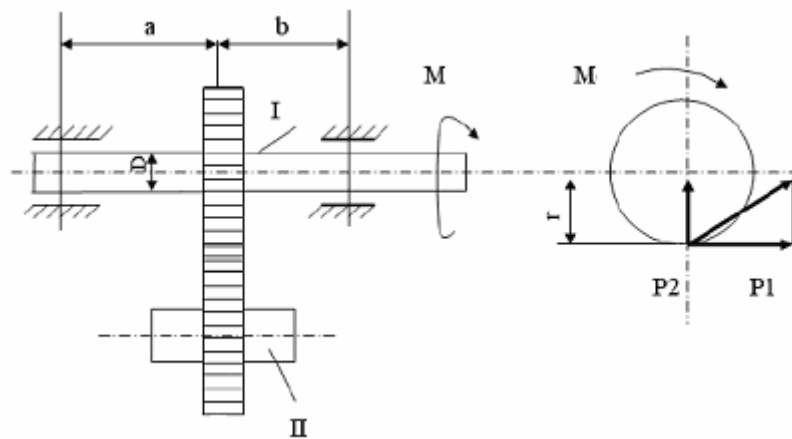


Figura 3.90.

8. Se consideră arborele din *figura 3.91*, având modulul de rigiditate constant. Se cere diametrul arborelui după teoria tensiunilor tangențiale maxime. Se cunosc: $F = 4\text{kN}$, $D_1 = 100\text{mm}$, $D_2 = 200\text{mm}$, $\sigma_a = 150\text{MPa}$.

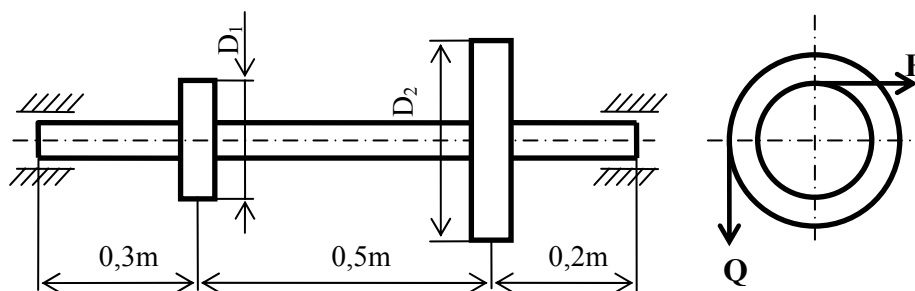


Figura 3.91.

9. Pentru bara inelară din *figura 3.92*, cu diametrul exterior D și diametrul interior $d = 0,7D$, având modulul de rigiditate constant, se consideră cunoscute p , l , D .

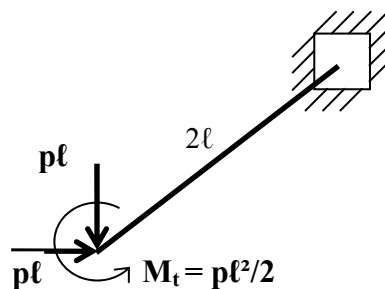


Figura 3.92.

Se cer:

- momentul încovoietor rezultat maxim;
- tensiunea echivalentă maximă după teoria tensiunilor tangențiale maxime.

10. Pentru arborele de secțiune circulară din figura 3.93 se cunoaște rezistența admisibilă a materialului $\sigma_a = 140\text{MPa}$. Se cer:

- momentul echivalent maxim;
- diametrul arborelui.

Se cunosc: $\alpha=45^\circ$, $F = 6\sqrt{2}\text{ kN}$, $D_1 = 100\text{mm}$, $D_2 = 150\sqrt{2}\text{ mm}$.

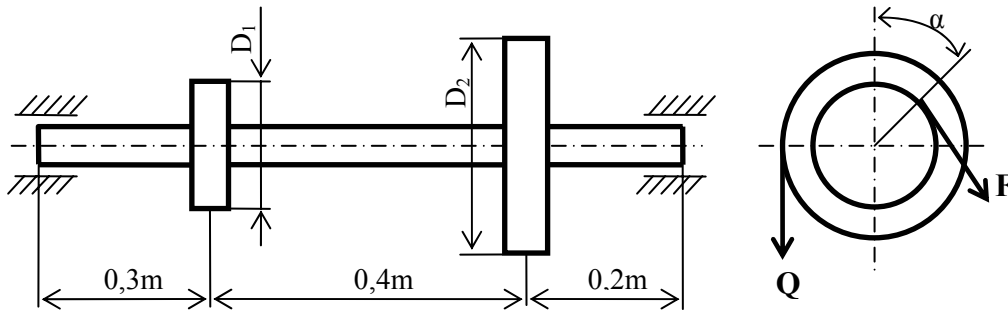


Figura 3.93.

11. Pentru arborele de secțiune circulară din figura 3.94 se cunosc $F_2=8\sqrt{2}\text{ kN}$, $D_1 = 400\text{mm}$, $D_2 = 600\text{mm}$, $\alpha=45^\circ$, $\sigma_a = 100\text{MPa}$. Se cer:

- valoarea forței F_1 ;
- diametrul arborelui.

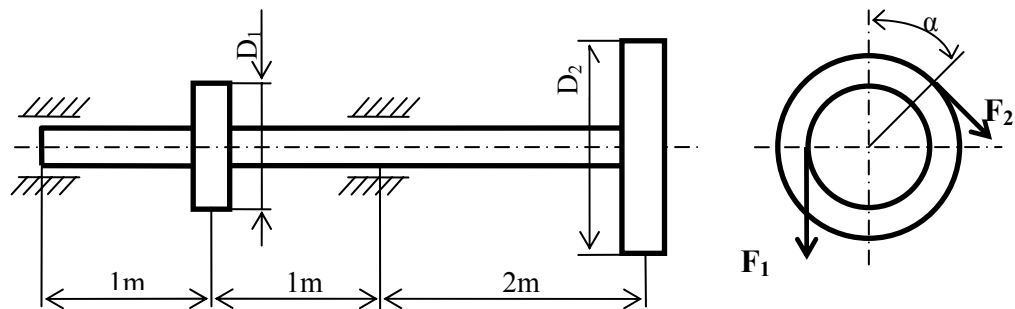


Figura 3.94.

CAPITOLUL 4

BARE CURBE

4.1. Generalități

Barele curbe sunt bare la care axa este o curbă. În acest capitol ne referim la bare curbe plane, atunci când axa barei se găsește într-un plan care cuprinde și forțele exterioare. Se deosebesc două categorii de bare curbe:

- bare cu *raza de curbură mică* $\frac{\rho}{h} < 10$ (la aceste bare axa geometrică este un *cerc*);

- bare cu *raza de curbură mare* $\frac{\rho}{h} \geq 10$ (la aceste bare axa geometrică este o *parabolă*);

unde ρ reprezintă raza de curbură, iar h înălțimea secțiunii transversale.

În acest capitol se vor studia barele a căror linie mediană este o curbă plană. Se presupune că secțiunile transversale ale barei au o axă de simetrie în acest plan și că bara este supusă la forțe situate în planul de simetrie.

În aceste condiții într-o secțiune oarecare a barei eforturile vor fi M (momentul încovoietor), N (forța axială) și T (forța tăietoare). Toate aceste eforturi vor acționa în planul de simetrie al barei.

Tensiunile normale σ care apar, în aceste condiții, într-o secțiune oarecare, la o bară rectilinie sunt date de *relația lui Navier generalizată*:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i \cdot y}{I_z}$$

unde: A – aria secțiunii transversale;

I_z - momentul de inerție față de axa neutră;

y - distanța fibrei considerate la axa neutră.

Această formulă, însă, se îndepărtează mult de realitate în cazul grinzilor cu curbura mare, valorile obținute fiind mult sub cele care apar efectiv în bară.

4.2. Bare curbe sub formă de arc de cerc

Stabilirea relației de calcul corespunzătoare acestei categorii de bare se face în ipoteza că materialul din care este confecționată bara este elastic și ascultă de *legea lui Hooke*. Se admite că rămâne valabilă și *ipoteza lui Bernoulli* (secțiunile plane, normale pe linia mediană a barei, rămân plane și normale pe linia mediană deformată și după ce bara s-a încovoiat).

Se consideră o bară curbă cu curbura mare. Se izolează un element de bară curbă prin două secțiuni care trec prin centrul de curbura și care fac între ele unghiul $d\varphi$ (*figura 4.1.*). Se consideră că secțiunea din stânga este fixă. După deformație *secțiunea AB* (din dreapta) ajunge în poziția $A''B''$ (secțiunea AB rămâne plană după deformație respectând ipoteza lui Bernoulli, dar suferă o rotație și ajunge în poziția $A''B''$). Se trasează $A'B'$ paralel cu AB .

În secțiune lucrează o *forță axială* N și un *moment încovoietor* M care materializează acțiunea părții îndepărtate asupra părții de bară izolată și care sunt cunoscute (se iau din diagramă).

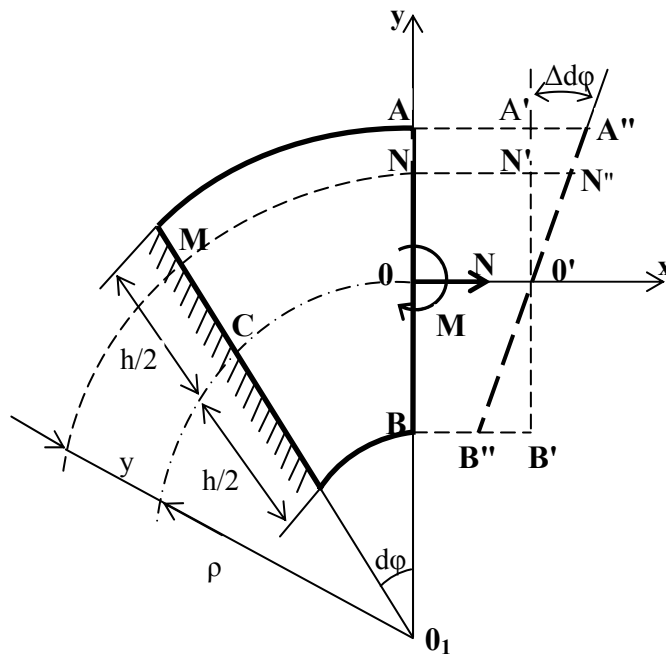


Figura 4.1.

Se pleacă de la următoarele două ecuațiile de echivalență stabilite în prima parte a cursului de *Rezistența materialelor*:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma \cdot dA \\
 M_{iz} &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Trebuie determinată legea de variație a tensiunii normale pe înălțimea secțiunii transversale (pe lățimea secțiunii tensiunea se consideră constantă). Pentru rezolvarea problemei se face apel la studiul deformăției: *se va exprima alungirea specifică a fibrei care se găsește la distanța y de axa barei (fibră MN).*

Lungimea arcului de cerc de pe axa barei se poate exprima astfel:

$$ds_o = C\hat{O} = \rho \cdot d\varphi
 \tag{4.2}$$

iar *lungimea arcului de cerc de pe o fibră oarecare (fibră MN) aflată la distanța y de axa barei:*

$$ds = M\hat{N} = (\rho + y) \cdot d\varphi
 \tag{4.3}$$

unde: ρ - raza de curbură a liniei mediene.

Observație:

- Relațiile (4.2) și (4.3) au putut fi scrise deoarece $d\varphi$ fiind mic se pot aproxima arcele cu arce de cerc.

Alungirea fibrei MN se poate scrie astfel:

$$\Delta ds = N\widehat{N}'' = N\widehat{N}' + N'\widehat{N}'' \quad (4.4)$$

Dar

$$N\widehat{N}' \approx O\widehat{O}' = ds_o \quad (4.5)$$

În triunghiul $O'N'N''$ se poate scrie:

$$\operatorname{tg}\Delta d\varphi \approx \Delta d\varphi = \frac{N'\widehat{N}''}{y} \Rightarrow \quad (4.6)$$

$$N'\widehat{N}'' = y \cdot \Delta d\varphi$$

Din ultimile trei relații rezultă:

$$\Delta ds = \Delta ds_o + y \cdot \Delta d\varphi \quad (4.7)$$

Prin urmare:

$$\Delta ds = \varepsilon_o \cdot ds_o + y \cdot \Delta d\varphi = \varepsilon_o \cdot \rho \cdot d\varphi + y \cdot \Delta d\varphi \quad (4.8)$$

Alungirea specifică a fibrei MN este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\varepsilon_o \cdot \rho \cdot d\varphi + y \cdot \Delta d\varphi}{(\rho + y) \cdot d\varphi} = \frac{\varepsilon_o \cdot \rho}{\rho + y} + \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (4.9)$$

Din legea lui Hooke se știe că $\sigma = E \cdot \varepsilon$ și ținând cont de relația (4.9) se poate scrie:

$$\sigma = E \cdot \left(\varepsilon_o \frac{\rho}{\rho + y} + \frac{y}{\rho + y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right)$$

sau

$$\sigma = \frac{E}{\rho + y} \cdot \left(\rho \cdot \varepsilon_o + y \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right) \quad (4.10)$$

Relația (4.10) exprimă legea de variație a tensiunii normale, pe înălțimea secțiunii transversale, pentru bara curbă cu raza de curbură mică $\frac{\rho}{h} < 10$ (bara curbă sub formă de arc de cerc).

Observație:

- Dacă se păstrează ipoteza secțiunii plane (ipoteza lui Bernoulli) rezultă o distribuție hiperbolică a tensiunii normale pe înălțimea secțiunii transversale a unei bare curbe sub formă de arc de cerc.

Se înlocuiește relația (4.10) în cele două ecuații de echivalență din relația (4.1) și se obține:

$$\begin{aligned}
 N &= E \cdot \int_A \left(\varepsilon_o \frac{\rho}{\rho+y} + \frac{y}{\rho+y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right) \cdot dA \\
 M_{iz} &= E \cdot \int_A y \cdot \left(\varepsilon_o \frac{\rho}{\rho+y} + \frac{y}{\rho+y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right) \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Pentru rezolvarea celor două integrale din sistemul (4.11) se introduce notația:

$$k = -\frac{I}{A} \int_A \frac{y}{\rho+y} \cdot dA
 \tag{4.12}$$

k se numește coeficient de formă al secțiunii ($0 < k < 1$).

Observație:

- Coeficientul de formă al secțiunii este o caracteristică pur geometrică a secțiunii.

Sistemul (4.11) poate fi scris sub următoarea formă:

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{E} &= \varepsilon_o \cdot \int_A \frac{\rho}{\rho+y} \cdot dA + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y}{\rho+y} \cdot dA \\
 \frac{M_{iz}}{E} &= \varepsilon_o \cdot \int_A \frac{y \cdot \rho}{\rho+y} \cdot dA + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y^2}{\rho+y} \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

unde: $\Delta d\varphi$ - rotirea specifică.

Se obține un sistem în care apar ca necunoscute mărimile ε_o , $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$.

Ținând cont de *relația (4.12)* integralele din cele două ecuații *ale sistemul (4.13)* devin:

$$\int_A \frac{I}{\rho + y} \cdot dA = \frac{I}{\rho} \int_A \frac{\rho}{\rho + y} \cdot dA = \frac{I}{\rho} \int_A \frac{\rho + y - y}{\rho + y} \cdot dA = \frac{I}{\rho} (A + k \cdot A) = \frac{A}{\rho} (1 + k) \quad (4.14)$$

$$\int_A \frac{y^2}{\rho + y} \cdot dA = \int_A \frac{y^2 + \rho y - \rho y}{\rho + y} \cdot dA = \int_A y \cdot dA + \rho k A = \rho k A$$

Observație:

- În *relația (4.14)* integrala $\int_A y \cdot dA = S_z$ reprezintă *momentul static al secțiunii față de axa Oz care este axă centrală (trece prin centrul de greutate) și prin urmare este zero.*

Se înlocuiesc *relațiile (4.12) și (4.14)* în *sistemul (4.13)* și se obține:

$$\frac{N}{E} = \varepsilon_o \cdot A \cdot (1 + k) - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot kA \quad (4.15)$$

$$\frac{M_{iz}}{E} = -\varepsilon_o \cdot \rho \cdot kA + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \rho kA$$

Se rezolvă *sistemul (4.15)* și se determină ε_o , $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$. Se obține:

$$\varepsilon_o = \frac{N}{EA} + \frac{M_{iz}}{\rho EA}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{N}{EA\rho} + \frac{(1 + k)M_{iz}}{kEA\rho}$$

Înlocuind ε_o , $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ în *relația (4.10)* se obține:

$$\sigma = \frac{I}{A} \cdot \left(N + \frac{M_{iz}}{\rho} + \frac{M_{iz}}{\rho k} \cdot \frac{y}{\rho + y} \right) \quad (4.16)$$

Relația (4.16) reprezintă ecuația unei hiperbole și dă repartiția tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii transversale a unei bare curbe sub formă de arc de cerc.

Observații:

- În cazul barelor curbe cu curbură mare repartiția tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii transversale nu mai este liniară, ca în cazul grinzilor drepte, ci hiperbolică.
- Îndiferent de felul încărcării de pe bara curbă tensiunile maxime apar întotdeauna la interiorul barei.
- Secțiunea periculoasă este cea în care momentul încovoietor este maxim.
- În cazul barelor curbe axa neutră (locul geometric al punctelor pentru care tensiunile sunt nule) nu mai coincide cu axa geometrică a barei (ca în cazul barelor drepte).

4.2.1. Calculul coeficientului de formă

Secțiune dreptunghiulară (figura 4.2)

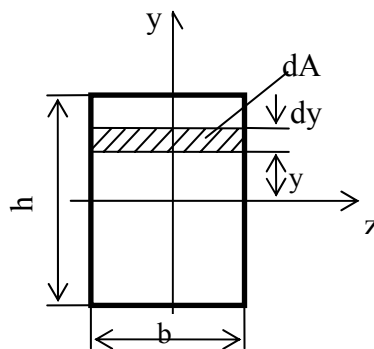


Figura 4.2.

Pentru o secțiunea dreptunghiulară de aria $A = b \cdot h$ se consideră un element de arie $dA = b \cdot dy$. Se pleacă de la relația de definiție a coeficientului de formă (relația 4.12) și se fac înlocuirile. Rezultă:

$$k = -\frac{1}{A} \int_A \frac{y}{\rho + y} \cdot dA = -\frac{1}{bh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y + \rho - \rho}{\rho + y} \cdot b dy = -\frac{bh}{bh} + \frac{\rho}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dy}{\rho + y} =$$

$$= -1 + \frac{\rho}{h} \ln \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}} = -1 + \frac{\rho}{h} \ln \frac{2\rho + h}{2\rho - h}$$

Întotdeauna $\frac{h}{2\rho} < 1$ și prin urmare se poate face o descompunere în serii a fracției din relația precedentă. Se obține:

$$\ln \frac{1 + \frac{h}{2\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}} = 2 \cdot \left[\frac{h}{2\rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^7 + \dots \right] \quad (4.17)$$

Înlocuind relația (4.17) în relația de calcul a coeficientul de formă se obține:

$$k = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^6 + \dots \quad (4.18)$$

Observații:

- Relația (4.17) s-a obținut prin descompunere în serii aplicând relația:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

- În relația (4.18) influența celui de-al treilea termen este mică.
- În mod similar se calculează coeficientul de formă pentru alte secțiuni.

Astfel se obține:

- pentru secțiunea circulară de rază r :

$$k = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\rho} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{r}{\rho} \right)^6 + \dots \quad (4.19)$$

- pentru secțiunea trapezoidală (figura 4.3):

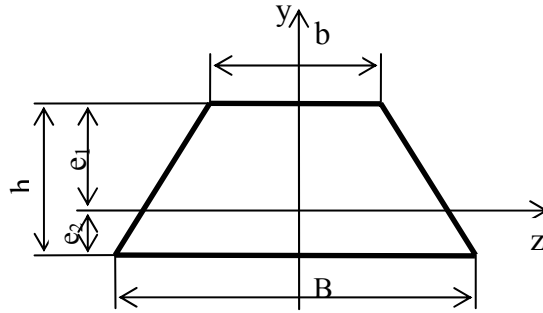


Figura 4.3.

$$k = -1 + \frac{2\rho}{(B+b)h} \left\{ \left[b + \frac{B-b}{h}(e_2 + \rho) \right] \cdot \ln \frac{\rho + e_2}{\rho - e_1} - (B-b) \right\} \quad (4.20)$$

4.2.2. Axa neutră a secțiunii unei bare curbe

Se consideră relația (4.16) în care se face $\sigma = 0$.

$$\sigma = \frac{1}{A} \cdot \left(N + \frac{M_{iz}}{\rho} + \frac{M_{iz}}{\rho k} \cdot \frac{y}{\rho + y} \right) = 0$$

Se obține:

$$y = \frac{k \cdot \rho \cdot (M_{iz} - N \cdot \rho)}{(1+k) \cdot M_{iz} - k \cdot \rho \cdot N} \quad (4.21)$$

Această expresie reprezintă distanța de la centrul de greutate până la axa neutră.

Se prezintă câteva cazuri particulare:

a) Încovoierea pură

În acest caz $N = 0$ și din relația precedentă rezultă:

$$y = \frac{k \cdot \rho}{(1+k)}$$

Se notează cu e această distanță, adică:

$$e = \frac{k \cdot \rho}{1+k}$$

Observație:

- În cazul barelor curbe axa neutră nu trece prin centrul de greutate al secțiunii, ca la grinzile drepte. Ea se găsește la distanța e de centrul de greutate și întotdeauna de partea centrului de curbură (pentru că $e > 0$).

b) Întinderea (compresiunea) pură

În acest caz $M = 0$ și rezultă $y = \rho$, adică axa neutră trece prin centrul de curbură.

c) Este interesant de văzut în ce condiții axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii. Pentru aceasta este necesar ca $y = 0$ adică $M - N \cdot \rho = 0$. Rezultă că, pentru a fi îndeplinită această condiție, sistemul de forțe exterioare trebuie să se reducă în secțiunea respectivă la o forță N care trece prin centrul de curbură.

d) Cazul particular când axa neutră este aruncată la infinit. Aceasta are loc când numitorul relației (4.21) se anulează, respectiv când:

$$(1+k) \cdot M_{iz} - k \cdot \rho \cdot N = (1+k) \cdot \left(M - \frac{k\rho}{1+k} N \right) = (1+k) \cdot (M - N \cdot e) = 0$$

adică atunci când sistemul de forțe exterioare se reduce în secțiunea respectivă la o forță N care trece la distanța e de centrul de greutate (deci întâlnește axa neutră corespunzătoare cazului **a**, al încovoierii pure).

Aplicații:

1. Se consideră bara curbă din figura 4.4.

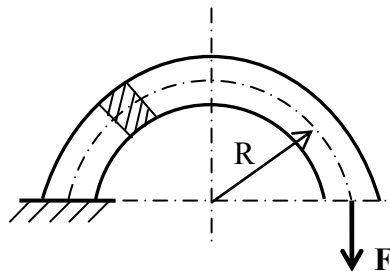


Figura 4.4.

Să se calculeze tensiunile maxime și minime în secțiunea periculoasă și să se verifice bara. Se cunosc: $R=0,5m$, $F = 5kN$, $\sigma_a = 180MPa$. Bara are secțiunea transversală dreptunghiulară cu lățimea de $20mm$ și înălțimea de $100mm$.

Rezolvare:

Se trasează diagramele de moment încovoiator și forță axială pentru a stabili secțiunea periculoasă.

Observații:

- Pentru trasarea diagramei forței axiale se păstrează definiția și regula de semne stabilite la barele drepte.
- Pentru a stabili semnul momentului încovoiator într-o secțiune se imaginează o fibră din interiorul barei care se reprezintă punctat și se adoptă o convenție de semne invers ca la grinzile cotite: dacă fibra este întinsă momentul se consideră negativ, iar dacă fibra este comprimată momentul se consideră pozitiv.
- Spre deosebire de grinzile drepte și cele cotite variabila, în funcție de care se exprimă eforturile în secțiune, este unghiul la centru.
- Diagramele se vor reprezenta pe conturul barei curbe.

În secțiunea α (figura 4.5) expresia momentului încovoiator este:

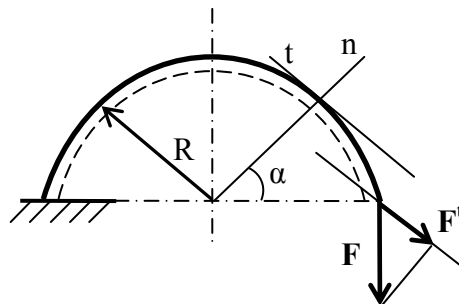


Figura 4.5.

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$M(\alpha) = F \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt:

$$M(0) = 0; M(\pi/2) = F \cdot R; M(\pi) = 2F \cdot R$$

Pentru a trasa diagrama de moment încovoietor se consideră conturul barei fără încărcare și rezemare. Locul unde se reprezintă valorile pozitive și negative ale momentului nu se impune: reprezentarea se face în așa fel încât diagrama să rezulte cât mai clară (în diagramă să avem cât mai puține suprapuneri). Pentru bara curbă prezentată s-a ales ca valorile pozitive ale momentului să fie reprezentate la exterior (figura 4.6.).

În aceeași secțiune forța axială este:

$$N(\alpha) = F^t = F \cdot \cos \alpha$$

Variația forței este:

$$N(0) = F; N(\pi/2) = 0; N(\pi) = -F$$

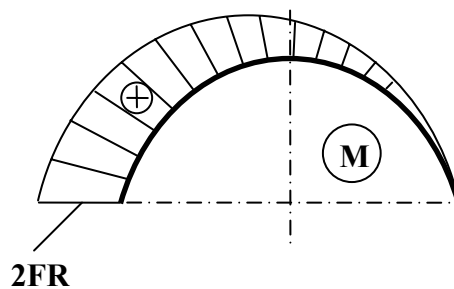


Figura 4.6.

Diagrama forței axiale este prezentată în figura 4.7.

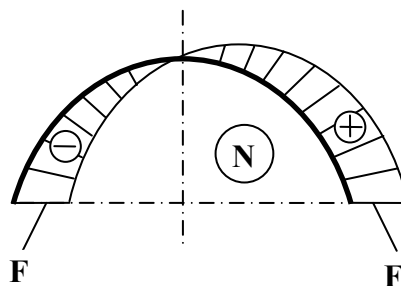


Figura 4.7.

Determinant în calculul barei curbe este momentul încovoietor. Secțiunea periculoasă este în încastrare unde $M_{imax} = 2FR$. În aceeași secțiune $N = F$.

Se calculează raportul $\frac{\rho}{h}$ (pentru bara studiată $\rho = R$):

$$\frac{\rho}{h} = \frac{R}{h} = \frac{500}{100} = 5 < 10$$

Prin urmare pentru calculul barei curbe trebuie folosită *relația (4.16)*. Se fac înlocuirile și se obține:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{A} \cdot \left(N + \frac{M_{iz}}{R} + \frac{M_{iz}}{kR} \cdot \frac{y}{R+y} \right) = \frac{1}{A} \cdot \left(-F + \frac{2FR}{R} + \frac{2FR}{kR} \cdot \frac{y}{R+y} \right) \Rightarrow \\ \sigma &= \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{2}{k} \cdot \frac{y}{R+y} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Se calculează cu *relația (4.19)* coeficientul de formă:

$$k = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2R} \right)^6 = \frac{1}{3} (0,1)^2 + \frac{1}{5} (0,1)^4 + \frac{1}{7} (0,1)^6 = 0,00335$$

Pentru calcularea tensiunilor maxime și minime se înlocuiesc în *relația (4.22)* valorile corespunzătoare pentru y (y este pozitiv în sus de la raza de curbura). În fibra exterioară se obține:

$$\sigma_{ext} = \sigma_{(y=50)} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{2}{k} \cdot \frac{50}{500+50} \right) = \frac{5000}{100 \cdot 20} \left(1 + \frac{2}{0,00335} \cdot \frac{1}{11} \right) = 138,18 \text{ MPa}$$

În fibra interioară ($y = -50$) rezultă:

$$\sigma_{int} = \sigma_{(y=-50)} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 - \frac{2}{k} \cdot \frac{50}{500-50} \right) = \frac{5000}{100 \cdot 20} \left(1 - \frac{2}{0,00335} \cdot \frac{1}{9} \right) = -163,33 \text{ MPa}$$

Se observă că $\sigma_{max} = \sigma_{int}$. Pentru efectuarea calculului de verificare al barei se impune condiția cunoscută: $\sigma_{max} \leq \sigma_a$. Cu valorile din aplicația studiată se obține:

$$\sigma_{max} = 163,33 \text{ MPa} < \sigma_a = 180 \text{ MPa}$$

Inegalitatea este îndeplinită și prin urmare bara curbă rezistă.

2. Să se dimensioneze bara curbă (cârligul) din *figura 4.8*. Se cunosc: $R=100\text{mm}$, $F = 3\text{kN}$, $\sigma_a = 180\text{MPa}$. Secțiunea cârligului este circulară.

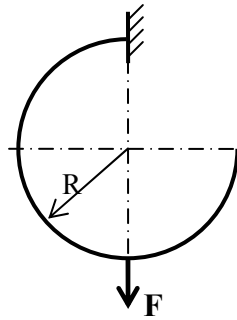


Figura 4.8.

Rezolvare:

Se trasează diagramele de moment încovoietor și forța axială pentru a stabili secțiunea periculoasă.

În cele două secțiuni (*figura 4.9*), expresia momentului încovoietor este:

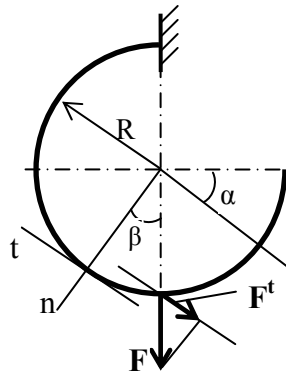


Figura 4.9.

$$\alpha \in [0, \pi / 2]$$

$$M(\alpha) = 0$$

$$\beta \in [0, \pi]$$

$$M(\beta) = -F \cdot R \cdot \sin \beta$$

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt:

$$M(0) = 0; M(\pi/2) = -F \cdot R; M(\pi) = 0$$

Pentru bara curbă prezentată s-a ales ca valorile negative ale momentului să fie reprezentate la exterior (*figura 4.10.*).

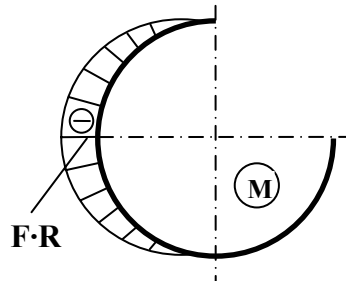


Figura 4.10.

În aceeași secțiuni (*figura 4.9*) forța axială este:

$$N(\alpha) = 0$$

$$N(\beta) = F^t = F \cdot \sin \beta$$

Variația forței este:

$$N(0) = 0; N(\pi/2) = F; N(\pi) = 0$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 4.11.*

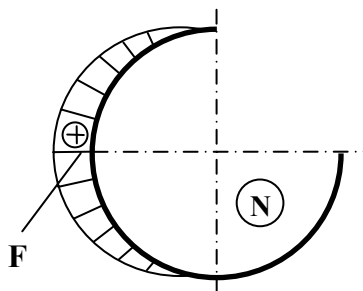


Figura 4.11.

În secțiunea periculoasă $M_{imax} = FR$ și $N = F$. Deoarece nu se cunoaște raportul $\frac{\rho}{h} = \frac{R}{d}$ nu se poate preciza dacă este necesar să se lucreze cu *relația* (4.16) stabilită pentru barele curbe. În acest caz se face o predimensionare cu

relația lui Navier generalizată (aceasta este formula cea mai simplă folosită pentru calculul barelor curbe cu rază mare de curbă):

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{i\ max}}{W_z} \leq \sigma_a$$

Așa cum s-a precizat în capitolul anterior, la calculul grinzilor cotite, în prima etapă a calculului termenul provenit din solicitarea axială (N/A) se neglijează în raport cu termenul provenit din încovoiere ($M_{i\ max}/W_z$). Este explicabil acest mod de abordare al calculului prin faptul că s-a constatat că $\frac{N}{A} \ll \frac{M_{i\ max}}{W_z}$.

