MOCANU FLORENTINA

ELEMENTE DE PLASTICITATE

1. ÎNCERCAREA MATERIALELOR

1.1. Considerații generale

Caracteristicile mecanice şi elastice ale materialelor au o mare importanță în calculele inginereşti efectuate în domeniul Ingineriei Mecanice. Acestea sunt determinate în urma unor încercări mecanice, efectuate în laborator, pe maşini speciale. Caracteristicile se determină pe *probe* sau *epruvete,* reprezentând eşantioane cu o anumită configurație geometrică, prelevate din semifabricate ale materialului studiat. Forma şi dimensiunile acestora depind de materialul care se studiază şi de tipul solicitării la care sunt încercate. Se pot face de asemenea şi încercări pe produse finite (sârme, cabluri).

Încercările se realizează pe maşini de încercat specializate, care înregistrează, sub forma unor diagrame, variația forței care solicita epruveta până la ruperea acesteia. Mărimea forțelor se citeşte pe dispozitivul de înregistrare cu care este echipată maşina de încercat, iar deformațiile se măsoară cu ajutorul unor dispozitive speciale numite *extensometre*, montate pe epruvetă.

Pe maşinile de încercat se pot efectua încercările de bază la ***tracțiune*** sau ***compresiune***, care sunt standardizate, respectarea standardelor fiind obligatorie. Cu ajutorul unor dispozitive suplimentare pot fi efectuate şi încercările la ***încovoiere***, ***forfecare*** şi ***torsiune***. Se pot realiza de asemenea şi încercări la ***solicitări compuse***.

Observații:

1. *Cele mai utilizate încercări mecanice sunt încercările statice (forța creşte relativ lent pe parcursul unei asemenea încercări, care durează câteva minute), la temperatura mediului.*

2. *În cazul pieselor utilizate în condiții deosebite (temperaturi ridicate sau coborâte, încărcări prin şoc sau variabile, radiații, etc.), sunt necesare încercări ale epruvetelor sau chiar ale pieselor în condiții cât mai apropiate de cele întâlnite în exploatare.*

1.2. Tipuri de epruvete

Forma epruvetei trebuie să fie astfel aleasă, încât tensiunile să fie cât mai uniforme în secțiunea acesteia. Forma şi dimensiunile epruvetei depind de:

- natura materialului;
- tipul semifabricatului din care se prelevează epruveta;
- încercarea la care este supusă aceasta.

Pentru ***încercarea la tracțiune*** se utilizează epruvete tip *"halteră"* care reprezintă o porțiune centrală calibrată (pe această porțiune se trasează repere fine pentru măsurarea deformațiilor) şi două capete cu secțiunea mărită, destinate prinderii în fălcile maşinii. Pentru o mai bună prindere uneori se utilizează epruvete cu capete filetate.

Epruvetele pot fi:

- *cilindrice*, cu secțiune circulară (*figura 1a*);
- *plate*, cu secțiune dreptunghiulară (*figura 1b*), atunci când sunt prelevate din table.

Se utilizează în special două tipuri de epruvete:

- normale la care: $l_0 = 5\ d_0$;

- lungi pentru care: $l_0 = 10\ d_0$.

Uzual se alege $d_0 = 10$ mm.

Încercarea la compresiune se efectuează în special pe materiale cu rupere fragilă. Pentru această încercare se utilizează epruvete scurte, având forma cilindrică sau cubică (*figurile 1c şi 1 d*).

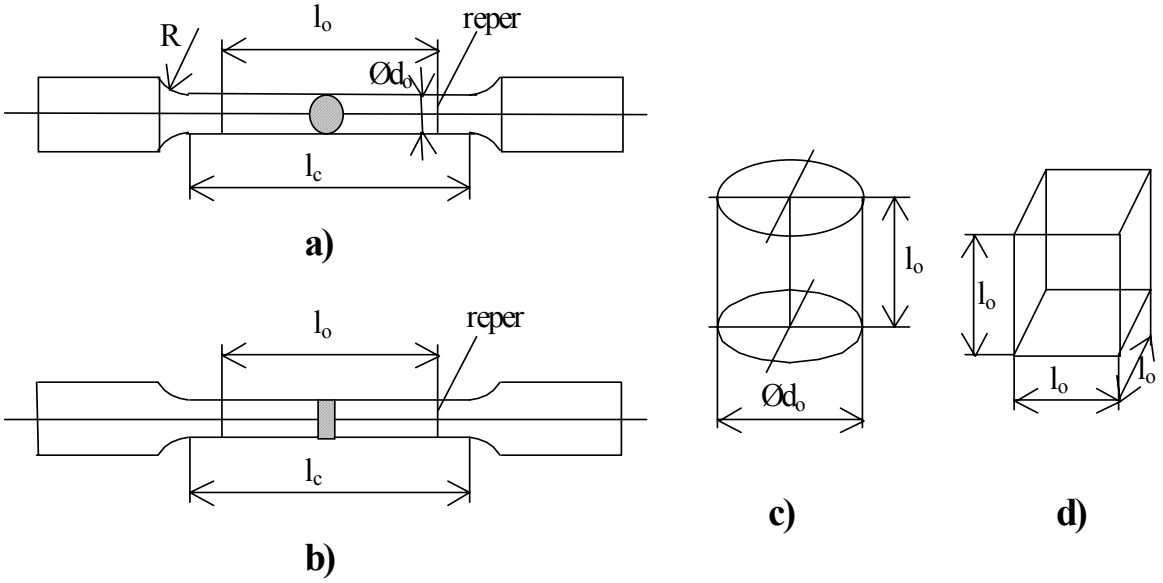


Figura .1

1.3. Încercarea la tracțiune

Încercarea la tracțiune este o încercare de bază standardizată, pentru realizarea căreia epruveta este prinsă în fălcile maşinii şi este încărcată cu o forță care creşte continuu, până la ruperea epruvetei (*figura 2*).

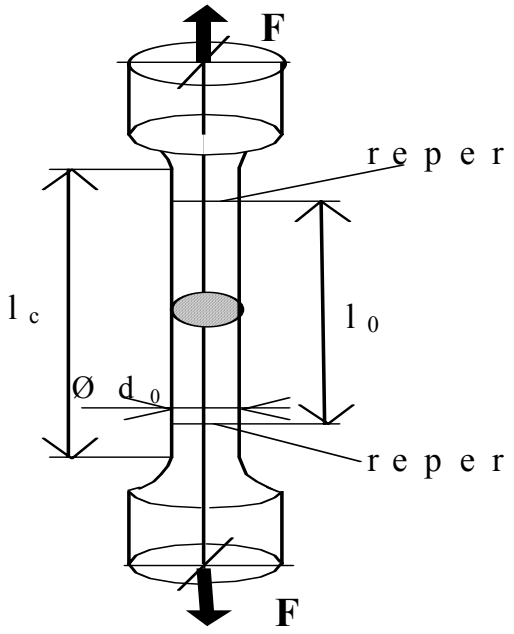


Figura 2

Forțele sunt aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale, deci este o solicitare de *tracțiune centrică*. În timpul încercării una dintre fălci este fixă, iar cealaltă se deplasează (viteza de deplasare putând fi reglabilă).

Pentru materiale metalice ductile se constată apariția unei gâtuiri locale a epruvetei, cu puțin înaintea ruperii acesteia (*figura 3*). Ruperea se va produce în această zonă.

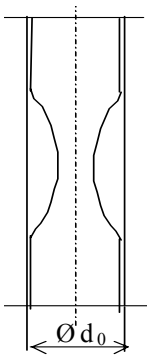


Figura 3

Parametrii care intervin într-o încercare la tracțiune a unei epruvete cu secțiunea circulară sau dreptunghiulară sunt:

- forta de întindere **F**;
- aria **A** a secțiunii transversale;
- lungimea $\mathbf{l_o}$ precizată între cele două repere marcate pe epruvetă;
- modificările acestei lungimi în cursul solicitării $\mathbf{\Delta l}$;
- natura materialului din care este confecționată epruveta.

Încercând până la rupere o epruvetă şi înregistrând grafic variația forței funcție de deplasarea fălcii maşinii (sau mai bine funcție de creşterea lungimii dintre repere măsurată cu un extensometru) se obține *diagrama forță-deplasare.* Aceasta prezintă dezavantajul că pentru un material dat depinde în mare măsură de dimensiunile epruvetei (forțele depind de secțiunea inițiala a epruvetei, iar alungirile de lungimea inițiala dintre repere).

Dacă se admit următoarele ipoteze:

- tensiunea normală este uniform distribuită pe secțiunea epruvetei pe toată durata încercării,

- lungirea specifică este constantă pe distanța cuprinsă între repere pe toată durata încercării,

- *secțiunea transversală nu variază semnificativ pe durata încercării,*

este posibilă obținerea unei diagrame care să nu depindă de dimensiunile epruvetei şi să fie o ***diagramă caracteristică a materialului*** din care este confecționată epruveta. Este vorba de ***diagrama în coordonate σ – ε.*** Pentru trasarea acestei diagrame se păstrează dimensiunile epruvetelor într-un interval rezonabil, indicat în standard.

Valorile tensiunilor normale şi a alungirilor specifice se calculează cu relațiile:

$$\sigma = \frac{F}{A_o}$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{l - l_o}{l_o} \qquad (1)$$

unde: F – forța care solicită epruveta la diferite intervale de timp;

A_o – secțiunea inițială a epruvetei;

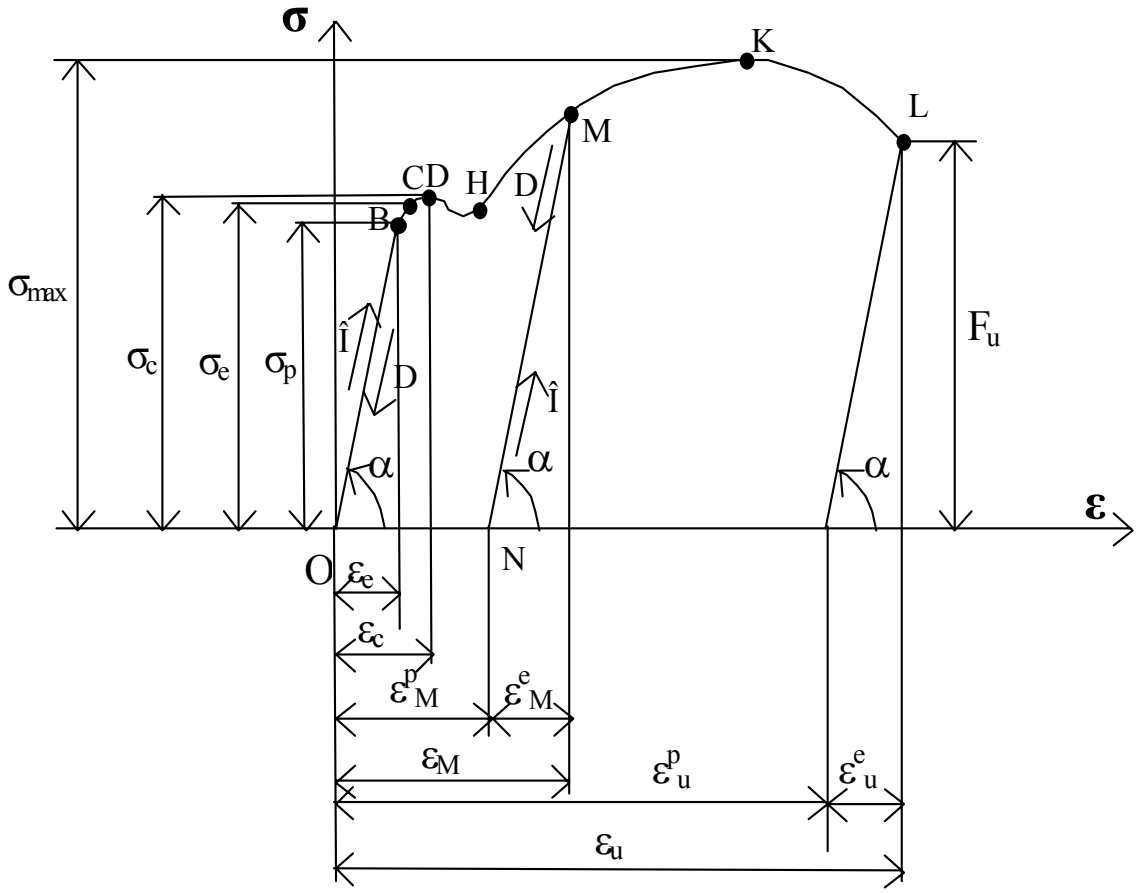
l_o – lungimea inițială între repere;

l – lungimea între repere la diferite intervale de timp.

Cu aceste valori se construieşte ***diagrama caracteristică a materialului***.

1.4. Diagrama caracteristică a unui oțel cu rupere tenace

Pentru un ***oțel cu rupere tenace*** această diagramă este prezentată în *figura 4*. Pe diagramă se disting următoarele regiuni şi puncte caracteristice. Prima parte a curbei, ***OB*****,** este o dreaptă care indică o proporționalitate între tensiuni şi deformații (este ***zona de proporționalitate*** a curbei caracteristice). Ea corespunde domeniului de proporționalitate a materialului, delimitat superior prin ***limita de proporționalitate*** σ_p, reprezentând tensiunea corespunzătoare punctului ***B***.



Î = încărcare, D = descărcare

Figura 4

De la punctul ***B*** la ***C,*** curba se îndepărtează de linia dreaptă şi deci nu mai există proporţionalitate între tensiunile normale şi alungirile specifice produse. Pe această porţiune alungirile încep să crească într-o măsură mai mare. ***O-C*** este ***zona de elasticitate***, în care materialul rămâne elastic (după descărcare epruveta revine la dimensiunile şi forma iniţială). După depăşirea zonei de elasticitate, epruveta rămâne cu deformaţii permanente (plastice) după descărcare. Tensiunea corespunzătoare punctului ***C*** reprezintă ***limita de elasticitate*** a materialului şi este notată cu σ_e.