Se obține:

$$\frac{M_{i\ max}}{W_z} = \sigma_a \Rightarrow \frac{F \cdot R}{\frac{\pi d^3}{32}} = \sigma_a \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32F \cdot R}{\pi \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{\pi \cdot 180}} \approx 25,7\text{mm}$$

Se majorează diametrul pentru că nu s-a ținut cont și de solicitarea axială. Se adoptă $d = 28\text{mm}$ și se face un calcul de verificare cu *relația lui Navier generalizată*. Se obține:

$$\begin{aligned} \sigma_{ef} &= \frac{N}{A} + \frac{M_{i\ max}}{W_z} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{FR}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32FR}{\pi d^3} = \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{\pi \cdot 28^2} + \frac{32 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{\pi \cdot 28^3} = 144\text{MPa} < 180\text{MPa} \end{aligned}$$

Se calculează raportul $\frac{\rho}{h}$ (pentru bara studiată $\rho = R, h = d = 28\text{mm}$):

$$\frac{\rho}{h} = \frac{R}{d} = \frac{100}{28} < 10$$

Prin urmare pentru calculul barei curbe având secțiunea circulară cu diametrul $d=28\text{mm}$ trebuie folosită *relația (4.16)*.

Se fac înlocuirile ($A = \frac{\pi d^2}{4}, M_{iz} = FR, N = F, \rho = R$) și se obține:

$$\sigma = \frac{1}{A} \cdot \left(N + \frac{M_{iz}}{R} + \frac{M_{iz}}{kR} \cdot \frac{y}{R+y} \right) = \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \left(F + \frac{FR}{R} + \frac{FR}{kR} \cdot \frac{y}{R+y} \right) \Rightarrow \quad (4.23)$$

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} \cdot \left(2 + \frac{1}{k} \cdot \frac{y}{R+y} \right)$$

Se calculează cu *relația* (4.20) coeficientul de formă (se neglijează influența celui de-al treilea termen):

$$k = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\rho} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{2R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{2R} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{28}{2 \cdot 100} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{28}{2 \cdot 100} \right)^4 \approx$$

$$\approx 0,004948 \Rightarrow \frac{1}{k} = 202,1$$

Așa cum s-a precizat anterior, indiferent de felul încărcării de pe bara curbă tensiunile maxime apar întotdeauna la interiorul barei ($y = -d/2$), și prin urmare înlocuind în *relația* (4.23) se obține:

$$\sigma_{max} = \frac{4F}{\pi d^2} \cdot \left(2 + \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{2R-d} \right) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3}{\pi \cdot 28^2} \cdot \left(2 + 202,1 \cdot \frac{28}{2 \cdot 100 - 28} \right) = 170 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\sigma_{max} = 170 \text{ MPa} < \sigma_a = 180 \text{ MPa}$$

Inegalitatea este îndeplinită și prin urmare valoarea stabilită pentru diametrul barei curbe $d = 28 \text{ mm}$ este corectă.

Observație:

- Dacă într-o aplicație, după efectuarea calculului de predimensionare, inegalitatea $\sigma_{max} \leq \sigma_a$ nu este îndeplinită atunci se reia calculul majorând valoarea diametrului și parcurgând aceleași etape.

3. Se consideră o bară curbă de secțiune transversală dreptunghiulară cu lățimea de 60 mm și înălțimea de 80 mm . Bara având $R=100 \text{ mm}$ este solicitată într-o secțiune de un moment încovoietor pozitiv $M_{iz} = 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$ și de o forță axială de întindere $N = 48 \cdot 10^3 \text{ N}$. Să se calculeze tensiunile maxime și minime în

secțiunea indicată. Ce erori s-ar face dacă s-ar folosi pentru calcul formula de la grinzile drepte?

Rezolvare:

Se calculează cu *relația (4.19)* coeficientul de formă:

$$k = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2R} \right)^6 = \frac{1}{3} (0,4)^2 + \frac{1}{5} (0,4)^4 + \frac{1}{7} (0,4)^6 = 0,05912$$

Pentru calculul barei curbe se folosește *relația (4.16)*. Se fac înlocuirile și se obține:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{I}{A} \cdot \left(N + \frac{M_{iz}}{R} + \frac{M_{iz}}{kR} \cdot \frac{y}{R+y} \right) = \\ &= \frac{I}{60 \cdot 80} \cdot \left(48 \cdot 10^3 + \frac{10^6}{10^2} + \frac{10^6}{0,05912 \cdot 10^2} \cdot \frac{y}{10^2 + y} \right) = \\ \sigma &= 12,08 + 35,23 \frac{y}{10^2 + y} \end{aligned}$$

Pentru calcularea tensiunilor maxime și minime se înlocuiesc în relația precedentă valorile corespunzătoare pentru y (y este pozitiv în sus de la raza de curbură). În fibra exterioară se obține:

$$\sigma_{ext} = \sigma_{(y=40)} = 12,08 + 35,23 \frac{40}{10^2 + 40} = 22,15 \text{ MPa}$$

În fibra interioară rezultă:

$$\sigma_{int} = \sigma_{(y=-40)} = 12,08 - 35,23 \frac{40}{10^2 - 40} = -11,41 \text{ MPa}$$

Dacă se folosește relația de la grinzile drepte:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz} \cdot y}{I_z}$$

cu $I_z = \frac{60 \cdot 80^3}{12} = 256 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ se obține:

$$\sigma_{ext} = \sigma_{(y=40)} = \frac{48 \cdot 10^3}{60 \cdot 80} + \frac{10^6 \cdot 40}{256 \cdot 10^4} = 25,625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{int} = \sigma_{(y=-40)} = \frac{48 \cdot 10^3}{60 \cdot 80} - \frac{10^6 \cdot 40}{256 \cdot 10^4} = -5,625 \text{ MPa}$$

Erorile față de formula exactă sunt de 15,69% pentru tensiunea de întindere și de 50,7% pentru cea de compresiune.

4.3. Deformația barelor curbe sub formă de arc de cerc

Pentru calculul deformației barelor curbe sub formă de arc de cerc se pot folosi *teoremele lui Castigliano*. De exemplu deplasările diferitelor puncte ale barelor curbe se calculează prin aplicarea *primei teoreme a lui Castigliano*, cu ajutorul următoarei relații (dacă se neglijează influența forței axiale și a forței tăietoare):

$$\delta = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{1}{EI_z} \int_0^s M \frac{\partial M}{\partial P} ds = \frac{1}{EI_z} \int_0^\varphi M \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi$$

Metoda Mohr-Maxwell poate fi folosită de asemenea pentru calculul deformației barelor curbe sub formă de arc de cerc. Formulele sunt analoge celor folosite în cazul barelor drepte, cu observația că elementul de bară dreaptă dx se înlocuiește cu elementul de arc ds . Astfel, deplasarea δ a unui punct pe direcția Δ este dată de relația:

$$\delta = \int \frac{N \cdot n}{EA} ds + \int \frac{M_z \cdot m}{EI_z} ds$$

unde:

M_z, N - momentul încovoietor și forța axială într-o secțiune oarecare α , pentru încărcarea barei curbe cu sarcinile reale;

m, n - momentul încovoietor și forța axială, determinate în aceeași secțiune α , cu toate sarcinile nule, cu excepția unei forțe egală cu unitatea care acționează în punctul în care se calculează deplasarea pe direcția Δ .

În mod similar se calculează și rotirea θ a unei secțiuni:

$$\theta = \int \frac{N \cdot n}{EA} ds + \int \frac{M_z \cdot m}{EI_z} ds$$

De data aceasta m și n reprezintă momentul încovoietor și respectiv forța axială care apar într-o secțiune oarecare α , atunci când în secțiunea a cărei deformație vrem să o calculăm acționează un cuplu, de moment egal cu unitatea.

Observație:

- Dacă nu se cunoaște direcția în care se deplasează punctul este necesar să se determine proiecțiile acestei deplasări pe două direcții fixe (de exemplu pe direcție orizontală δ_h și pe cea verticală δ_v). Deplasarea totală este dată de relația:

$$\delta = \sqrt{\delta_h^2 + \delta_v^2}$$

4.4. Diagrame de eforturi la bare curbe sub formă de arc de cerc

Barele curbe sub formă de arc de cerc se clasifică astfel:

- bare curbe static determinate;
- bare curbe static nedeterminate, care se pot clasifica la rândul lor astfel:
 1. bare curbe static nedeterminate exterior (necunoscute sunt reacțiunile din reazeme);
 2. bare curbe static nedeterminate interior (necunoscute sunt eforturile din bare);
 3. bare curbe static nedeterminate exterior și interior (necunoscute sunt atât reacțiunile din reazeme cât și eforturile din bare).

Ridicarea nedeterminării se face utilizând *teoremele lui Castigliano*, parcurgând aceleași etape ca și în cazul grinzilor drepte și a grinzilor cotite.

Pentru studiul barelor curbe sub formă de arc de cerc trebuie trasate diagramele de moment încovoietor și forță axială, iar pentru verificarea

diagramei de moment încovoietor și diagrama de forță tăietoare. Pentru trasarea diagramelor de forță axială și forță tăietoare rămân valabile definițiile și convențiile de semne stabilite la grinzile drepte. Pentru a stabili semnul momentului încovoietor într-o secțiune se imaginează o fibră din interiorul barei care se reprezintă punctat. Dacă această fibră este întinsă momentul se consideră negativ, iar dacă fibra este comprimată momentul se consideră pozitiv.

Spre deosebire de grinzile drepte și cele cotate variabila, în funcție de care se exprimă eforturile în secțiune, este unghiul la centru.

Cele trei diagrame (moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială) vor fi reprezentate pe conturul barei curbe fără încărcare și rezemare. Locul unde se reprezintă valorile pozitive și negative ale eforturilor nu este impus: reprezentarea se face în așa fel încât diagramele să rezulte cât mai clare (în diagrame să avem cât mai puține suprapuneri).

Rămân valabile toate regulile de verificare pentru diagramele de eforturi stabilite în cazul grinzilor drepte.

4.4.1. Bare curbe sub formă de arc de cerc static determinate

1. Să se traseze diagramele de eforturi (moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială) pentru bara curbă din figura 4.12.

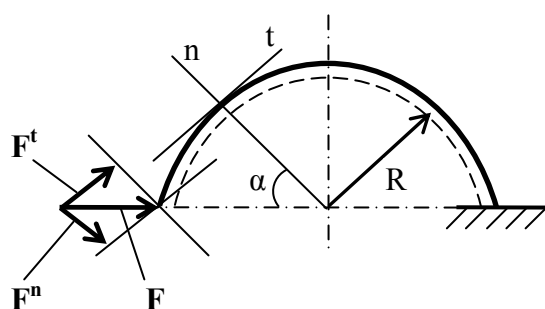


Figura 4.12.

Rezolvare:

Pe lungimea barei avem o singură regiune și prin urmare nu este necesar calculul reacțiilor din încastrare. Se face o secțiune, variabila în funcție de care se exprimă cele trei eforturi fiind unghiul la centru α .

Expresia momentului încovoietor este:

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$M(\alpha) = F \cdot R \cdot \sin \alpha$$

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt:

$$M(0) = 0; M(\pi / 2) = F \cdot R; M(\pi) = 0$$

Diagrama de moment încovoietor este prezentată în *figura 4.13*.

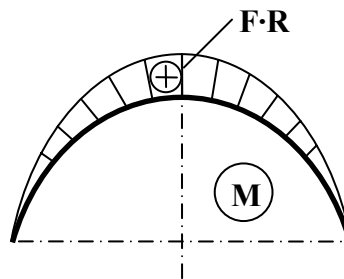


Figura 4.13.

În aceeași secțiune (*figura 4.12*) forța axială este egală cu proiecția forței F pe direcția tangentei la bara curbă în secțiune:

$$N(\alpha) = F^t = -F \cdot \sin \alpha$$

Variația forței este:

$$N(0) = 0; N(\pi / 2) = -F; N(\pi) = 0$$

Diagrama forței axiale este prezentată în *figura 4.14*.

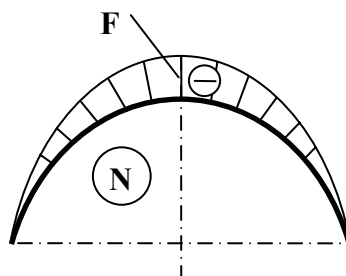


Figura 4.14.

Forța tăietoare este egală cu proiecția forței F pe direcția normalei la bara curbă în secțiune:

$$T(\alpha) = F^n = -F \cdot \cos \alpha$$

Variația forței este:

$$T(0) = -F; T(\pi/2) = 0; T(\pi) = F$$

Diagrama forței tăietoare este prezentată în figura 4.15.

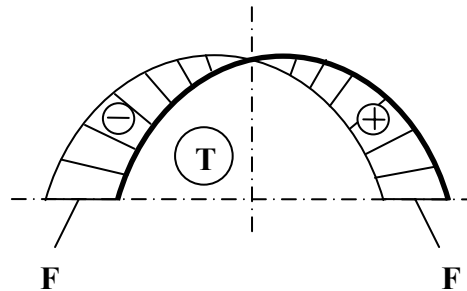


Figura 4.15.

2. Să se traseze diagramele de eforturi (moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială) pentru bara curbă din figura 4.16.

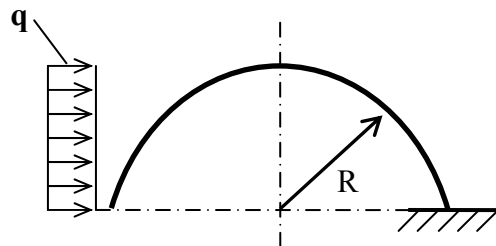


Figura 4.16.

Rezolvare:

Se figurează reacțiunile din încastrare (figura 4.17). Se scriu ecuațiile de echilibru independente și se calculează reacțiunile:

$$H - q \cdot R = 0 \Rightarrow H = qR$$

$$V = 0$$

$$M - qR \cdot \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow M = \frac{qR^2}{2}$$

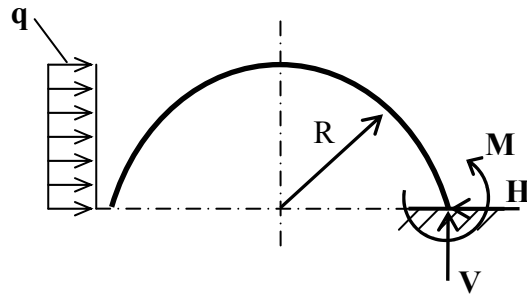


Figura 4.17.

În cele două secțiuni (figura 4.18), expresia momentului încovoietor este:

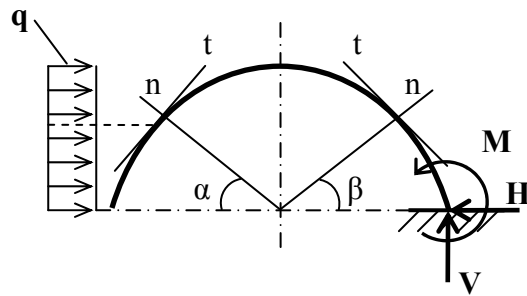


Figura 4.18.

$$\alpha \in [0, \pi / 2]$$

$$M(\alpha) = qR \sin \alpha \cdot \frac{R \sin \alpha}{2} = qR^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt: $M(0) = 0$; $M(\pi / 2) = \frac{qR^2}{2}$

$$\beta \in [0, \pi / 2]$$

$$M(\beta) = -M + H \cdot R \cdot \sin \beta = -\frac{qR^2}{2} + qR^2 \cdot \sin \beta$$

Variația momentului încovoietor este: $M(0) = -\frac{qR^2}{2}$; $M(\pi / 2) = \frac{qR^2}{2}$

Din condiția $M(\beta) = 0$ rezultă:

$$M(\beta) = -\frac{qR^2}{2} + qR^2 \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Diagrama momentului încovoietor este prezentată în figura 4.19.

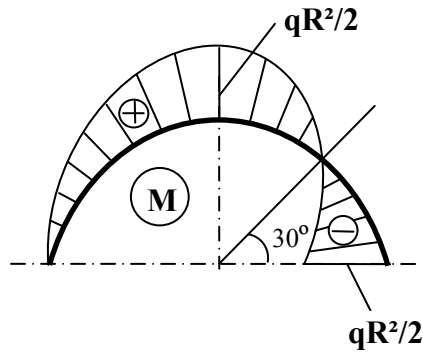


Figura 4.19.

În aceleași două secțiuni forța axială este:

$$N(\alpha) = -qR \sin \alpha \cdot \sin \alpha = -qR \cdot \sin^2 \alpha$$

având pe capetele intervalului următoarele valori:

$$N(0) = 0; N(\pi / 2) = -qR$$

$$N(\beta) = -H^t = -qR \cdot \sin \beta$$

Variația forței este:

$$N(0) = 0; N(\pi / 2) = -qR$$

Diagrama forței axiale este prezentată în figura 4.20.

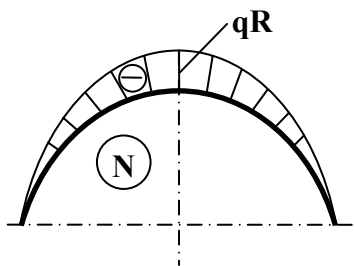


Figura 4.20.

Forțele tăietoare sunt egale cu proiecțiile forțelor pe direcția normalei la bara curbă în secțiunea respectivă și au următoarele expresii:

$$T(\alpha) = -qR \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{qR}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Variația forței este:

$$T(0) = 0; T(\pi/2) = 0$$

$$T'(\alpha) = -qR \cdot \cos 2\alpha; T'(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{qR}{2}$$

$$T(\beta) = H^n = qR \cdot \cos \beta$$

Variația forței este:

$$T(0) = qR; T(\pi/2) = 0$$

Diagrama forței tăietoare este prezentată în figura 4.21.

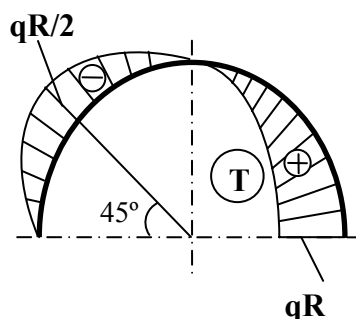


Figura 4.21.

3. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă solicitată cu o sarcină distribuită radial (figura 4.22).

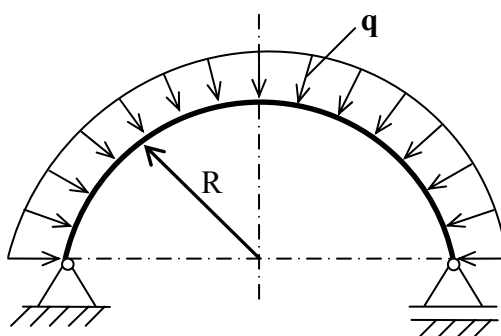


Figura 4.22.

Rezolvare:

Se figurează reacțiunile din reazeme (*figura 4.23*).

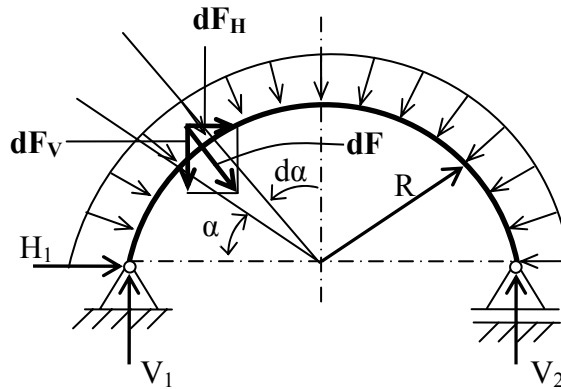


Figura 4.23.

Se scriu ecuațiile de echilibru independente și se calculează reacțiunile ținând cont că:

$$\begin{aligned}dF &= qR \cdot d\alpha \\dF_H &= qR \cos \alpha \cdot d\alpha \\dF_V &= qR \sin \alpha \cdot d\alpha\end{aligned}$$

Din ecuațiile de proiecții de forțe pe orizontală și verticală se obține:

$$H_1 + \int_0^{\pi} qR \cos \alpha \cdot d\alpha = 0 \Rightarrow H_1 = -\int_0^{\pi} qR \cos \alpha \cdot d\alpha = -qR \sin \alpha \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$V_1 + V_2 - \int_0^{\pi} qR \sin \alpha \cdot d\alpha = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = \int_0^{\pi} qR \sin \alpha \cdot d\alpha = -qR \cos \alpha \Big|_0^{\pi} = 2qR$$

Din motive de simetrie $V_1 = V_2$, prin urmare $V_1 = V_2 = qR$.

Expresia momentului încovoietor, ținând cont de notațiile din *figura 4.24*, este următoarea:

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned}
M(\alpha) &= -V_1(R - R \cos \alpha) + \int_0^\alpha dP \cdot R \sin(\alpha - \beta) = \\
&= -qR^2(1 - \cos \alpha) + \int_0^\alpha qR^2 \sin(\alpha - \beta) d\beta = -qR^2(1 - \cos \alpha) + qR^2 \cos(\alpha - \beta) \Big|_0^\alpha = \\
&= -qR^2(1 - \cos \alpha) + qR^2(1 - \cos \alpha) = 0
\end{aligned}$$

Rezultă $M(\alpha) = 0 \Rightarrow T(\alpha) = 0$ deci bara curbă nu este solicitată la încovoiere.

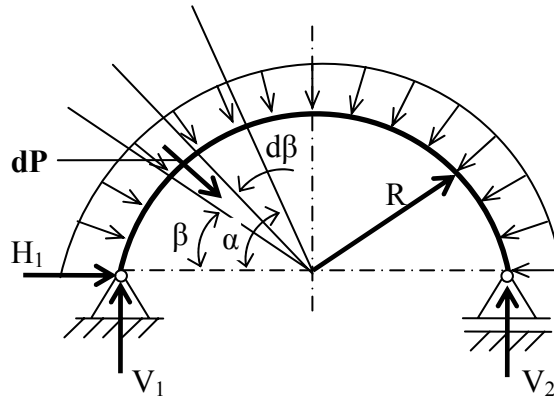


Figura 4.24.

Expresia forței axiale este:

$$\begin{aligned}
N(\alpha) &= -V_1 \cos \alpha - \int_0^\alpha dP \cdot \sin(\alpha - \beta) = -qR \cos \alpha - \int_0^\alpha qR \sin(\alpha - \beta) d\beta = \\
&= -qR \cos \alpha - qR \cos(\alpha - \beta) \Big|_0^\alpha = -qR \cos \alpha - qR(1 - \cos \alpha) = -qR
\end{aligned}$$

Se constată ca forța axială este constantă pe toată lungimea barei, aceasta fiind solicitată la compresiune de forța qR . Diagrama este prezentată în figura 4.25.

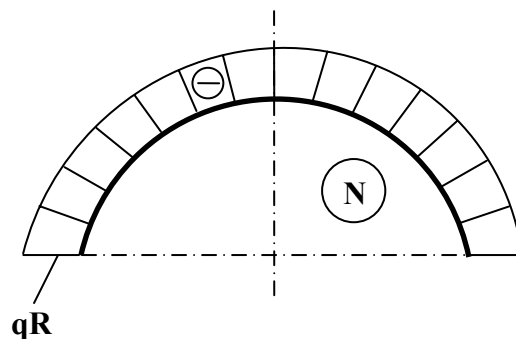


Figura 4.25.

4. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 4.26. Bara este solicitată de o sarcină distribuită pe lungime de arc (greutatea proprie).

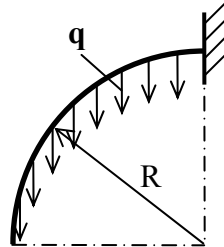


Figura 4.26.

Rezolvare:

Expresia momentului încovoietor, ținând cont de notațiile din figura 4.27, este următoarea:

$$\alpha \in [0, \pi / 2]$$

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \int_0^\alpha dP \cdot (R \cos \beta - R \cos \alpha) = \int_0^\alpha qR^2 \cdot (\cos \beta - \cos \alpha) d\beta = \\ &= -qR^2 (\sin \beta)|_0^\alpha - \beta \cdot \cos \alpha|_0^\alpha = qR^2 (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha) \end{aligned}$$

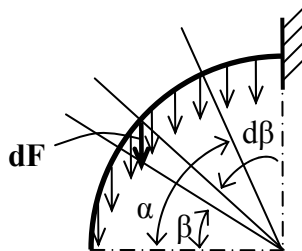


Figura 4.27.

Valorile momentului pe capetele intervalului sunt:

$$M(0) = -\frac{qR^2}{2}; M(\pi / 2) = qR^2$$

Diagrama de variație a momentului încovoietor este prezentată în figura 4.28.

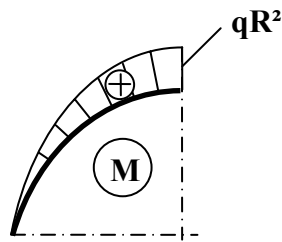


Figura 4.28.

În secțiune expresia forței axiale este:

$$N(\alpha) = \int_0^{\alpha} dF \cdot \cos \alpha = \int_0^{\alpha} qR \cdot \cos \alpha \cdot d\beta = qR \cdot \alpha \cdot \cos \alpha$$

Se studiază variația forței axiale:

$$N(0) = 0; N(\pi/2) = 0; N\left(\frac{\pi}{4}\right) = qR \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}qR}{8}$$

Diagrama forței axiale este prezentată în figura 4.29.

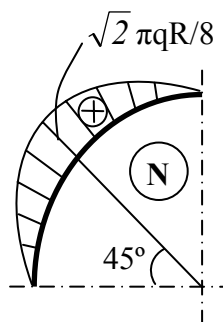


Figura 4.29.

Forța tăietoare este egală cu proiecția forței pe direcția normalei la bara curbă în secțiune și are următoarea expresie:

$$T(\alpha) = - \int_0^{\alpha} dF \cdot \sin \alpha = - \int_0^{\alpha} qR \cdot \sin \alpha \cdot d\beta = -qR \cdot \alpha \cdot \sin \alpha$$

Variația forței este:

$$T(0) = 0; T(\pi/2) = -qR \frac{\pi}{2}$$

Diagrama forței tăietoare este prezentată în figura 4.30.

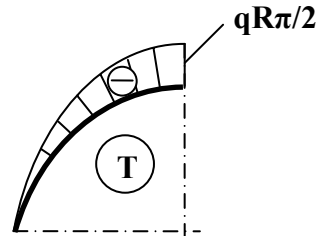


Figura 4.30.

4.4.2. Bare curbe sub formă de arc de cerc static nedeterminate exterior

La barele curbe static nedeterminate exterior necunoscute sunt reacțiunile din reazeme. Ridicarea nedeterminării se face utilizand *teoremele lui Castigliano*. După ce această etapă este încheiată (reacțiunile sunt calculate) problema se abodează în același mod ca și în cazul barelor curbe static determinate.

De reținut:

- *La barele curbe cu raza de curbură mare se neglijează influența forței axiale, atunci când se aplică teoremele lui Castigliano*

Se consideră bara din figura 4.31.

Se figurează reacțiunile în cele două articulații și se scriu ecuațiile de echilibru independente:

$$H_A - H_B + qR = 0$$

$$V_A - qR + V_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 2R - qR \cdot R - 2qR^2 - qR \cdot \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{7}{4}qR$$

Din ecuația de proiecții de forțe pe verticală se calculează $V_A = -\frac{3}{4}qR$.

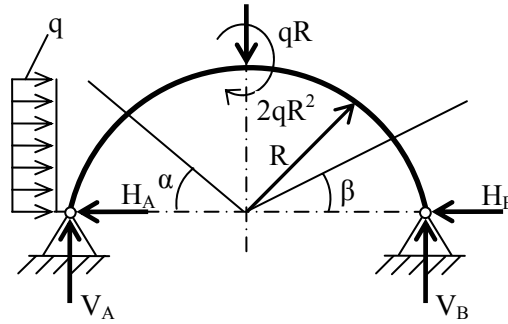


Figura 4.31.

Rămâne ecuația de proiecții de forțe pe orizontală în care sunt două necunoscute, deci prin urmare problema studiată este simplu static nedeterminată. Se alege ca necunoscută static nedeterminată reacțiunea H_A . Se exprimă H_B din ecuația de proiecții de forțe pe orizontală, funcție de necunoscuta aleasă. Rezultă:

$$H_B = qR + H_A \quad (4.24)$$

Se aplică *prima teorema a lui Castigliano* în raport cu necunoscuta static nedeterminată aleasă. Se poate scrie:

$$\frac{\partial L}{\partial H_A} = 0 = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\alpha) \cdot \frac{\partial M(\alpha)}{\partial H_A} ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\beta) \cdot \frac{\partial M(\beta)}{\partial H_A} ds \right] \quad (4.25)$$

Se scriu expresiile momentelor încovoietoare pe cele două regiuni și se calculează derivatele parțiale ale acestora în raport cu necunoscuta static nedeterminată aleasă. Se obține:

$$\alpha \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= -V_A \cdot R(1 - \cos \alpha) + H_A \cdot R \sin \alpha + qR \sin \alpha \cdot \frac{R \sin \alpha}{2} = \\ &= \frac{3}{4} qR^2 (1 - \cos \alpha) + H_A \cdot R \sin \alpha + qR^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} \\ \frac{\partial M(\alpha)}{\partial H_A} &= R \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\beta \in [0, \pi / 2]$$

$$M(\beta) = -V_B \cdot (R - R \cos \beta) + H_B \cdot R \sin \beta = -\frac{7}{4} qR^2 (1 - \cos \beta) + (H_A + qR)R \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\partial M(\beta)}{\partial H_A} = R \sin \beta$$

Se înlocuiesc momentele încovoietoare și derivatele parțiale în *relația* 4.25, se calculează cele două integrale și se determină reacțiunea H_A . Din *relația* 4.24 se determină H_B .

Din acest moment se continuă calculul la fel ca la o bară curbă static determinată: se înlocuiesc cele două reacțiuni în expresiile momentelor încovoietoare, se studiază variația acestora și se trasează diagrama de variație.

Expresiile forțelor axiale și tăietoare se scriu în mod similar ca la o bară curbă static determinată. Aceste expresii, pentru bară studiată, sunt:

$$N(\alpha) = -V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha - qR \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{3qR}{4} \cos \alpha - H_A \sin \alpha - qR \sin^2 \alpha$$

$$N(\beta) = -V_B \cos \beta - H_B \sin \beta = -\frac{7qR}{4} \cos \beta - H_A \sin \beta - qR \sin \beta$$

respectiv:

$$T(\alpha) = V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha - qR \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3qR}{4} \sin \alpha - H_A \cos \alpha - qR \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$T(\beta) = -V_B \sin \beta + H_B \cos \beta = -\frac{7qR}{4} \sin \beta + H_A \cos \beta + qR \cos \beta$$

Și în cazul celor două forțe se înlocuiește reacțiunea H_A în cele patru expresii, se studiază variația acestora și se trasează diagramele de variație pentru forța axială și tăietoare.

Se recomandă să se finalizeze această aplicație de către studenți.

4.4.3. Bare curbe sub formă de arc de cerc static nedeterminate interior

Barele curbe static nedeterminate interior sunt *bare curbe închise* la care necunoscute sunt eforturile din bară. Formarea unui capăt se face prin secționarea

barei curbe și prin introducerea celor trei eforturile din bare: momentul încovoietor, forța tăietoare și forța axială. În cazul general aceste bare sunt *triplu static nedeterminate*. Ridicarea nedeterminării se face utilizând *teoremele lui Castigliano*. În cazul în care este posibil se vor folosi observațiile făcute în *Capitolul 3* la grinzile cotite (cadrele) simetrice și antisimetrice. Astfel:

- dacă bara curbă admite o *axă de simetrie* secțiunea se face pe această axă, *forța tăietoare este zero* și gradul de nedeterminare se reduce la *doi*. În acest caz diagramele de momentul încovoietor și forța axială sunt simetrice, iar diagrama de forță tăietoare antisimetrică;

- dacă bara curbă este *încărcată antisimetric* se recomandă să fie studiată prin secționare pe axa de antisimetrie ceea ce reduce gradul de nedeterminare. Pe axa de antisimetrie *momentul încovoietor și forța axială sunt nule*, sistemul obținut fiind *simplu static nedeterminat*. Barei îi corespunde o diagramă de forță tăietoare simetrică și diagrame ale momentului și forței axiale antisimetrice

Aplicație:

Să se traseze diagramele de eforturi pentru inelul din *figura 4.32*.

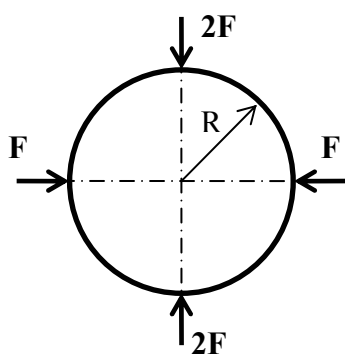


Figura 4.32.

Rezolvare:

Ținând cont de faptul că bara curbă considerată are dublă simetrie este suficient să se studieze pe un sfert de bară. Se parcurg următoarele etape:

- se secționează bara după axa verticală de simetrie și se figurează cele două eforturi care apar M și N , forța tăietoare fiind zero (*figura 4.33*).

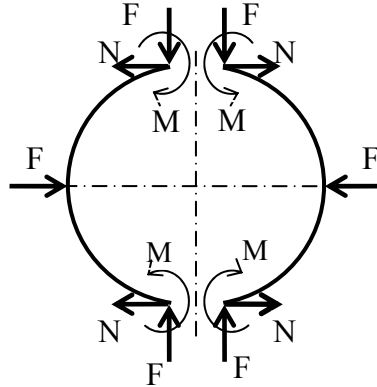


Figura 4.33.

Din echilibrul de forțe, pe direcție orizontală, a unei jumătăți de bară rezultă:

$$2N - F = 0 \Rightarrow N = \frac{F}{2}$$

- se secționează jumătatea de bară după axa orizontală de simetrie așa cum este indicat în *figura 4.34*. Se figurează eforturile care apar M_I și N_I , cel de al treilea, forța tăietoare, fiind zero.

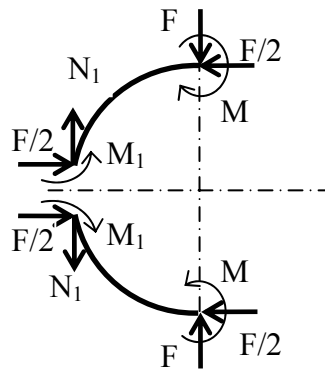


Figura 4.34.

Din echilibrul de forțe pe direcție verticală a unui sfert de bară rezultă

$$N_I = F$$

- se ajunge să se studieze sfertul din bară din *figura 4.35*, pentru care se scrie echilibrul sub forma unei sume de momente. Se obține:

$$M + F \cdot R - \frac{F}{2} R - M_1 = 0 \quad (4.26)$$

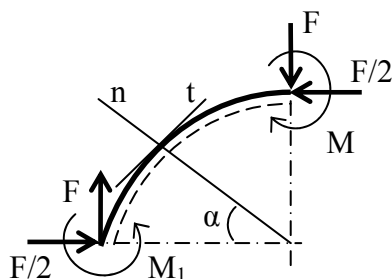


Figura 4.35.

Se obține o ecuație cu două necunoscute, prin urmare s-a ajuns la o bară simplu static nedeterminată. Se ridică nedeterminarea aplicând cea de a *doua teoremă a lui Castigliano*. Se alege M_1 ca necunoscută static nedeterminată. Explicând *teorema lui Castigliano*, în raport cu necunoscuta static nedeterminată aleasă, se poate scrie:

$$\frac{\partial L}{\partial M_1} = 0 = \int_s \frac{M(\alpha)}{EI_z} \cdot \frac{\partial M(\alpha)}{\partial M_1} ds \quad (4.27)$$

Se scrie expresia momentului încovoietor în secțiune, pe baza notațiilor din *figura 4.35* și se calculează derivata parțială a momentului în raport cu M_1

$$\alpha \in [0, \pi / 2]$$

$$M(\alpha) = M_1 - F \cdot R(1 - \cos \alpha) + \frac{F}{2} \cdot R \sin \alpha$$

$$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial M_1} = 1 \quad (4.28)$$

Se fac înlocuirile în *relația 4.27* și se fac calculele. Rezultă:

$$\frac{\partial L}{\partial M_1} = 0 = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[M_1 + \frac{FR}{2} \sin \alpha - FR(1 - \cos \alpha) \right] \cdot 1 \cdot R d\alpha \Rightarrow$$

$$0 = M_1 \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{FR^2}{2} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - FR^2 \cdot \frac{\pi}{2} + FR^2 \sin \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$0 = M_1 \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{FR^2}{2} - FR^2 \cdot \frac{\pi}{2} + FR^2 \Rightarrow$$

$$M_1 = \frac{FR \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} FR}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi FR - 3FR}{\pi} \Rightarrow M_1 = \frac{FR(\pi - 3)}{\pi}$$

Înlocuind momentul M_1 în ecuația de echilibru dată de *relația* (4.26) se obține:

$$M = M_1 - \frac{F}{2} R = FR - \frac{3FR}{\pi} - \frac{FR}{2} = FR \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \right)$$

Se fac înlocuirile în expresia momentului încovoietor dată de *relația* (4.28) și se studiază variația acestuia pe lungimea sfertului de bară curbă. Se obține:

$$M(\alpha) = M_1 - F \cdot R(1 - \cos \alpha) + \frac{F}{2} \cdot R \sin \alpha =$$

$$= \frac{FR(\pi - 3)}{\pi} - F \cdot R(1 - \cos \alpha) + \frac{F}{2} \cdot R \sin \alpha$$

$$M(0) = \frac{FR(\pi - 3)}{\pi}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = FR - \frac{3FR}{\pi} - F \cdot R + \frac{FR}{2} = \frac{FR}{2} - \frac{3FR}{\pi}$$

$$M'(\alpha) = \frac{FR}{2} - F \cdot R \sin \alpha$$

$$M'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{FR}{2} - F \cdot R \sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 2 \sin \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26^\circ$$

Se trasează diagrama de moment încovoietor pe sfertul de bară curbă și apoi prin simetrie pe celelalte trei sferturi.

În aceeași secțiune se scriu expresiile forței axiale și forței tăietoare ca fiind suma proiecțiilor forțelor, din partea stângă a secțiunii, pe direcția tangentei, respectiv normalei la axa barei în secțiune. Se obține:

$$N(\alpha) = -F \cos \alpha - \frac{F}{2} \sin \alpha$$

având pe capetele intervalului următoarele valori: $N(0) = -F$; $N(\pi/2) = -\frac{F}{2}$

$$T(\alpha) = F \sin \alpha - \frac{F}{2} \cos \alpha$$

Variația forței este: $T(0) = -\frac{F}{2}$; $T(\pi/2) = F$

Diagramele forței axiale și forței tăietoare se reprezintă pe sfertul de bară și apoi prin simetrie, pentru forța axială și prin antisimetrie, pentru forța tăietoare, pe celelalte trei sferturi.

Probleme propuse:

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru barele curbe sub formă de arc de cerc din figurile 4.36-4.43.

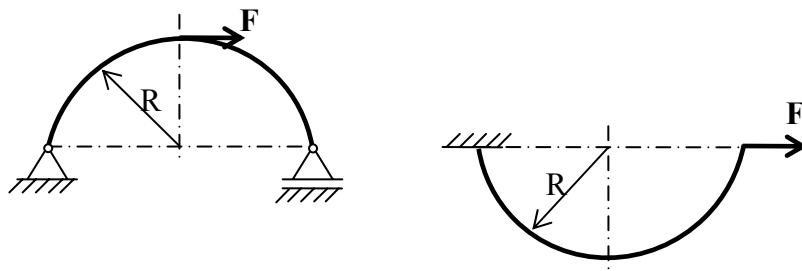


Figura 4.36.

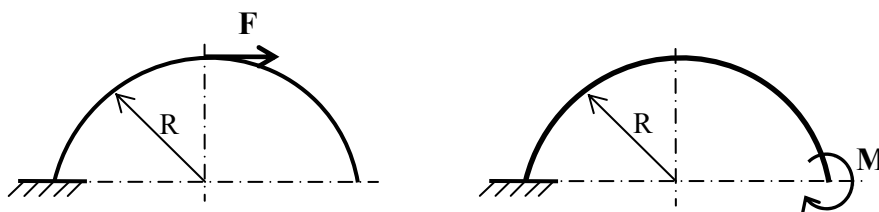


Figura 4.37.

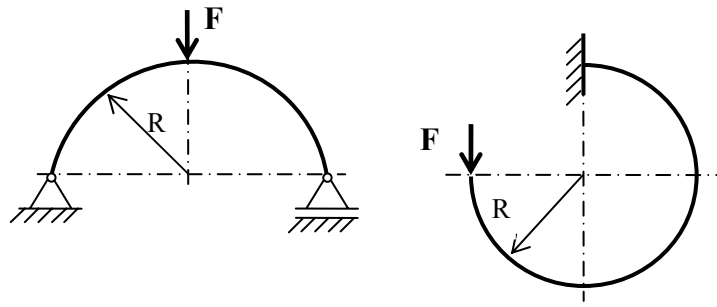


Figura 4.38.

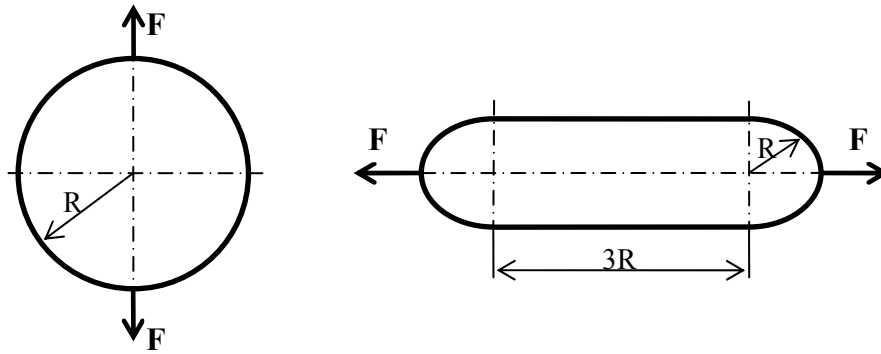


Figura 4.39.

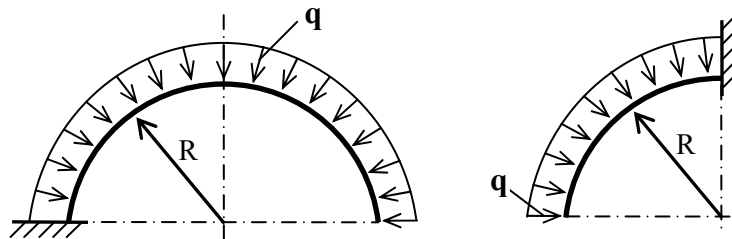


Figura 4.40.

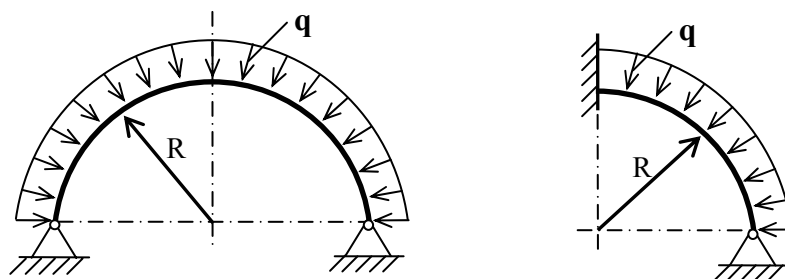


Figura 4.41.

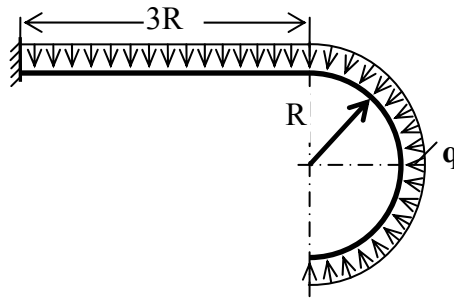


Figura 4.42.

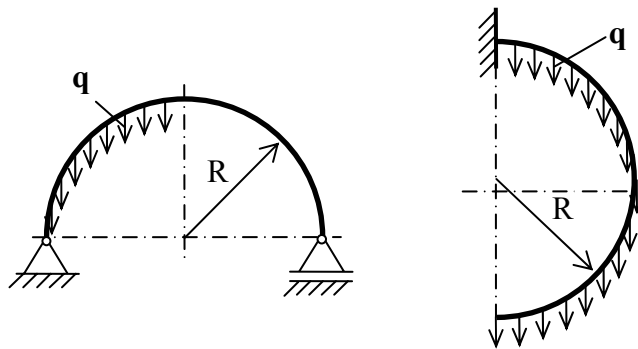


Figura 4.43.

2. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă sub formă de semicerc din figura 4.44. și să se dimensioneze bara știind că secțiunea transversală este circulară. Se cunosc: $F = 1\text{kN}$, $R = 700\text{mm}$, $\sigma_a = 160\text{MPa}$.

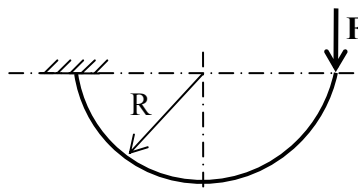


Figura 4.44.

3. Să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței F pentru sistemul din figura 4.45. Se cunosc F , R , $EI_z = \text{const}$.

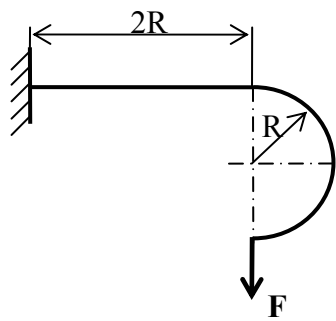


Figura 4.45.

4. Să se calculeze rotirea capătului liber pentru sistemul din figura 4.46. Se cunosc F , R , $EI_z = \text{const}$.

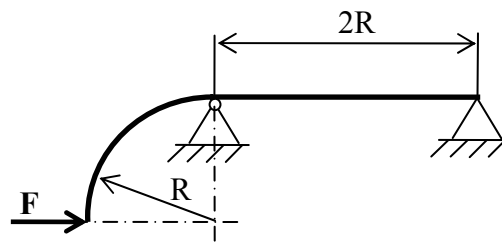


Figura 4.46.

4.5. Bare curbe cu rază mare de curbură. Arce parabolice.

Pentru aceste bare axa geometrică este o parabolă și $\frac{\rho}{h} \geq 10$ (ρ reprezintă raza de curbură, iar h înălțimea secțiunii transversale). Prin construcția lor se reduce momentul încovoietor în secțiune, dar apare în același timp și o forță axială. Din această cauză arcele parabolice sunt preferate grinzilor drepte atunci când deschiderile dintre reazeme sunt foarte mari.

Arcele parabolice se calculează aproximativ cu formula de la grinzile drepte (relația lui Navier generalizată):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz} \cdot y}{I_z} \quad (4.29)$$

sau

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z} \quad (4.30)$$

Se consideră arcul parabolic din *figura 4.47*.

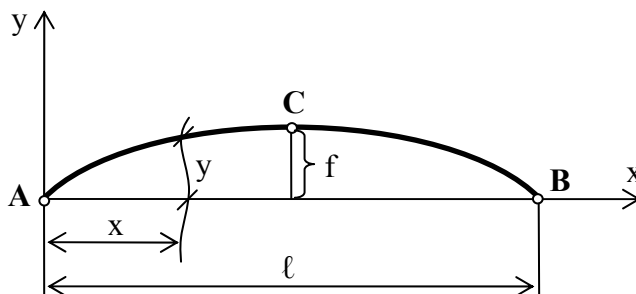


Figura 4.47.

În studiul acestei categorii de bare curbe se folosește următoarea terminologie specifică:

- *Punctul cel mai îndepărtat de linia **AB** (care unește punctul **A**, punctul de început al arcului și punctul **B**, punctul de sfârșit al arcului) se numește **cheia arcului** (punctul **C**).*
- *Ordonata punctului **C** se numește **săgeata arcului** (**f**).*
- *Distanța pe orizontală dintre punctele **A** și **B** se numește **deschiderea arcului** (**l**).*

Pentru a stabili ecuația arcului se pornește de la ecuația generală a unei parabole de gradul doi în care se introduc condițiile inițiale ținând cont de *figura 4.47*: o parabolă cu vârfurile simetrice care trece prin **A**, **B** și care la mijloc este **f**. Ecuația generală a unei parabole de gradul doi este:

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C \quad (4.31)$$

iar condițiile inițiale, pentru situația studiată se pot exprima astfel:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = l &\Rightarrow y = 0 \\ x = l/2 &\Rightarrow y = f \end{aligned}$$

Se înlocuiesc pe rând condițiile în *relația (4.31)* și se obține:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$x = l \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Al^2 + Bl = 0 \Rightarrow B = -Al$$

$$x = l/2 \Rightarrow y = f \Rightarrow f = A\frac{l^2}{4} + B\frac{l}{2}$$

Se înlocuiește B în ultima relație. Rezultă:

$$f = A\frac{l^2}{4} - A\frac{l^2}{2} = -A\frac{l^2}{4} \Rightarrow A = -\frac{4f}{l^2} \Rightarrow B = -Al = \frac{4f}{l}$$

Se înlocuiesc valorile celor trei coeficienți în *relația (4.31)*. Rezultă:

$$y = -\frac{4f}{l^2} \cdot x^2 + \frac{4f}{l} \cdot x = \frac{4fx}{l^2}(l-x) \quad (4.32)$$

Relația (4.32) reprezintă *ecuația generală a unui arc parabolic*.

Ca și la celelalte categorii de bare, calculul arcelor parabolice începe cu determinarea reacțiunilor urmată de trasarea diagramelor de eforturi. În general arcele parabolice sunt simplu static nedeterminate, ele fiind articulate la ambele capete.

Se consideră arcul parabolic, încărcat cu o sarcină oarecare, prezentat în *figura 4.48*.

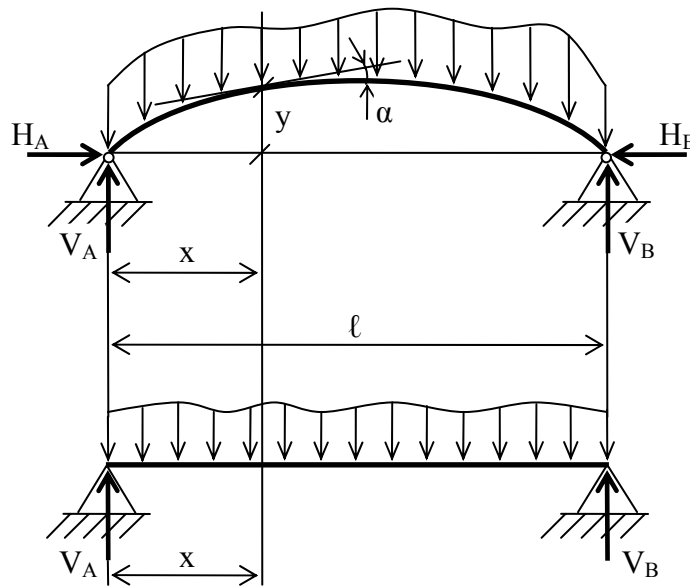


Figura 4.48.

Se figurează reacțiunile din articulații, ele putând fi calculate din ecuațiile de echilibru. Rezultă:

$$H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H$$

$$V_A = \frac{M_B}{l}$$

$$V_B = \frac{M_A}{l}$$

unde M_A , M_B reprezintă momentul forțelor exterioare față de A și respectiv B .

Din ecuațiile de echilibru se observă că H rămâne ca necunoscută static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se aplică *prima teoremă a lui Castigliano*.

Se face o secțiune x și se scrie expresia momentului încovoietor (y este ordonata arcului în dreptul secțiunii x):

$$M(x, y) = V_A \cdot x - H \cdot y - M'(x) \quad (4.33)$$

unde: $M'(x)$ – momentul forțelor de la stânga secțiunii în raport cu secțiunea x .

Se consideră *grinda echivalentă* - o grindă dreaptă simplu rezemată și încărcată la fel. Pentru această grindă momentul încovoietor în secțiunea x se poate scrie:

$$M(x) = V_A \cdot x - M'(x)$$

Prin urmare:

$$M(x, y) = M(x) - H \cdot y \quad (4.34)$$

Observații:

- Relația (4.34) indică faptul că momentul încovoietor într-o secțiune a arcului parabolic este egal cu momentul dintr-o grindă dreaptă simplu rezemată cu aceeași încărcare (grinda echivalentă) din care se scade $H \cdot y$.
- Relația (4.34) indică faptul că momentul încovoietor într-o secțiune a arcului parabolic este mai mic decât momentul încovoietor din grindă dreaptă simplu rezemată cu aceeași încărcare și aceeași deschidere ceea

ce conduce la dimensiuni mai mici ale secțiunii transversale. Prin urmare arcul parabolic este mai economic decât grinda dreaptă.

Se duce tangenta la secțiune în secțiune care face unghiul α cu orizontala (figura 4.48). Expresia forței axiale în secțiune se poate scrie:

$$N(x, y) = -H \cdot \cos \alpha - V_A \cdot \sin \alpha + \int_0^x q(x) \cdot ds \cdot \sin \alpha \quad (4.35)$$

Cum săgeata arcului este mică, rezultă că unghiul α este foarte mic și prin urmare:

$$\sin \alpha \approx 0; \cos \alpha \approx 1$$

Cu acestea relația (4.35) devine:

$$N(x, y) \approx -H \quad (4.36)$$

Se aplică prima teoremă a lui Castigliano luând în considerație influența momentului încovoietor și a forței axiale (se neglijează influența forței tăietoare).

Se obține:

$$\frac{\partial L}{\partial H} = 0 = \int_0^L \frac{M(x, y)}{EI_z} \cdot \frac{\partial M(x, y)}{\partial H} \cdot ds + \int_0^L \frac{N(x, y)}{AE} \cdot \frac{\partial N(x, y)}{\partial H} \cdot ds \quad (4.37)$$

unde L este lungimea desfășurată a arcului care se poate considera egală cu l (deschiderea arcului), iar $ds = dx \cdot \cos \alpha \Rightarrow ds \approx dx$.

Cu acestea relația (4.37) devine:

$$0 = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{[M(x) - Hy]}{I_z} \cdot (-y) \cdot dx + \frac{1}{E} \int_0^l \frac{(-H)}{E} \cdot (-1) \cdot dx \Rightarrow$$

$$-\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx + H \int_0^l y^2 \cdot dx + \frac{HI_z l}{A} = 0$$

Se rezolvă ecuația în raport cu H și se obține:

$$H = \frac{\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx}{\int_0^l y^2 \cdot dx + \frac{I_z \cdot l}{A}} \quad (4.38)$$

În relația (4.38) y reprezintă ordonata arcului în dreptul secțiunii x , iar $M(x)$ este momentul încovoietor în secțiunea x pentru grinda dreaptă simplu rezemată cu aceeași încărcare și cu aceeași deschidere.

Observații:

- Relația (4.38) poate fi folosită pentru calculul reacțiunii pe orizontală numai atunci când arcul parabolic este încărcat cu forțe verticale și momente concentrate.
- Relația (4.38) nu poate fi folosită pentru calculul reacțiunii pe orizontală dacă pe arc sunt forțe orizontale ($M(x)=0$) și în acest caz pentru ridicarea nedeterminării se folosește prima teoremă a lui Castigliano.

Ținând cont de ecuația generală a unui arc parabolic dată de relația (4.32) integrala de la numitorul relației (4.38) devine:

$$\begin{aligned} \int_0^l y^2 \cdot dx &= \int_0^l \frac{16f^2 x^2}{l^4} (l-x)^2 dx = \frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) \cdot dx = \\ &= \frac{16f^2}{l^4} \left(\frac{l^5}{3} - \frac{2l^5}{4} + \frac{l^5}{5} \right) = \frac{16f^2}{l^4} \cdot \frac{l^5}{30} = \frac{8lf^2}{15} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Observații:

- Valoarea integralei din relația (4.39) se folosește în relația (4.38) pentru calculul tuturor arcelor parabolice încărcate cu forțe verticale și momente concentrate.
- Se demonstrează cu ușurință ca integrala din relația (4.39) este mare în comparație cu raportul $\frac{I_z \cdot l}{A}$, ceea ce permite ca în calcule raportul să fi fie neglijat (se poate face o eroare de cel mult 3%).
- Integrala de la numărătorul relației (4.38) se calculează pentru fiecare aplicație în parte.

Aplicații:

1. Să se determine eforturile pentru arcul parabolic, solicitat de o încărcare uniformă, din figura 4.49.

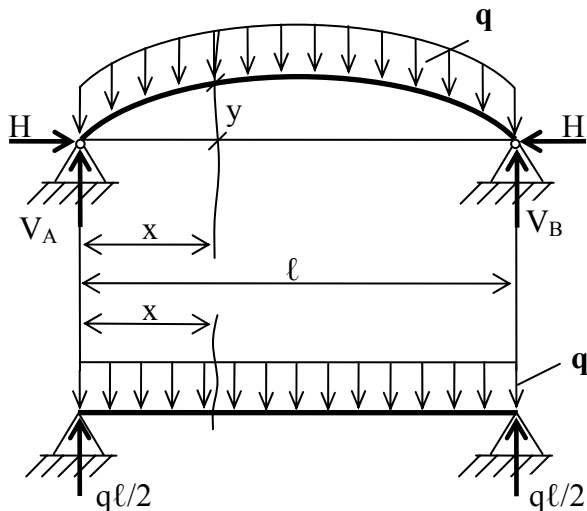


Figura 4.49.

Rezolvare:

Se consideră grinda echivalentă (grinda dreaptă simplu rezemată, solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate q) și se scrie momentul încovoietor în secțiunea x :

$$M(x) = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \quad (4.40)$$

Ținând cont de ecuația generală a unui arc parabolic dată de relația (4.32) și de expresia momentului încovoietor se calculează integrala de la numărătorul relației (4.38). Se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx &= \int_0^l \frac{4fx}{l^2}(l-x) \cdot \frac{qx}{2}(l-x) \cdot dx = \frac{2fq}{l^2} \int_0^l x^2(l-x)^2 \cdot dx = \\ &= \frac{2fq}{l^2} \left(l^2 \cdot \frac{l^3}{3} - 2l \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{l^5}{5} \right) = \frac{fq l^3}{15} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Reacțiunea H pentru arcul solicitat de sarcina uniform distribuită (*figura 4.49*) se calculează cu *relația (4.38)*, neglijând termenul $\frac{I_z \cdot l}{A}$ și ținând cont de *relațiile (4.39) și (4.41)*. Se obține:

$$H = \frac{\frac{fql^3}{15}}{\frac{8lf^2}{15}} = \frac{ql^2}{8f} \quad (4.42)$$

Momentul încovoietor într-o secțiune a arcului se calculează cu *relația (4.34)* în care $M(x)$ este dat de *relația (4.40)*, y de *relația (4.32)*, iar H de *relația (4.42)*. Prin urmare:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M(x) - H \cdot y = \left(\frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{ql^2}{8f} \cdot \frac{4fx}{l^2} (l - x) = \\ &= \left(\frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) - \left(\frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Relația (4.43) indică faptul că arcul parabolic, dublu articulată, solicitat de o sarcină uniform distribuită *nu este solicitat la încovoiere*. Ținând cont de *relația (4.36)* arcul este supus numai la *compresiune*, forța axială fiind constantă pe toată lungimea arcului și egală cu *reacțiunea H* (forța de împingere pe orizontală). Prin urmare pentru o astfel de construcție nu este necesară o secțiune transversală cu un moment de inerție mare.

2. Să se determine eforturile pentru arcul parabolic, solicitat de o forță concentrată, din *figura 4.50*.

Rezolvare:

Se consideră grinda echivalentă (grinda dreaptă simplu rezemată, solicitată de o forță concentrată P la mijlocul deschiderii grinzii) și se scrie momentul încovoietor în cele două secțiuni:

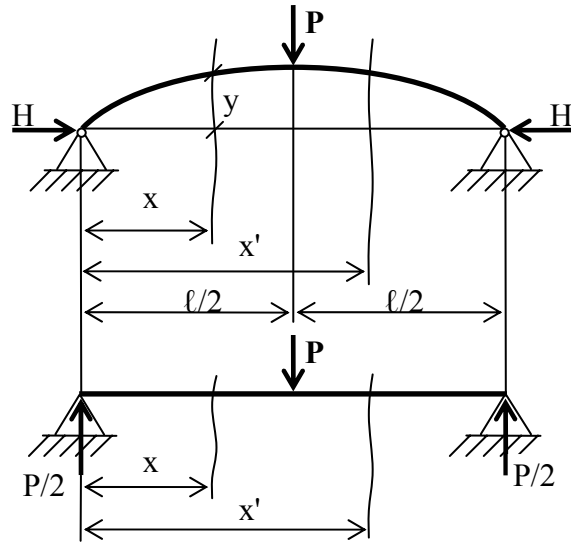


Figura 4.50.

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$M(x') = \frac{P}{2} \cdot x' - P \left(x' - \frac{l}{2} \right)$$
(4.44)

Ținând cont de ecuația generală a unui arc parabolic dată de relația (4.32) și de expresia momentului încovoietor se calculează integrala de la numărătorul relației (4.38). Se obține:

$$\int_0^l y M(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2} x \frac{4fx}{l^2} (l-x) \cdot dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \left[\frac{P}{2} x' - P \left(x' - \frac{l}{2} \right) \right] \cdot \frac{4fx'}{l^2} (l-x') \cdot dx' =$$

$$= \frac{2Pf}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} (lx^2 - x^3) \cdot dx + \frac{2Pf}{l^2} \int_{\frac{l}{2}}^l (l^2 x' - 2lx'^2 + x'^3) \cdot dx' =$$
(4.45)

$$= \frac{2Pf}{l^2} \cdot \left[l \frac{l^3}{3 \cdot 8} - \frac{l^4}{4 \cdot 16} + \frac{l^2}{2} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) - \frac{2l}{3} \left(l^3 - \frac{l^3}{8} \right) + \frac{1}{4} \left(l^4 - \frac{l^4}{16} \right) \right] =$$

$$= \frac{2Pf}{l^2} \cdot l^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12} + \frac{15}{54} \right) = \frac{5Pfl^2}{48}$$

Reacțiunea H pentru arcul solicitat de o forță concentrată (*figura 4.50*) se calculează cu *relația* (4.38), neglijând termenul $\frac{I_z \cdot l}{A}$ și ținând cont de *relațiile* (4.39) și (4.45). Se obține:

$$H = \frac{\frac{5Pfl^2}{48}}{\frac{8lf^2}{15}} = \frac{25Pl}{128f} \quad (4.46)$$

În prima regiune a arcului *momentul încovoietor* se calculează cu *relația* (4.34) în care $M(x)$ este dat de *relația* (4.44), y de *relația* (4.32), iar H de *relația* (4.46). Prin urmare:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M(x) - H \cdot y = \frac{P}{2} \cdot x - \frac{25Pl}{128f} \cdot \frac{4fx}{l^2} (l - x) = \\ &= \frac{P}{2} \cdot x - \frac{25P}{32} \cdot x + \frac{25P}{32} \cdot \frac{x^2}{l} = \frac{25}{32} \cdot \frac{Px^2}{l} - \frac{9}{32} \cdot Px \end{aligned} \quad (4.47)$$

Relația (4.47) arată că *momentul încovoietor* variază pe lungimea arcului parabolic după o parabolă. Se studiază variația *momentului*:

$$M(0) = 0$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{25}{32} \cdot \frac{P}{l} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{9}{32} \cdot P \cdot \frac{l}{2} = \frac{7Pl}{128} = 0,054Pl$$

$$M'(x, y) = \frac{25}{16} \cdot \frac{Px}{l} - \frac{9}{32} \cdot P = 0 \Rightarrow \frac{25}{16} \cdot \frac{Px}{l} = \frac{9}{32} \cdot P \Rightarrow x = \frac{9P}{32} \cdot \frac{16l}{25P} = \frac{9l}{50} = 0,18l$$

$$\begin{aligned} M''(x, y) &= \frac{25}{16} \cdot \frac{P}{l} > 0 \Rightarrow M_{min} = M\left(\frac{9l}{50}\right) = \frac{25}{32} \cdot \frac{P}{l} \cdot \frac{81l^2}{50^2} - \frac{9}{32} \cdot P \cdot \frac{9l}{50} = -\frac{81}{32 \cdot 100} \cdot Pl = \\ &= -0,025Pl \end{aligned}$$

Pe cea de a doua regiune *diagrama de moment încovoietor* se poate trasa prin simetrie (*figura 4.51*).