Zona de curgere reprezintă porţiunea pe care forţa se menţine aproximativ constantă şi creşte mult deformaţia. Punctului ***D*** îi corespunde ***limita de curgere*** σ_c. După atingerea limitei de curgere curba caracteristică are un traseu practic

orizontal ***D-H,*** numit *palier de curgere* (uneori acest palier poate avea un aspect zimțat sau vălurit, în special la solicitarea epruvetei cu viteze mici de încărcare). În zona de curgere apare fenomenul de *ecruisare* (orientări ale cristalelor pe direcția de solicitare şi apoi alungirea acestora). La suprafața epruvetei lustruite apar mici adâncituri, astfel aranjate încât formează o rețea de "linii" ortogonale, orientate la 45° față de direcția forței (liniile Lüders). O serie de materiale, în special cele cu rupere fragilă, nu prezintă o zonă de curgere bine evidențiată.

Dacă se descarcă epruveta după depăşirea limitei de elasticitate (de exemplu în punctul ***M***) se constată că descărcarea se produce după o dreaptă paralelă cu cea dusă prin origine (determinată de punctele ***0 - B***). Dacă epruveta astfel descărcată este solicitată din nou la tracțiune, curba sa caracteristică începe cu dreapta ***NM*** după care parcurge aceeaşi curbă până la rupere. În urma încercării la tracțiune peste limita de elasticitate şi apoi descărcare, se constată că se măreşte limita de elasticitate. Deformația ε_M înregistrată în ***M*** este suma dintre componenta elastică ε^e_M (care dispare la descărcarea epruvetei) şi componenta plastică ε^p_M, care rămâne după descărcare.

După depăşirea limitei de curgere, curba caracteristică prezintă un traseu ascendent ***M-K*** numit ***zonă de consolidare*** în care forța creşte în continuare, ca urmare a ecruisării materialului, pană în dreptul ordonatei punctului ***K*** unde se înregistrează tensiunea maximă σ_{max}, care este definită ca ***rezistență de rupere*** a materialului.

După atingerea valorii maxime a sarcinii apare gâtuirea epruvetei, care se dezvoltă din ce în ce mai mult pană când se produce ruperea. Porțiunea ***K-L*** din curba caracteristică, în care forța scade ca urmare a micşorării secțiunii epruvetei (după apariția zonei de stricționare) reprezintă ***zona de cedare.*** De la ***K*** la ***L*** tensiunea scade în timp ce deformația continuă să crească şi în punctul ***L***. epruveta se rupe. Acestui punct îi corespunde o deformație finală (ultimă) ε_u, a cărei componentă elastică ε^e_u dispare după ruperea epruvetei.

Pe baza curbei caracteristice pot fi calculate cu uşurinţă următoarele ***caracteristicile convenţionale***:

- ***tensiunea şi lungirea specifică de proporţionalitate***:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_o}; \qquad \varepsilon_p = \frac{\delta_p}{l_o} \quad 100\% \tag{2}$$

- ***tensiunea şi lungirea specifică la limita de elasticitate***:

$$\sigma_e = \frac{F_e}{A_o}; \quad \varepsilon_e = \frac{\delta_e}{l_o} \quad 100\% \tag{3}$$

- ***tensiunea şi lungirea specifică de curgere***:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_o}; \quad \varepsilon_c = \frac{\delta_c}{l_o} \quad 100\% \tag{4}$$

- ***tensiunea şi lungirea specifică de rupere***:

$$\sigma_r = \sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A_o}; \qquad \varepsilon_r = \frac{\delta_u^p}{lo} \quad 100\% \tag{5}$$

unde: A_o - secţiunea iniţială a epruvetei cilindrice;

$\delta_u^p = \Delta l$ - lungirea la rupere;

l_o – lungimea iniţială între repere;

l_u – lungimea ultimă (finală) care se măsoară între repere, după alăturarea celor două părţi ale epruvetei rupte (*figura .5*).

$$A_o = \frac{\pi d_o^2}{4} \tag{6}$$

$$\delta_u^p = \Delta l = l_u - l_o \tag{7}$$

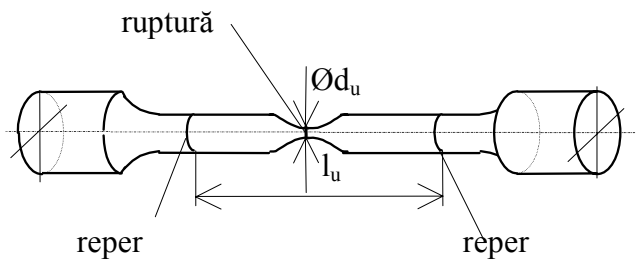


Figura 5

Se mai poate calcula ***coeficientul de gâtuire*** la rupere:

$$Z = \frac{A_o - A_u}{A_o} \quad 100\% \tag{8}$$

unde:

$$A_u = \frac{\pi d_u^2}{4} \tag{9}$$

d_u - diametrul cel mai mic din zona gâtuită (*figura 5*).

Tensiunile σ_e, σ_p, σ_c, σ_r reprezintă caracteristicile mecanice ale materialului.

Pentru oțeluri, lungirile specifice au valori foarte mici, în special în prima porțiune a diagramei: $\varepsilon_p \approx 0{,}002\%$; $\varepsilon_e \approx 0{,}02\%$; $\varepsilon_c \approx 0{,}2\%$. La rupere însă lungirea specifică poate avea valori de $\varepsilon_r \geq 20\%$ pentru oțeluri cu rupere ductilă şi de $\varepsilon_r \geq 7 \div 10\%$ pentru oțeluri cu rupere fragilă (cu un conținut ridicat de carbon). De asemenea cu cât materialul este mai ductil, cu atât ε_r şi Z au valori mai mari. Din categoria materialelor cu rupere ductilă mai fac parte Cu, Al, Pb, etc., iar din categoria materialelor cu rupere fragilă fonta, oțelurile de scule, sticla, unele materiale compozite, etc. La unele materiale cu rupere fragilă ε_r nu depăşeşte **1%** şi practic nu se înregistrează o gâtuire a epruvetei înaintea ruperii.

Curba caracteristică din *figura 4* este *convențională* deoarece la determinarea tensiunii normale forța de întindere se împarte la aria inițială a secțiunii epruvetei ca şi cum aceasta ar rămâne constantă. Din acest motiv curba caracteristică are traseul nefiresc ***K-L*** care arată că ruperea ar avea loc în ***L*** la un efort mai mic decât cel corespunzător punctului ***K***. Măsurând diametrul epruvetei pe toată durata încercării şi calculând tensiunea σ ca raportul dintre forță şi secțiunea la un moment dat (ținând cont de stricțiune) se poate trasa *diagrama reală*, prezentată cu linie întreruptă în *figura 6*. În această diagramă tensiunea este maximă la ruperea epruvetei şi se calculează cu relația:

$$\sigma_{max}^{r} = \frac{F_u}{A_u} \tag{10}$$

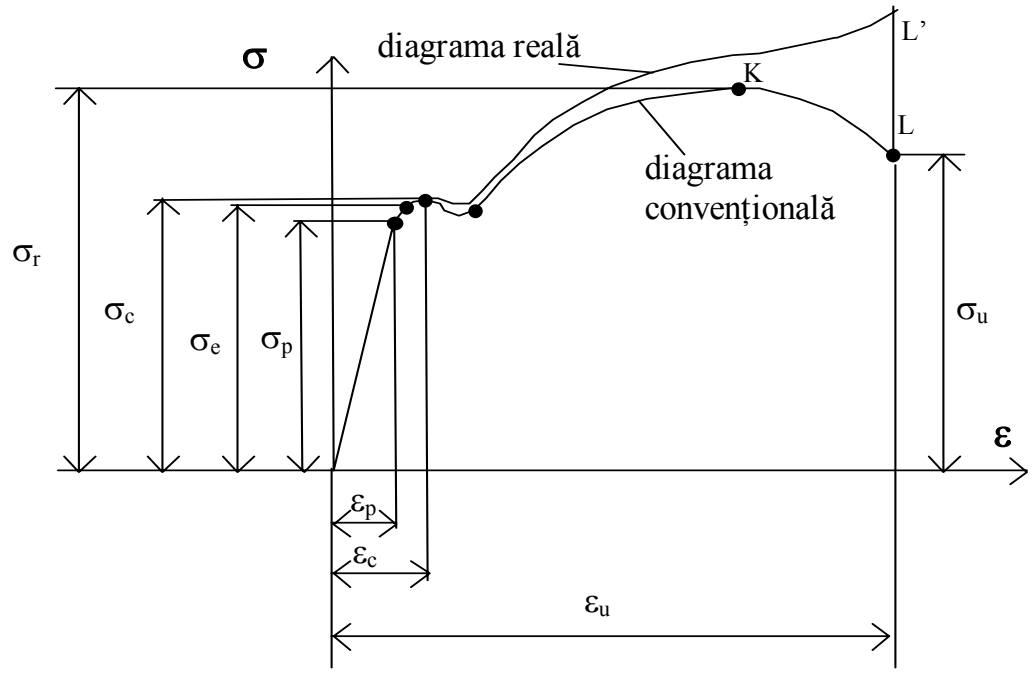


Figura 6

Se observă că cele două diagrame practic coincid în prima porţiune (până la apariţia curgerii). Diferenţe mari apar între ele abia după gâtuirea epruvetei.

În *regiunea de proporţionalitate* ***O-B*** curba caracteristică este liniară. Panta acestei drepte se notează cu ***E*** şi se numeşte ***modul de elasticitate longitudinală*** (modulul Young):

$$tg\alpha = E \qquad (11)$$

Pe această porţiune a curbei caracteristice este valabilă ***legea lui Hooke***, care este de fapt ecuaţia dreptei care trece prin origine:

$$\sigma = E \quad \varepsilon \qquad (12)$$

Această lege a fost enunţată în anul 1678 de către Robert Hooke şi arată că *până la limita de proporţionalitate alungirile specifice sunt proporţionale cu tensiunile.*

Modulul de elasticitate longitudinală mai putea fi numit "rigiditatea materialului" şi este o caracteristică de material. Cu cât *E* are valori mai mari, cu atât deformaţiile epruvetei sunt mai mici, la aceeaşi tensiune. Pentru oţeluri

modulul are valori extrem de ridicate: $E_{OL} \approx 2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa*. Comparativ, aluminiu are un modul de elasticitate mult mai mic: $E_{Al} = 0{,}7 \cdot 10^5$ *MPa.*

Observații:

1. *Se mai obişnuieşte ca, pentru solicitările axiale, tensiunile să se noteze cu* ***R*** *(rezistență), iar alungirile specifice cu* $\boldsymbol{A_t}$ *(alungirea totală după rupere). Vom avea astfel* $\boldsymbol{\sigma_c = R_e}$ *şi* $\boldsymbol{\sigma_r = R_m}$*, etc.*
2. *În aplicațiile inginereşti materialul se foloseşte numai în zona de elasticitate şi din acest motiv nu prezintă interes trasarea curbei reale şi se preferă cea convențională.*
3. *Modulul de elasticitate se determină numai pe epruvete lungi, cu ajutorul extensometrelor.*

1.5. Alte forme de curbe caracteristice

Pentru materiale care nu prezintă în curba caracteristică palierul de curgere se determină în mod *convențional* o ***limită de curgere tehnică*** ca fiind valoarea tensiunii normale căreia îi corespunde după descărcarea epruvetei o lungire specifică remanentă de ***0,2%*** înregistrată la *oțelurile cu rupere ductilă*. Punctul în care o paralelă la dreapta ce trece prin origine intersectează diagrama determină tensiunea $\boldsymbol{\sigma_{0,2}}$ (*figura 7*). Aceasta se consideră convențional ca fiind tensiunea (limita) de curgere $\boldsymbol{\sigma_c = \sigma_{0,2}}$ numită şi ***limită de curgere off set.*** În standard această limită de curgere convențională se notează $\boldsymbol{R_{02}}$**.**

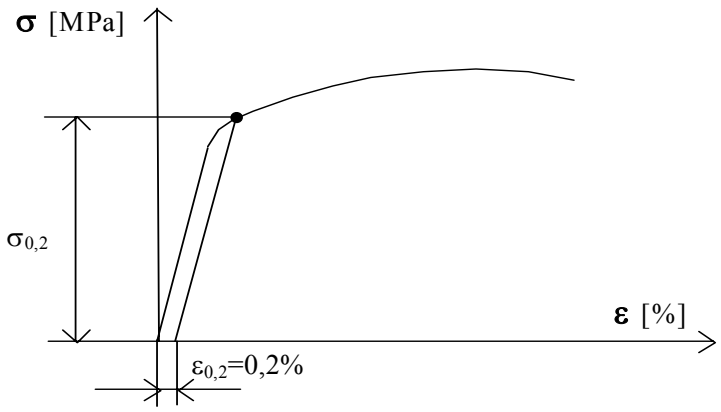


Figura 7

În *figura 8* se prezintă diagrama caracteristică pentru un *oţel cu conţinut ridicat de carbon*, care face parte din categoria materialelor cu *rupere fragilă* care au deformaţii mici la rupere şi nu prezintă gâtuire. Se observă că diagrama este liniară până aproape de rupere şi nu prezintă palier de curgere.

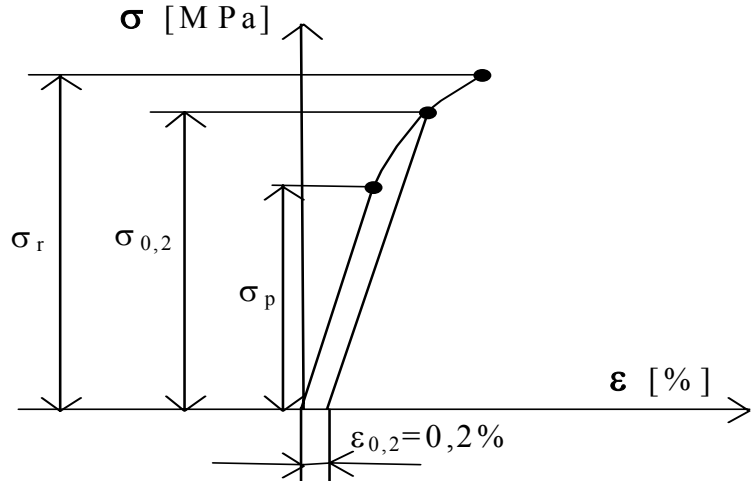


Figura 8

Există şi materiale care *nu ascultă de legea lui Hooke* (de exemplu fonta, alama, cupru, betonul, cauciucul, pielea, fibrele textile, materialele plastice, fibrele artificiale, etc.) la care diagrama caracteristică nu prezintă practic o porţiune liniară. În acest caz, modulul de elasticitate *E* variază pe toată durata încercării. Se poate defini convenţional un modul de elasticitate faţă de o coardă (dreapta ***OD*** în *figura 9*), numit *modul de elasticitate secant*.