Ținând cont de *relația* (4.36) *forța axială* pentru arcul parabolic este constantă pe toată lungimea arcului și egală cu reacțiunea H , arcul fiind supus la compresiune:

$$N(x, y) \approx -H \approx -\frac{25Pl}{128f}$$

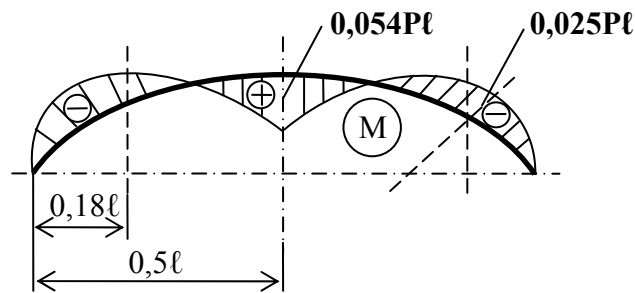


Figura 4.51.

Observație:

- Se știe din prima parte a cursului de Rezistența materialelor că pentru grinda dreaptă simplu rezemată sollicitată de o forță concentrată momentul încovoietor maxim este $\frac{Pl}{4} = 0,25Pl$, deci de cinci ori mai mare decât pentru arcul parabolic.

De reținut:

Pentru calculul arcelor parabolice încărcate cu sarcini verticale și momente concentrate se parcurg următoarele etape:

- Se consideră grinda dreaptă echivalentă (o grindă dreaptă simplu rezemată cu aceeași încărcare și deschidere ca și arcul).
- Se scrie momentul încovoietor $M(x)$ în secțiunea x pe grinda echivalentă.
- Se calculează integrala:

$$\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx$$

unde y este ordonata arcului în secțiunea x care este dată de relația:

$$y = \frac{4fx}{l^2}(l-x)$$

- Se calculează valoarea forței de împingere pe orizontală (reacțiunea H) cu relația:

$$H = \frac{\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx}{\int_0^l y^2 \cdot dx + \frac{I_z \cdot l}{A}}$$

unde: termenul $\frac{I_z \cdot l}{A}$ se neglijează

integrala $\int_0^l y^2 \cdot dx = \frac{8lf^2}{15}$ și are întotdeauna această valoare

integrala $\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx$ se calculează pentru fiecare aplicație în

parte.

- Se scrie expresia **momentului încovoietor** pentru arcul parabolic cu relația:

$$M(x, y) = M(x) - H \cdot y$$

- Se studiază variația momentului încovoietor și se reprezintă diagrama.
- Se scrie expresia **forței axiale**, se studiază variația acesteia și se trasează diagrama.
- Se stabilește **secțiunea periculoasă** în care se efectuează calculul de rezistență (verificare sau dimensionarea) folosind **relația lui Navier generalizată**:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z}$$

Observație:

- Dacă pe arc sunt forțe orizontale ($M(x)=0$) pentru ridicarea nedeterminării se folosește prima teoremă a lui Castigliano.

Pentru a evita inconvenientul împingerii laterale se folosește arcul cu coardă (figura 4.52). Se notează cu A_1 secțiunea corzii și E_1 modulul de elasticitate al corzii.

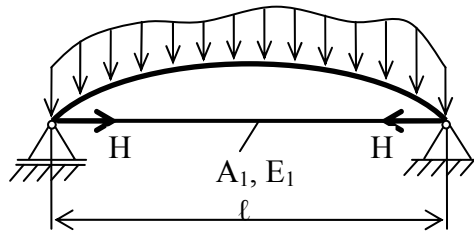


Figura 4.52.

În acest caz în coardă apare o forță orizontală H , o forță de întindere care menține arcul (aceasta nu este reacțiunea din reazem) care se calculează cu relația:

$$H = \frac{\int_0^l y \cdot M(x) \cdot dx}{\int_0^l y^2 \cdot dx + \frac{I_z \cdot l}{A} + \frac{I_z}{A_1} \cdot \frac{E}{E_1} \cdot l}$$

În această relație raportul $\frac{I_z}{A_1} \cdot \frac{E}{E_1} \cdot l$ nu poate fi neglijat.

Probleme propuse:

Să se traseze diagramele M , N pentru arcele parabolice din figurile 4.53 și 4.54.

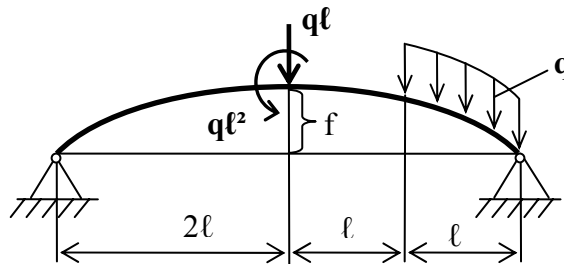


Figura 4.53.

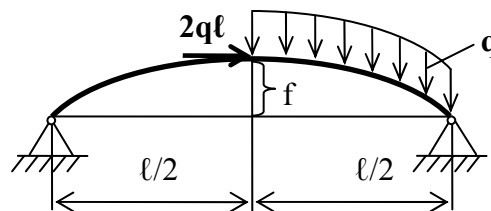


Figura 4.54.

CAPITOLUL 5

SOLICITĂRI DINAMICE PRIN ȘOC

5.1. Generalități

Până în prezent au fost studiate stările de solicitare ale corpurilor solide deformabile produse de acțiunea unor sarcini exterioare care au fost aplicate în mod *static*, adică cu intensitate crescândă, încet și uniform, de la zero la valoarea lor maximă, astfel încât accelerațiile diferitelor particule ale corpului să fie neglijabile. Sub acțiunea acestora corpurile solide se deformează, dar nu se pun în mișcare și nici nu își modifică viteza.

În practică există și situații în care mișcarea determină starea de solicitare a corpului solid. Existența accelerației produce forțe, prin care corpul solid devine solicitat. Solicitățile produse astfel se numesc *solicitări dinamice*. Este cazul când o sarcină este așezată brusc pe o grindă sau cade de la o anumită înălțime pe ea. Asemănător este cazul când o bară în mișcare lovește un corp rigid imobilizat. *Solicitările dinamice prin șoc*, produse în special prin ciocniri, sunt produse prin variația *bruscă* a accelerației.

Funcționarea majorității mașinilor, în special a acelor care execută mișcări rectilinii alternative, este însoțită de șocuri. În unele cazuri șocurile sunt provocate ca urmare a existenței unor jocuri prea mari în îmbinările pieselor, iar în alte cazuri șocurile apar chiar la funcționarea normală a mașinii.

Comportarea la șoc a corpurilor solide diferă substanțial de modul de comportare la solicitarea statică. S-a constatat că micșorări locale ale ariei secțiunii transversale pot provoca în corpuri creșteri foarte mari ale tensiunilor. Barele cu creștături, de exemplu, se comportă defavorabil la acțiunea șocului, iar epruvetele folosite pentru încercarea materialelor la reziliență, sunt prevazute cu creștături, pentru a impune astfel secțiunea de rupere.

5.2. Calculul la solicitări dinamice prin șoc

Pentru calculul la solicitări dinamice prin șoc este necesar, pe de o parte, să se determine tensiunile și deformațiile care se produc în piesele care se ciocnesc, iar pe de altă parte, să se stabilească în ce măsură aceste tensiuni și deformații sunt periculoase pentru material.

Calculul sistemelor elastice la solicitări prin șoc, examinate ca sisteme cu un singur grad de libertate, permit să se determine ordinul de mărime al deplasărilor, precum și al tensiunilor și deformațiilor în timpul șocului. Teoria șocului elastic poate fi folosită numai în cazul în care tensiunile din timpul șocului nu depășesc limita de proporționalitate.

Modul general de rezolvare a acestor probleme constă în a găsi o sarcină fictivă, care, acționând static, să producă aceleași tensiuni în corp ca și sarcina reală, care acționează dinamic (prin șoc).

Se studiază, în cele ce urmează, un corp solid elastic care poate fi materializat, de exemplu, printr-un arc elicoidal asupra căruia cade o greutate G de la o înălțime h (*figura 5.1.*) și care se deformează în locul lovit cu o săgeată f_a . Șocul se produce în felul următor: după ce greutatea atinge arcul, ea continuă să

se miște, comprimându-l, iar forța elastică a arcului micșorează treptat viteza sa. După căderea de la înălțimea h greutatea posedă o energie cinetică egală cu lucrul mecanic efectuat (lucrul mecanic exterior). În momentul în care greutatea se oprește, tot lucrul mecanic exterior executat de aceasta s-a transformat în energie potențială de deformare (lucrul mecanic interior) a arcului, iar forța de interacțiune dintre greutate și arc atinge valoarea maximă.

Lucrul mecanic exterior executat de greutate este dat de relația:

$$L_{ext} = G \cdot (h + f_d) \quad (5.1)$$

În virtutea legii conservării energiei se admite că în momentul ciocnirii energia cinetică a greutății oprite se transformă în întregime în energie potențială de deformare, iar aceasta din urmă determină valorile forțelor și a deplasărilor. Prin urmare se poate scrie:

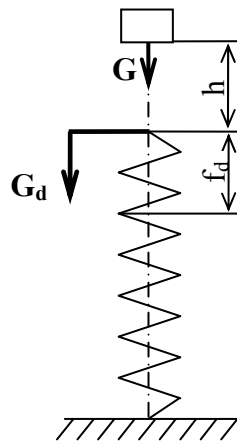


Figura 5.1.

$$L_{ext} = L_{int} \quad (5.2)$$

În prima parte a cursului de *Rezistența materialelor* au fost stabilite relații de calcul pentru lucrul mecanic interior, la toate tipurile de solicitări, pentru situația în care sarcina este aplicată static. Din acest motiv se transferă solicitarea dinamică în una statică, așa cum este indicat în *figura 5.2.*: se încarcă corpul solid elastic cu o greutate $G_d > G$ astfel încât să se obțină aceeași săgeată f_d .

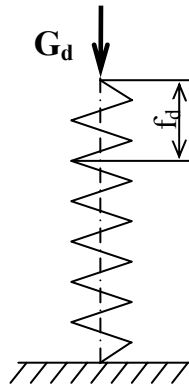


Figura 5.2.

Pentru solicitarea statică considerată lucrul mecanic interior este:

$$L_{int} = \frac{G_d \cdot f_d}{2} \quad (5.3.)$$

Ținând cont de *relațiile* (5.1) și (5.3), *relația* (5.2) devine:

$$\frac{G_d \cdot f_d}{2} = G \cdot (h + f_d) \quad (5.4.)$$

Se face ipoteza că *legea lui Hooke* rămâne valabilă și în cazul solicitării dinamice și prin urmare se poate scrie:

$$\begin{aligned} G &= k \cdot f_{st} \\ G_d &= k \cdot f_d \end{aligned} \quad (5.5.)$$

unde: f_{st} – săgeata arcului atunci când greutatea este aplicată static.

Ținând cont de ultimile egalități *relația* (5.4.) devine:

$$\frac{k \cdot f_d^2}{2} = k f_{st} \cdot (h + f_d)$$

sau efectuând calculele:

$$f_d^2 - 2f_{st} \cdot f_d - 2f_{st} \cdot h = 0$$

Se obține o ecuație de gradul al doilea a cărei soluție este f_d :

$$f_d = f_{st} \pm \sqrt{f_{st}^2 + 2hf_{st}}$$

sau

$$f_d = f_{st} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right)$$

Se alege singura soluție verosimilă, anume cea pozitivă (ținând cont de faptul că radicalul reprezintă o cantitate pozitivă supraunitară, se păstrează în relație doar semnul plus) și se obține:

$$f_d = f_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right) \quad (5.6)$$

Se notează:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \quad (5.7)$$

Ψ –se numește *coeficient (multiplicator) de șoc sau de impact*.

Observații:

- *Relația (5.7) este valabilă numai pentru corpul care este lovit de greutatea G (relația nu se poate aplica corpului care lovește).*
- *Coeficientul (multiplicatorul) de șoc sau de impact reprezintă raportul dintre mărimile solicitării dinamice și cele ale solicitării statice corespunzătoare.*
- *Pentru $h=0$ se obține valoarea minimă a multiplicatorului de șoc $\Psi = 2$.*

Cu această notație *relația (5.6)* devine:

$$f_d = \Psi \cdot f_{st} \quad (5.8)$$

Deoarece s-a presupus că rămâne valabilă *legea lui Hooke* înseamnă că relația care există între deformații, *relația (5.8)*, trebuie să existe și între tensiuni, deci se poate scrie:

$$\sigma_d = \Psi \cdot \sigma_{st} \quad (5.9)$$

respectiv:

$$\tau_d = \Psi \cdot \tau_{st} \quad (5.10)$$

Observație:

- *Ultimile trei relații arată faptul că rezolvarea problemelor de șoc se reduce practic la calculul mărimilor statice de solicitare și al multiplicatorului de impact.*

Pentru ca relația (5.7) să aibă valabilitate generală se va exprima în funcție de lucrul mecanic. Rezultă:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}} \cdot \frac{G}{G}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{h \cdot G}{f_{st} \cdot G}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_{ext}}{L_{int}}} \quad (5.11)$$

În unele situații este posibil ca greutatea să se deplaseze cu o anumită viteză v pe o altă direcție decât cea verticală. În acest caz se determină o înălțime echivalentă făcând apel la legea căderii corpurilor. Se știe că:

$$v = \sqrt{2gh} \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Se înlocuiește în relația (5.7) și se obține:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \frac{v^2}{2g}}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{st}}} \quad (5.12)$$

Relațiile (5.8)-(5.10) împreună cu relațiile (5.7), (5.11) și (5.12) permit rezolvarea problemelor de șoc.

Observații:

- *Din relațiile stabilite anterior reiese că un corp solid rezistă cu atât mai bine la șoc cu cât el este mai deformabil.*
- *La deducerea relațiilor s-a admis faptul că forța este aplicată deodată cu toată intensitatea. În realitate dacă acest lucru s-ar întâmpla L_{ext} nu ar avea timp să fie înmagazinat în interiorul corpului și atunci distrugerea corpului lovit se va produce local. Pentru ca L_{ext} să poată*

fi înmagazinat trebuie să treacă o anumită perioadă de timp astfel încât deformațiile să se poată deplasa în interiorul corpului.

- *Experiențele arată că viteza de deplasare a deformațiilor în corpuri sunt proporționale cu viteza de deplasare a sunetului în acel corp. Prin urmare formulele deduse sunt valabile până la o viteză de lovire egală cu viteza de deplasare a sunetului în corp.*
- *Relațiile deduse pentru calculul la solicitări dinamice prin șoc au fost stabilite pe baza următoarelor ipoteze:*
 1. *deformația dinamică are loc numai în domeniul elastic;*
 2. *întreaga energie potențială a forței care lovește corpul se transformă în energie elastică de deformație a acestuia (aceasta presupune că se neglijează inerția corpului lovit, deformarea reazemelor și alte pierderi de energie);*
 3. *se neglijează deformarea plastică;*
 4. *viteza de lovire este mai mică decât viteza de propagare a deformațiilor în corpul lovit.*

De reținut:

- *Pentru calculul coeficientului (multiplicatorului) de șoc sau de impact se folosesc următoarele relații:*

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}}$$

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_{ext}}{L_{int}}}$$

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{st}}}$$

- *Se admit în calcul următoarele aproximații ale relațiilor anterioare:*
 - pentru $h \geq 10 \cdot f_{st}$

$$\begin{aligned}\Psi &\approx 1 + \sqrt{\frac{2h}{f_{st}}} \\ \Psi &\approx 1 + \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}} \\ \Psi &\approx 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g \cdot f_{st}}}\end{aligned}\quad (5.13)$$

- pentru $h \geq 100 \cdot f_{st}$

$$\begin{aligned}\Psi &\approx \sqrt{\frac{2h}{f_{st}}} \\ \Psi &\approx \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}} \\ \Psi &\approx \sqrt{\frac{v^2}{g \cdot f_{st}}}\end{aligned}\quad (5.14)$$

- Rezolvarea problemelor de șoc se reduce practic la rezolvarea unor probleme corespunzătoare de solicitare statică, prin introducerea coeficientului (multiplicatorului) de șoc sau de impact, cu ajutorul următoarelor relații:

$$\sigma_d = \Psi \cdot \sigma_{st}$$

$$\tau_d = \Psi \cdot \tau_{st}$$

$$f_d = \Psi \cdot f_{st}$$

- Metoda de calcul are un caracter general, fiind aplicabilă la toate solicitările simple și compuse (în domeniul deformațiilor liniar-elastice).

Aplicații:

1. Să se dimensioneze bara de secțiune circulară cu lungimea $l = 10^3 \text{ mm}$, asupra căreia cade o greutate $G = 1 \text{ kN}$ de la o înălțime $h = 100 \text{ mm}$ (figura 5.3).

Se cunosc: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_a = 100 \text{ MPa}$. Se neglijează flambajul.

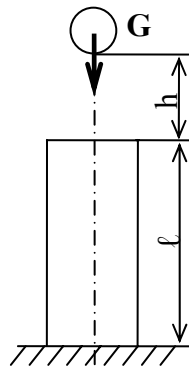


Figura 5.3.

Rezolvare:

Solicitarea statică din bară este de compresiune (figura 5.4.).

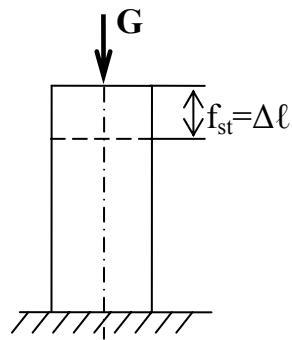


Figura 5.4.

Din prima parte a cursului de *Rezistența materialelor* se știe că:

$$f_{st} = \Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Gl}{AE}$$

$$\sigma_{st} = \frac{N}{A} = \frac{G}{A}$$

Ținând cont de *relațiile* (5.7), (5.9) coeficientul (multiplicatorul) de șoc sau de impact și tensiunea dinamică devin:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{Gl}}$$

$$\sigma_d = \Psi \cdot \sigma_{st} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{Gl}} \right) \cdot \frac{G}{A}$$

Pentru a dimensiona bara se impune condiția cunoscută:

$$\sigma_d \leq \sigma_a$$

Se înlocuiește tensiunea dinamică din relația anterioară și se obține:

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{Gl}} \right) \cdot \frac{G}{A} \leq \sigma_a$$

Se înlocuiesc valorile numerice și rezultă:

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10^2 \cdot \pi d^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^3 \cdot 10^3}} \right) \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{\pi d^2} \leq 100 \Rightarrow$$

$$1 + \sqrt{1 + 33d^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{\pi d^2} \leq 100$$

Se neglijează 1 din fața radicalului, de sub radical, se efectuează calculele și se obține:

$$d \geq \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{33}}{\pi 10^2} \geq \frac{40\sqrt{33}}{\pi} \geq 73mm$$

2. Să se determine înălțimea maximă de cădere ($h_{max} = ?$) știind valoarea greutății $G = 100N$ (figura 5.5).

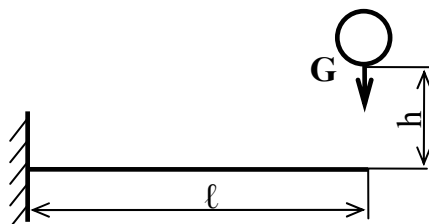


Figura 5.5.

Grinda are secțiunea pătrată cu latura $a = 100mm$ și lungimea $l = 500 mm$.
Se cunosc: $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, $\sigma_a = 150MPa$.

Rezolvare:

Solicitarea statică din grindă este prezentată în *figura 5.6*. Grinda este solicitată la încovoiere. Coeficientul (multiplicatorul) de șoc este dat de relația:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2h}{f_{st}}}$$

unde săgeata statică se determină cu *prima teoremă a lui Castigliano*. Prin urmare:

$$f_{st} = \frac{\partial U}{\partial G} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial G} dx$$

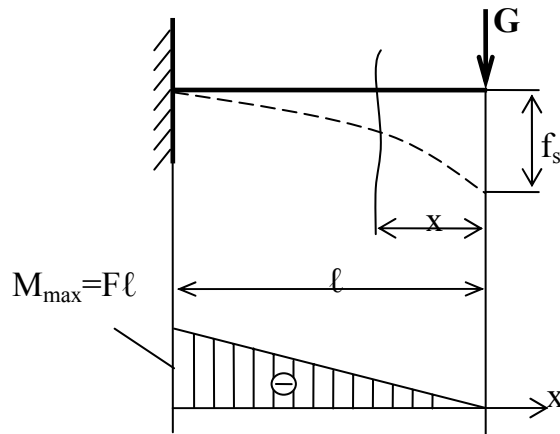


Figura 5.6.

Momentul încovoiitor în secțiune este:

$$M(x) = -Gx$$

și înlocuind în relația precedentă se obține:

$$f_{st} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial G} dx = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l (-Gx)(-x) dx = \frac{Gl^3}{3EI_z}$$

Se înlocuiește în expresia coeficientului de șoc și se obține:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2h}{f_{st}}} = \sqrt{\frac{2h \cdot 3EI_z}{Gl^3}}$$

Tensiunea dinamică este dată de relația:

$$\sigma_{d_{max}} = \Psi \cdot \sigma_{st_{max}}$$

Tensiunea statică se determină cu *relația lui Navier*:

$$\sigma_{st_{max}} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Gl}{\frac{a^3}{6}} = \frac{6Gl}{a^3}$$

de unde:

$$\sigma_{d_{max}} = \left(\sqrt{\frac{6h \cdot EI_z}{Gl^3}} \right) \cdot \frac{6Gl}{a^3}$$

Pentru a determina înălțimea maximă de cădere se impune condiția:

$$\sigma_{d_{max}} \leq \sigma_a$$

Înlocuind tensiunea dinamică din relația precedentă se obține:

$$\left(\sqrt{\frac{6h \cdot EI_z}{Gl^3}} \right) \cdot \frac{6Gl}{a^3} \leq \sigma_a$$

După efectuarea simplificărilor, înlocuirea valorilor numerice și efectuarea calculelor se obține:

$$\sqrt{\frac{6h \cdot 2,1 \cdot 10^5}{12 \cdot 100 \cdot 500}} \cdot \frac{6 \cdot 100}{100} \leq 150$$

de unde $h_{max} \leq 301mm$.

3. O grindă din oțel cade de la o înălțime h pe două reazeme simple situate la o distanță $l = 500 \text{ mm}$ (figura 5.7.). Să se determine înălțimea maximă de cădere dacă grinda are secțiunea pătrată cu latura $a = 100mm$. Se cunosc: $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, $\sigma_a = 150MPa$, $\gamma_{OL} = 7,8 \cdot 10^{-5} N/mm^3$.

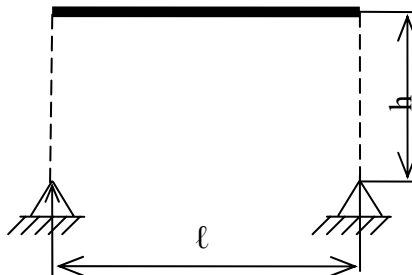


Figura 5.7.

Rezolvare:

Solicitarea statică din grindă este prezentată în figura 5.8.

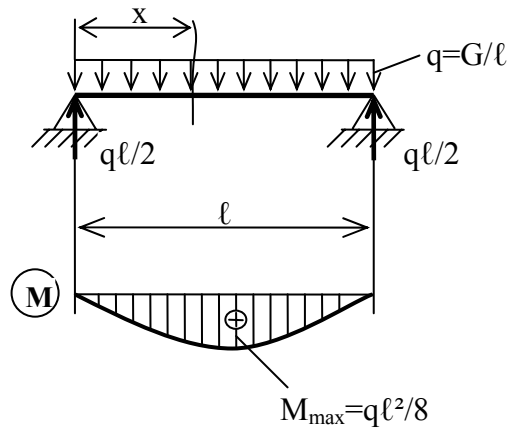


Figura 5.8.

Grinda este solicitată la încovoiere de o sarcină uniform distribuită cu intensitatea:

$$q = \frac{G}{l} = \frac{\gamma \cdot V}{l} = \frac{\gamma \cdot Al}{l} = \gamma \cdot A$$

Coeficientul (multiplicatorul) de șoc se calculează cu relația:

$$\Psi = \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}}$$

unde:

$$L_{ext} = G \cdot h = qlh$$

$$L_{int} = U = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M^2(x) \cdot dx$$

Pentru grinda din figura 5.8. momentul încovoiător în secțiunea x este dat de relația:

$$M(x) = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

Înlocuind în relația precedentă se obține:

$$L_{int} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M^2(x) \cdot dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \frac{q^2}{4} (lx - x^2)^2 dx = \frac{q^2}{4EI_z} \int_0^l (l^2x^2 + x^4 - 2lx^3) \cdot dx$$

Efectuând toate calculele rezultă:

$$L_{int} = \frac{q^2 l^5}{10Ea^4}$$

Prin urmare coeficientul (multiplicatorul) de șoc devine:

$$\Psi = \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}} = \sqrt{\frac{10Ea^4 h}{ql^4}}$$

Tensiunea dinamică este dată de relația:

$$\sigma_{d max} = \Psi \cdot \sigma_{st max}$$

Tensiunea statică se determină cu *relația lui Navier*:

$$\sigma_{st max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{ql^2}{\frac{a^3}{6}} = \frac{3ql^2}{4a^3}$$

de unde:

$$\sigma_{d max} = \left(\sqrt{\frac{10h \cdot Ea^4}{ql^4}} \right) \cdot \frac{3ql^2}{4a^3}$$

Pentru a determina înălțimea maximă de cădere se impune condiția:

$$\sigma_{d max} \leq \sigma_a$$

Înlocuind tensiunea dinamică din relația precedentă, după efectuarea simplificărilor, înlocuirea valorilor numerice și efectuarea calculelor se obține:

$$\frac{3 \cdot 3,9}{2} \cdot \sqrt{\frac{h \cdot 2,1 \cdot 10}{7,8}} \leq 150$$

de unde $h_{max} \leq 54,94mm$.

4. O bară prismatică cade de la o înălțime h ca în figura 5.9. Să se determine înălțimea maximă de cădere dacă se cunosc: E , σ_a , γ .

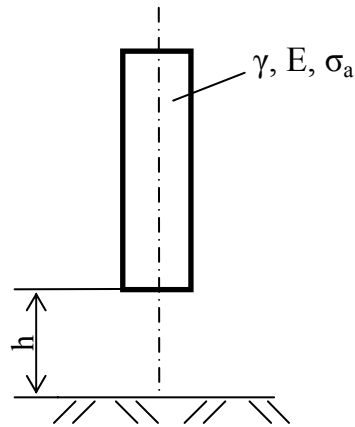


Figura 5.9.

Rezolvare:

Solicitarea statică din grindă este prezentată în figura 5.10. Grinda este solicitată la compresiune de o sarcină uniform distribuită cu intensitatea:

$$q = \frac{G}{l} = \frac{\gamma \cdot V}{l} = \frac{\gamma \cdot Al}{l} = \gamma \cdot A$$

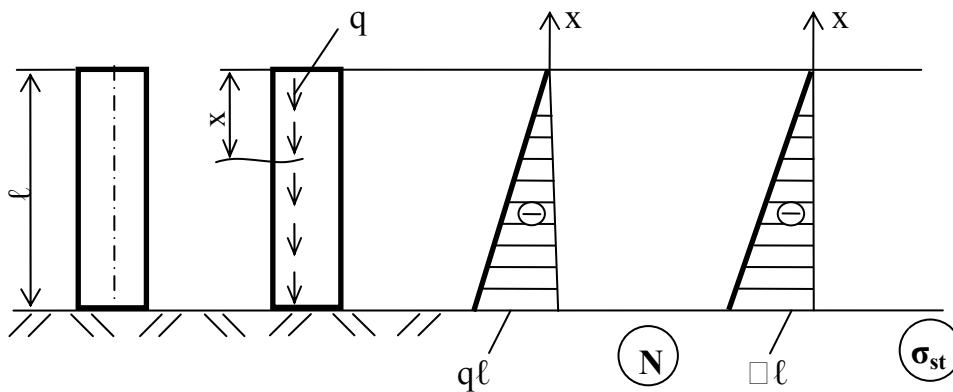


Figura 5.10.

Coeficientul (multiplicatorul) de șoc se calculează cu relația:

$$\Psi = \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}}$$

unde:

$$L_{ext} = G \cdot h = qlh$$

$$L_{int} = U = \frac{1}{2EA} \int_0^l N^2(x) \cdot dx$$

Pentru bara din figura 5.10. forța axială în secțiunea x este dată de relația:

$$N(x) = -qx$$

Se înlocuiește în expresia lucrului mecanic interior și se obține:

$$L_{int} = \frac{1}{2EA} \int_0^l N^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2EA} \int_0^l (-qx)^2 \cdot dx = \frac{q^2}{2EA} \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{q^2 l^3}{6EA}$$

Prin urmare coeficientul (multiplicatorul) de șoc devine:

$$\Psi = \sqrt{\frac{L_{ext}}{L_{int}}} = \sqrt{\frac{qlh \cdot 6EA}{q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{6EAh}{A\gamma l^2}} = \sqrt{\frac{6Eh}{\gamma l^2}}$$

Tensiunea dinamică este dată de relația:

$$\sigma_{d_{max}} = \Psi \cdot \sigma_{st_{max}}$$

Tensiunea statică se determină cu relația:

$$\sigma_{st}(x) = \frac{N(x)}{A} = -\frac{qx}{A} = -\frac{A\gamma x}{A} = -\gamma \cdot x$$

iar tensiunea statică maximă este:

$$\sigma_{st_{max}} = \sigma_{st}(l) = -\gamma \cdot l$$

de unde: $\sigma_{d_{max}} = \left(\sqrt{\frac{6hE}{\gamma l^2}} \right) \cdot \gamma l$

Pentru a determina înălțimea maximă de cădere se impune condiția:

$$\sigma_{d_{max}} \leq \sigma_a$$

Înlocuind tensiunea dinamică din relația precedentă, după efectuarea simplificărilor, înlocuirea valorilor numerice și efectuarea calculelor se obține:

$$\gamma \cdot \sqrt{\frac{6hE}{\gamma l^2}} \leq \sigma_a \Rightarrow 6Eh\gamma \leq \sigma_a^2$$

de unde: $h \leq \frac{\sigma_a^2}{6E\gamma}$

Observații:

- Deoarece tensiunea statică nu depinde de arie în cazul acestei aplicații nu se poate face un calcul de dimensionare;
- Indiferent de secțiunea A a barei prismatice înălțimea maximă de cădere se calculează cu relația stabilită anterior.

Probleme propuse:

1. O greutate $G = 20kN$ cade de la înălțimea $h = 100mm$ pe mijlocul unei grinzi de deschidere $l = 3,2m$ (figura 5.11). Se cere să se calculeze tensiunea dinamică maximă și săgeata dinamică maximă în momentul impactului. Se cunosc: grinda are secțiunea patrată $50mm \times 50mm$, $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$.

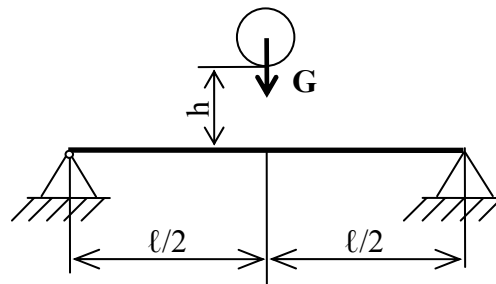


Figura 5.11.

2. Să se determine înălțimea maximă de cădere știind că $G = 0,2kN$. Grinda din figura 5.12. are secțiunea pătrată cu latura $a = 40mm$.