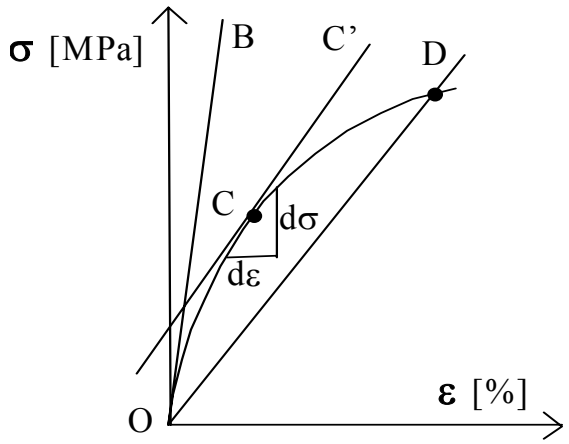


Figura 9

Mai poate fi definit un *modul de elasticitate inițial*, care reprezintă panta tangentei prin origine (dreapta **OB** în *figura 9*) sau un *modul tangent* pentru un punct oarecare al diagramei (panta tangentei **CC'** în *figura 9*):

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{13}$$

Pentru asemenea materiale se poate căuta o expresie analitică a curbei de forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_{med}} \tag{14}$$

unde: *n* - un coeficient (n > 1 pentru curbe cu concavitatea în jos şi n < 1 la curbe cu concavitatea în sus);

E_{med} - o valoare medie a modulului de elasticitate.

Relația (14) ar putea înlocui legea lui Hooke, dar aceasta complică mult calculele de rezistență. Pentru reducerea volumului de calcul curba poate fi înlocuită cu o dreaptă convențională.

Încercarea la compresiune se efectuează pe epruvete scurte ($l_0 \leq 5 \cdot d_0$) pentru a evita aparitia *fenomenului de flambaj*. Numai epruvetele executate din *materiale fragile* pot fi rupte la compresiune. Cele executate *din materiale cu rupere tenace* pot suporta deformații mari, fără să se ajungă la distrugerea acestora. Epruvetele executate din materiale tenace se deformează în formă de butoi în cursul încercărilor, datorită frecărilor care apar între capetele epruvetei şi platanele între care are loc compresiune.

În *figura 10* se prezintă diagrama caracteristică a unei epruvete din fontă.

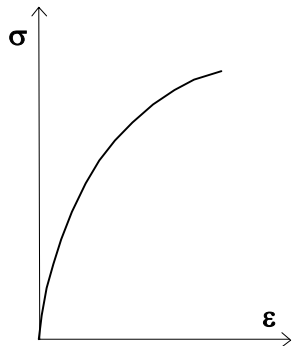


Figura 10

Pentru multe materiale cu *rupere ductilă* ***modulul de elasticitate longitudinală*** şi ***limita de curgere*** sunt aproximativ aceleaşi pentru tracţiune şi compresiune (*figura 11*).

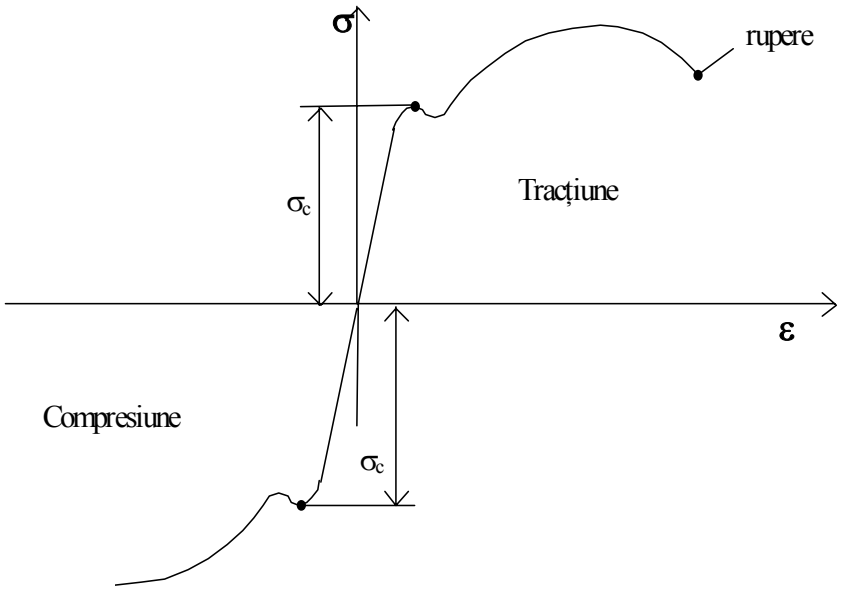


Figura 11

În cazul materialelor cu *rupere fragilă*, diagrama la tracţiune diferă mult de diagrama de compresiune (materialele au modulul de elasticitate la tracţiune diferit de cel obţinut la compresiune). Tensiunea de rupere la tracţiune este mult mai mică decât cea de rupere la compresiune, de exemplu $\sigma_{rt} \approx 0{,}1\sigma_{rc}$ pentru beton (*figura 12*).

În *figurile 11* şi *12* diagrama la compresiune s-a prezentat în cadranul III, deoarece σ şi ε sunt considerate negative pentru această solicitare.

Încercarea la torsiune nu este standardizată şi este mai puţin utilizată datorită dezavantajelor pe care la prezintă:

- starea de tensiuni nu mai este uniformă în secţiunea epruvetei (tensiunile au o distribuţie liniară). O distribuţie mai uniformă a tensiunilor se poate obţine prin utilizarea unor epruvete tubulare, a căror execuţie este însă dificilă şi a căror preţ este ridicat;

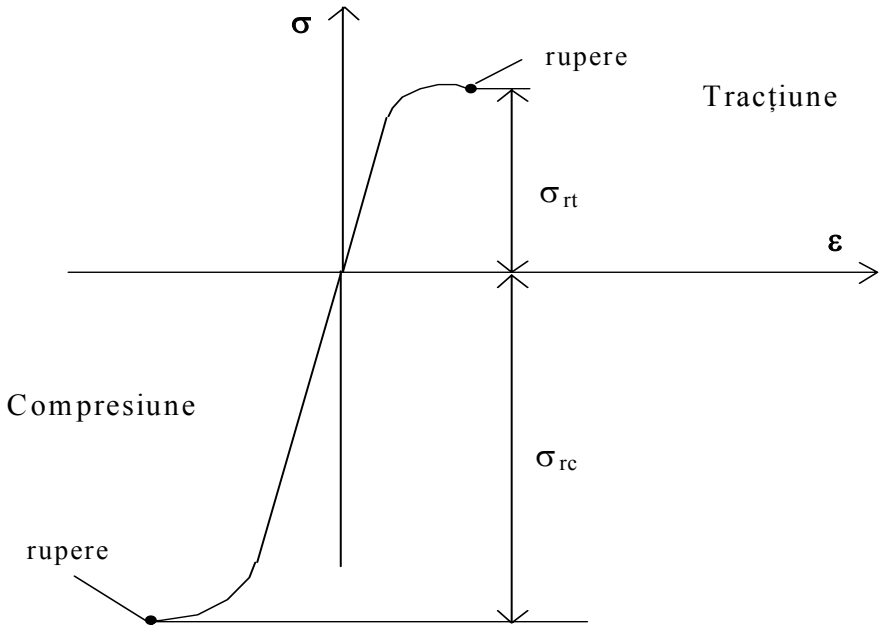


Figura 12

- pentru realizarea încercării sunt necesare maşini şi respectiv dispozitive speciale care nu fac parte din dotarea standard a maşinilor universale de încercat.

Încercarea la torsiune prezintă şi o serie de avantaje dintre care se menționează:

- starea particulară de tensiune care apare în epruvetă;
- prinderea mai uşoară a epruvetei;
- evitarea lunecărilor în bacuri,
- lipsa fenomenului de gâtuire înainte de rupere.

În timpul încercării se înregistrează diagrama M_t **-** φ. (moment de torsiune - unghi de rotire a secțiunii). Se trasează apoi prin calcul ***diagrama caracteristică convențională*** τ **-** γ, Se obține o **curbă** $\tau = f(\gamma)$ asemănătoare cu cea de la tracțiune.

Pe această curbă caracteristică se pot defini ***caracteristicile mecanice la torsiune:***

- *limita de proporționalitate* τ_p,
- *limita de elasticitate* τ_e,
- *limita de curgere* τ_c,

- rezistența de rupere τ_r.

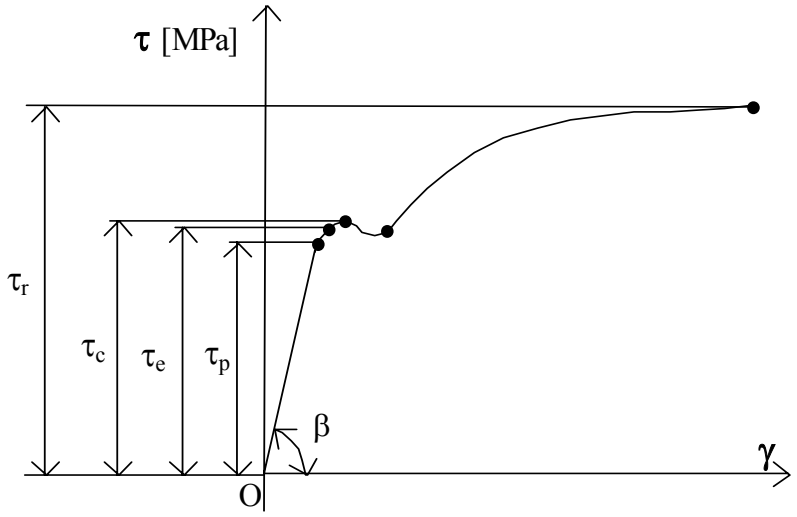


Figura 13

Panta dreptei prin origine reprezintă *modulul de elasticitate transversală (Coulomb)*, *G:*

$$tg\beta = G \tag{15}$$

Cele două module de elasticitate E, G şi coeficientul lui Poisson ν caracterizează comportarea elastică a unui material şi se numesc caracteristici elastice.

Observații:

Un material care are aceleaşi caracteristici elastice în orice direcție se numeşte ***izotrop****.*

La materialele ***anizotrope****, valoarea caracteristicilor elastice depinde de direcția de prelevare a epruvetei. Un material complet anizotrop prezintă 21 caracteristici elastice independente.*

Materialele ***ortotrope*** *prezintă trei plane de simetrie ortogonale pentru caracteristicile elastice şi au 9 caracteristici elastice independente.*

În Teoria Elasticității se arată că pentru un material *izotrop*, între cele trei caracteristici elastice există următoarea relația (prin urmare materialul izotrop prezintă numai două caracteristici elastice independente):

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{16}$$

Pentru torsiune şi forfecare ecuația dreptei care trece prin origine are următoarea formă şi este cunoscută ca fiind *legea lui Hooke*:

$$\tau = G \quad \gamma \tag{17}$$

1.6 Factori care influențează caracteristicile mecanice şi elastice ale materialelor

Caracteristicile mecanice şi elastice pentru un material dat, pot fi modificate, în mod *real* sau *aparent,* de către anumiți factori.

În mod *aparent*, aceste caracteristici pot fi modificate de:

- viteza de încărcare a epruvetei;
- dimensiunile epruvetei;
- tehnologia de elaborare a materialului şi de confecționarea epruvetei.

Modificarea *reală* a caracteristicilor mecanice şi elastice este produsă de:

- temperatură;
- timp;
- ecruisare;
- tratamente termice.

Influența vitezei de încărcare

Pentru determinarea caracteristicilor mecanice uzuale se recomandă viteze de încărcare relativ mici (*încărcare statică*). Cu cât sarcina se aplică mai încet cu atât tensiunea este mai mică, iar alungirea creşte şi invers. La multe materiale, caracteristicile mecanice cresc la viteze mari de încărcare. În acest caz deformațiile plastice nu se pot dezvolta datorită timpului scurt în care se face încărcarea şi rezultă deformații specifice la rupere mai mici şi rezistențe de

rupere mai ridicate. La unele materiale cu rupere foarte fragilă (de exemplu materialele ceramice) se constată o scădere a caracteristicilor mecanice cu creşterea vitezei de încărcare. De asemenea se poate întâmpla ca un material care prezintă o rupere tenace la solicitări statice să poate deveni fragil la viteze mari de încărcare.

Influența dimensiunilor epruvetei

Dimensiunile epruvetei influențează într-o anumită măsură tensiunea de rupere la tracțiune, astfel că pentru acelaşi material se obțin valori mai mici pentru σ_r la încercarea unor epruvete de dimensiuni mai mari. Acest fenomen poate fi explicat prin faptul că ruperea materialului este amorsată de către microdefecte (defecțiuni locale ale rețelei cristaline, incluziuni, microsufluri, etc.) ale materialului, de la care pornesc microfisuri şi apoi fisuri care conduc la secționarea epruvetei. Cu creşterea volumului de material creşte şi numărul microdefectelor şi deci probabilitatea apariției unor microdefecte importante care vor amorsa microfisurile la tensiuni mai mici.

Influența dimensiunilor poate fi evaluată prin coeficientul de scară:

$$K_d = \frac{\sigma_{r,d}}{\sigma_{r,10}} \qquad (18)$$

unde: $\sigma_{r,10}$ - tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete standard, cu diametrul de 10 mm;

$\sigma_{r,d}$ - tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete proporționale cu cele utilizate la determinarea tensiunii $\sigma_{r,10}$, având diametrul părții calibrate d $\neq$ 10 mm.