Se cunosc: $l = 500 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, $\sigma_a = 140 MPa$.

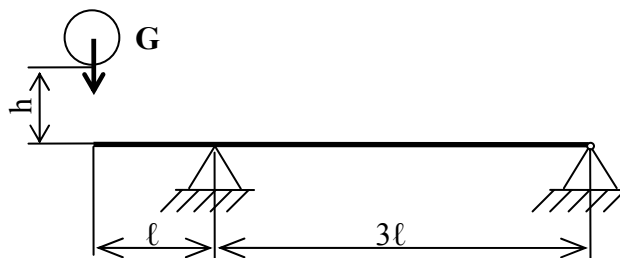


Figura 5.12.

3. Să se compare tensiunile care apar în barele din *figura 5.13*, atunci când sunt lovite de o aceeași greutate G care cade de la aceeași înălțime h . Bara din *figura 5.13a* are secțiunea transversală A_1 , cea din *figura 5.13c* are secțiunea A_2 , iar cea din *figura 5.13b* are pe porțiunea strujită (de lungime l_1) secțiunea A_2 și pe rest secțiunea A_1 ($A_1 > A_2$).

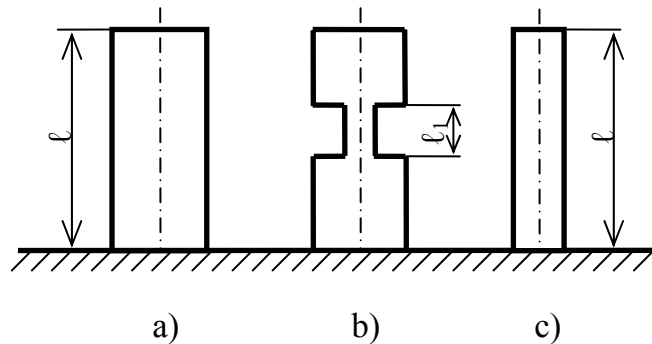


Figura 5.13.

4. Să se compare două grinzi, încastate la o extremitate și libere la cealaltă, de aceeași deschidere l , una de secțiune constantă dreptunghiulară (*figura 5.14a*) și cealaltă (*figura 5.14b*) de secțiune variabilă (grinda de egală rezistență la încovoiere) din punct de vedere al comportării lor la acțiunea dinamică a unei greutăți G , care cade de la înălțimea h și le lovește în extremitatea liberă.

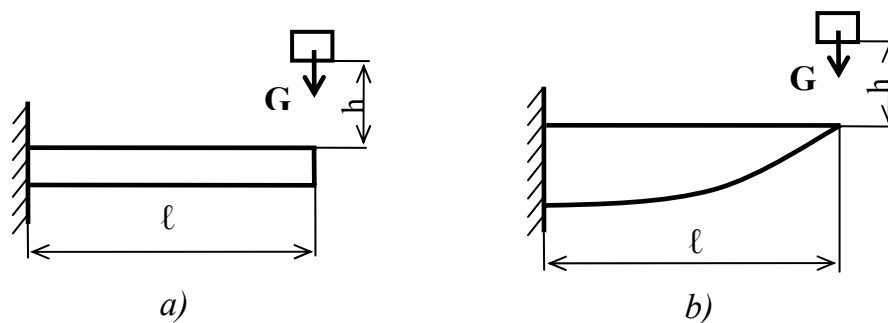


Figura 5.14.

5. O grindă articulată, de greutate G , cu secțiunea constantă și lungimea l , cade din poziția verticală asupra unui reazem rigid (*figura 5.15*). Se cere să se afle expresia tensiunii maxime, știind că grinda are secțiunea pătrată cu latura a .

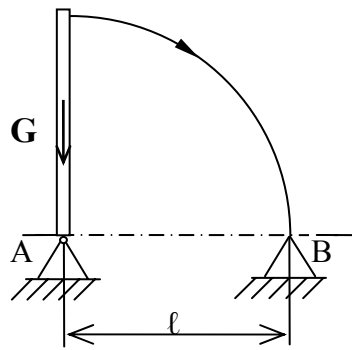


Figura 5.15.

6. O greutate $G = 1,2kN$ cade de la o înălțime $h = 100mm$ pe grinda din figura 5.16, care este rezemată elastic la un capăt pe un arc cu $n = 9$ spire, cu raza de înfășurare $R = 36mm$ și diametrul sârmei $d = 8mm$.

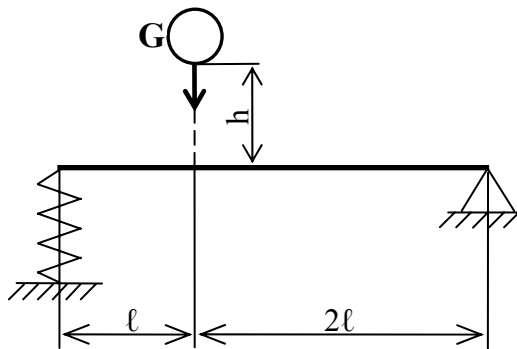


Figura 5.16.

Se cere să se determine tensiunea normală maximă din grindă și tensiunea tangențială maximă din arc în momentul șocului. Se cunosc: $l = 400mm$, $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$ și $G_{arc} = 8,3 \cdot 10^4 MPa$. Grinda are secțiunea dreptunghiulară cu înălțimea de $30mm$ și lățimea de $90mm$.

7. O greutate $G=200N$ cade de la înălțimea $h=80mm$ pe un inel subțire de rază medie $R=250mm$ și diametrul secțiunii $d= 30mm$ (figura 5.17). Să se calculeze tensiunea dinamică maximă din inel. Se cunoaște $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$.

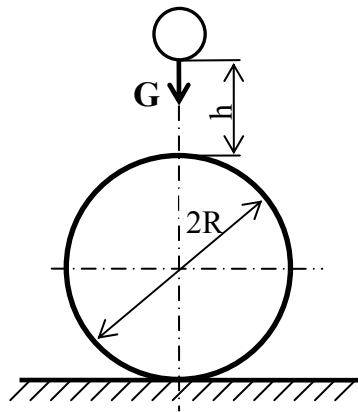


Figura 5.17.

8. Grindă cotită de oțel ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) din figura 5.18 are secțiunea transversală pătrată $60\text{mm} \times 60\text{mm}$. O greutate G cade pe capătul liber al barei cotite de la înălțimea $h = 30\text{mm}$. Se cere să se calculeze tensiunea maximă în momentul șocului și săgeata maximă în momentul șocului ($l = 500\text{mm}$).

Se consideră $EI_z = \text{const.}$ pentru ambele bare ale grinzii cotite.

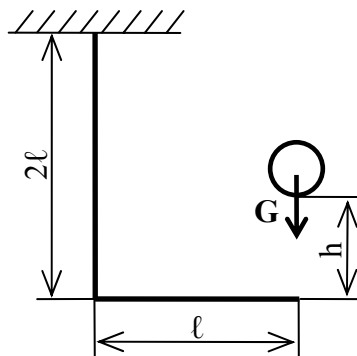


Figura 5.18.

CAPITOLUL 6

VASE CU PEREȚI SUBȚIRI

6.1. Generalități

Vasele cu pereți subțiri constituie o categorie de corpuri utilizate pentru transportul sau depozitarea fluidelor. În cazul în care presiunea interioară este relativ mică, grosimea peretelui este mult mai mică decât raza medie a vasului și de aceea un astfel de vas se studiază considerând numai suprafața sa mediană și neglijându-se variația tensiunilor pe grosimea peretelui.

În acest capitol se studiază vasele realizate sub forma particulară de corpuri de revoluție, obținute prin mișcarea unei curbe în jurul unui ax. Peretele vasului având grosimea foarte mică în raport cu restul dimensiunilor se va considera că nu poate transmite momente încovoietoare și deci nici forțe tăietoare, în acest caz solicitarea fiind cea de întindere. Vasele cu pereți subțiri se calculează după teoria membranei adică peretele vasului se comportă ca o membrană sub care s-a introdus lichidul sub presiune.

Într-un punct al unei suprafețe se poate duce o normală unică și o infinitate de plane care să conțină această normală. Fiecare plan intersectează suprafața după o curbă care are în punctul respectiv o anumită rază de curbură. Pentru a obține cele două curbe particulare care au razele de curbură maximă și minimă intersecția se face cu planele principale definite astfel:

- *planul meridian*: planul care conține axa de revoluție și punctul respectiv;
- *planul paralel*: planul perpendicular pe planul meridian și care conține normala în punct la suprafață.

6.2. Ecuația lui Laplace

Pentru a studia starea de tensiune într-un punct din peretele vasului se izolează un element de volum care conține punctul respectiv. Izolarea acestui element de volum se face intersectând suprafața cu două plane meridiane și două plane paralele infinit apropiate (*figura 6.1*).

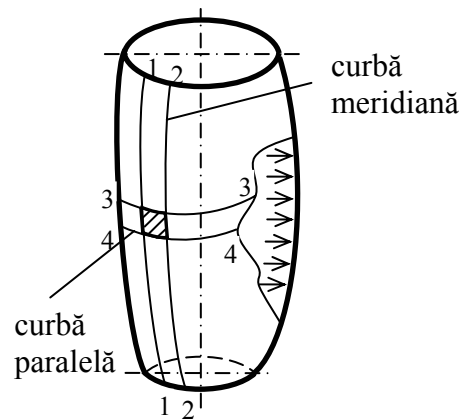


Figura 6.1.

Pe cele patru fețe secționare apar *tensiunile principale* σ_1 , σ_2 (*figura 6.2*). Elementul de volum se află într-o stare *plană de tensiune*.

Razele care descriu în lungimea reală ds_1 și ds_2 și rămân în același timp perpendiculare pe suprafață se numesc *raze principale* și se notează cu ρ_1 , ρ_2 .

Observații:

- ρ_1 este raza de curbură a curbei meridiene (curba care se obține tăind suprafața printr-un plan care conține axa de rotație);
- ρ_2 este raza de curbură care se găsește pe normala dusă din punctul de la suprafață până ce intersectează axa de rotație;
- σ_1 tensiunea normală pe direcția meridianului;
- σ_2 tensiunea normală pe direcția paralelului.

Se fac următoarele notații:

h – grosimea peretelui;

O_1, O_2 – centrele de curbură.

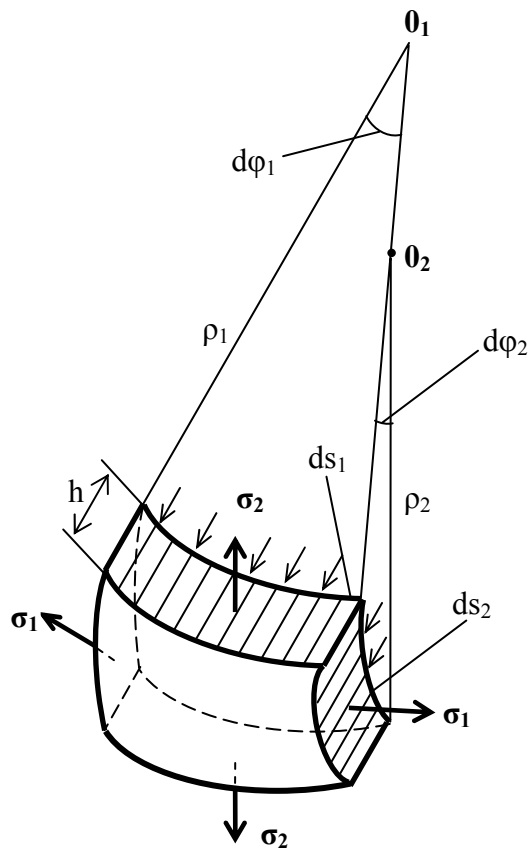


Figura 6.2.

Se consideră că în interiorul vasului există o presiune p . Se scrie echilibrul elementului reprezentat în *figura 6.2*. sub forma unei ecuații de proiecții de forțe pe direcția normală. Se obține:

$$p \cdot ds_1 \cdot ds_2 - 2\sigma_1 \cdot ds_2 \cdot h \cdot \sin \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot ds_1 \cdot h \cdot \sin \frac{d\varphi_2}{2} = 0 \quad (6.1)$$

Ținând cont că:

$$ds_1 = \rho_1 \cdot d\varphi_1$$

$$ds_2 = \rho_2 \cdot d\varphi_2$$

și că elementul având dimensiuni infinit mici:

$$\sin \frac{d\varphi_1}{2} \approx \frac{d\varphi_1}{2}$$

$$\sin \frac{d\varphi_2}{2} \approx \frac{d\varphi_2}{2}$$

se fac înlocuirile în *relația (6.1)* și rezultă:

$$p \cdot \rho_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \rho_2 \cdot d\varphi_2 - 2\sigma_1 \cdot \rho_2 \cdot d\varphi_2 \cdot h \cdot \frac{d\varphi_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot \rho_1 \cdot d\varphi_1 \cdot h \cdot \frac{d\varphi_2}{2} = 0 \quad (6.2)$$

Împărțind *relația (6.2)* prin $h, \rho_1, \rho_2, d\varphi_1, d\varphi_2$ se obține:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \quad (6.3)$$

unde: σ_1 - tensiunea normală pe direcția meridianului (este tensiunea tangentă la curba generatoare);

σ_2 - tensiunea normală pe direcția paralelului (este tensiunea tangentă la planul paralel care este pusă în evidență făcând o secțiune longitudinală în vas);

h – grosimea peretelui;

p – presiunea;

ρ_1 - raza de curbură a curbei meridianului;

ρ_2 - raza de curbură a curbei paralelului.

Relația (6.3) este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de **ecuația lui Laplace**.

Observații:

- Ecuația lui Laplace se găsește în literatura de specialitate și sub forma:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_p}{\rho_p} = \frac{p}{h}$$

- Vasele cu pereți subțiri au profilul determinat de o curbă meridiană, iar secțiunile transversale pe axa longitudinală sunt cercuri.
- Relația stabilită se poate aplica în următoarele ipoteze:
 1. grosimea vaselor este mică în raport cu razele principale de curbură și ca urmare tensiunile sunt constante pe grosime;
 2. nu există salturi bruște de grosime a peretelui;
 3. solicitarea nu se face prin forțe sau cupluri concentrate.

În cazul unui vas cu geometrie cunoscută stabilirea stării de tensiune într-un punct necesită determinarea razelor de curbură principale ρ_1, ρ_2 și scrierea ecuației lui Laplace. Această singură ecuație nu permite determinarea celor două necunoscute: tensiunile principale σ_1, σ_2 . Este necesar să se scrie o a doua ecuație care se obține izolând o porțiune finită din vas, pentru care se exprimă echilibrul, scriind proiecția de forțe pe direcția axei de revoluție a vasului.

Calculul de rezistență al vasului (verificarea sau dimensionarea vasului) se face pe baza uneia din teoriile de rezistență, impunând condiția cunoscută:

$$\sigma_{echiv} \leq \sigma_a \quad (6.4)$$

unde tensiunea echivalentă se calculează cu una din relațiile:

- teoria tensiunii normale maxime:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_{max} \quad (6.5)$$

unde $\sigma_{max} = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$

- teoria tensiunii tangențiale maxime:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (6.6)$$

- teoria energiei de deformație modificatoare de formă:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (6.7)$$

6.3. Vase cu pereți subțiri care conțin gaz

Pentru această categorie de vase presiunea este constantă.

Aplicație:

Să se dimensioneze vasul din figura 6.3. Se cunosc: $p = 0,6 \text{ N/mm}^2$, $R = 2 \text{ m}$, $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$.

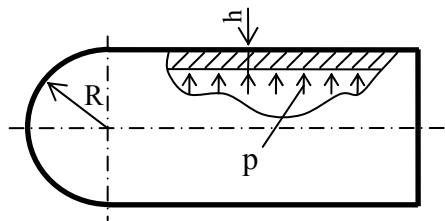


Figura 6.3.

Rezolvare:

Se studiază separat fiecare vas. Pentru vasul semisferic razele de curbură sunt $\rho_1 = \rho_2 = R$. Înlocuind în relația (6.3) se obține:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{R} + \frac{\sigma_2}{R} = \frac{p}{h}$$

Din motive de simetrie a formei și a încărcării avem $\sigma_1 = \sigma_2$ și înlocuind în relația precedentă se obține:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{2h} \quad (6.8)$$

Pentru dimensionare, ținând cont de relațiile (6.4) și (6.5), se impune condiția ca tensiunea din peretele vasului să fie egală cu tensiunea admisibilă și se obține:

$$\frac{p \cdot R}{2h} = \sigma_a \Rightarrow h = \frac{p \cdot R}{2\sigma_a}$$

Se înlocuiesc valorile numerice și rezultă:

$$h = \frac{0,6 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 120} = 5 \text{ mm}$$

Pentru vasul cilindric razele de curbură sunt $\rho_1 = \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} = 0$, $\rho_2 = R$.

Înlocuind în *relația (6.3)* se obține:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{R} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{h} \quad (6.9)$$

Este necesar să se scrie o a doua ecuație pentru a determina și tensiunea σ_1 . Pentru aceasta se secționează vasul (perpendicular pe axa de revoluție) și se izolează o porțiune finită din vas. Se scrie echilibrul pentru porțiunea de vas considerată sub forma unei ecuații de proiecții de forțe pe direcția axei de revoluție a vasului. Se obține:

$$\sigma_1 \cdot 2\pi R \cdot h - p \cdot \pi R^2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{p \cdot R}{2h} \quad (6.10)$$

Din *relațiile (6.9)* și *(6.10)* rezultă pentru vasul cilindric

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{p \cdot R}{h} \quad (6.11)$$

Pentru dimensionare, ținând cont de *relațiile (6.4)* și *(6.5)*, se impune condiția ca tensiunea din peretele vasului să fie egală cu tensiunea admisibilă și se obține:

$$\frac{p \cdot R}{h} = \sigma_a \Rightarrow h = \frac{p \cdot R}{\sigma_a} = 10 \text{ mm}$$

Din *relațiile (6.8)* și *(6.11)* se observă că în cazul vasului sferic tensiunea este de două ori mai mică decât tensiunea maximă din vasul cilindric.

Observații:

- Din punctul de vedere al consumului de material vasul sferic este indicat în comparație cu vasul cilindric. De aceea pentru presiuni mari și foarte

mari și pentru materiale costisitoare (oțel inoxidabil) se folosește vasul sferic cu toare că realizarea acestuia este mult mai complicată.

- La proiectarea unui vas cu pereții subțiri trebuie ținut cont de efectul rezemării și de faptul că la trecerea de la o formă de vas la alta apare o diferență între tensiuni și de aceea zonele de trecere trebuie întărite (de obicei cu un inel).
- Dacă pe o suprafață acționează o presiune constantă, atunci, independent de forma suprafeței, proiecția pe o direcție dată a rezultantei forțelor de presiune este egală cu produsul dintre presiunea p și aria proiecției suprafeței pe un plan normal pe direcția dată.

6.4. Vase cu pereți subțiri care conțin lichid

Pentru această categorie de vase axa de revoluție este verticală, iar presiunea nu mai este constantă ci variază cu adâncimea H după o relație de forma:

$$p = \rho \cdot g \cdot H = \gamma \cdot H \quad (6.12)$$

Aplicatie:

Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor pentru vasul conic, plin cu lichid având greutatea specifică γ (figura 6.4).

Rezolvare:

Se studiază starea de tensiuni într-un punct A aflat la distanța y față de vârful conului. În acest punct avem:

$$\begin{aligned} p &= \gamma \cdot (H - y) \\ \rho_1 &= \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} = 0 \\ \rho_2 &= AB \end{aligned} \quad (6.13)$$

Observație:

- ρ_2 se măsoară pe direcția normalei între punctul considerat, în cazul considerat A și axa de revoluție.

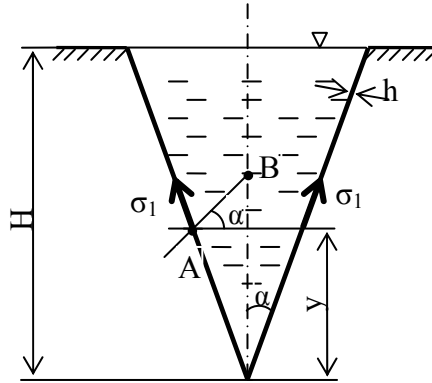


Figura 6.4.

Cu notațiile din figura 6.4. se poate scrie:

$$\rho_2 = AB = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{y \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \quad (6.14)$$

Ținând cont de relațiile (6.13) și (6.14) ecuația lui Laplace devine:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\frac{y \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\gamma \cdot (H - y)}{h} \Rightarrow$$

$$\sigma_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\gamma}{h} \cdot y \cdot (H - y)$$

Se studiază variația tensiunii σ_2 pe înălțimea vasului, pentru $y \in [0; H]$. Se obține:

$$\sigma_2(0) = \sigma_2(H) = 0$$

$$\sigma_2' = \operatorname{const.} \cdot (H - 2y) \Rightarrow \sigma_2' = 0 \Rightarrow y = \frac{H}{2} \in [0, H]$$

$$\sigma_2'' < 0 \Rightarrow \sigma_{2 \max} = \sigma_2\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{\gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{h \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{2 \max} = \frac{\gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{h \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{H^2}{4}$$

Diagrama de variație a tensiunii σ_2 este prezentată în figura din figura 6.5.

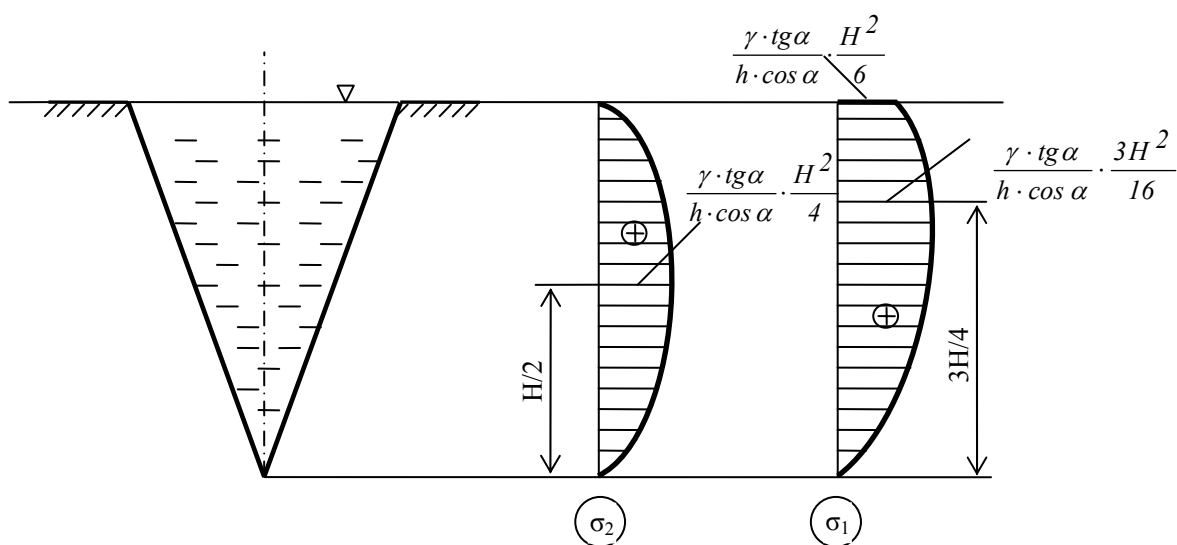


Figura 6.5.

A doua ecuație se obține scriind ecuația de proiecții de forțe pe direcția axei de revoluție (pe direcție verticală) a tuturor forțelor care acționează asupra părții din vas care se află sub secțiunea y (figura 6.6).

Se obține:

$$\sigma_1 \cdot h \cdot 2\pi r \cdot \cos \alpha - \gamma \cdot V(y) - \gamma \cdot (H - y)\pi r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_1 \cdot h \cdot 2\pi r \cdot \cos \alpha = \gamma \cdot \frac{\pi r^2}{3} (y + 3H - 3y) \Rightarrow$$

$$\sigma_1 \cdot 2h \cdot \cos \alpha = \frac{\gamma \cdot r}{3} (3H - 2y) \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \cdot r \cdot (3H - 2y)}{3 \cdot 2h \cdot \cos \alpha} = \frac{\gamma \cdot r \cdot (3H - 2y)}{6h \cdot \cos \alpha}$$

Ținând cont că $\text{tg} \alpha = \frac{r}{y} \Rightarrow r = y \cdot \text{tg} \alpha$ se înlocuiește în ultima relație și rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \cdot \text{tg} \alpha}{6h \cdot \cos \alpha} \cdot y \cdot (3H - 2y)$$

Se studiază variația tensiunii σ_1 pe înălțimea vasului, pentru $y \in [0; H]$. Se obține:

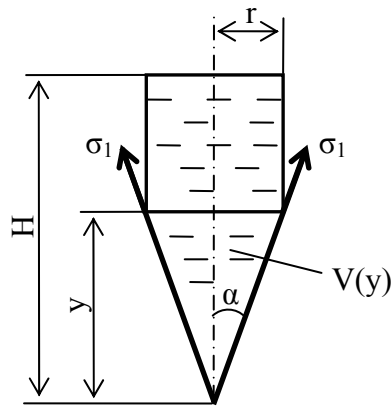


Figura 6.6.

$$\sigma_1(0) = 0; \sigma_1(H) = \frac{\gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{6h \cdot \cos \alpha} \cdot H \cdot H = \frac{\gamma \cdot H^2 \operatorname{tg} \alpha}{6h \cdot \cos \alpha}$$

$$\sigma_1' = \operatorname{const.} \cdot (3H - 4y) \Rightarrow \sigma_1' = 0 \Rightarrow y = \frac{3H}{4} \in [0, H]$$

$$\sigma_1'' < 0 \Rightarrow \sigma_{1\max} = \sigma_1\left(\frac{3H}{4}\right) = \frac{\gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha}{6h \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{3H}{4} \cdot \left(3H - \frac{3H}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{3\gamma \cdot H^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{16 \cdot h \cdot \cos \alpha}$$

Diagrama de variație a tensiunii σ_1 este prezentată în figura 6.5.

Observații:

- În cazul vaselor cu pereți subțiri diagramele de variație a celor două tensiuni se pot reprezenta și pe circumferința vasului.
- Dacă pe o suprafață oarecare acționează presiunea unui lichid, care are un nivel liber, atunci componenta verticală a rezultantei forțelor de presiune este egală cu greutatea lichidului din volumul situat deasupra suprafeței.

Probleme propuse:

1. Să se dimensioneze un vas cilindric cu raza $R = 1m$ pentru o presiune de gaz $p = 2N/mm^2$ știind că $\sigma_a = 140MPa$.

2. Să se dimensioneze un vas sferic în condițiile prezentate în problema anterioară.

3. Să se verifice rezervorul cilindric suspendat, plin cu lichid având greutatea specifică $\gamma = 10^{-5} N/mm^3$. Se cunosc: $h = 4mm$, $H = 8m$, $R = 3m$, rezistența admisibilă a tablei este $\sigma_a = 100MPa$.

4. Să se determine tensiunile din pereții unui rezervor cilindric suspendat, (figura 6.7.). Se dau: greutatea specifică a lichidului $\gamma = 8 \cdot 10^{-6} N/mm^3$, $H = 5,5m$, $h = 6mm$, $R = 2m$.

5. Să se dimensioneze rezervorul conic suspendat, prezentat în figura 6.8., știind că înălțimea sa este $H = 5m$, unghiul la vârf $2\alpha = 90^\circ$, greutatea specifică a lichidului $\gamma = 24 \cdot 10^{-6} N/mm^3$ și rezistența admisibilă a tablei $\sigma_a = 100MPa$.

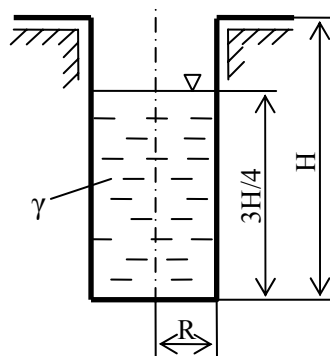


Figura 6.7.

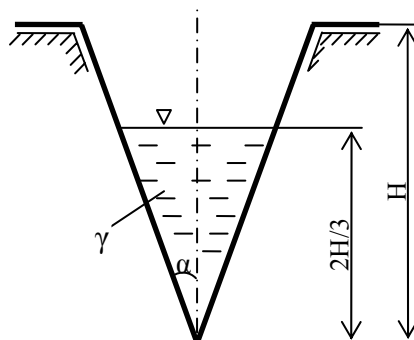


Figura 6.8.

CAPITOLUL 7

CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA OBOSEALĂ

7.1. Generalități

Piesele nu rezistă la fel de bine la solicitări repetate, ca și la solicitările statice. Solicitățile variabile se obțin atunci când sarcina variază în timp ca direcție sau ca direcție și intensitate. Variația sarcinilor în timp are o influență hotărâtoare asupra rezistenței materialelor solicitate. Practica a arătat apariția ruperilor premature la multe organe de mașini aparent bine dimensionate cu relațiile clasice ale Rezistenței materialelor, dar solicitate variabil periodic în timp. Ruperile s-au produs la tensiuni mult mai mici decât tensiunea corespunzătoare limitei de curgere sau limitei de rupere pentru solicitarea statică. Studiarea mecanismului ruperii în cazul solicitărilor variabile a arătat că ruperea începe cu formarea în locul cel mai solicitat a unor microfisuri, care se dezvoltă treptat și slăbesc din ce în ce mai mult piesa și în cele din urmă pot duce la ruperea ei.

Fenomenul de rupere sub acțiunea sarcinilor variabile în timp s-a numit impropriu *rupere la oboseală*, ca și cum materialul ar fi obosit în solicitare,

datorită preluării și cedării de foarte multe ori a energiei de deformație. Capacitatea materialului de a se opune ruperii în cazul unor tensiuni variabile în timp se numește *rezistență la oboseală*.

Mecanismul formării fisurilor în cazul solicitilor variabile este foarte complicat. În unele cazuri, zona în care apar fisurile este situată la suprafață, în altele în interiorul materialului piesei. Până în prezent, rămâne neclar dacă fisurile la oboseală iau naștere ca rezultat al compunerii tensiunilor remanente din material cu tensiunile datorate sarcinilor exterioare, sau fisurile la oboseală sunt rezultatul măririi și dezvoltării microfisurilor existente în material înainte ca acesta să fie solicitat.

În unele cazuri fisurile apărute dintr-o cauză sau alta se măresc sau se înmulțesc până la rupere, alteori apare o stare de echilibru în care creșterea fisurilor încetează.

S-a observat că dezvoltarea fisurilor devine deosebit de intensă dacă tensiunile variază nu numai ca mărime, ci și ca semn (de exemplu tracțiunea alternează cu compresiunea).

Cercetările experimentale au arătat că rezistența la oboseală depinde de formă și dimensiuni, de procedeul de prelucrare, de starea suprafeței precum și de alți factori care trebuie să se reflecte în metodele de calcul. Trebuie menționat că majoritatea acestor factori, la efectuarea calculelor statice, adică a calculelor în cazul tensiunilor constante în timp, sunt apreciați ca secundari și nu sunt luați în considerație.

S-a putut observa că ruperea apare după un număr cu atât mai mic de variații ale solicitării, cu cât tensiunea maximă din secțiunea periculoasă are o valoare mai mare. Dacă însă tensiunile produse au valori relativ mici, atunci ruperea la oboseală nu se produce nici după un număr foarte mare de variații ale solicitării.

În comparație cu ruperile produse prin solicitări statice, rupura la oboseală are un aspect specific cu două zone: o zonă lucioasă și o zonă grăunțoasă cu cristale ascuțite, rezultate dintr-o rupere casantă, produsă brusc.

Ruperea la oboseală se produce în zona tensiunilor mari, unde anumiți factori constructivi sau tehnologici, cum ar fi concentratorii de tensiune, conduc la început la apariția unei microfisuri, care prin variația solicitării se adâncește. Contactul dintre suprafețele rezultate prin fisurare duce la apariția zonei lucioase în secțiunea de rupere. Prin propagarea fisurii secțiunea slăbește, pentru ca la un moment dat ruperea să se producă în mod brusc și să apară astfel zona grăunțoasă în secțiunea de rupere.