Observații:

1. *Dimensiunile epruvetelor au o influență relativ mică la oțeluri.*
2. *Tensiunea la rupere determinată pe sârme foarte subțiri are valori mult mai mari decât cea determinată pe epruvete normale, confecționate din acelaşi material.*

3. *Dimensiunea epruvetei are o influenţă foarte mare la fonte, care sunt materiale cu mai multe microdefecte.*

Influenţa tehnologiei de elaborare a materialului şi de confecţionarea epruvetei

La elaborarea unui material, compoziţia chimică şi parametrii tehnologici prezintă anumite variaţii, care trebuie să fie cât mai mici posibil, pentru a putea garanta caracteristicile mecanice şi elastice ale materialului. Totuşi, anumite variaţii sunt inevitabile şi pot conduce la o dispersia mai mică (la materiale omogene) sau la o dispersie mai mare (la materiale mai puţin omogene şi în special la cele neomogene) a caracteristicilor elastice şi mecanice.

Tehnologia de elaborare a materialului poate influenţa semnificativ caracteristicile elastice şi mecanice ale materialului. Astfel, acelaşi oţel are tensiunea la rupere mai ridicată dacă este forjat, mai scăzută dacă este laminat şi mai scăzută dacă este turnat (oţelul turnat este mai puţin omogen şi are defecte mai numeroase şi mai mari), iar polimerii au tensiunea de rupere şi densitatea mai mare dacă sunt turnaţi sub presiune decât dacă sunt turnaţi liber.

În cazul materialelor anizotrope (materiale metalice ecruisate, unii polimeri, lemnul, betonul armat, materialele compozite armate cu fibre lungi, etc.) caracteristicile elastice şi mecanice depind de direcţia de prelevare a epruvetei.

Influenţa temperaturii

Temperatura la care se înregistrează curbele caracteristice corespunde unor valori curente din timpul exploatării şi este de circa $\boldsymbol{20^{o}C.}$ Experienţa arată că variaţia de temperatură influenţează în mare măsură caracteristicile elastice şi mecanice ale materialelor. Cu toate că în aplicaţiile inginereşti există maşini şi structuri care lucrează la temperaturi mult diferite de cea a mediului (temperaturi extrem de ridicate sau coborâte) analiza comportării materialelor funcţie de temperatură este complexă şi dificilă.

La oțelurile carbon rezistența la rupere prezintă un maxim, iar alungirea la rupere un minim în jurul temperaturii de 300° C. La temperaturi mai ridicate se înregistrează scăderi importante ale rezistenței şi alungiri mai mari. Modulul de elasticitate scade continuu cu temperatura (deformarea plastică la cald a materialelor metalice se bazează tocmai pe scăderea tensiunii de curgere şi a modulului de elasticitate la temperaturi ridicate). În schimb la temperaturi scăzute tensiunile de rupere ale oțelurilor cresc deoarece materialele trec din starea tenace în starea fragilă, în care caz deformațiile lor plastice sunt foarte mici. În această situație materialele devin sensibile la încărcări dinamice. Unele materiale metalice devin fragile la numai -20° C.

Influența timpului

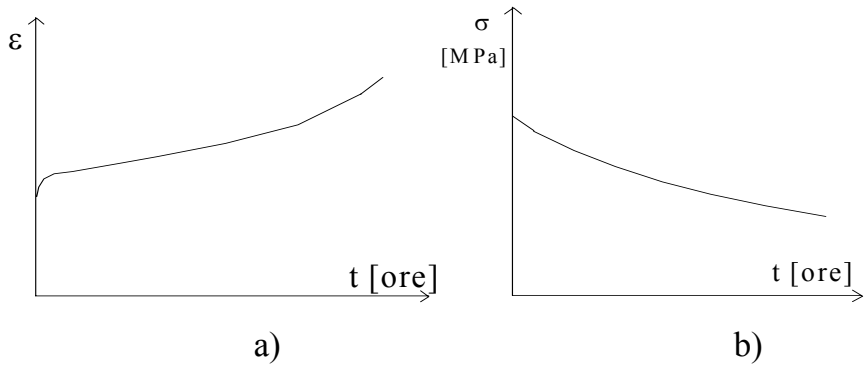
În practică viteza de încărcare şi durata de acțiune a sarcinilor exterioare variază în limite destul de largi, astfel că există sarcini care variază foarte încet şi sarcini care variază foarte repede.

În anumite condiții unele materiale au o comportare *vâsco-elastică*, adică îşi modifică starea de deformații şi/sau tensiunii atunci când o sarcină acționează timp îndelungat. La oțeluri comportarea vâsco-elastică se manifestă pregnant la temperaturi de peste 300°C, pe când la polimeri ea se manifestă chiar şi la temperatura mediului. Tensiunile sunt funcții nu numai de alungirile specifice, dar şi de timp. Un asemenea comportament se numeşte *neliniar vâsco-elastic*.

Sub acțiunea unor sarcini de durată, chiar la valori constante ale tensiunilor, apar deformații de natură vâscos-plastice numite *deformații de curgere lentă* sau *fluaj*. La încercările la *fluaj* se mențin constante temperatura şi tensiunea σ din piesă şi se înregistrează creşterea lungirii specifice ε functie de timp, $\varepsilon = f(t)$. Materialul prezintă o curgere lentă.

Fenomenul invers, de reducere în timp a tensiunilor la deformații constante este numit *relaxare*. Pentru acest gen de încercări se mențin constante temperatura şi alungirea specifică ε şi se înregistrează variația tensiunii în timp $\sigma = f(t)$.

În *figura 14* se prezintă curbele tipice pentru încercările la fluaj şi relaxare, trasate păstrând anumiți parametri constanți (temperatură şi tensiune pentru fluaj, temperatură şi lungire specifică pentru relaxare).



a) b)

Figura 14

În cazul curbei de deformație sub sarcină constantă (*figura 14a*) se constată că alungirile cresc cu timpul, astfel că fluajul conduce la modificarea în timp a dimensiunilor paletelor de turbină, a pereților conductelor instalațiilor termoenergetice, ş.a. Pentru curba de relaxare (*figura 14b*) se constată că tensiunile din piesă scad cu timpul. Acest fenomen se produce în special la instalațiile termice care lucrează timp îndelungat sub sarcină (de exemplu relaxarea tensiunilor contribuie la slăbirea unor îmbinări cu şuruburi care lucrează la temperaturi ridicate, etc.).

Observație:

Calculul de rezistență al pieselor din materiale metalice care lucrează la temperaturi ridicate se face ținând cont de fenomenele de fluaj şi relaxare din ele. În cazul polimerilor acest calcul se face chiar şi pentru piese care lucrează la temperatura mediului.

Influența tratamentelor termice şi a ecruisării

Tratamentele termice şi ecruisarea influențează în ***mod real*** caracteristicile mecanice şi elastice ale materialului. Se ştie ca tratamentele termice sunt utilizate

în mod curent pentru a modifica în proporții destul de importante caracteristicile mecanice. Astfel:

- călirea creşte duritatea, rezistența la rupere, fragilitatea şi scade alungirea la rupere;
- revenirea păstrează duritatea obținută prin călire şi micsoreaza fragilitatea;
- recoacerea de înmuiere anulează efectul călirii.

Fenomenul de ridicare a limitei de proporționalitate prin tratamente mecanice prealabile poartă numele de *ecruisaj* şi este utilizat în metalurgie la obținerea oțelurilor dure. Ecruisarea conduce la creşterea semnificativă a limitei de elasticitate la descărcarea şi reîncărcarea epruvetelor, la întindere, în schimb o micşorează pe cea de compresiune. Deformările plastice (în special cele la rece) produc ecruisări. Prin laminare şi trefilare se obțin semifabricate ecruisate (la suprafață sau chiar în toată masa). Pentru a ridica limita de elasticitate la unele materiale metalice ca alama, arama şi aliajele de aluminiu, se aplică în mod special operația de trefilare. Un material cu rupere tenace poate deveni fragil în urma ecruisării sale. De asemenea în urma ecruisării oțelul devine anizotrop.

2. METODE DE CALCUL ÎN INGINERIA MECANICA

2.1 Considerații generale

Scopul calculelor de rezistență este asigurarea siguranței în exploatare a maşinilor, utilajelor şi structurilor, chiar şi în condițiile cele mai defavorabile. Pentru asigurarea acestei siguranțe proiectantul trebuie să-şi ia precauțiile ce se impun. În calculele din domeniul ingineriei mecanice se disting următoarele trei tipuri de probleme sau calcule:

1. Probleme de verificare

Calculul de verificare se efectuează pentru o piesă dată, la care se cunosc forma, dimensiunile şi materialul din care este confecționată, în scopul

determinării tensiunilor şi deformaţiilor produse de acţiunea sarcinilor şi comparării acestora cu cele admisibile. Practic scopul acestui calcul este de a preciza efectul încărcării sarcinilor asupra corpului studiat, trăgând concluzii asupra posibilităţii servirii scopului în bune condiţii şi în deplină siguranţă.

2. Probleme de dimensionare

Calculul de dimensionare se efectuează pentru determinarea formei şi dimensiunilor unei piese, prin asigurarea rezistenţei sale şi a unor deformaţii admisibile, în funcţie de sarcinile exterioare şi de material.

3. Probleme de stabilire a capacităţii de încărcare

Fiind cunoscută piesa cu elementele sale bine precizate şi cunoscând materialul din care este confecţionată (materialul este definit prin caracteristicile sale mecanice), se stabilesc prin calcul încărcările maxime ce pot solicita corpul fără a fi depăşite condiţiile din starea limită considerată.

2.2. Metode de calcul în ingineria mecanică

Metodele de calcul din domeniul ingineriei mecanice să stabilească cum se poate ţine seama de caracterul aleatoriu al mărimilor cu care se operează în calculele atunci când se exprimă siguranţa şi prin ce mărime cuantificabilă se poate exprima această siguranţă.

Metoda de calcul *cuprinde ansamblul de reguli prin care se ţine seama de variaţia aleatoare a parametrilor care determină siguranţa unui element sau a unei structuri şi prin care se stabileşte mărimea pe care trebuie s-o determine cantitativ.*

2.2.1. Metoda tensiunilor admisibile

Este cea mai veche metodă de calcul în domeniul ingineriei mecanice, care consideră drept criteriu de rezistenţă a corpului tensiunile care apar în acesta,

care nu trebuie să depăşească o anumită limită, considerată periculoasă. Altfel spus, tensiunea maximă care poate fi admisă în exploatare, numită *tensiune admisibilă*, trebuie să fie de *c* ori mai mică decât tensiunea periculoasă. Prin urmare:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{peric}}{c}$$

respectiv (20)

$$\tau_a = \frac{\tau_{peric}}{c}$$

unde: ***c*** - coeficient de siguranţă (un număr supraunitar).

Tensiune periculoasă este considerată ca fiind tensiunea de rupere (σ_r sau τ_r) în cazul materialelor fragile, care au o diagramă caracteristică liniară până aproape de rupere şi fără palier de curgere (*figura 15a*), dar şi pentru materiale tenace, atunci când apariţia unor deformaţii plastice locale nu afectează buna funcţionare a ansamblului (de exemplu structurile mari confecţionate din oţeluri tenace). Pentru structurile din materiale tenace la care apariţia deformaţiilor plastice împiedică buna funcţionare a ansamblului şi poate conduce chiar la distrugerea acestuia drept tensiune periculoasă este aleasă cea de curgere (σ_c sau τ_c) aşa cum este indicat în *figura 15b*.

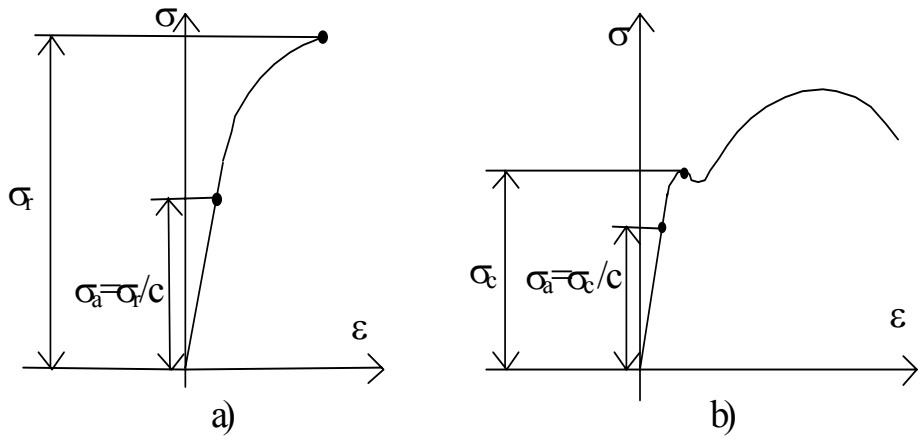


Figura 15

Tensiunea admisibilă este valoarea convenţională aleasă în calcul pentru tensiunea maximă care se poate produce în corp, în condiţii date de material şi solicitare.

Din motive de siguranţă tensiunile maxime care apar în piese nu pot depăşi tensiunile admisibile:

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_a ; \qquad \tau_{max} \leqslant \tau_a \tag{21}$$

Relaţiile de mai sus stau la baza calculului prin *metoda tensiunilor admisibile*. Calculul este condus astfel:

- din analiza diagramelor de eforturi şi a repartiţiei tensiunilor pe secţiunea transversală se stabileşte secţiunea în care apare tensiunea maximă (secţiunea periculoasă);

- valoarea găsită pentru tensiunea cea mai mare se compară cu mărimea tensiunii admisibile. Funcţie de natura problemei această operaţie de comparare capătă unul din următoarele două aspecte: în problemele de dimensionare se impune ca tensiunea maximă să fie egală cu tensiunea admisibilă, iar în problemele de verificare se impune condiţia ca tensiunea maximă să fie mai mică sau cel mult egală cu tensiunea admisibilă.

Coeficientul de siguranţă şi tensiunea admisibilă se aleg către inginerul proiectant, având în vedere un număr mare de factori şi fenomene, cum ar fi:

Natura materialului

Se ţine seama:

- dacă materialul este ductil sau fragil,

-de gradul de dispersie al caracteristicilor mecanice şi elastice,

- de omogenitatea acestuia.

Astfel, în cazul materialelor tenace coeficientul de siguranţa este mai mic decât cel corespunzător materialelor fragile, deoarece acestea din urma sunt mai sensibile la diferite deteriorări accidentale şi la defecte tehnologice. Cu cât materialul este mai neomogen cu atât se vor lua tensiuni admisibile mai mici, respectiv coeficienţi de siguranţa mai mari (de exemplu pentru fontă, beton,

piatră la care gradul de neomogenitate este mai mare se aleg coeficienți de siguranță mai mari decât la oțel).

Mediul în care lucrează piesa sau structura

Sunt situații în care piesele lucrează la temperaturi ridicate (cazane, turbine cu aburi, etc.) sau coborâte, iar în alte cazuri ele lucrează în prezența agenților corozivi care produc o oxidare a piesei. Alte piese sunt supuse unei uzuri mari. Toți aceşti factori produc în timp o slăbire a pieselor, fapt care impune alegerea unor valori inferioare ale tensiunii admisibile, respectiv a unor coeficienți de siguranță măriți.

Precizia modelului de calcul adoptat (cât de mult se poate îndepărta de realitate)

În cazul în care ipotezele de calcul sunt incerte atunci pentru tensiunea admisibilă se vor alege limitele inferioare din cele recomandate de literatura de specialitate.

Tipul solicitării (solicitări simple, compuse) şi modul de acțiune al sarcinilor (static, dinamic, alternant)

Dacă o piesă este supusă numai la solicitări statice simple atunci tensiunea admisibilă se alege ca o valoare corespunzătoare acestei solicitări. Pentru solicitările variabile în timp valoarea aleasă este mai mică pentru a se ține seama de pericolul ruperii prin oboseală. Spre exemplu pentru piesele din oțel cu rupere ductilă supuse la solicitări statice simple, la temperatura mediului, coeficientul de siguranță va fi $c = 1,2 \div 1,6$, iar pentru piesele din materiale cu rupere fragilă, solicitate în acelaşi condiții, se poate alege $c = 2,5 \div 3$.

Alți factori de care se ține seama în alegerea coeficientului de siguranță şi tensiunii admisibile sunt:

- precizia evaluării sarcinilor şi a posibilităților de apariție, pe durata exploatării, a unor suprasarcini;

- eventualele tratamente termice, termochimice, mecanice sau acoperiri metalice ale piesei;

- micşorarea secţiunilor nominale ca urmare a toleranţelor de execuţie negative, uzurii, coroziunii;

- importanţa piesei, durata ei de funcţionare şi ce s-ar întâmpla dacă aceasta s-ar distruge (amploarea pagubelor materiale, pierderi de vieţi omeneşti, poluare).

Prin urmare coeficientul de siguranţă trebuie să fie acoperitor pentru tot ceea ce proiectantul nu cunoaşte cu precizie. Deşi există normative privind alegerea coeficienţilor de siguranţă, totuşi adoptarea acestora necesită experienţă în domeniu şi conţine o anumită doză de subiectivism.

Metoda coeficienţilor de siguranţă parţiali îşi propune să limiteze subiectivismul în alegerea coeficienţilor de siguranţă. Această metodă exprimă coeficientul de siguranţă ca produs al unor coeficienţi de siguranţă parţiali, fiecare dintre aceştia reflectând influenţa unui factor sau grup de factori. În general se recomandă utilizarea a 2÷10 coeficienţi parţiali.

În cazul utilizării a trei coeficienţi de siguranţă parţiali se poate scrie:

$$c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \qquad (22)$$

unde:

c_1 – coeficientul de siguranţa care ţine cont de evaluările sarcinilor şi tensiunilor;

c_2 - coeficientul de siguranţa care ţine cont de neomogenitatea materialului şi de posibilitatea apariţie unor defecte la prelucrare;

c_3 - coeficientul de siguranţa care ţine cont de importanţa piesei şi de condiţiile de exploatare.

Se recomandă:

- pentru o precizie ridicată c_1=1,2÷1,5, pentru una mai scăzută c_1 = 2÷3;

- pentru materiale ductile c_2 = 1,2÷1,8, pentru materiale fragile c_2 = 3÷4, iar pentru materiale foarte fragile c_2 = 4÷6;

- c_3 = 1÷1,5.

2.2.2. Metoda sarcinii limită (de rupere)

Metoda tensiunilor admisibile consideră drept stare limită atingerea tensiunii periculoase (σ_c sau σ_r) într-un singur punct. Sunt situații când atingerea tensiunii de curgere într-o secțiune sau într-un punct al unei structuri nu duce la cedarea elementului sau a structurii în ansamblu. Astfel, la elementele cu stări de tensiune neomogenă, la elemente cu secțiune neomogenă sau la structurile static nedeterminate alcătuite din materiale ductile se constată că intensitatea forțelor care corespund cedării este mai mare decât valoarea la care apare într-un punct (cel mai solicitat) tensiunea de curgere. În situația în care piesa are o capacitate portantă mai mare, sarcina maximă admisibilă se calculează cu relația:

$$F_{max} \leqslant \frac{F_{peric}}{c} \tag{23}$$

unde: F_{max} - sarcina maximă admisibilă pentru structură;

F_{peric} - sarcina la care cedează structura.

Între aceste două metode principala diferență constă în faptul că metoda tensiunilor admisibile apreciază siguranța în raport cu limita stadiului elastic (admisă ipotetic ca solicitarea pentru care tensiunea maximă atinge valoarea limitei de curgere, respectiv a rezistentei de rupere), iar metoda sarcinii de rupere în raport cu stadiul de cedare (rupere). Cea de a doua metodă introduce un coeficient de siguranță global care nu ține cont de influența diferiților factori, însă aplicarea sa conduce la economii de material. În condiții de asigurare similare, la elementele din materiale ductile cu stări de tensiune neomogene sau static nedeterminate rezultă valori diferite ale coeficientului de siguranța la cele două metode. Spre deosebire de metoda tensiunilor admisibile unde coeficientul de siguranță este cuprins în însăşi valoarea tensiunii admisibile, în metoda sarcinii limită coeficientul de siguranța este explicit.

2.2.3. Metode probabilistice

Studiul statistic al datelor obținute în cursul unor experimente permite stabilirea unor legi de distribuție privind răspândirea şi repartiția lor. Pe baza acestor legi, Teoria Probabilităților dă posibilitatea să se prevadă ce valori va avea mărimea studiată într-un experiment viitor. Prevederea se realizează cu o probabilitate aleasă aprioric. Este posibil în acest fel să se estimeze valoarea minimă sau maximă pe care le va lua o variabilă aleatoare, cu probabilitatea aleasă.

Analizării statistice a variabilelor aleatoare i se adaugă o mărime de tip probabilist de apreciere a siguranței: *probabilitatea de cedare*. Ea reprezintă probabilitatea ca valoarea *S* a răspunsului să depăşească valoarea probabilă a răspunsului limită şi se notează $\boldsymbol{P(S > S_{min})}$. În acest caz condiția de rezistență exprimă condiția ca probabilitatea de cedare să fie inferioară unei valori admise şi se exprimă sub forma:

$$P(S > S_{min}) \leqslant P_a \qquad (24)$$

unde:

P_a - probabilitatea admisă pentru cedare (stabilită pe baza unor considerente economice, sociale, etc.).

2.2.4. Condiții de rigiditate

Pentru ca funcționarea ansamblurilor să fie posibilă trebuie ca deformațiile pieselor componente să nu depăşească anumite limite. Aceasta înseamnă ca în afară de *condițiile de rezistență,* care limitează tensiunile, structurile trebuie să satisfacă şi anumite *condiții de rigiditate,* prin care se limitează deformațiile liniare sau unghiulare ale acestora. Pentru asemenea situații dimensiunile pieselor vor fi stabilite din limitarea rigidității şi deci a deplasărilor sau deformațiilor în raport cu anumite valori admisibile. Astfel:

$$\delta_{max} \leqslant \delta_a \,;\, \theta_{max} \leqslant \theta_a \qquad (25)$$

unde valorile admisibile sunt de *c* ori mai mici decât cele periculoase:

$$\delta_a = \frac{\delta_{peric}}{c}; \theta_a = \frac{\theta_{peric}}{c} \qquad (26)$$

2.2.5. Condiții de stabilitate

Chiar dacă sunt satisfăcute condițiile de rezistență, în anumite cazuri, cum ar fi la compresiunea barelor lungi sau încovoierea grinzilor cu inimă înaltă, depăşirea unor valori critice pentru sarcini (forța critica de flambaj, respectiv momentul încovoietor critic de flambaj) conduce la apariția fenomenului de pierdere a stabilității (flambaj) şi la distrugerea corpului. Pentru a preîntâmpina apariția flambajului se impune condiția ca sarcinile aplicate să fie inferioare celor critice.

Condițiile de rezistență, rigiditate şi stabilitate trebuie să fie satisfăcute simultan de către orice piesă sau structură.

3. CONSIDERAȚII GENERALE PRIVIND CALCULUL ÎN DOMENIUL PLASTIC

3.1 Noțiuni teoretice

Plasticitatea este proprietatea materialelor de a capata, sub actiunea anumitor sarcini, deformatii permanente.

Deformarea plastica este un proces ireversibil pe durata caruia legea lui Hooke nu mai este valabila. Din punctul de vedere al unei proiecteri structurale in domeniul ingineriei mecanice unul din aspectele calcululului in domeniul

plastic se refera la stabilirea incarcarii maxime care poate fi aplicata corpului studiat fara a cauza o curgere excesiva a materialului si fara a produce ruperea. Un alt aspect al plasticitatii se refera la deformarea plastica a metalelor unde deformatiile plastice importante determina prelucrarea metalului in forma dorita.

Limita de curgere σ_c sau punctul de curgere a unui material reprezinta valoarea tensiunii la care un material incepe sa aiba deformatii plastice. Inaintea punctului de curgere materialul are deformatii elastice si după descărcare revine la dimensiunile şi forma inițială. După depăşirea punctului de curgere o parte din deformații vor fi permanente după descărcare.

Intr-o stare spatiala de tensiuni un numar infinit de puncte de curgere formeaza impreuna o suprafata de curgere. Aceasta suprafata de curgere poate fi construita ceea ce ofera o reprezentare vizuala a acestui concept. In interiorul suprafetei de curgere deformatia este elastica, iar in afara suprafetei deformatia este plastica.

Trecerea in domeniul plastic a unui material solicitat de un sistem exterior de sarcini are o importanta deosebita pentru calculul ingineresc. Pentru predictia comportarii peste limita de curgere literatura de specialitate prezinta doua criterii general acceptate: *criteriul Tresca* sau ipotezei tensiunii tangențiale maxime si *criteriul von Mises* sau ipoteza energiei de deformație modificatoare de formă. *Solicitarile in domeniul elastic* se caracterizeaza printr-o relatie liniara intre tensiuni si deformatiile specifice in conformitate cu legea lui Hooke. O mica parte dintre materialele cunoscute respecta aceasta lege, cele mai multe dintre ele prezinta deformatii remanente sau permanente dupa descarcarea epruvetei ceea ce arata ca relatia tensiuni deformatii nu este liniara asa cum s-a constatat si din curba caracteristica a materialului.

Calculul in domeniul de deformare plastica se bazeaza pe faptul, ca uneori pot aparea deformatii permanente in sectiunea cea mai solicitata, fara ca prin aceasta piesa sa fie complet distrusa sau inutilizabila.

Daca deformatiile plastice cresc mult, atunci se poate realiza o stare limita la care corespunde o sarcina limita care, daca este depasita, se produce

distrugerea piesei. Sarcina admisibila $\boldsymbol{P_a}$ se afla impartind sarcina limita $\boldsymbol{P_L}$ printr-un coeficient de siguranta $\boldsymbol{c}$:

$$P_a = \frac{P_L}{c} \tag{27}$$

Se observa ca, desi calculele se efectueaza in domeniul de deformare plastica, sarcina admisibila produce tensiuni care sunt, in general, sub limita de curgere a materialului, piesa respectiva lucrand in realitate in regim de deformare elastica.

Metoda de calcul prin care se determina sarcina admisibila, pornind de la sarcina limita se numeste *metoda capacitatii portante*, *metoda de calcul la rupere* sau *metoda starilor limita*.

Pentru stabilirea relatiilor de calcul se tine seama ca legatura liniara dintre tensiuni si deformatiile specifice, data de legea lui Hooke, nu mai este valabila daca tensiunile depasesc limita de proportionalitate a materialului.

Observație:

Principiul suprapunerii efectelor, consecinta a legii lui Hooke, nu mai este aplicabil la calculul in domeniul plastic.

In cele ce urmeaza se admite ca materialul are o *curba caracteristica identica la intindere si compresiune*. Deoarece in domeniul plastic ecuatia curbei caracteristice se exprima greu analitic, sunt utilizate schematizari pentru curba caracteristica a materialului, prin care se poate inlocui curba caracteristica reala. Frecvent se admit urmatoarele *curbe schematizate*:

1. Curba caracteristica schematizata prin doua drepte (*figura 16*) corespunzatoare materialelor *ideal elasto-plastice,* denumita *curba caracteristica a lui Prandtl*, pentru care $\mathrm{tg}\alpha = E$ este modulul de elasticitate la intindere sau la compresiune, iar σ_c este tensiunea corespunzatoare limitei de curgere.

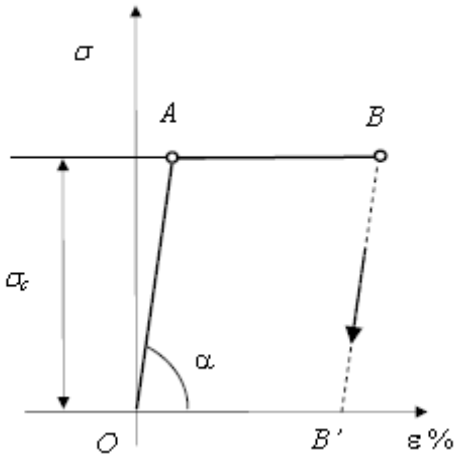


Figura 16

2. Curba caracteristica schematizata printr-o dreapta corespunzatoare materialelor *ideal rigido-plastice* (*figura 17*), pentru care deformatiile elastice se pot neglija in comparatie cu cele plastice.