Observarea macroscopică și microscopică a unei secțiuni rupte prin efectul oboselii, indică prezența unei amorse locale (sau un început de amorasă a fisurii) provocată de o concentrare de tensiune datorită unei imperfecțiuni a materiei sau schimbării geometrice a piesei. Această amorasă este continuată de o zonă în care ruptura pare să se aprofundeze din ce în ce mai mult. În cele din urmă, o a treia zonă indică faptul că o ruptură bruscă se produce atunci când secțiunea rămasă este prea mică pentru a rezista solicitării. Se disting trei etape în timpul procesului:

- amorșarea fisurii;
- propagarea fisurii;
- ruptura finală a materialului.

Observarea aspectului rupturii permite de cele mai multe ori determinarea tipului de solicitare care a provocat ruperea piesei.

Pentru explicarea ruperilor la oboseală trebuie avut în vedere și faptul că relațiile de calcul stabilite se bazează pe ipoteza mediului continuu și pe ipoteza izotropiei, ipoteze care nu concordă cu realitatea. Materialele utilizate în construcția de mașini conțin pori, incluziuni nemetalice, grupuri de cristale orientate în mod diferit, ceea ce constituie concentratori de tensiune, deosebit de periculoși în cazul solicitărilor variabile. Din cauza neomogenității materialelor distribuția tensiunilor din secțiunile transversale ale barelor diferă de cea care rezultă din relațiile de calcul ale tensiunilor deduse pentru materialul omogen și izotrop. Distribuția reală a tensiunilor prezintă abateri, vârfuri de tensiune, față de

distribuția teoretică. Aceste vârfuri pot constitui cauza microfisurilor care conduc la ruperea la oboseală.

7.2. Clasificarea solicitărilor variabile

În majoritatea cazurilor în dreptul unui punct dintr-un organ de mașină tensiunea prezintă o variație periodică între aceleași valori:

maxime σ_{max} (sau τ_{max}) și

minime σ_{min} (respectiv τ_{min}).

Variația tensiunilor pe durata unei perioade formează un *ciclu de tensiune*. Pe baza notațiilor din figura 7.1. se definesc următoarele elemente caracteristice ale ciclului sunt:

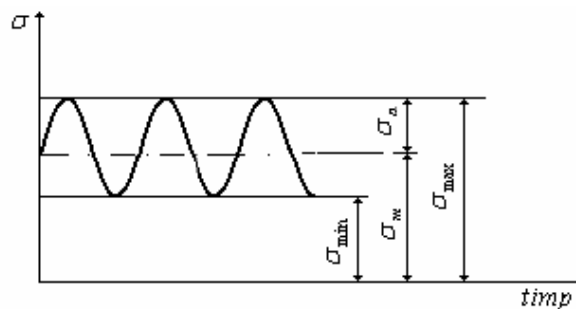


Figura 7.1.

- variația tensiunii: $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a = 2\sigma_v$
- tensiunea maximă: $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$
- tensiunea minimă: $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$
- tensiunea medie: $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min})$
- amplitudinea tensiunilor: $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$
- coeficientul de asimetrie al ciclului: $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$.

Observație:

- Amplitudinea tensiunii este notată cu σ_a sau σ_v , respective τ_a sau τ_v .

Mărimea coeficientul de asimetrie al ciclului definește natura unui ciclu de tensiune. Ciclurile cu același coeficient de asimetrie se numesc cicluri *asemenea*. În dependență de valoarea coeficientului de asimetrie se disting următoarele tipuri de solicitări, prezentate în *Tabelul 7.1*.

Dacă tensiunile maxime și minime sunt egale în mărime însă de semne contrarii, atunci ciclul se numește *simetric* (poziția 5 în *Tabelul 7.1*), în caz contrar *asimetric*.

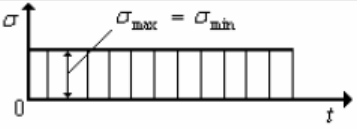
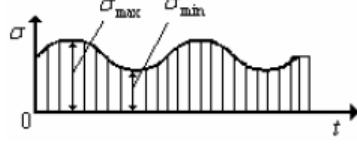
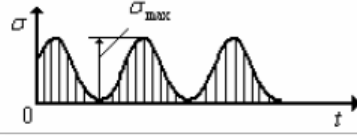
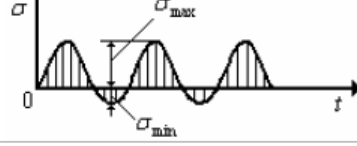

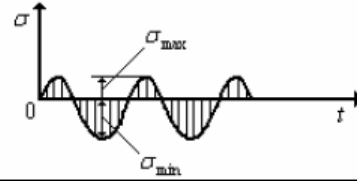
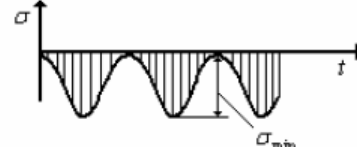
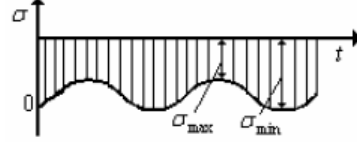
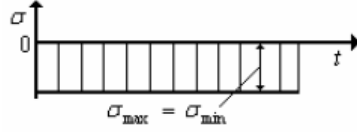
Se impun următoarele precizări:

- pentru solicitarea *statică* (constantă) tensiunea își păstrează valoarea constantă, solicitarea fiind considerată un caz particular al tensiunilor variabile în timp cu amplitudine nulă;
- pentru solicitarea *oscilantă* tensiunea în timpul solicitării își păstrează semnul;
- pentru solicitarea *pulsantă* una din tensiunile limită este egală cu zero (ciclurile pulsatoare pot fi pozitive și negative);
- pentru solicitarea *alternantă* tensiunea își schimbă semnul în timpul solicitării;
- pentru solicitarea *alternantă simetrică* tensiunile limită au aceeași valoare dar sensul contrar;
- solicitarea *statică, oscilantă și pulsantă pot fi pozitive sau negative* după cum tensiunea σ_m este de întindere sau de compresiune.

Observații:

- *Stările de solicitare variabilă cu tensiuni tangențiale sunt caracterizate prin aceleași elemente ca și stările cu tensiuni normale;*
- *Clasificarea prezentată în dependență de coeficientul de asimetrie este aplicabilă și în cazul tensiunilor tangențiale.*

Tabelul 7.1.

Nr.	Ciclu	$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	σ_m, σ_v	R, a
1.		$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} > 0$	$\sigma_m = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ $\sigma_v = 0$	$R = +1$ $a = 0$ Pozitiv constant
2.		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} > 0$	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$R \in (0,1)$ $a \in (0,1)$ Oscilant pozitiv - nesimetric
3.		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} = 0$	$\sigma_m = \sigma_v = \frac{1}{2} \sigma_{\max}$	$R = 0$ $a = 1$ Pozitiv pulsatoriu
4.		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$ $\sigma_{\max} > \sigma_{\min} $	$\sigma_m > 0$ $\sigma_v \neq 0$	$R \in (-1,0)$ $a \in (-1,0)$ Alternant nesimetric
5.		$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ $\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m = 0$ $\sigma_v = \sigma_{\max}$	$R = -1$ $a = \infty$ Alternant simetric
6.		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$ $\sigma_{\max} < \sigma_{\min} $	$\sigma_m < 0$ $\sigma_v \neq 0$	$R \in (-\infty, -1)$ $a = (1, \infty)$ Alternant nesimetric
7.		$\sigma_{\max} = 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m = \frac{\sigma_{\min}}{2}$ $\sigma_v = \left \frac{\sigma_{\min}}{2} \right $	$R = +\infty$ $a = 1$ Negativ pulsatoriu
8.		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m < 0$ $\sigma_v \neq 0$	$R \in (1, +\infty)$ $a \in (0,1)$ Oscilant negativ - nesimetric
9.		$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ $\sigma_v = 0$	$R = +1$ $a = 0$ Negativ constant

7.3. Rezistența la oboseală. Curba Wöhler.

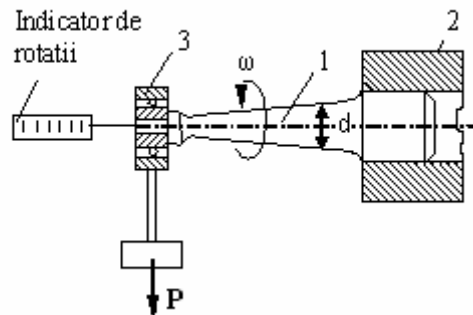
Numeroase încercări ale materialelor pentru diferite cazuri de variații ale tensiunilor au permis să se stabilească următoarele ipoteze de bază privind rezistența la solicitări variabile:

- materialele se pot rupe la tensiuni considerabil mai mici decât rezistența la rupere și chiar decât limita de curgere dacă tensiunile variază de un număr suficient de ori;
- există o tensiune maximă (limită) pentru care materialul suportă fără să se rupă un număr practic nelimitat de mare de variații ale tensiunii;
- mărirea amplitudinii tensiunii σ_v , micșorează valoarea tensiunii maxime limită a ciclului.

Cel mai răspândit tip de încercare la oboseală în cazul stării de tensiuni monoaxiale este încercarea la încovoiere pentru un ciclu simetric de variație a tensiunilor. Pentru determinarea modului de comportare a materialului la solicitări variabile se folosesc epruvete de secțiune circulară cu diametrul $d=10mm$, fără concentratori de tensiune, având suprafața șlefuită supuse la o solicitare de încovoiere pură sau de încovoiere simplă. Epruvetele se montează pe o mașină de încercat, prezentată schematic în *figura 7.2.*, și sunt solicitate la încovoiere într-o mișcare de rotație cu o turație constantă (epruvetele sunt încastrate în dreptul unui capăt și încărcate printr-o greutate P în dreptul capătului liber).

În timpul mișcării de rotație a epruvetei tensiunea normală din dreptul unui punct oarecare își schimbă valoarea după un ciclu de solicitare alternant simetric. Epruveta se rotește până la rupere. Pentru stabilirea comportării materialului la solicitare variabilă se confecționează mai multe epruvete care se încearcă la diferite forțe de încărcare cu valori descrescătoare, începând de la limita de rupere statică. Se scade apoi treptat valoarea forței, rezultatele obținute

fiind reprezentate într-un sistem de axe având în abscisă numărul de cicluri până la ruperea epruvetei și în ordonată tensiunea maximă de rupere.



1 – epruveta de încercat;

2 – partea de prindere a mașinii de încercat;

3 – rulment radial cu bile prin intermediul căruia se aplică forța de încărcare **P** asupra epruvetei.

Figura 7.2.

Punctele obținute se pot uni printr-o curbă, care se apropie asimptotic de o valoare σ_R a tensiunii normale, la care ruperea nu se produce niciodată, oricare ar fi numărul de cicluri de solicitare variabilă. Această valoare se numește *rezistență la oboseală*, iar curba obținută poartă numele de *curba Wöhler* sau *curba de durabilitate* (figura 7.3.).

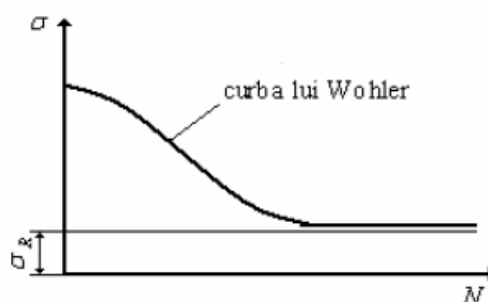


Figura 7.3.

Rezistența la oboseală σ_R este prin urmare egală cu tensiunea maximă la care ruperea epruvetei solicitate variabil nu se produce nici după un număr foarte mare de cicluri. Așadar rezistența la oboseală este cea mai mare valoare a tensiunii, la care epruveta rezistă un număr foarte mare de cicluri (de obicei acest număr se limitează la aproximativ 10^7 cicluri de încercare).

Expresia aproximativă a *curbei Wöhler*, după Basquin, este dată de relația:

$$\sigma_R^m \cdot N_f = k \quad (7.1)$$

unde:

σ_R - rezistența la oboseală;

N_f - numărul de cicluri până la distrugerea prin oboseală;

m, k – constante de material.

Valoarea rezistenței la oboseală depinde de natura solicitării variabile exprimată prin mărimea coeficientului de asimetrie R . Ca urmare se atribuie în notație, ca indice, coeficientul de asimetrie tensiunii maxime a ciclului corespunzător rezistenței la oboseală. Astfel, cu σ_R se notează *rezistența la oboseală a materialului în cazul unui coeficient de asimetrie oarecare*. Pentru încercarea prezentată mai sus s-a determinat rezistența la oboseală σ_{-1} a ciclului alternant simetric. O curbă asemănătoare se obține pentru ciclul pulsator și atunci se determină σ_0 .

Luând scări logaritmice *curba Wöhler* poate fi reprezentată prin drepte (*figura 7.4.*).

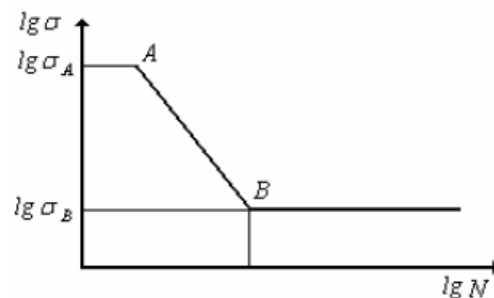


Figura 7.4.

7.4. Diagrame ale rezistențelor la oboseală

Diagramele rezistențelor la oboseală permit citirea valorii rezistențelor la oboseală în dependență de natura ciclului de solicitare variabilă, exprimat prin coeficientul de asimetrie. Se impune folosirea lor în calculul la oboseală atunci când coeficientul de asimetrie al ciclului de tensiune este oarecare. *Curba Wöhler* se obține cel mai frecvent pentru ciclul alternant simetric și cel pulsator. Dar, astfel de încercări se pot face pentru orice valori ale coeficientului de asimetrie $R \in [-1,1]$. Se pune problema cum pot fi grupate toate rezultatele obținute pe o asemenea gamă de încercări. Aceasta se face folosind diagramele rezistențelor la oboseală în coordonate σ_m și σ_a (diagrame de tip Haigh).

În *figura 7.5.* sunt prezentate diagrame ale rezistențelor la oboseală în coordonate σ_m și σ_a (Haigh), schematizarea după o linie dreaptă (Goodman, Soderberg), elipsă (metoda Buzdugan) și două drepte (metoda Serensen).

Curba din reprezentarea Haigh este *curba ciclurilor limită* sau *curba rezistențelor la oboseală*. Punctul *A* reprezintă ciclul alternant simetric, iar punctul *B* ciclul static. Punctele de pe curbă reprezintă solicitarea pentru care coeficientul de siguranță este egal cu *I*.

Un punct situat sub curba ciclurilor limită, reprezintă un ciclu de tensiune nepericulos, pe când un punct situat deasupra unuia care conduce la rupere prin repetarea solicitării. Un punct *L* reprezintă o rezistență la oboseală, corespunzător unui anumit coeficient de asimetrie *R*:

$$\sigma_R = \sigma_{mL} + \sigma_{aL} \quad (7.2)$$

Locul geometric al ciclurilor asemenea, deci al ciclurilor cu același coeficient de asimetrie, este o linie dreaptă care trece prin originea sistemului de referință. Pentru demonstrarea acestei afirmații din expresia coeficientului de asimetrie:

$$R = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a}$$

se exprimă amplitudinea tensiunilor:

$$\sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \sigma_m$$

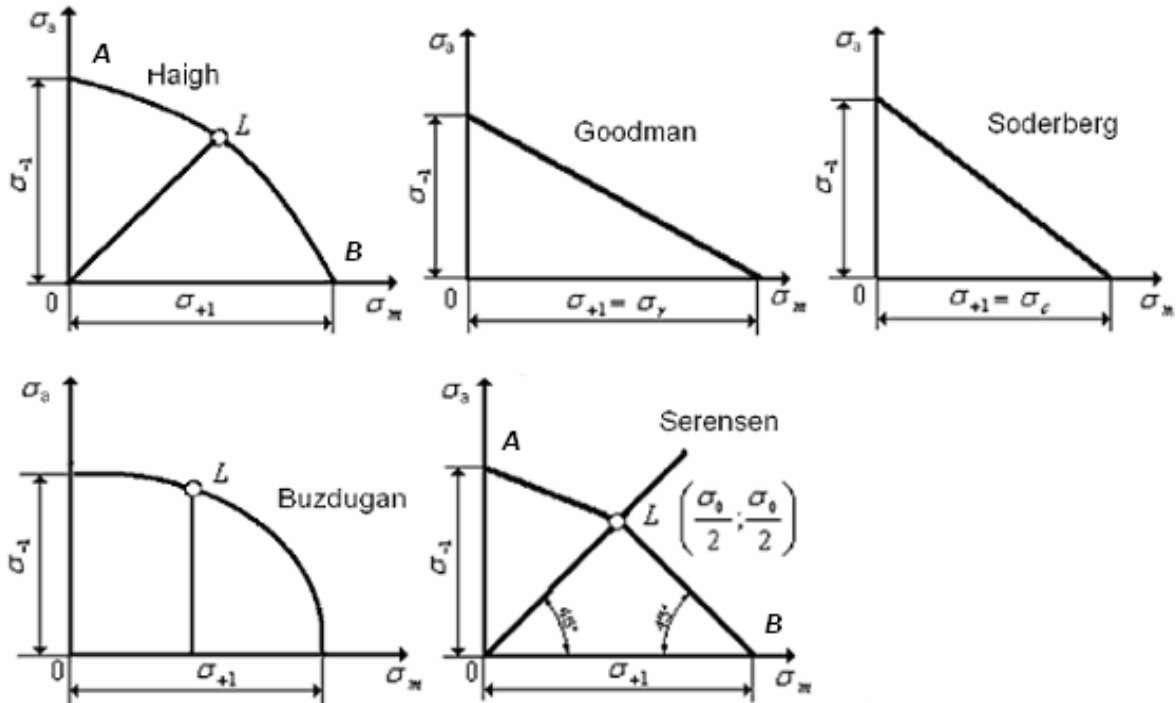


Figura 7.5

Se observă că egalitatea obținută constituie chiar ecuația dreptei ce trece prin origine, în cazul în care $R=const$. Această dreaptă are coeficientul unghiular:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1-R}{1+R_m}$$

Se observă următoarele trei cazuri particulare:

1. $R=+1$ și rezultă $\varphi=0$, ceea ce arată că axa absciselor este locul geometric al *solicitărilor statice*;

2. $R=-1$ când se obține $\varphi=90^\circ$, adică axa ordonatelor constituie locul geometric al *ciclurilor alternant simetrice*;

3. $R=0$ când rezultă $\varphi=45^\circ$, ceea ce arată că prima bisectoare a sistemului de referință este locul geometric al *ciclurilor pulsante*. Ea împarte în

două părți domeniul solicitărilor reprezentate prin puncte situate în primul cadran al sistemului de referință. Astfel punctele cu $-1 < \varphi < 0$ reprezintă cicluri alternante, iar punctele cu $0 < \varphi < +1$ cicluri oscilante.

Pentru un anumit material diagrama rezistențelor la oboseală se construiește prin puncte pe baza datelor din literatură sau a încercărilor la oboseală. Pentru o reprezentare cât mai exactă a curbei ciclurilor limită este necesar să se cunoască rezistența la oboseală pentru un număr cât mai mare de solicitări, caracterizate de diverși coeficienți de asimetrie, ceea ce este greu de realizat pe cale experimentală. Se determină cu ușurință rezistența materialelor la solicitare statică σ_{+1} (adică în cazul materialelor tenace limita de curgere σ_c , iar pentru materialele care nu au o limita de curgere pronunțată rezistența statică de rupere σ_r). Nu necesită un volum prea mare de încercări nici determinarea rezistenței la oboseală pentru ciclul alternant simetric σ_{-1} . Uneori se cunoaște și rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant σ_0 .

Pe baza valorilor cunoscute se adoptă pentru calculul la oboseală *diagrame schematizate* ale rezistențelor la oboseală. În *figura 7.5.* se prezintă câteva diagrame schematizate în coordonatele σ_m și σ_a :

1. diagrama schematizată printr-o linie dreaptă (Goodman, Soderberg) cu ecuația:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{+1}} + \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} = 1 \quad (7.3)$$

2. diagrama schematizată printr-un sfert de elipsă (metoda Buzdugan) având ecuația:

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{+1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} \right)^2 = 1 \quad (7.4)$$

3. diagrama schematizată prin două linii drepte (metoda Serensen), obținută unind punctele *A* și *L* printr-o dreaptă și trasând apoi din *L* o

dreaptă înclinată cu aproximativ 45° până în punctul **B**, corespunzător tensiunii σ_{+1} .

Observații:

- *Considerațiile de mai sus sunt aplicabile și în cazul ciclurilor cu tensiuni tangențiale.*
- *Dezavantajul acestor schematizări constă în faptul că înlătură o parte din capacitatea de rezistență a materialului, adică suprafața cuprinsă între liniile drepte și curba reală.*

7.5. Factori care influențează rezistența la solicitări variabile

Ruperea la oboseală a pieselor solicitate variabil în timp depinde de mai mulți factori:

- materialul și tehnologia de fabricație;
- natura solicitării;
- concentratorii de tensiune;
- dimensiunile piesei;
- starea suprafeței piesei;
- tensiunile remanente;
- temperatura;
- acțiunea agenților corozivi, etc.

Observații:

- *Efectul unora dintre acești factori se cunoaște cantitativ, iar efectul altora numai calitativ.*

- *Rezistența la oboseală a unei piese diferă de cea determinată pe epruvete. Valoarea acestei rezistențe se determină cu ajutorul unor coeficienți de corecție.*

7.5.1. Materialul și tehnologia de fabricație

Fiecare material posedă alte caracteristici mecanice, deci alte caracteristici la solicitări variabile. Cu cât rezistența statică a materialului este mai mare cu atât și rezistența la oboseală are o valoare mai ridicată. Dacă materialul are o structură mai omogenă și o granulație mai mică, atunci el rezistă mai bine la solicitarea variabilă. Un tratament termic corect executat determină îmbunătățirea rezistenței la oboseală. O influență favorabilă asupra comportării la solicitarea variabilă au forjarea și laminarea pe direcția eforturilor.

7.5.2. Natura solicitării

Natura solicitării variabile prezintă o importanță deosebită alături de mărimea solicitării. Dintre solicitările simple rezistența la oboseală pentru solicitarea de încovoiere are valoarea cea mai mare, deoarece tensiunile de încovoiere sunt mari numai într-o zonă restrânsă a secțiunii transversale. Rezistența la oboseală depinde și de coeficientul de asimetrie al ciclului, valoarea cea mai mică fiind cea corespunzătoare ciclului alternant simetric.

7.5.3. Concentratorii de tensiune

În calculele efectuate până în prezent nu s-a luat în considerație efectul schimbării de secțiune, adică trecerea de la o secțiune la alta. Cercetările teoretice și experimentale au aratat ca în locurile de variație bruscă a secțiunilor transversale (găuri, gătuiri, canale de pană, racordări, etc.) și în zona contactelor dintre corpurile solide se produc concentrări de tensiune. Tensiunile nu mai corespund celor calculate cu formulele clasice din rezistență, au valori mult mai mari (valorile sunt cu atât mai mari cu cât schimbarea de secțiune este mai bruscă și raza de racordare mai mică) și în unele cazuri dirijarea lor este spațială.

Pentru calculele de rezistență al solicitărilor statice s-a definit un *coeficient teoretic de concentrare*, egal cu raportul dintre tensiunea maximă din concentrator și tensiunea nominală:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (7.5)$$

Tensiunea nominală reprezintă tensiunea calculată (cu relațiile stabilite de Rezistența materialelor) fie în ipoteza absenței cocentratorului, fie fără luarea în considerație a perturbației câmpului forțelor interioare cauzate de către concentrator.

Se numește *coeficient efectiv de concentrare a tensiunilor* constante în timp, coeficientul care indică de câte ori concentratorul reduce capacitatea portantă a piesei. Acest coeficient de concentrare trebuie luat în considerație în special la calculul barelor confecționate din materiale fragile. La materialele tenace efectul de concentrare este mai puțin periculos.

Efectul de concentrare se produce întotdeauna și în cazul solicitărilor variabile, dar coeficientul de concentrare are o valoare puțin mai mică decât în cazul solicitărilor statice, datorită unei ușoare egalizări a tensiunilor prin variația solicitării. Pentru calculul solicitărilor variabile se folosește un coeficient numit *coeficientul efectiv de concentrate a tensiunilor* β_k care indică de câte ori este mai mare rezistența la oboseală a epruvetei fără concentrator decât rezistența la oboseală a epruvetelor cu concentrator.

Pentru determinarea acestui coeficient se utilizează epruvete cu și fără concentrator, pentru care se determină rezistența la oboseală. *Coeficientul efectiv de concentrate a tensiunilor* β_k se definește prin raportul dintre rezistența la oboseală pentru o epruvetă netedă fără concentrator (σ_R) și rezistența la oboseală a piesei cu concentrator (σ_{Rk}), având același coeficient de asimetrie R :

$$\beta_k = \frac{\sigma_R}{\sigma_{Rk}} \quad (7.6)$$

Observații:

- Valoarea coeficientului efectiv de concentrare depinde de forma și dimensiunile concentratorului, de material și de natura sollicitării.
- Coeficientul este întotdeauna mai mare ca unitatea.
- Se remarcă faptul că rezistența la oboseală a epruvetei cu concentrator (σ_{Rk}) se calculează ca tensiune nominală.
- Valorile ale coeficientului efectiv de concentrare se dau în tabele și diagrame.

Valorile coeficientului efectiv de concentrate pentru diferiți concentratori de tensiuni sunt date în figurile 7.6.-7.9, 7.13, 7.14, 7.16.-7.20. și în Tabelul 7.2.

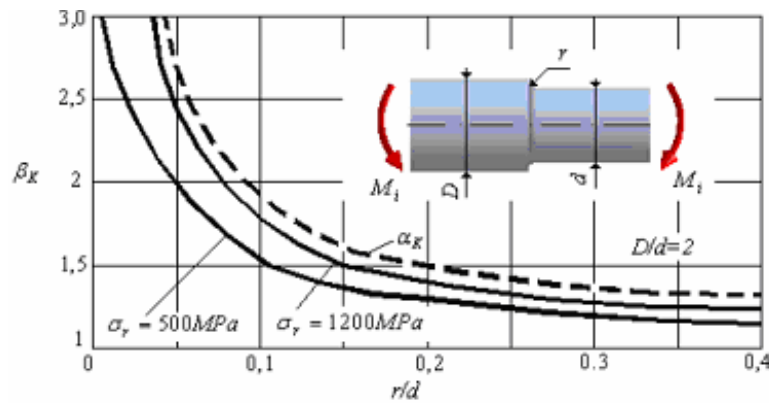


Figura 7.6

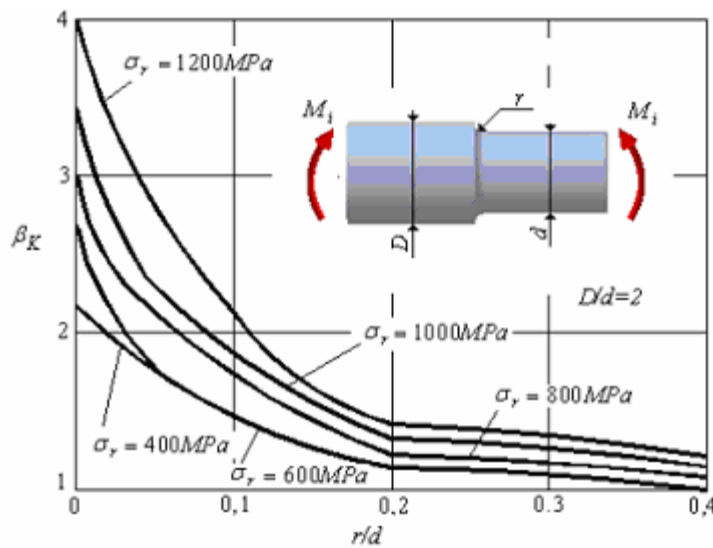


Figura 7.7

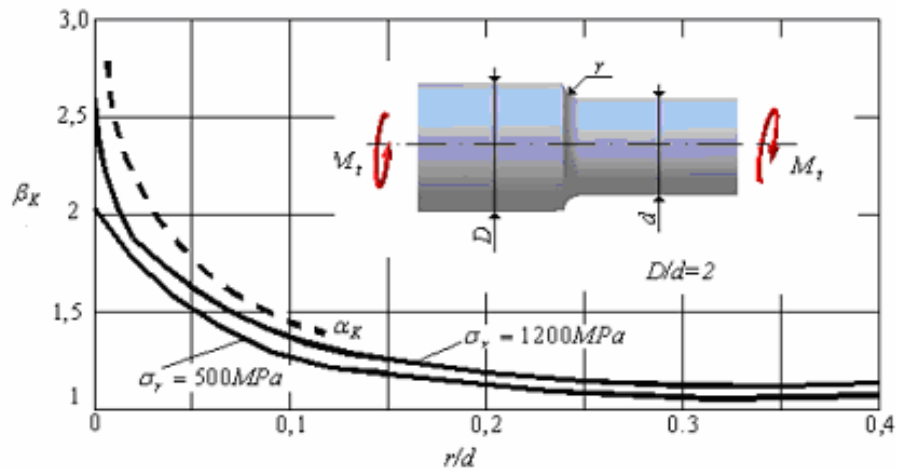


Figura 7.8

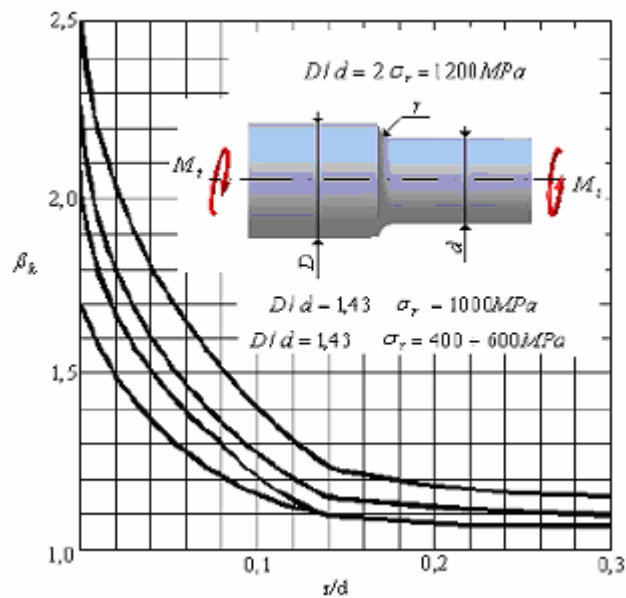


Figura 7.9.

Se observă că valoarea coeficientului efectiv de concentrare este cu atât mai mare cu cât raza de racordare este mai mică și cu cât materialul are o rezistență de rupere mai ridicată.

De menționat că, în cazul când raportul diametrelor D/d este diferit de 2 se face o corecție suplimentară prin coeficientul ξ (figura 7.10) cu relația următoare:

$$\beta_k = 1 + \xi \cdot (\beta_{ko} - 1) \quad (7.7)$$

unde β_{ko} este coeficientul de concentrare pentru raportul diametrelor $\frac{D}{d} = 2$.

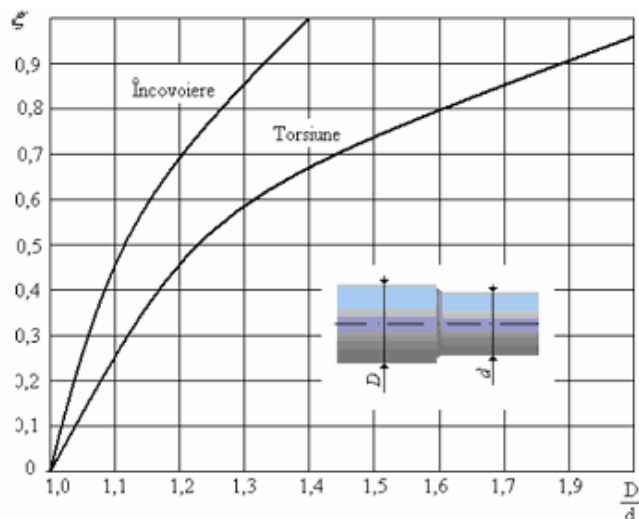


Figura 7.10.