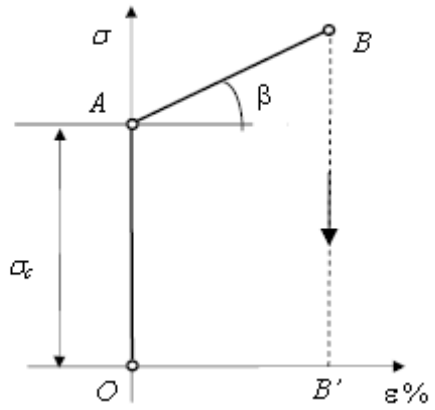


Figura 17

3. Curba caracteristica schematizata prin doua drepte (*figura 18*) corespunzatoare materialelor *elasto-plastice* cu zona de consolidare liniara la care $tg\beta = E_p$ este *modulul de plasticitate* al materialului.

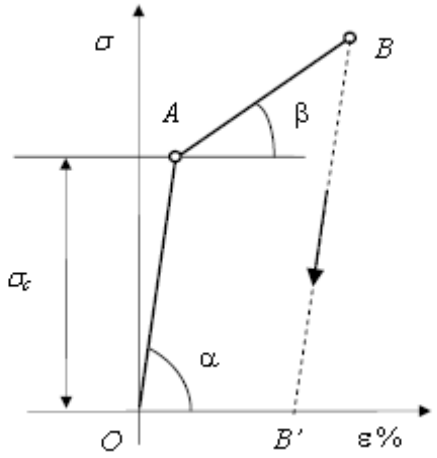


Figura 18

4. *Schematizarea ideal plastic* (*figura 19*)

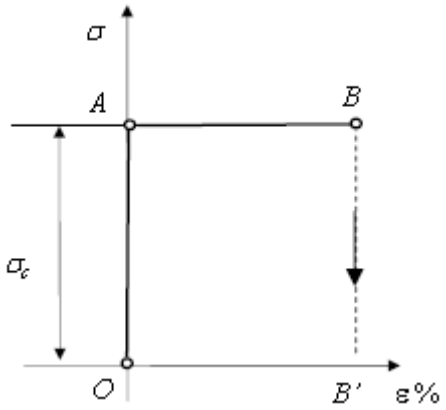


Figura 19

Modulul de elasticitate longitudinal ***E*** reprezinta tangenta unghiului **α** dintre linia ***OA*** si axa ***Ox***, iar *modulul de plasticitate* reprezinta tangenta unghiului **β** dintre linia ***AB*** si axa ***Ox.***

5. Curba caracteristica schematizata printr-o *functie putere* (*figura 20*) care se poate exprima prin relatia:

$$\sigma = E_O \cdot \varepsilon^n \tag{28}$$

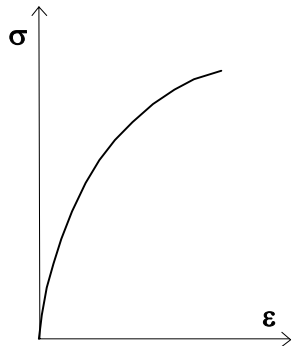


Figura 20

In acest caz principiul suprapunerii efectelor si al independentei actiunii fortelor nu mai valabil. Astfel, daca se considera doua stari succesive de incarcare in domeniul elastic se obtin anumite deformatii in domeniul elastic sau plastic in functie de suma tensiunilor: daca acestea depasesc limita de curgere (punctul ***A***) apar deformatii plastice care pot fi puse in evidenta indiferent de modelul folosit.

In *figurile 21, 22* sunt prezentate doua stari succesive de incarcare a unei epruvete.

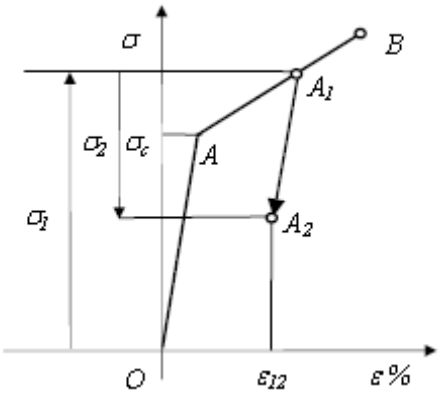


Figura 21

In prima figura se aplica mai intai o solicitare la tractiune cu tensiunea pozitiva σ_1 urmata de o compresiune cu o tensiune negativa σ_2 cea pozitiva fiind mai mare in valoare absoluta. Se obtine in final o deformatie totala ε_{12} (elastica si

remanenta). Aceasta se datoreaza faptului ca tensiunea pozitiva σ_1 depaseste limita de curgere σ_c

In *figura 22* succesiunea consta dintr-o solicitare de compresiune cu tensiunea negativa σ_2 urmata de o tractiune cu tensiunea pozitiva σ_1 cea pozitiva fiind mai mare in valoare absoluta. Din figura se observa ca se obtine in final o deformatie elastica ε_{21} deformatia permanenta fiind in acest caz nula.

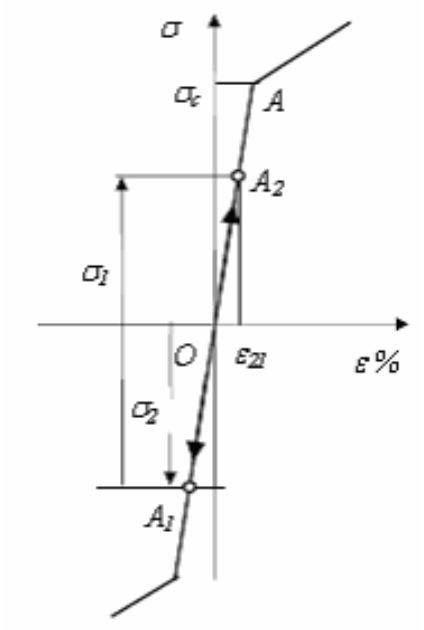


Figura 22

Din exemplul prezentat se observa ca *schimbarea succesiunii aplicarii sarcinilor a modificat valoarea finala a deformatiilor, dar nu si valoarea finala a tensiunilor.*

4. CALCULUL LA ÎNTINDERE ŞI COMPRESIUNE ÎN DOMENIUL PLASTIC

În cazul solicitărilor în domeniul plastic ipoteza lui Bernoulli şi relațiile de calcul ale tensiunilor şi deformațiilor specifice din domeniul elastic pentru modelul elasto-plastic (*figura 18*) se păstrează. Astfel :

- tensiunea într-o secțiune a barei este constantă pe toată secțiunea barei şi proporțională cu efortul axial N:

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{30}$$

- deformațiile specifice pentru *domeniul elastic* conform *figurii 23*, sunt liniare:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{N}{EA} \tag{31}$$

respectiv:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{EA} \tag{32}$$

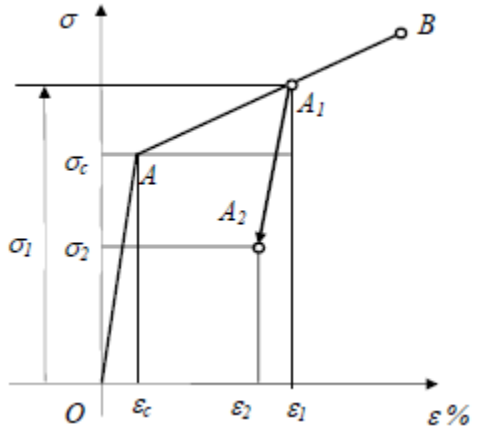


Figura 23

- deformațiile specifice ε_1 corespunzatoare unei tensiuni σ_1 din *domeniul plastic* se determina, conform *figurii 23,* astfel:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_1 - \sigma_c}{E_p} \tag{33}$$

- deformațiile specifice ε_2 corespunzatoare unei tensiuni σ_2 se obțin în urma descărcării epruvetei în *domeniul elastic* după o linie paralelă cu *OA*, conform *figurii 23,* astfel:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} = \frac{\sigma_c + \sigma_2 - \sigma_1}{E} + \frac{\sigma_1 - \sigma_c}{E_p} \tag{34}$$

- deformațiile specifice remanente ε_r corespunzatoare descărcării totale a epruvetei în *domeniul elastic* după o linie paralelă cu *OA*, conform *figurii 24,* se determina astfel:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E} = \left(\sigma_1 - \sigma_c\right)\left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E}\right) \tag{35}$$

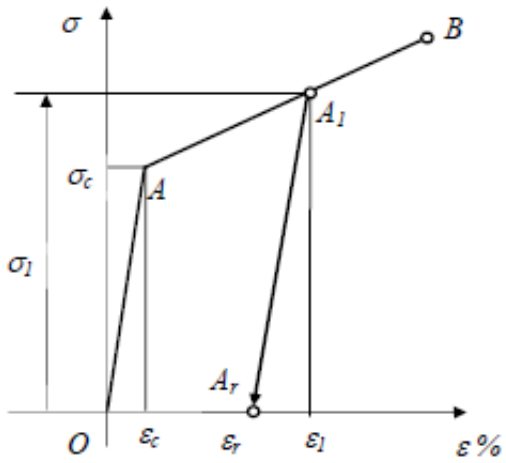


Figura 24

Aplicație

Cazul a. *Solicitarea de întindere –compresiune în domeniul elastic*

Se consideră problema solicitării axiale în domeniul elastic a unei bare cilindrice cu secțiunea în trepte prezentata in *figura 25a*. Acest caz corespunde ***unor tensiuni maxime în piesă mai mici decât limita de curgere.***

Expresiile *fortelor axiale (N)* şi *tensiunilor normale (σ)* din domeniul elastic ale fiecărui tronson sunt

Tronson 0 – 1: N=2P, σ =0,5P/A

Tronson 1 – 2: N=-P, σ =-0,333P/A

Tronson 2 – 3: N=-3P, σ =-1,5P/A

Tronson 3 – 4: N=-4P, σ =-4P/A

Se trasează digrama de *forte axiale N* (*figura 25b*), respectiv diagrama de *tensiuni normale* (*figura 25c*).

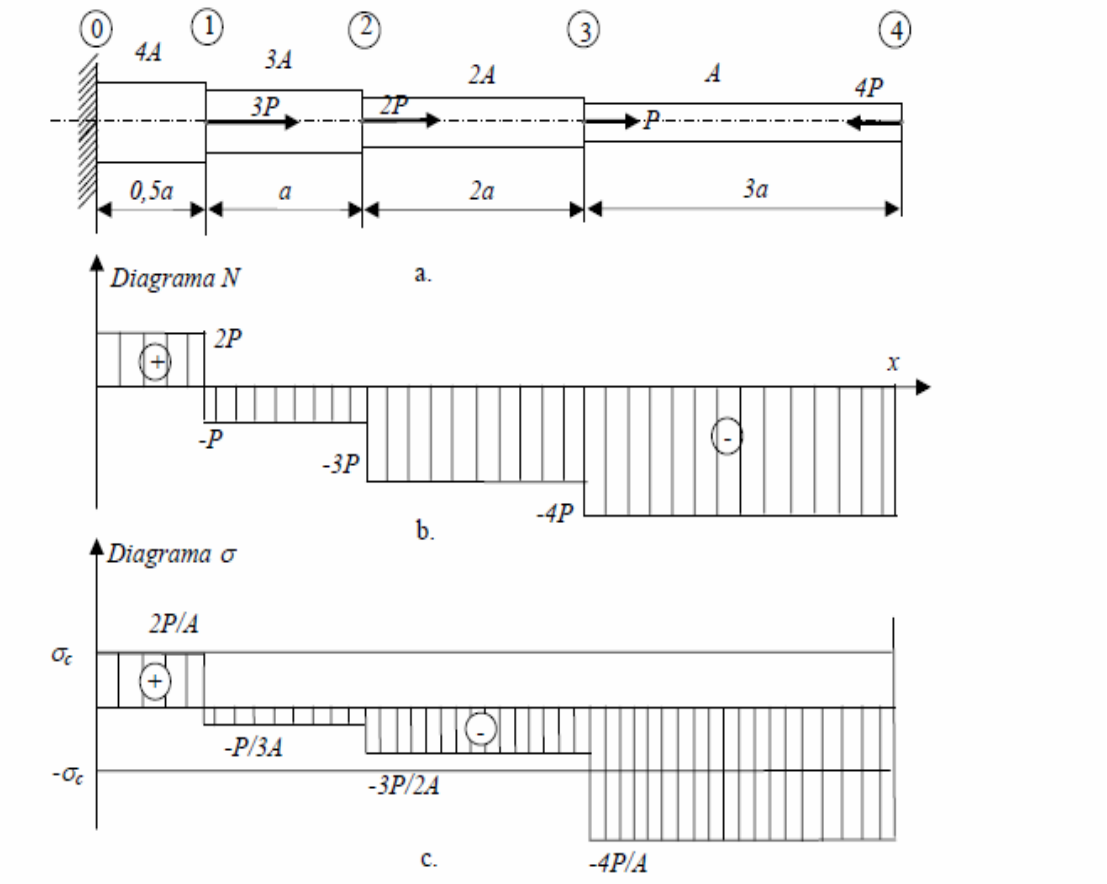


Figura 25

Expresiile *deformațiilor din domeniul elastic* ale fiecărui tronson sunt

Tronson 0 – 1: $\Delta l=0,25Pa/EA$

Tronson 1 – 2: $\Delta l=-0,333Pa/EA$

Tronson 2 – 3: $\Delta l=-3Pa/EA$

Tronson 3 – 4: $\Delta l=-12Pa/EA$

Deformația elastică totală a barei este suma deformațiilor celor patru tronsoane si are valoarea:

$$\Delta l=-\frac{181Pa}{12EA}=-15,083\frac{Pa}{EA} \qquad (36)$$

După descărcarea barei, deformația remanentă în acest caz este nulă.

Cazul b. *Solicitarea de întindere –compresiune în elasto-plastic*

Acest caz corespunde unei valori a forței ***P*** ce conduce la *tensiuni maxime mai mari decât limita de curgere a materialului.* Se consideră pentru limita de curgere a materialului şi modulul de plasticitate al materialului următoarele valori: $\boldsymbol{\sigma_c = 2P/A,\ Ep = E/5}$.

Din valorile indicate mai sus se observă că pentru valoarea indicata a limitei de curgere tronsoanele **0-1**, **1-2** şi **2-3** suferă deformații în *domeniul elastic*, iar tronsonul **3 – 4** în *domeniul plastic* (materialul se comportă la fel la întindere şi compresiune). Folosind modelul elasto-plastic atât la întindere cât şi la compresiune, *deformația specifică a tronsonului 3-4* se calculează astfel:

$$\varepsilon_{3-4} = \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_{3-4} - \sigma_c}{E_p} = -12\frac{P}{EA} \tag{37}$$

Deformația totală a tronsonului **3-4** este:

$$\Delta l_{3-4} = \varepsilon_{3-4} \cdot 3a = -36\frac{Pa}{EA} \tag{38}$$

Se observă că deformația totală a tronsonului 3-4 este în acest caz de trei ori mai mare decât cea corespunzătoare cazului în care solicitarea se produce numai în domeniul elastic.

Deformația totală a barei este:

$$\Delta l = -\frac{469Pa}{12EA} = -39{,}083\frac{Pa}{EA} \tag{39}$$

Deformația specifică remanentă la descărcarea barei se produce numai pentru tronsonul **3-4**; conform *relației (35)*, aceasta are expresia:

$$\varepsilon_{r3-4} = \left(\sigma_1 - \sigma_c\right)\left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E}\right) = -8\frac{P}{EA} \tag{40}$$

Deformația remanentă totală la descărcarea barei nu mai este nulă ca în primul caz, ea are valoarea:

$$\Delta l_r = \varepsilon_{r3-4} \cdot 3a = -24\frac{Pa}{EA} \tag{41}$$

Calculul tensiunilor remanente la întindere-compresiune în domeniul elasto-plastic a unor sisteme static nedeterminate

1. Se consideră urmatorul sistem static nedeterminat solicitat axial în domeniul elasto-plastic: o bară cilindrică cu secțiunea în trepte de arii *4A*; *2A*; *1,5A*; *A* şi lungimi corespunzătoare *0,5a*; *a*; *1,5a* şi *0,875a* . Bara este fixată la ambele capete şi supusă acțiunii a trei forțe concentrate *P*, *2P* şi *3P* ca în *figura 26.*

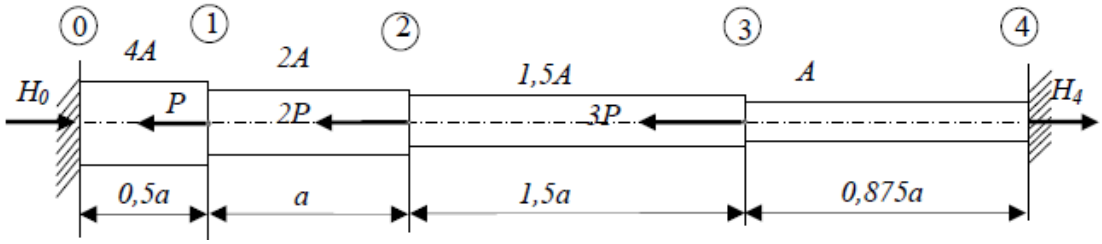


Figura 26

Dacă tensiunea maximă dintr-un tronson este mai mare decât limita de curgere, solicitarea se produce în domeniul plastic şi conduce la deformații remanente, iar la descărcare la tensiuni remanente. Pentru determinarea reacțiunilor se scriu:

- ecuația de echilibru a forțelor exterioare şi reacțiunilor:

$$H_0 - P - 2P - 3P + H_4 = 0 \qquad (42)$$

- ecuația de deformații totale ale barei:

$$\Delta l_{0\text{-}1} + \Delta l_{1\text{-}2} + \Delta l_{2\text{-}3} + \Delta l_{3\text{-}4} = 0 \qquad (43)$$

Pentru început se *presupune că solicitarea celor patru tronsoane se face în domeniul elastic*.

Expresiile *fortelor axiale (N)* din domeniul elastic ale fiecărui tronson sunt

Tronson 0 – 1: $N = -H_0$

Tronson 1 – 2: $N = P - H_0$

Tronson 2 – 3: $N = 3P - H_0$

Tronson 3 – 4: N=6P– H_0

Expresiile *deformaţiilor din domeniul elastic* ale fiecărui tronson sunt

Tronson 0 – 1: Δl== – H_0 a/8EA

Tronson 1 – 2: Δl= (P– H_0)a/2EA

Tronson 2 – 3: Δl= (3P– H_0)a/EA

Tronson 3 – 4: Δl= (6P– H_0)0,875a/EA

Introducând aceste expresii în *ecuaţia (43)* se obţine:

$$-\frac{H_0.a}{8EA}+\frac{(P-H_0)\cdot a}{2EA}+\frac{(3P-H_0)\cdot a}{EA}+\frac{(6P-H_0)\cdot 0{,}875a}{EA}=0$$

Rezolvând se obţine: $H_0 = 3,5P$, iar din *relatia (42)* rezulta $H_4 = 2,5P$.

Expresiile *fortelor axiale (N)* şi *tensiunilor normale (σ)* şi deformaţiilor corespunzătoare fiecărui tronson pentru solicitarea în *domeniul elastic* sunt:

Tronson 0 – 1: N= -3,5P, σ = -0,875P/A, Δl=− 0,4375Pa/EA

Tronson 1 – 2: N= -2,5P, σ = -1,25P/A, Δl= -1,25Pa/EA

Tronson 2 – 3: N= -0,5P, σ = -0,333P/A, Δl= -0,5Pa/EA

Tronson 3 – 4: N= 2,5P, σ = 2,5P/A, Δl= 2,1875Pa/EA

Se consideră limita de curgere a materialului ca fiind ***2P/A*** şi aceeaşi comportare a materialul la întindere şi compresiune. Se observă că tensiunea maximă pe *tronsonul* ***3-4*** este mai mare decât limita de curgere, deci suferă deformaţii plastice. Dacă se utilizează modelul elasto-plastic pentru material şi se consideră modulul de plasticitate ***Ep=E/5*** deformaţia corespunzătoare *tronsonului* ***3 – 4*** se calculează conform *relaţiei (33). Deformaţia specifică a tronsonului* ***3-4*** este

$$\varepsilon_{3-4}=\frac{\sigma_c}{E}+\frac{\sigma_{3-4}-\sigma_c}{E_p}=\frac{2P}{EA}+\frac{6P-H_0}{E_pA}-\frac{2P}{E_pA}$$

Deformaţia totală a tronsonului **3-4** este:

$$\Delta l_{3-4}=\varepsilon_{3-4}\cdot 0{,}875a$$

Inlocuind in *relatia (43)* se obtine:

$$-\frac{H_0.a}{8EA}+\frac{(P-H_0)\cdot a}{2EA}+\frac{(3P-H_0)\cdot a}{EA}+\frac{2P\cdot 0{,}875a}{EA}+\frac{(6P-H_0)\cdot 0{,}875a}{E_pA}-\frac{2P\cdot 0{,}875a}{E_pA}=0$$

Rezolvând ultima ecuație se obține: $H_0 = 3{,}792P$, $H_4 = 2{,}208P$. Se observă că reacțiunea H_0 este mai mare în acest caz decât în cazul când bara era solicitată în domeniul elastic.

Expresiile *fortelor axiale (N)* şi *tensiunilor normale (σ)* şi deformațiilor corespunzătoare fiecărui tronson pentru solicitarea în *domeniul elasto-plastic* sunt:

Tronson 0 – 1: N= -3,792P, σ = -0,948P/A, Δ l=− 0,474Pa/EA

Tronson 1 – 2: N= -2,792P, σ = -1,396P/A, Δ l= -1,396Pa/EA

Tronson 2 – 3: N= -0,792P, σ = -0,528P/A, Δ l= -0,792Pa/EA

Tronson 3 – 4: N= 2,208P, σ = 2,208P/A, Δ l= 2,662Pa/EA

Diagrama de tensiuni este prezentată în *figura 27*. Tensiunile remanente apar la descărcarea barei datorită deformațiilor remanente ale *tronsonului* ***3-4.***

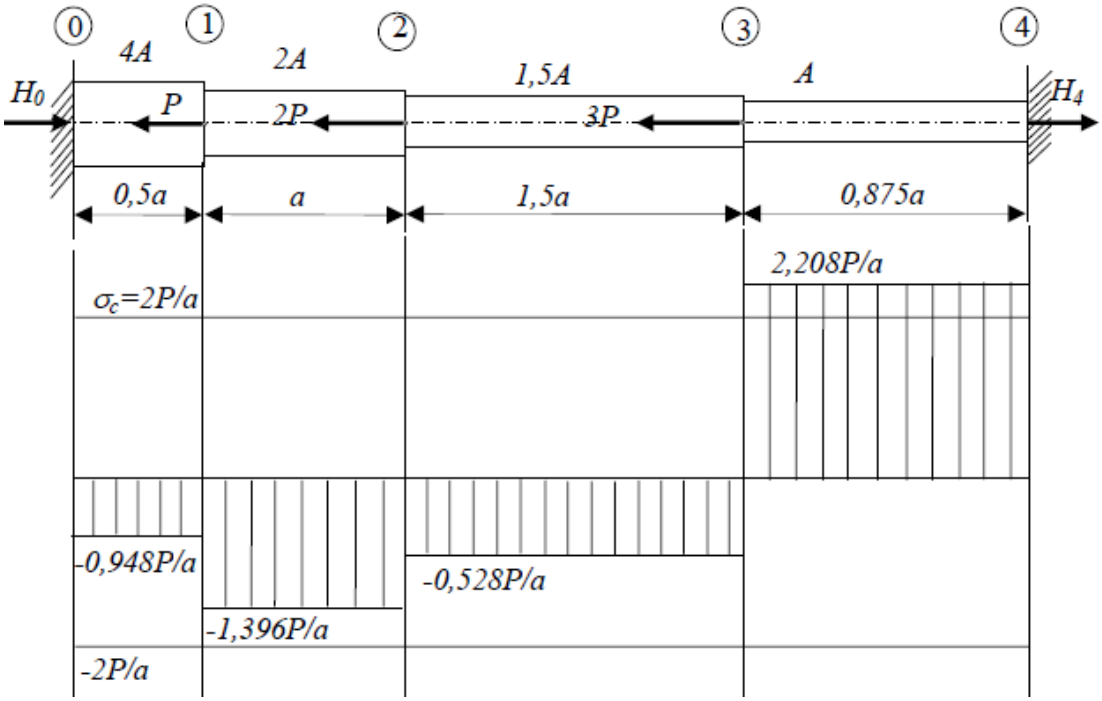


Figura 27

Se consideră că bara este un sistem static determinat fixat la capătul din stânga, asupra căruia acționează cele trei forțe concentrate şi forța de capăt: $H_4 = 2{,}208P$. Sub acțiunea acestor sarcini bara suferă *deformații elastice* pentru tronsoanele *0-1*, *1-2*, *2-3* şi *plastice remanente* pentru tronsonul *3-4*.

La descărcarea barei, *deformațiile elastice* ale tronsoanelor *0-1*, *1-2*, *2-3* se anulează, iar cele *plastice* corespunzătoare tronsonului *3-4* se calculează conform *relației (35):*

$$\Delta l_{r3-4} = \left(\sigma_{3-4} - \sigma_c\right)\left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E}\right)\cdot l_{3-4} = 0{,}728\frac{Pa}{EA}$$

Deci la descărcare bara se lungeşte cu Δl_{r3-4}.

Pentru calculul tensiunilor remanente după descărcarea barei, se aplică o forță de *compresiune F* la capătul ei astfel încât aceasta se comprimă cu valoarea deformației remanente Δl_{r3-4} (*figura 28*).

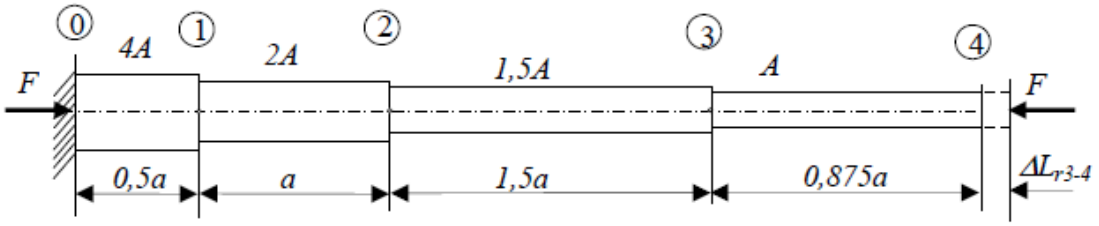


Figura 28

Condiția de deformații sub acțiunea sarcinii *F* se scrie:

$$\Delta l^*_{0\text{-}1} + \Delta l^*_{1\text{-}2} + \Delta l^*_{2\text{-}3} + \Delta l^*_{3\text{-}4} = \Delta l_{r3\text{-}4} \qquad (44)$$

unde:

$$\Delta l^{\times}_{0-1} = -\frac{F\cdot 0{,}5a}{4EA};\ \Delta l^{\times}_{1-2} = -\frac{F\cdot a}{2EA};$$

$$\Delta l^{\times}_{2-3} = -\frac{F\cdot 1{,}5a}{1{,}5EA};\ \Delta l^{\times}_{3-4} = -\frac{F\cdot 0{,}875a}{EA}$$

Înlocuind aceste expresii în *relația (44)* se obține forța *F* ce reprezintă tocmai reacțiunea din cele două încastrări după descărcarea barei: ***F = 0,2912P*** .

Tensiunile remanente ale barei se calculează pentru fiecare tronson ținând seama că forta axiala după descărcarea este tocmai *forța F*: $\sigma = F/A$.