Dacă se caută *coeficientul efectiv de concentrare* pentru un oțel cu rezistența σ_r oarecare, căreia nu-i corespunde nici o curbă pe aceste diagrame, se poate folosi relația:

$$\beta_k = \xi \cdot \beta_{ko} \quad (7.8)$$

unde ξ este un coeficient dat în *figura 7.11* pentru încovoiere și în *figura 7.12* pentru torsiune, iar β_{ko} corespunde oțelului carbon cu $\sigma_r = 500\text{MPa}$.

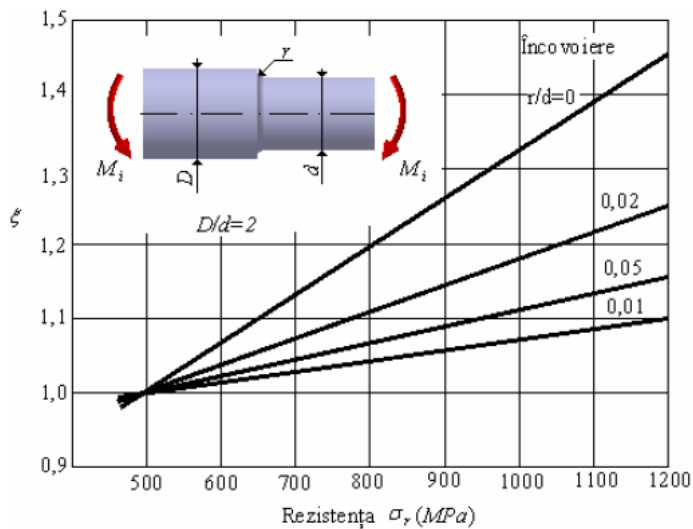


Figura 7.11.

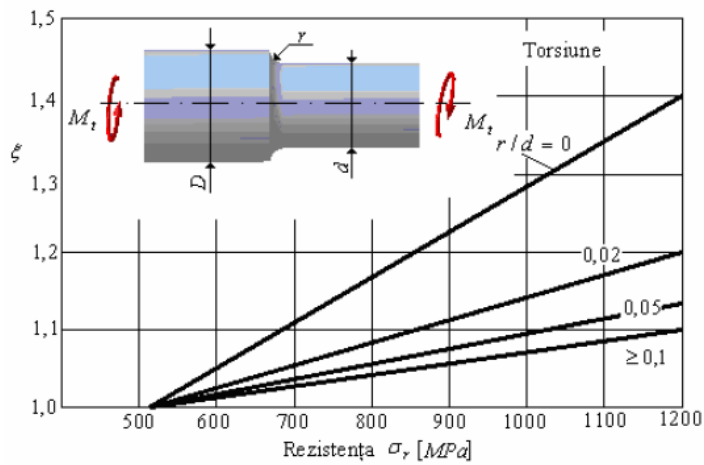


Figura 7.12.

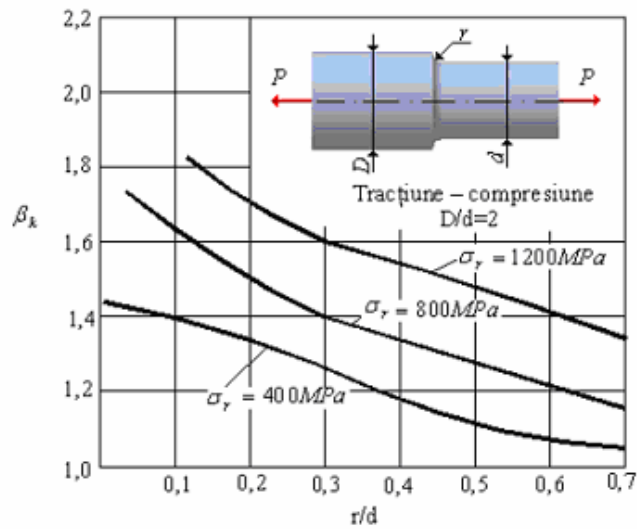


Figura 7.13.

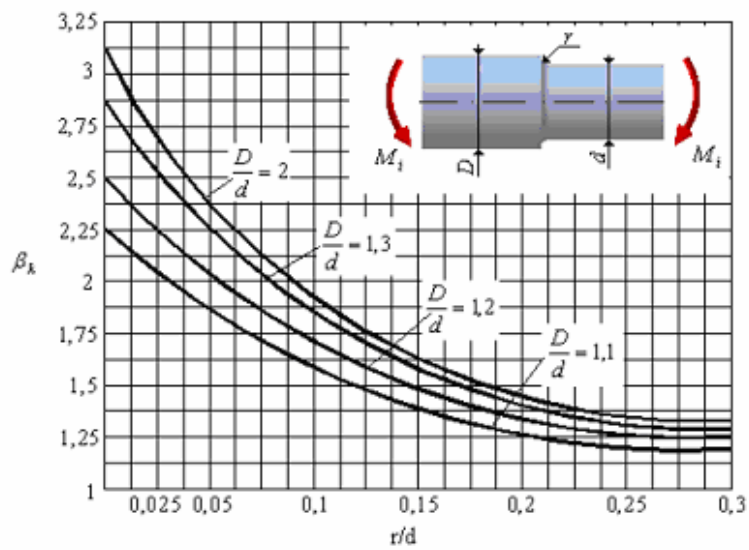


Figura 7.14.

În lipsa datelor experimentale, *coeficientul efectiv de concentrare* β_k poate fi determinat în funcție de *coeficientul teoretic de concentrare* a tensiunilor σ_k , cu relația:

$$\beta_k = 1 + \eta_k \cdot (\alpha_k - 1) \quad (7.9)$$

unde η_k este un *coeficient de sensibilitate la creștături* (figura 7.15).

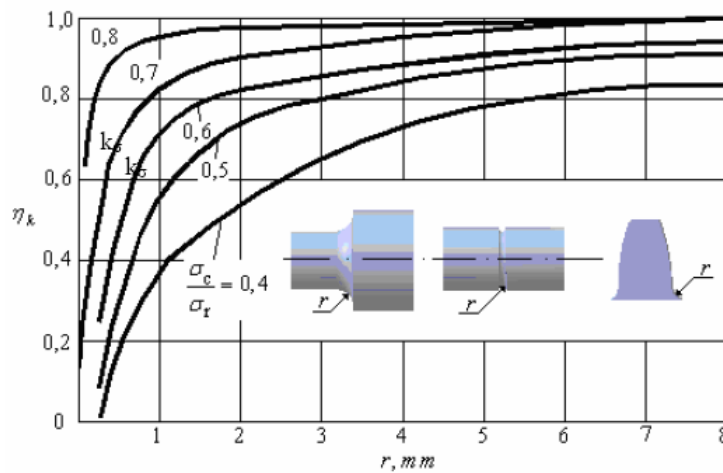


Figura 7.15.

În *figura 7.15* se dau valorile acestui coeficient pentru oțeluri. Mărimea coeficientului depinde de natura oțelului și de raza de racordare a creștăturii.

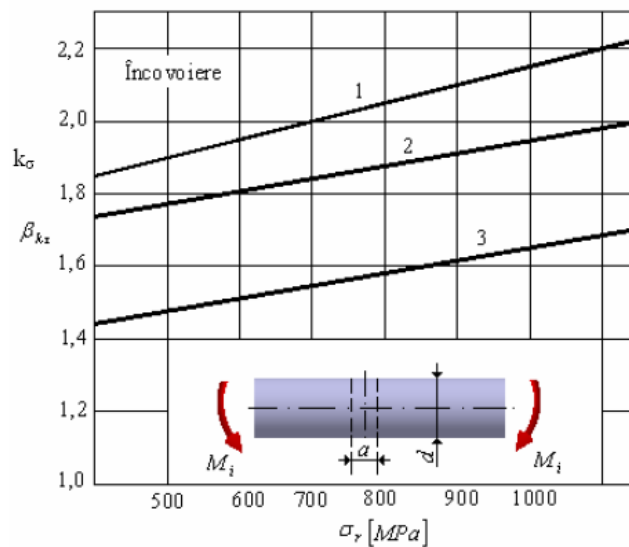


Figura 7.16.

Pentru oțeluri de mare rezistență *coeficient de sensibilitate* are o valoare apropiată de unitate. Pentru oțeluri de construcție, în medie acest coeficient este cuprins între 0,6 și 0,8, iar pentru fontă $\eta_k \approx 0$. Aceasta se explică prin existența în fonta turnată a unui număr mare de concentratori (neomogenitatea structurii, incluziuni, goluri).

În figura 7.16 curba 1 se referă la raportul $a/d=0,05\div 0,1$ și $d=40\div 50\text{mm}$, curba 2 la raportul $a/d=0,15\div 0,25$ și $d=40\div 50\text{mm}$, iar curba 3 la raportul $a/d=0,15\div 0,25$ și $d=6\div 8\text{mm}$.

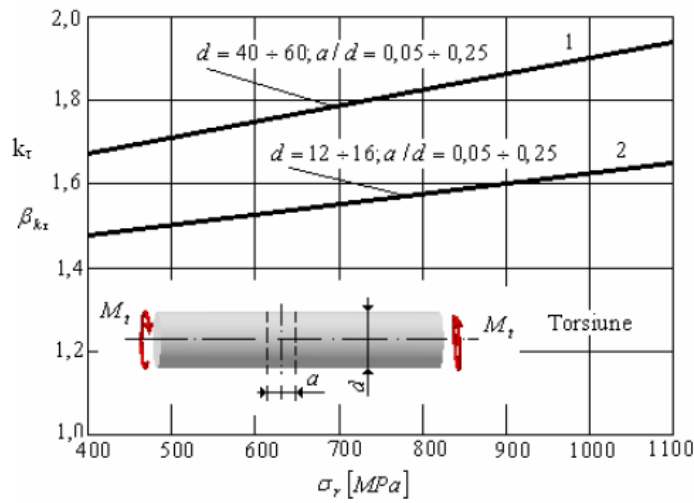


Figura 7.17.

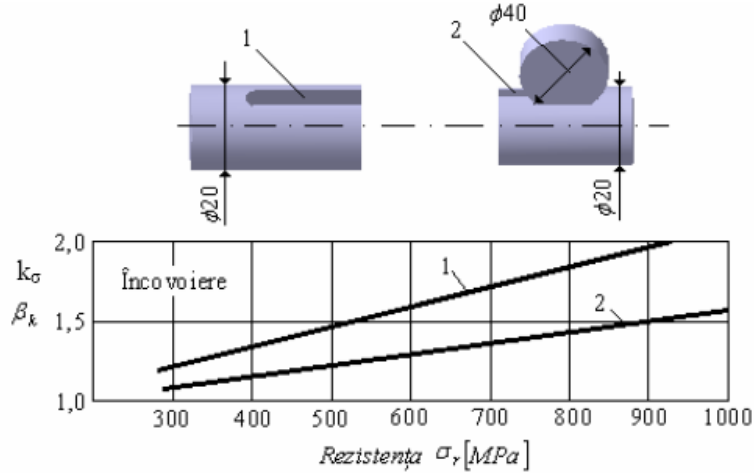


Figura 7.18.

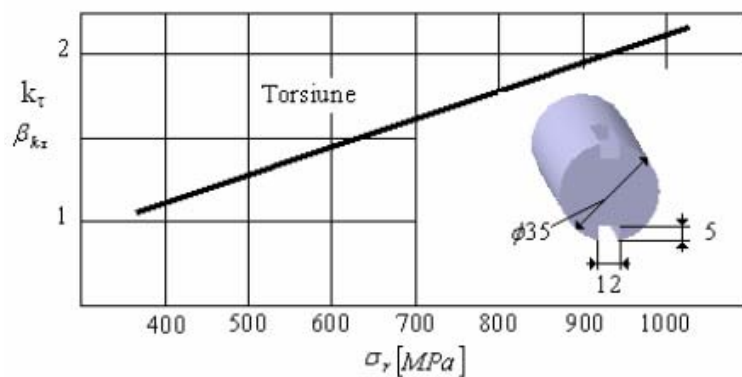


Figura 7.19.

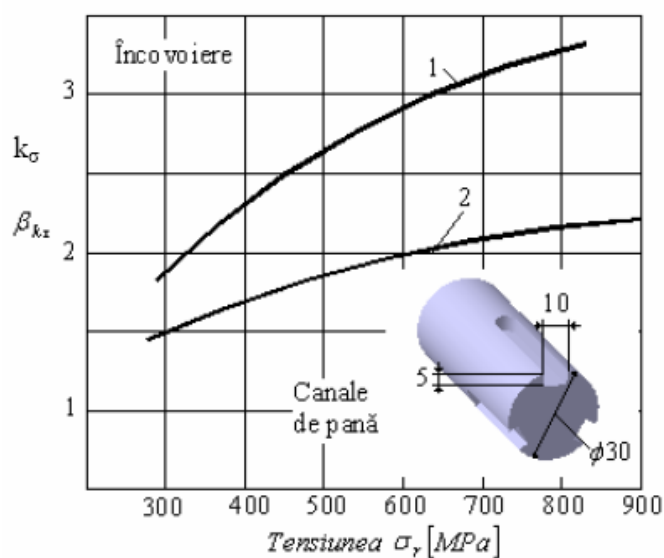


Figura 7.20.

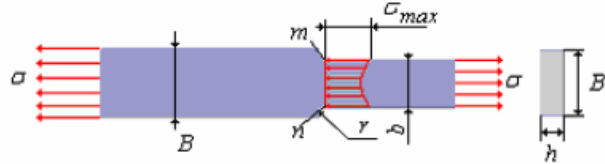
Curba 1 din figura 7.20 are în vedere arborele cu piesa montată pe el, iar curba 2 arborele fără piesă

De reținut:

- Concentratorii de tensiune micșorează rezistența pieselor supuse la sollicitări variabile. Ca urmare, configurația geometrică a organelor de mașini trebuie proiectată încât efectul de concentrare al tensiunilor să fie cât mai redus. În acest sens este necesar să se evite pe cât posibil

schimbările bruște de secțiune ale pieselor în special în apropierea secțiunilor în care tensiunile sunt mari.

Tabelul 7.2.



$\frac{r/b}{B/b}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
6,0	-	2,7	2,3	2,0	1,80	1,60
3,0	3,10	2,66	2,28	2,0	1,76	1,60
2,5	3,10	2,58	2,18	1,90	1,65	1,51
2,0	2,66	2,29	1,97	1,74	1,52	1,41
1,75	2,42	2,14	1,87	1,66	1,45	1,35
1,50	2,20	2,00	1,77	1,58	1,39	1,31
1,375	2,10	1,92	1,72	1,54	1,30	1,28
1,250	1,96	1,84	1,66	1,50	1,32	1,26
1,225	1,86	-	1,60	-	-	-

7.5.4. Dimensiunile piesei

Experiența a arătat ca odată cu creșterea dimensiunilor secțiunii transversale rezistența la solicitări variabile scade. Această constatare se explică prin faptul că, cu cât volumul și suprafața piesei sunt mai mari, cu atât mai numeroase sunt incluziunile nemetalice din piesă, porii, cristalele orientate diferit. Acești mici concentratori de tensiune pot constitui cauze ale apariției microfisurilor și începuturilor de ruptură. Prin urmare cu cât piesa este mai mare cu atât sunt mai mari și șansele de apariție ale microfisurilor, toate piesele reale cu un diametru $d > 10\text{mm}$ având o rezistență la oboseală mai mică decât cea obținută prin încercări.

Pentru a explica fenomenul micșorii rezistenței la oboseală o dată cu creșterea dimensiunilor pieselor s-au emis două ipoteze. Prima ipoteză explică fenomenul prin faptul că o dată cu creșterea dimensiunilor pieselor crește numărul particulelor de material dispuse la suprafață care se găsesc în starea cea mai solicitată (încovoiere, răsucire), ceea ce mărește probabilitatea existenței

diferitelor defecte (sulfuri, microfisuri, incluziuni, urme de prelucrare prin aşchiere) în stratul superficial. În aceste locuri începe de obicei dezvoltarea fisurilor la oboseală a căror creştere este deosebit de intensă în cazul gradientilor mici de variaţie a tensiunilor. A doua ipoteză explică micşorarea rezistenţei la oboseală o dată cu creşterea dimensiunilor pieselor prin faptul că la prelucrarea mecanică a pieselor de dimensiuni mici se produc deformaţii plastice ale stratului superficial la o adâncime relativ mai mare decât la epruvetele de dimensiuni mari. Tensiunile remanente care iau naştere la deformarea plastică influenţează favorabil asupra rezistenţei la oboseală.

Pentru calculul la oboseală se defineşte un *factor dimensional* ε prin raportul dintre rezistenţa la oboseală, pentru un ciclu alternant simetric, a unei piese sau epruvete de diametru oarecare d şi rezistenţa la oboseală a epruvetei de diametru $d_0=10\text{mm}$:

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad (7.9)$$

Variaţia *factorului dimensional*, în dependenţă de diametrul barelor de secţiune circulară pentru solicitarea de încovoiere este indicată în *figurile 7.21, 7.22*.

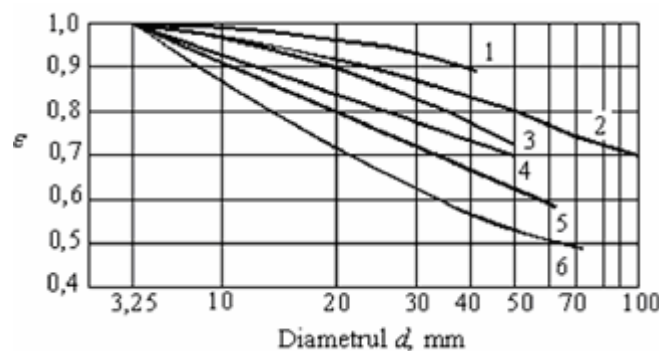


Figura 7.21.

În *figura 7.21* *curbele 1 și 2* se referă la oțel carbon neted, bine lustruit respectiv șlefuit, *3, 4 și 5* la oțel aliat lustruit, șlefuit, respectiv cu concentrări ușoare de tensiune, iar *curba 6* la oțel de construcții cu $\sigma_r = 650\text{MPa}$.

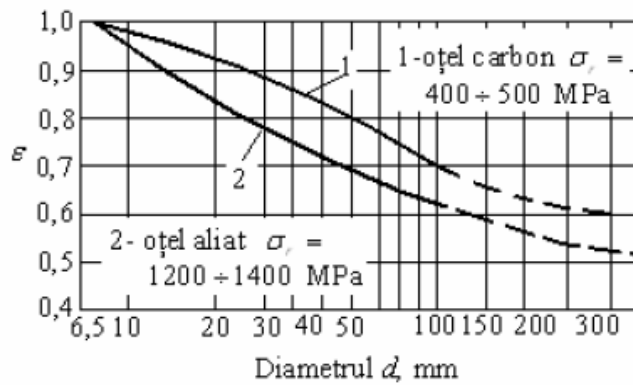


Figura 7.22.

Valorile *factorului dimensional* în dependență de diametrul arborilor de secțiune circulară, pentru solicitarea de torsiune, sunt indicate în *figura 7.23*.

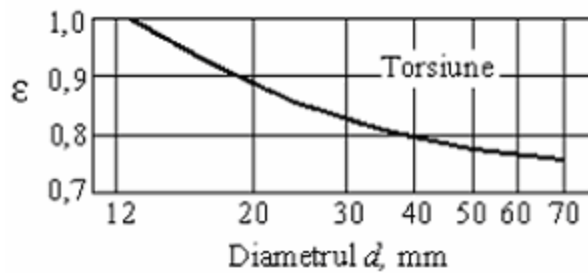


Figura 7.23.

În *figura 7.24* se dau *coeficienții de concentrare*, inclusiv *factorul dimensional* $\frac{\beta_k}{\varepsilon}$. Graficul este construit pentru oțel carbon cu $\sigma_r = 500\text{MPa}$, respectiv pentru o presiune între bușe și arbore $p \geq 30\text{MPa}$. *Curba 1* se referă la arbore încărcat prin forță și cuplu, iar *curba 2* la arborele neîncărcat. Pentru alte rezistențe de rupere, respectiv altă presiune de fretaj, coeficientul de concentrare este:

$$\frac{\beta_k}{\varepsilon} = \left(\frac{\beta_k}{\varepsilon} \right)_0 \cdot \xi' \cdot \xi'' \quad (7.10)$$

unde $\left(\frac{\beta_k}{\varepsilon} \right)_0$ sunt valorile din *figura 7.24*.

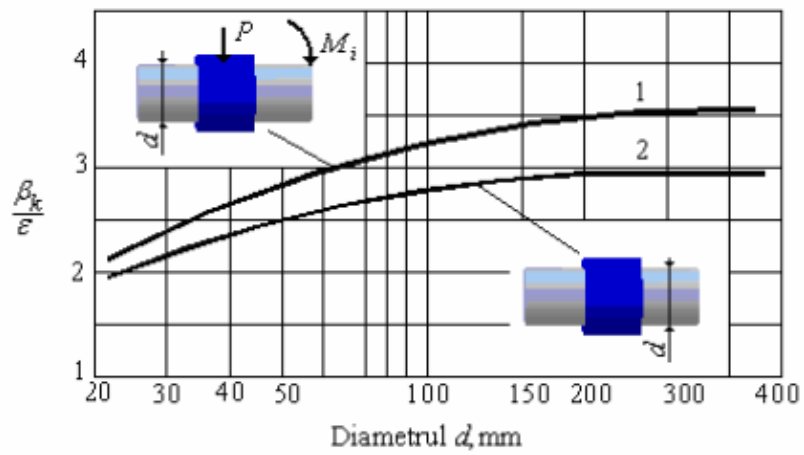


Figura 7.24.

Cei doi coeficienți de corecție din *relația (7.10)* se iau din *figurile 7.25 și 7.26.*

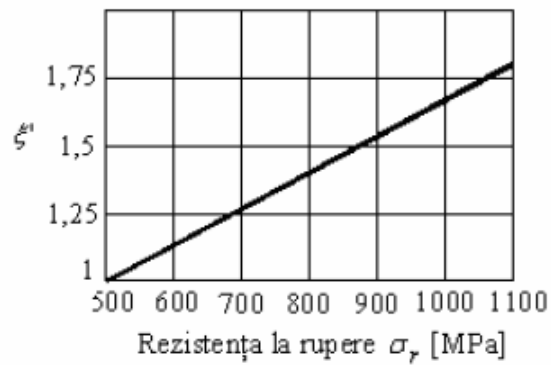


Figura 7.25.

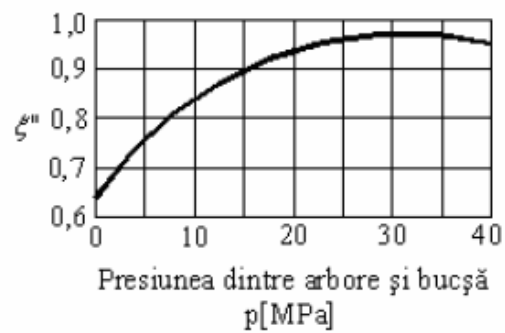


Figura 7.26.

7.5.5. Starea suprafeței

Experiența a arătat că starea suprafeței pieselor are o influență deosebită asupra ruperii la oboseală. O piesă cu suprafața prelucrată fin, lipsită de zgârieturi sau fisuri, rezistă mult mai bine la solicitări variabile decât o piesă cu suprafața prelucrată grosolan sau cu suprafața corodată. Această influență este mai pronunțată la solicitarea de torsiune și de încovoiere, la care tensiunile cele mai mari apar în dreptul conturului secțiunilor. Zgârieturile, micile crăpături, urmele cuțitului de așchiere sunt de fapt concentratori de tensiune. Efectul acestor concentratori este cu atât mai redus cu cât suprafața piesei este prelucrată mai fin și mai îngrijit, în special în cazul oțelurilor aliate, deosebit de sensibile față de concentrarea tensiunilor.

Pentru a lua în considerație în calcul starea suprafeței pieselor, se definește drept *coeficient de calitate al suprafeței* γ raportul dintre rezistența la oboseală a unei epruvete având calitatea suprafeței oarecare σ_{-1s} și rezistența la oboseală a unei epruvetei cu suprafața șlefuită, lipsită de concentratori σ_{-1} :

$$\gamma = \frac{\sigma_{-1s}}{\sigma_{-1}} \quad (7.11)$$

Valorile *coeficientului de calitate al suprafeței* γ pentru diverse moduri de prelucrare al suprafeței, în funcție de rezistența la rupere, sunt indicate în *figura 7.27*. Cele șase curbe se referă la: *curba 1* la epruveta lustruită, *curba 2* la șlefuire fină, *curba 3* la șlefuire sau strunjire fină, *curba 4* la suprafața laminată cu crustă, *curba 5* la coroziune în apă dulce, *curba 6* la coroziune în apă sărată. *Coeficientul de calitate al suprafeței* γ este cu atât mai mic cu cât suprafața este prelucrată mai grosolan. Pe lângă prelucrarea fină a suprafeței, se utilizează uneori tratamente de suprafață, prin care se obțin *coeficienți de calitate* cu valori mai mari. Astfel, se pot aplica tratamente termice sau termochimice ca cementarea, nitrurarea, călirea cu flacără sau prin curenți de înaltă frecvență, de asemenea tratamente mecanice ca rularea cu role, ecruisarea cu jet de alicie, etc.

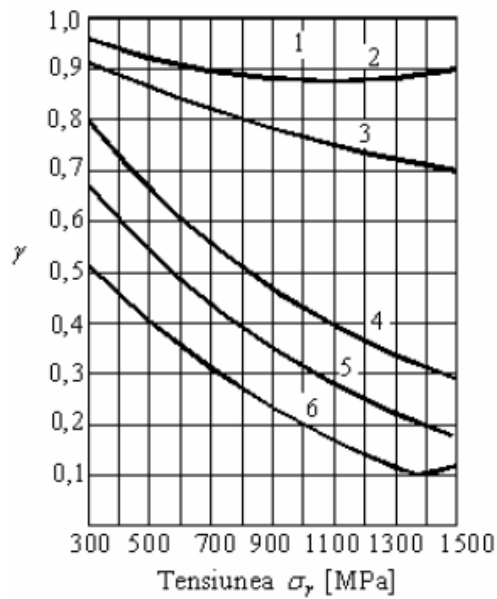


Figura 7.27.

Rezultatele încercărilor la oboseală au demonstrat că:

- în cazul nitrurii oțelurilor carbon rezistența la oboseală crește cu până la 50%, iar în cazul oțelurilor cu crom creșterea nu depășește 25% ;
- epruvetele din fontă supuse călirii prin curenți de înaltă frecvență, atât cele netede cât și cele cu creștătură, au o rezistență la oboseală cu 10-15% mai mare;
- rularea cu role a epruvetelor netede de oțel determină o creștere a rezistenței la oboseală a acestora cu 20%-30%;
- lustruirea hidrodinamică permite creșterea rezistenței la oboseală cu 25%.

Dacă piesa lucrează într-un mediu coroziv și se oxidează sau dacă suprafața ei se acoperă prin nichelare, cromare, arămire sau zincare *coeficientul de calitate* își micșorează valoarea. Astfel:

- nichelarea duce la o reducere cu până la 35% a rezistenței la oboseală (rezistența statică nu se reduce prin nichelare);
- rezistența la oboseală se reduce cu până la 15% datorită arămirii;

- aplicarea acoperirilor cu lacuri și vopsele, grunduirea nu au o influență apreciazabilă asupra rezistenței la oboseală a pieselor.

De reținut

Ținând cont de efectul cantitativ simultan al celor trei factori prezentați mai sus (concentratorii de tensiune, dimensiunile piesei, starea suprafeței piesei) rezistența la oboseală a unei piese reale $(\sigma_{-1})_p$, pentru un ciclu alternant simetric, diferă de cea determinată pe epruvete σ_{-1} și se determină cu relația:

$$(\sigma_{-1})_p = \frac{\sigma_{-1}}{\beta_k} \cdot \varepsilon \cdot \gamma \quad (7.12)$$

unde: β_k - coeficientul efectiv de concentrate a tensiunilor;

ε - factorul dimensional;

γ - coeficientul de calitate al suprafeței.

Cei trei coeficienți depind de natura solicitării și se determină, de obicei, pentru solicitări alternant simetrice.

7.5.6. Temperatura

Problemei rezistenței la oboseală în cazul temperaturilor ridicate i se acordă o atenție deosebită, datorită nivelului înalt al regimurilor de temperatură în condițiile de exploatare ale unor piese. În unele cazuri prezintă un mare interes și rezistența la solicitări variabile a materialelor la temperaturi joase. Cercetările experimentale privind influența temperaturii asupra rezistenței la oboseală au arătat că prin creșterea temperaturii piesei scade rezistența ei la solicitarea variabilă, iar prin scăderea temperaturii sub cea normală rezistența la oboseală crește. La temperaturi ridicate *curba Wöhler* nu mai prezintă o asimptotă orizontală, ci coboară în mod continuu la nivele tot mai mici de solicitare. La oțeluri, peste 300°C se produce o scădere a rezistenței la oboseală cu 15-20%, pentru fiecare creștere a temperaturii cu 100°C.

7.6. Calculul coeficientului de siguranță al solicitării variabile

La proiectarea subansamblurilor și a organelor de mașini, calculul de rezistență se efectuează de obicei prin metoda aproximațiilor succesive. La început, în funcție de condițiile tehnice date se efectuează un calcul prealabil și se determină cotele principale ale piesei. Cu datele orientative obținute se întocmește schița de proiect a subansamblului. Dimensiunile alese se rotunjesc și se modifică în concordanță cu considerentele constructive, standardele și normativele în vigoare.

Bazându-se pe schița de proiect astfel întocmită se efectuează calculele de verificare al căror scop este determinarea coeficienților de siguranță la piesele cele mai solicitate ale subansamblurilor. După aprecierea coeficienților de siguranță din nou se fac schimbări și corecturi în desene și din nou se execută calcule de verificare. Determinarea directă a dimensiunilor pieselor în funcție de rezistențele admisibile date este posibilă numai în cazuri foarte simple. Prin urmare, forma de bază a calculului o constituie calculul de verificare, cu determinarea coeficienților de siguranță, urmată de aprecierea acestora.

Problemele aprecierii coeficienților de siguranță și a alegerii rezistențelor admisibile trebuie rezolvate pe parcursul proiectării cu luarea în considerație a indicilor tehnico-economici. Problema de bază la calculul coeficienților de siguranță este determinarea stării limită urmată de calculul sarcinilor și tensiunilor limită ale piesei (subansamblului) de calculat.

În general, în cazul solicitărilor variabile, dimensionarea se face tot după metoda rezistențelor admisibile, ca și în cazul solicitărilor statice. Calculul la oboseală este, în primul rând, un calcul de verificare. El se poate efectua după alegerea tuturor dimensiunilor piesei și a tehnologiei de fabricație. Verificarea la solicitarea variabilă constă din calculul coeficientului de siguranță al solicitării produse în secțiunile periculoase ale piesei. Pentru ca piesa calculată să reziste la

solicitarea variabilă este necesar să se obțină un coeficient de siguranță al solicitării mai mare decât cel indicat în memoratoarele ingineresti.

Se definește drept coeficient de siguranță la solicitare variabilă raportul dintre rezistența la oboseală a piesei și tensiunea maximă produsă în piesă:

$$c = \frac{\sigma_{R_{piesa}}}{\sigma_{max}} \quad (7.13)$$

Ținând cont de *relația (7.12)* rezistența la oboseală a piesei pentru un ciclu cu coeficientul de asimetrie **R** este dată de relația:

$$\sigma_{R_{piesa}} = \frac{\sigma_R}{\beta_k} \cdot \varepsilon \cdot \gamma \quad (7.14)$$

unde: σ_R - reprezintă rezistența la oboseală determinată pe epruvete normalizate pentru ciclul cu coeficient de asimetrie **R**.

În *tabelul 7.3.* sunt indicate valori ale coeficienților de siguranță la oboseală. Acești coeficienți au valori relativ mici, întrucât calculul presupune o cunoaștere cât mai exactă a factorilor care duc la ruperea prin oboseală.

Tabelul 7.3.

Felul piesei	c
Piese din oțel	1,5-1,7
Piese ușoare din oțel	1,3-1,4
Piese importantă din oțel, cu încercarea la oboseală făcută pe piesă	1,35
Piese din oțel turnat	1,4-2
Piese de fontă	2-3
Piese din aliaje de cupru	2-2,7
Piese din aliaje ușoare	2-2,5

Astfel, coeficientul de siguranță la solicitări variabile devine:

$$c = \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{\beta_k} \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_{max}} \quad (7.15)$$

Relația (7.15) pentru coeficientul de siguranță poate avea o serie de forme particulare dependente de natura solicitării, după cum urmează:

1. *Ciclul alternant simetric* ($\sigma_{max} = \sigma_v$). În acest caz coeficientul de siguranță este:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \sigma_v} \quad (7.16)$$

2. *Solicitarea variabilă cu coeficient de asimetrie oarecare.*

În acest caz se va face apel la una din diagramele rezistențelor la solicitări variabile. În majoritatea metodelor de calcul se admite că trecerea de la ciclul real la ciclul limită se face păstrând același ciclu de asimetrie $R=const.$ (*metoda Soderberg*). Se admite pentru calculul unei piese solicitate variabil diagrama schematizată printr-o linie dreaptă (*Soderberg*) prezentată în figura 7.28.

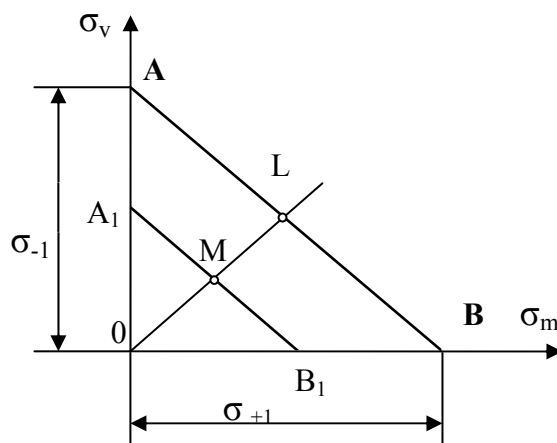


Figura 7.28.

S-a arătat că toate ciclurile aflate înafara dreptei AB sau cuprinse pe această dreaptă conduc la ruperea piesei. Deci dreapta AB arată limita rezistenței

la solicitări variabile pentru un ciclu oarecare. Dacă se împart coordonatele acestei drepte prin coeficientul de siguranță c se va obține dreapta A_1B_1 care limitează diagrama rezistențelor admisibile.

Un punct oarecare M are coordonatele curențe σ_m și σ_v . Atunci coeficientul de siguranță al solicitării poate fi exprimat în felul urmator:

$$c = \frac{\sigma_{R(L)}}{\sigma_{\max(M)}} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{vL}}{\sigma_m + \sigma_v} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} \quad (7.17)$$

Ținând cont de *relația 7.3*, particularizată pentru punctul L , se obține:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_{+l}} + \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_{-l}} = 1$$

sau ținând cont de *relația 7.17*:

$$\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} \frac{\sigma_m}{\sigma_{+l}} + \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} \frac{\sigma_v}{\sigma_{-l}} = 1$$

de unde:

$$c \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{+l}} + \frac{\sigma_v}{\sigma_{-l}} \right) = 1$$

Se obține expresia coeficientului de siguranță corespunzător doar rezistențelor obținută în laborator:

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\sigma_v}{\sigma_{-l}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{+l}}}$$

Pentru piesa reală trebuie introduși cei trei factori și astfel expresia coeficientului de siguranță, pentru schematizarea curbei ciclurilor limită printr-o linie dreaptă, este:

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\beta_k}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_{-l}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{+l}}} \quad (7.18)$$

În cazul schematizării printr-un sfert de elipsă (metoda *Buzdugan*) având ecuația:

$$\left(\frac{\sigma_{mL}}{\sigma_{+l}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_{-l}} \right)^2 = 1$$

se obține în mod asemănător:

$$c_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\beta_k \cdot \sigma_v}{\varepsilon \cdot \gamma \cdot \sigma_{-l}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{+l}}\right)^2}} \quad (7.19)$$

După metoda Serensen pentru *ciclurile alternante* ($-1 < R < 0$) rezultă:

$$c_{\sigma} = \frac{\sigma_{-l}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \sigma_v + \psi \cdot \sigma_m} \quad (7.20)$$

$$\psi = \frac{2 \cdot \sigma_{-l} - \sigma_o}{\sigma_o}$$

iar pentru *ciclurile oscilante* ($0 < R < +1$):

$$c_{\sigma} = \frac{\sigma_{+l}}{\frac{\beta_k}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \sigma_v + \sigma_m} \quad (7.21)$$

Observație:

- Pentru solicitarea de torsiune relațiile sunt identice, dar se schimbă tensiunea σ cu tensiunea τ . În acest caz coeficientul de concentrare a tensiunilor, factorul dimensional și factorul de calitate a suprafeței sunt diferiți de cei pentru starea de tensiuni monoaxială.

3. Solicitarea variabilă compusă de încovoiere cu torsiune

Pentru calculul la oboseală al solicitărilor variabile compuse se pot utiliza coeficienții de siguranță parțiali c_{σ} și c_{τ} , care au în vedere câte o singură solicitare, corespunzătoare tensiunilor normale (încovoierea), respectiv tensiunilor tangențiale (torsiunea). Metoda de calcul se referă în primul rând la stări de solicitare alternant simetrice, când:

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma_v$$

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \tau_v$$

Coeficienții de siguranță parțiali se definesc ținând cont de *relația* (7.13.):

$$c_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1 \text{ piesa}}}{\sigma_{max}}$$

$$c_{\tau} = \frac{\tau_{-1 \text{ piesa}}}{\tau_{max}}$$

respectiv în dependență de rezistența la oboseală a epruvetei normalizate:

$$c_{\sigma} = \frac{\varepsilon\gamma \cdot \sigma_{-1}}{\beta_k \cdot \sigma_v}$$

$$c_{\tau} = \frac{\varepsilon\gamma \cdot \tau_{-1}}{\beta_k \cdot \tau_v}$$

Pe cale experimentală s-a trasat o curbă a rezistențelor la oboseală în coordonate σ_v și τ_v pentru solicitările variabile de încovoiere cu torsiune, produse prin cicluri alternant simetrice care acționează simultan și în fază (figura (7.29)).

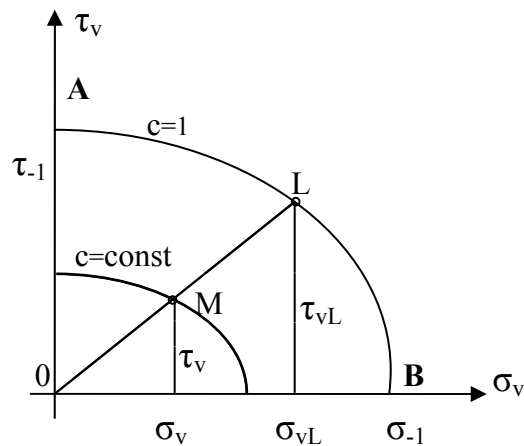


Figura 7.29.

Un punct oarecare M exprimă o anumită stare de solicitare compusă, caracterizată prin amplitudinile ciclurilor σ_v și τ_v ale celor două solicitări. Pe axa absciselor ($\tau_v = 0$) sunt reprezentate numai stări de încovoiere cu rezistența la oboseală σ_{-1} , în schimb pe axa ordonatelor ($\sigma_v = 0$) stări de torsiune cu

rezistența la oboseală τ_{-I} . La acțiunea simultană a celor două solicitări ruperea la oboseală se produce în dreptul unui punct L de coordonate:

$$\begin{aligned}\sigma_{vL} &< \sigma_{-I} \\ \tau_{vL} &< \tau_{-I}\end{aligned}$$

Curba rezistențelor la oboseală (locul geometric al punctelor cu coeficientul de siguranță $c=1$) poate fi aproximată cu o elipsă de ecuație:

$$\left(\frac{\sigma_{vL}}{\sigma_{-I}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{vL}}{\tau_{-I}}\right)^2 = 1$$

O elipsă asemenea cu aceasta reprezintă locul geometric al stărilor compuse de solicitare cu același coeficient de siguranță.

Coeficientul de siguranță al stării de solicitare compusă, reprezentată prin punctul M , se calculează de obicei față de starea limită definită de punctul L , situat pe dreapta OM , care trece prin originea sistemului de referință. Astfel, se admite că probabila creștere a solicitărilor se produce prin menținerea constantă a raportului dintre mărimile caracteristice ale celor două solicitări.

Coeficientul de siguranță al solicitării variabile compuse este:

$$c = \frac{\sigma_{vL}}{\sigma_v} = \frac{\tau_{vL}}{\tau_v}$$

Se transcrie ecuația elipsei, înmulțind și împărțind fracțiile cu aceeași mărime :

$$\left(\frac{\sigma_{vL} \cdot \sigma_v}{\sigma_v \cdot \sigma_{-I}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{vL} \cdot \tau_v}{\tau_v \cdot \tau_{-I}}\right)^2 = 1$$

și rezultă

$$\left(\frac{c}{c_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_\tau}\right)^2 = 1$$

respectiv, relația pentru calculul coeficientului de siguranță la solicitările compuse, (relația lui *Gough* și *Pollard*):

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} \quad (7.22)$$

unde c_σ și c_τ sunt coeficienții de siguranță parțiali ai solicitărilor simple componente determinați prin metodele arătate mai sus. Prin urmare cu ajutorul relației (7.22) calculul la oboseală se reduce la determinarea coeficienților de siguranță parțiali ai solicitărilor simple.

La materialele fragile se notează cu $\phi = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$, raportul limitelor la oboseală la ciclurile alternant simetrice de încovoiere și torsiune, iar coeficientul de siguranță se determină cu relația:

$$\left(\frac{c}{c_\sigma}\right)^2 (\phi - 1) + \frac{c}{c_\sigma} (2 - \phi) + \left(\frac{c}{c_\tau}\right)^2 = 1 \quad (7.23)$$

care pentru $\phi = 2$ devine identică cu relația anterioară.

Observații:

- Coeficienții de siguranță parțiali trebuie să îndeplinească condiția: $c_\sigma \geq c_a$, $c_\tau \geq c_a$.
- Coeficientul de siguranță global trebuie să îndeplinească condiția: $c \geq c_a$.
- Relația (7.23) este valabilă pentru materiale tenace și ar trebui să fie aplicată numai pentru ciclurile alternant simetrice de încovoiere cu torsiune. Convențional ea se poate aplica și pentru solicitările variabile oarecare, însă în aceste cazuri coeficienții de siguranță la solicitări simple se determină cu formulele corespunzătoare.

Aplicații:

I. Un arbore de oțel ($\tau_c = 140\text{MPa}$, $\tau_{-1} = 110\text{MP}$) de secțiune circulară este solicitat la torsiune după un ciclu oscilant (momentul de torsiune variind de la o valoare minimă $M_{tmin} = 10^6 \text{ Nmm}$ până la o valoare maximă $M_{tmax} = 2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$). Se cere să se calculeze diametrul arborelui, dacă se admite un coeficient de siguranță $c=2,5$. Se dau: coeficientul dimensional $\varepsilon_\tau = 0,8$, coeficientul efectiv

de concentrare a tensiunilor în secțiunea periculoasă $\beta_\tau = 1,36$, coeficientul de calitate a suprafeței strunjite fin $\gamma = 0,6$.

Rezolvare:

Tensiunea tangențială în cazul solicitării de torsiune se calculează cu relația

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \quad (7.24)$$

Tensiunile tangențiale sunt proporționale cu momentele de răsucire:

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}} = \frac{M_{tmax}}{M_{tmin}} = \frac{2 \cdot 10^6}{10^6} = 2 \Rightarrow \tau_{min} = 0,5 \cdot \tau_{max}$$

Elementele caracteristice ale ciclului sunt:

- tensiunea medie: $\tau_m = \frac{1}{2}(\tau_{max} + \tau_{min}) = 0,75 \cdot \tau_{max}$

- amplitudinea ciclului: $\tau_v = \frac{1}{2}(\tau_{max} - \tau_{min}) = 0,25 \cdot \tau_{max}$

Coeficientul de siguranță se determină cu relația (7.18):

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{\beta_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_{+1}}}$$

sau înlocuind valorile numerice:

$$2,5 = \frac{1}{\frac{1,36}{0,6 \cdot 0,8} \cdot \frac{0,25 \cdot \tau_{max}}{110} + \frac{0,75 \cdot \tau_{max}}{140}}$$

de unde rezultă:

$$\tau_{max} = 36,6 \text{ MPa}$$

Din relația (7.24) se determină diametrul arborelui:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{tmax}}{0,2 \cdot \tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 36,6}} \cong 65 \text{ mm}$$

2. Se consideră arborele strunjit din oțel carbon sollicitat la o încovoiere oscilantă cu $M_{i \max} = 15 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$ și $M_{i \min} = 75 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$ (figura 7.30.). Cunoscând $\sigma_c = 600 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 360 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 800 \text{ MPa}$ se cere valoarea coeficientului de siguranță.

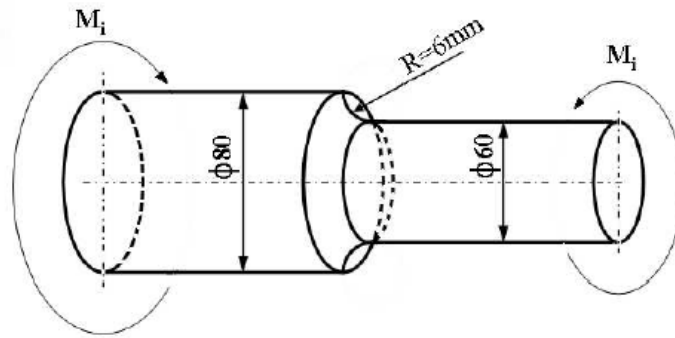


Figura 7.30.

Rezolvare:

Tensiunile din secțiunea periculoasă sunt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i \max}}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^5}{\frac{\pi \cdot 60^3}{32}} = 69,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i \min}}{W_z} = \frac{75 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot 60^3}{32}} = 34,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 52,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 17,4 \text{ MPa}$$

Se aleg următoarele valori pentru coeficienții de corecție:

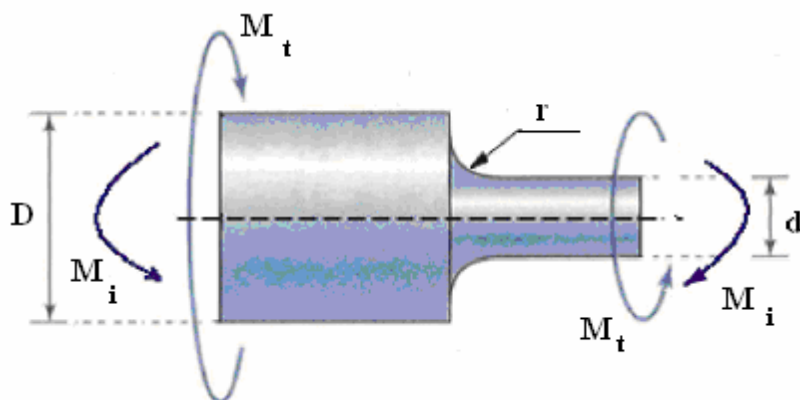
- factorul dimensional: $\varepsilon = 0,77$ (oțel carbon și $d=60 \text{ mm}$);
- factorul de calitate al suprafeței: $\gamma = 0,8$ (pentru $\sigma_r = 800 \text{ MPa}$, strunjit);
- factorul de concentrare: $k_{\sigma o} = 1,6$ (pentru $\sigma_r = 800 \text{ MPa}$ și $r/d=6/60=0,1$), cu $\zeta = 0,6$ pentru $D/d=80/60=1,33$ rezultă:

$$\beta_k = 1 + \xi \cdot (k_{\sigma_0} - 1) = 1 + 0,6(1,6 - 1) = 1,36$$

Coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{1}{\frac{\beta_k \cdot \sigma_v}{\varepsilon \cdot \gamma} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{+1}}} = \frac{1}{\frac{1,36 \cdot 17,4}{0,77 \cdot 0,8} + \frac{52,2}{360}} = 5,15$$

3. Arborele din figura 7.31, confecționat din oțel OL 50 cu următoarele caracteristici $\sigma_c = 300MPa$, $\sigma_{-1} = 200MPa$, $\tau_c = 190MPa$, $\tau_{-1} = 120MPa$, este supus unei solicitări variabile compuse de încovoiere cu torsiune. Momentele variază între valorile: $M_{i \max} = 2 \cdot 10^5 Nmm$ și $M_{i \min} = 15 \cdot 10^4 Nmm$, $M_{t \max} = 10^5 Nmm$ și $M_{t \min} = 0 Nmm$. Arborele are suprafața șlefuită. Se cere să se verifice arborele la oboseală.



$$D = 40mm, d = 25mm, r = 3mm.$$

Figura 7.31.

Rezolvare:

Pentru a determina coeficientul de siguranță global pentru solicitarea de încovoiere cu torsiune este necesar să se calculeze coeficienții de siguranță parțiali c_σ și c_τ . Elementele ciclurilor de încovoiere, respectiv de torsiune sunt:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\ max}}{W_z} = \frac{2 \cdot 10^5}{\frac{\pi \cdot 25^3}{32}} = 130,3\text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i\ min}}{W_z} = 97,7\text{MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 114\text{Pa}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 16,5\text{MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\ max}}{W_p} = \frac{10^5}{\frac{\pi \cdot 25^3}{16}} = 32,59\text{MPa}$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{t\ min}}{W_p} = 0\text{MPa}$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = 16,29\text{Pa}$$

$$\tau_v = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = 16,29\text{MPa}$$

Pentru $d = 25\text{mm}$ factorii dimensionali au valorile: $\varepsilon_\sigma = 0,91$ și $\varepsilon_\tau = 0,84$, iar factorii care țin cont de calitatea suprafeței arborelui sunt egali cu $\gamma_\sigma = \gamma_\tau = 1$. Coeficienții efectivi de concentrare a tensiunilor sunt:

$$\beta_\sigma = 1 + 1(1,4 - 1) = 1,4$$

$$\beta_\tau = 1 + 1(1,25 - 1) = 1,25$$

În cazul schematizării ciclului printr-o dreaptă (Sodeberg) coeficienții de siguranță parțiali au valorile:

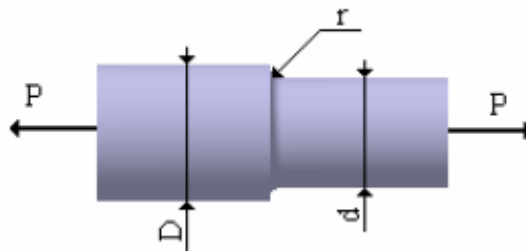
$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\beta_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma_\sigma} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{+1}}} = \frac{1}{\frac{1,4}{0,91 \cdot 1} \cdot \frac{16,5}{200} + \frac{114}{300}} = 1,972$$

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{\beta_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma_\tau} \cdot \frac{\tau_v}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_{+1}}} = \frac{1}{\frac{1,25}{0,84 \cdot 1} \cdot \frac{16,29}{120} + \frac{16,29}{190}} = 3,475$$

Coeficientului de siguranță al solicitărilor variabile compuse se calculează cu relația lui Gough și Pollard (relația 7.22) și se obține:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{1,972 \cdot 3,475}{\sqrt{1,972^2 + 3,475^2}} = 1,71$$

4. Tija din figura 7.32 este confecționată dintr-un oțel aliat cu $\sigma_r = 10^3$ MPa, $\sigma_{-lt} = 250$ MPa, are suprafața șlefuită și este sollicitată la un ciclu alternant simetric. Se cere să se determine forța maximă cu care poate fi sollicitată tija dacă se admite un coeficient de siguranță $c=2$.



$$D = 60\text{mm}, d = 40\text{mm}, r = 8\text{mm}.$$

Figura 7.32.

Rezolvare:

Din figura 7.13, pentru valorile date se obține pentru coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor valoarea $\beta_k = 1,7$. Coeficientul dimensional este $\varepsilon = 1$, iar coeficientul de calitate $\gamma = 1$.

Rezistența admisibilă la oboseală pentru sollicitarea de tracțiune se determină din relația:

$$c_\sigma = \frac{\varepsilon \cdot \gamma \cdot \sigma_{-lt}}{\beta_k \cdot \sigma_a} \Rightarrow \sigma_a = \frac{\varepsilon \cdot \gamma \cdot \sigma_{-lt}}{\beta_k \cdot c} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 250}{1,7 \cdot 2} = 73,53\text{MPa}$$

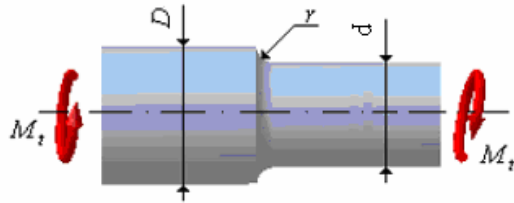
Sețiunea minimă a tijei este:

$$A_{min} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 1256\text{mm}^2$$

iar forța maximă capabilă are valoarea:

$$P_{max} = \sigma_a \cdot A_{min} = 73,53 \cdot 1256 = 92354\text{N}$$

5. Arborele din figura 7.33. confecționat din oțel aliat, cu următoarele caracteristici $\sigma_r = 1200MPa$, $\sigma_{-1} = 500MPa$, transmite o putere $P = 414kW$ la o turație $n = 500rot/min$. Dacă suprafața arborelui este rectificată ce valoare are coeficientul de siguranță pentru solicitarea la torsiune cu un ciclu pulsant? Se consideră $\tau_r = \sigma_r/2$ și $\tau_{-1} = \sigma_{-1}/2$.



$$D = 120mm, d = 80mm, r = 10mm$$

Figura 7.33.

Rezolvare:

Momentul de torsiune care solicită arborele se determină cu relația stabilită în prima parte a cursului de *Rezistența materialelor*:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n}$$

sau înlocuind valorile:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{414}{500} = 7,9kN \cdot m$$

În secțiunea periculoasă tensiunea tangențială maximă este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{7,90 \cdot 10^6}{\frac{\pi \cdot 80^3}{16}} = 78,64MPa$$

Se aleg următoarele valori pentru coeficienții de corecție:

- din figura 7.8 pentru $r/d=0,125$ și $\sigma_r = 1200MPa$ se alege $\beta_k = 1,25$;
- din figura 7.23 se alege $\varepsilon = 0,7$;

- din figura 7.27 se alege $\gamma = 1$.

Coeficientul de siguranță este:

$$c_{\tau} = \frac{1}{\frac{\beta_k \cdot \tau_v}{\varepsilon \cdot \gamma} + \frac{\tau_m}{\tau_{+1}}} = \frac{1}{\frac{1,25 \cdot 78,64}{0,7 \cdot 1} + \frac{78,64}{600}} = 1,72$$

Probleme propuse:

1. Arborele din figura 7.34. este confecționat din oțel aliat ($\sigma_r = 1200MPa, \tau_{-1} = 300MPa$) și lucrează la o turație de $n=650rot/min$. Dacă se admite un coeficient de siguranță $c=2$, se cere să se determine puterea pe care o poate transmite știind că este solicitat la răsucire după un ciclu asimetric.

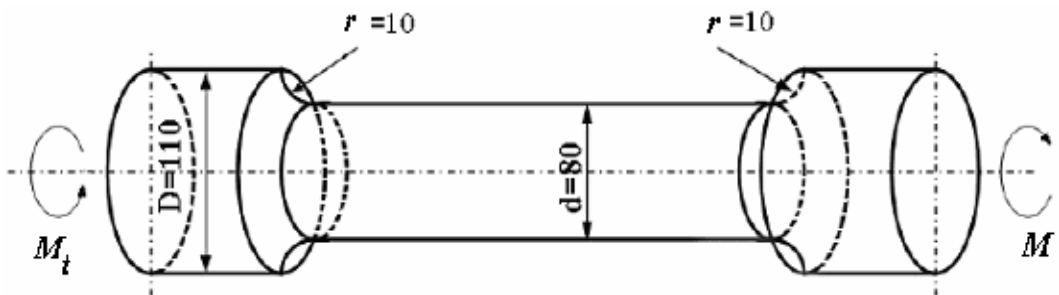


Figura 7.34.

2. Arborele de oțel din figura 7.34. este solicitat la torsiune după un ciclu pulsator, momentul de torsiune având valoare maximă $M_{max} = 6 \cdot 10^5 Nmm$.

Dacă caracteristicile mecanice ale materialului arborelui sunt: $\tau_c = 260MPa, \sigma_r = 420MPa, \tau_{-1} = 190MPa$ se cere să se determine coeficientul de siguranță la rupere.

3. Un arbore din oțel carbon cu $\sigma_r = 800MPa, \sigma_{-1} = 380MPa, \sigma_c = 600MPa$ se rotește cu o turație constantă și este solicitat ca în figura 7.35. Pentru un coeficient de siguranță $c=2$ să se determine valoarea forței P care poate solicita arborele (suprafața arborelui este șlefuită fin).

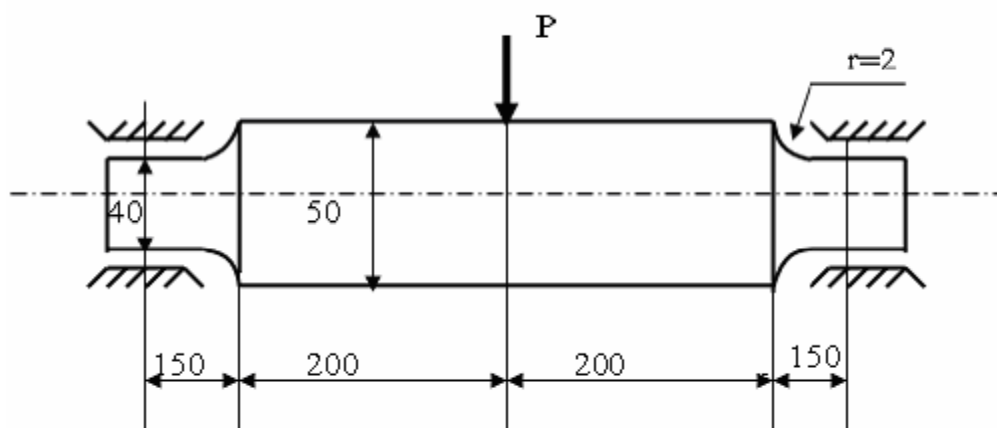


Figura 7.35.

4. Să se verifice la oboseală o bară de secțiune circulară cu diametrul $d = 50\text{mm}$, confecționată din oțel cu $\sigma_r = 600\text{MPa}$, $\sigma_c = 300\text{MPa}$, $\sigma_{-1t} = 200\text{MPa}$, pentru un coeficient de siguranță $c = 2,5$. Bara este sollicitată la întindere, forța variind între $P_{max} = 6 \cdot 10^4\text{N}$ și $P_{min} = 4 \cdot 10^4\text{N}$, printr-un ciclu oscilant. Suprafața barei este laminată.

5. Arborele din figura 7.31 este confecționat din oțel cu următoarele caracteristici: $\sigma_r = 75\text{MPa}$, $\sigma_c = 42\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 32,5\text{MPa}$, $\tau_c = 25\text{MPa}$, $\tau_{-1} = 19\text{MPa}$. Arborele are suprafața rectificată și este sollicitat simultan la încovoiere cu torsiune, cele două momente variind între următoarele limite:

$$M_{i_{max}} = 5 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \text{ și } M_{i_{min}} = 4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}, \text{ respectiv}$$

$$M_{t_{max}} = 2 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \text{ și } M_{t_{min}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

Să se calculeze coeficientul de siguranță la sollicitarea compusă.

6. În dreptul celui mai sollicitat punct al unui organ de mașină tensiunea variază periodic în timp între valorile extreme $\sigma_{max} = 160\text{MPa}$ și $\sigma_{min} = -40\text{MPa}$. Materialul este un oțel cu $\sigma_{+1} = 720\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 320\text{MPa}$ și $\sigma_o = 600\text{MPa}$. Se cere să se afle coeficientul de siguranță cu relațiile rezultate din schematizarea Soderberg, Buzdugan și Seresen.

Bibliografie

1. Anghel A., - *Rezistența materialelor, partea 1-a*, Ed. Tehnică, București, 2001
2. Atanasiu, M. - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1994
3. Babeu T., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Universitatea Tehnică Timișoara, 1991
4. Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, I. - *Probleme alese de Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1985
5. Bașic V. (coord.), - *Rezistența materialelor*, Inst. Politehnic-Iași, 1978
6. Bârsănescu P. D., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Solicități simple, Ed. Gh.Asachi, Iași, 2001
7. Bia C., Ille V., Soare M.V., - *Rezistența mat. și Teoria elasticității*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
8. Buzdugan, Gh. - *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București 1986
9. Buzdugan, Gh. s.a. - *Culegere de probleme din Rezistența Materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1979.
10. Constantinescu, I., Dăneț, G.V. - *Metode noi pentru calcule de rezistență*, Ed.Tehnică, București 1989
11. Constantinescu, I.N., Piciu, R.C., Hadar,A., Gheorghiu, H. - *Rezistența materialelor pentru inginerie mecanică*, Ed. BREN, București 2006
12. Crețu, A. - *Probleme alese din Rezistența materialelor*, Ed. Mediamira, Cluj- Napoca 2001.
13. Crețu, A. - *Tensiuni, Stress, Contraintes*, Ed. UT Cluj-Napoca 1993
14. Curtu I., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Univ. Brașov, 1988

15. Curtu I., Ciofoaia M., Baba M., Cerbu C., Repanovici A., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Probleme IV, Ed. Infomarket, Brașov, 2005
16. Deutsch I., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979
17. Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez Fl., - *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
18. Deutsch, I. s.a. - *Probleme din rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1986
19. Drobotă, V. - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1982
20. Dumitru I., Faur N., - *Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor*, Ed. Politehnică, Timișoara, 1999
21. Dumitru I., Neguț N., - *Elemente de Elasticitate, Plasticitate și Rezistența Materialelor*, vol. I, Ed. Politehnică, Timișoara, 2003
22. Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N. - *Analiza structurilor din materiale izotrope și anizotrope*, Editura Printech, București 1998
23. Goia I., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, ediția a 3-a, Editura Transilvania, Brașov, 2000
24. Horbaniuc D., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, Inst. Politehnic-Iași, 1979
25. Horbaniuc D. (coord.), - *Rezistența mat. Elasticitate. Probleme*, Ed. „Gh. Asachi”, Iași, 1993
26. Ispas, B., Constantinescu E., Alexandrescu, I. - *Rezistența materialelor. Culegere de probleme*, Ed Tehnică, București 1997.
27. Iliescu, N., Jiga, G., Hadar A. - *Teste grilă de Rezistența materialelor*. Ed. PRINTECH, București 2000
28. Marin, C - *Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității*, Editura BIBLIOTHECA, Târgoviște 2006.

29. Mocanu D.R., - *Inercarea materialelor*, vol. 1-3, Ed. Tehnică, București, 1982
30. Mocanu D.R., - *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980
31. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, Ed. CERMI, Iași, 1998
32. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, vol1, Ed. TEHNOPRESS, Iași, 2006
33. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1964
34. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, Ed. Tehnică, București, 1967
35. Posea, N. s.a. - *Rezistența materialelor. Probleme*, Ed. Științifică și Enciclopedică București 1986
36. Radu, Gh., Munteanu, M - *Rezistența materielelor și elemente de Teoria Elasticității*, Vol. 2. Ed. MACARIE, Târgoviște 1994
37. Timoshenko, S.P. - *Teoria stabilității elastice*. Ed. Tehnică, București 1967
38. Tripa M., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
39. Tudose I, Constantinescu D.M., Stoica, M. - *Rezistența materialelor. Aplicații*, Ed. Tehnică, București 1990
40. Voinea R., Voiculescu D., Simion P.F., - *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Ed. Academiei, București, 1989