Fortele axiale şi tensiunile corespunzătoare fiecărui tronson pentru solicitarea în domeniul elastic cu forța de *compresiune F* calculată sunt:

Tronson 0 – 1: N= -0,2912P, σ = -0,0728P/A, Δ l=−-0,0364Pa/EA

Tronson 1 – 2: N= -0,2912P, σ = -0,1456P/A, Δ l= -0,1456Pa/EA

Tronson 2 – 3: N= -0,2912P, σ = -0,1941P/A, Δ l= -0,2912Pa/EA

Tronson 3 – 4: N= -0,2912P, σ =-0,2912P/A, Δ l= -0,2548 Pa/EA

Tensiunile remanente care apar în urma *deformațiilor plastice* ale *tronsonului* ***3-4*** se suprapun în continuare peste tensiunile remanente datorate alte solicitări aplicate ulterior. Astfel dacă cele trei sarcini P, 2P şi 3P se aplică asupra barei în aceleaşi secțiuni dar având sensul opus, se obțin aceleaşi rezultate pentru tensiunile remanente dar de semne opuse. Tensiunile remanente obținute din prima solicitare se suprapun cu tensiunile remanente din cea de-a doua şi se anulează reciproc.

Calculul tensiunilor remanente la montajul forțat în domeniul elasto-plastic al unor bare cu secțiunea în trepte

1. Se consideră o bară cilindrică cu secțiunea în trepte de arii: *4A*; *3A*; *2A*; *A* şi lungimile corespunzătoare *0,5a*; *1,5a*; *2a* şi *3a.* Sistemul este montat forțat prin fixare la un capăt şi sudare la celălalt, după aplicarea unei forțe inițiale ***P*** pentru anularea jocului (*figura 29*).

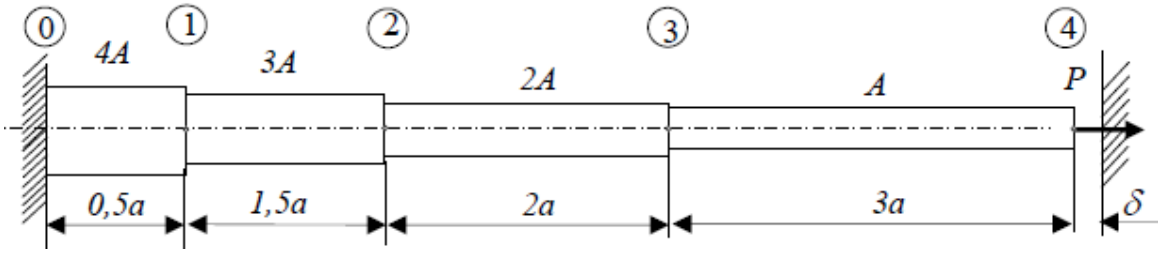


Figura 29

Dacă solicitarea barei este în *domeniul elastic* pentru tronsoanele de secțiune mare şi în *domeniul plastic* pentru cele cu secțiunea cea mai mică, să se determine în funcție de valoarea jocului δ tensiunile şi deformațiile remanente din bară.

Prin aplicarea *forței de montaj* ***P***, fortele axiale în cele patru tronsoane sunt identice, *tensiunea maximă* se produce în *tronsonul* ***3-4*** având secțiunea cea mai mică. Pentru determinarea *forței de montaj* ***P*** se scrie ecuația de deformații totale :

$$\Delta l_{0-1} + \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} + \Delta l_{3-4} = \delta \qquad (45)$$

Pentru început se presupune că solicitarea celor patru tronsoane are loc în *domeniul elastic*. *Ecuația (45)* se scrie:

$$\frac{P \cdot 0{,}5a}{4EA} + \frac{P \cdot 1{,}5a}{3EA} + \frac{P \cdot 2a}{2EA} + \frac{P \cdot 3a}{EA} = \delta$$

De unde se obține: $P = 0{,}216\dfrac{\delta EA}{a}$

Tensiunile şi deformațiile remanente corespunzătoare fiecărui tronson după montajul forțat ce corespunde unei *întinderi cu forța* ***P*** sunt:

Tronson 0 – 1: $\sigma = 0{,}054\dfrac{E\delta}{a};\ \Delta l = 0{,}027\delta$

Tronson 1 – 2: $\sigma = 0{,}072\dfrac{E\delta}{a};\ \Delta l = 0{,}108\delta$

Tronson 2 – 3: $\sigma = 0{,}108\dfrac{E\delta}{a};\ \Delta l = 0{,}216\delta$

Tronson 3 – 4: $\sigma = 0{,}216\dfrac{E\delta}{a};\ \Delta l = 0{,}648\delta$

5. RĂSUCIREA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ ŞI INELARĂ ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

Calculul momentului capabil pentru solicitarea la răsucire

Se consideră o bară dreaptă solicitată la răsucire având secțiunea constantă sau în trepte. Ipotezele de calcul pentru studiul răsucirii în domeniul elasto-plastic sunt:

- *ipoteza lui Bernoulli* sau a secțiunii transversale plane şi normale la axa barei. Aceasta ipoteză este formulată astfel: o secțiune plană şi normală pe axa geometrică a barei înainte de deformare, rămâne plană şi perpendiculară pe axa deformată şi după deformare barei. În *figura 30* este ilustrată această ipoteză pentru solicitarea la tracțiune (*figura 30a*) şi la încovoiere (*figura 30b*). Conform acestei ipoteze *secțiunea AB* din bara solicitată la tracțiune de către forța ***P*** se deplasează paralel cu ea însăşi în *A'B'*, iar secțiunea transversală *AB* din grinda solicitată la încovoiere rămâne plană şi normală la axa deformată a grinzii.

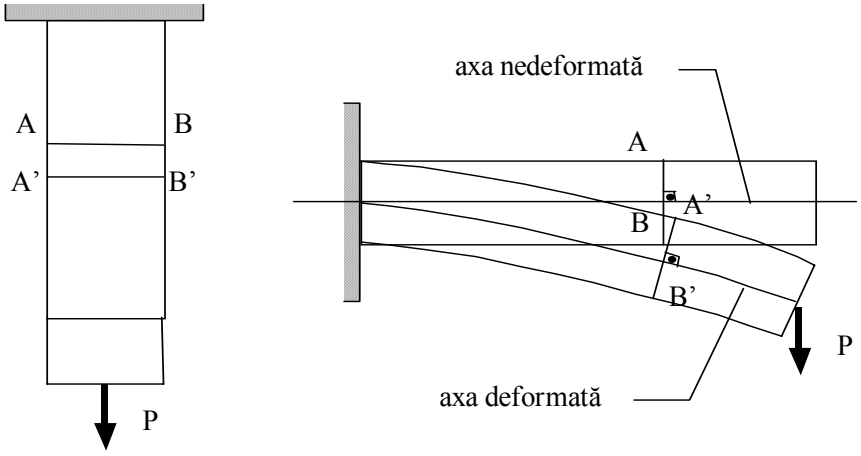


Figura 30

- ipoteza comportării *ideal elasto-plastice* a materialului (PRANDTL).

Astfel într-o secțiune a barei solicitată la răsucire cu momentul M_t distribuția tensiunilor poate avea una din formele:

a) daca *secțiunea este solicitată în întregime în domeniul elastic* repartitia tensiunilor este prezentata in *figura 31*:

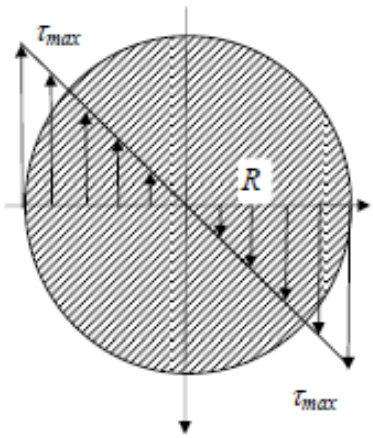


Figura 31

Tensiunea tangențială se calculeaza cu relatia:

$$\tau(r) = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$$

Pe conturul barei, pentru ***r = R***, se poate scrie:

$$\tau(R) = \frac{M_t \cdot R}{I_p} = \frac{M_t}{\frac{I_p}{R}}$$

Tensiunea tangențială maximă se calculează cu relația (W_p - modulul de rezistență polar):

$$\tau_{\max} = \tau(R) = \frac{M_t}{W_p}$$

pentru $\tau_{\max} \leqslant \tau_c$

b) daca *secțiunea este solicitată parțial în domeniul elastic, parțial în plastic* repartitia tensiunilor este prezentata in *figura 32:*

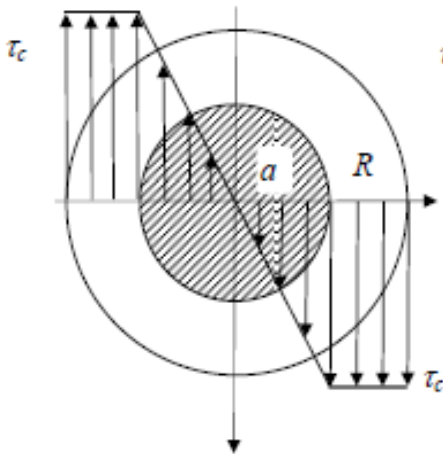


Figura 32

Tensiunea tangențială se calculeaza cu relatia:

$$\tau(r) = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \qquad \text{pentru } o \le r \le a$$

$$\tau = \tau_c \qquad \text{pentru } a \le r \le R$$

c) *daca secțiunea este solicitată în întregime în domeniul plastic* repartitia tensiunilor este prezentata in *figura 33,* iar tensiunea tangențială $\tau = \tau_c$, pentru $r \in [0, R]$.

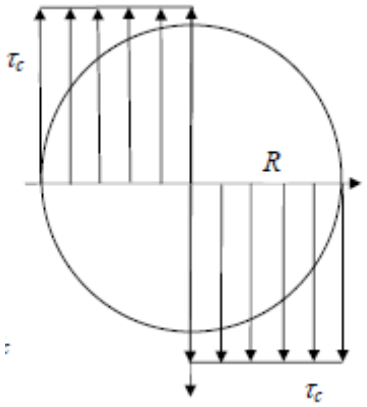


Figura 33

Valoarea razei *a* se determină în funcție de momentul de răsucire M_t cu ajutorul relației de echivalență:

$$M_t = \int_o^a \tau \cdot r \cdot 2\pi r dr + \int_a^R \tau_c \cdot r \cdot 2\pi r dr \qquad (46)$$

unde $\tau = \frac{\tau_c}{a} \cdot r$ pentru r∈[0, a]

Înlocuind în *relația (46)*se obține:

$$M_t = \tau_c \cdot W_p \cdot \frac{1}{3}\left(4 - \frac{a^3}{R^3}\right) \qquad (47)$$

în care W_p este modulul de rezistență polar:

Din *relația (47)* rezultă raza *a* în funcție de cuplul $\boldsymbol{M_t}$:

$$\frac{a}{R} = \sqrt[3]{4 - \frac{3M_t}{\tau_c \cdot W_p}}$$

Condiția de existență a lui *a* este:

$$a \geq o \Rightarrow 4 - \frac{3M_t}{\tau_c \cdot W_p} \geq o \Rightarrow M_t \leq \frac{4}{3}\tau_c W_p \qquad (48)$$

La limită, pentru *a=0,* secțiunea este solicitată în întregime în domeniul plastic şi rezultă momentul capabil:

$$M_{t_{cap}} = \frac{4}{3}\tau_c W_p \qquad (49)$$

Se observă că momentul capabil pentru ultimul caz, în care întreaga secțiune este solicitată în domeniul plastic, este de 1,33 ori mai mare decât în situatia în care întreaga secțiune este solicitată în domeniul elastic.

Calculul tensiunilor remanente la răsucirea în domeniul elasto-plastic

În cazul în care o bară este solicitată în domeniul elasto-plastic, după descărcarea ei apar tensiuni remanente datorită deformațiilor remanente pe care aceasta le suferă în timpul curgerii materialului.

În cazul răsucirii în domeniul elasto-plastic, se consideră că descărcarea la răsucire este echivalentă cu aplicarea un moment de torsiune egal şi de sens opus celui inițial, moment ce produce numai *tensiuni în domeniul elastic* pentru toată secțiunea barei. Astfel într-o secțiune a barei solicitată la răsucire cu momentul M_t distribuția tensiunilor remanente se determină pentru cele două cazuri:

a) *când secțiunea este solicitată parțial în elastic, parțial în plastic* (*figura 34)*:

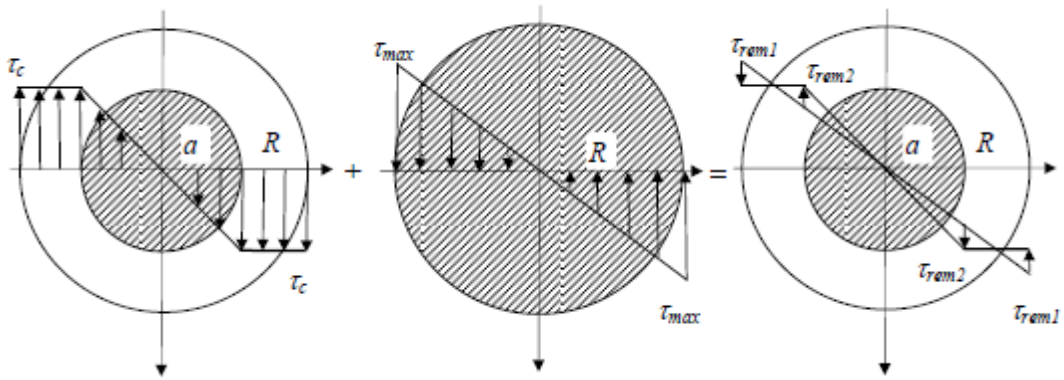


Figura 34

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\tau_c}{3}\left(4 - \frac{a^3}{R^3}\right) \tag{50}$$

$$\tau_{rem1} = \tau_{\max} - \tau_c \Rightarrow \tau_{rem1} = \frac{\tau_c}{3}\left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) \tag{51}$$

$$\tau_{rem2} = \tau_c - \tau_{\max} \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow \tau_{rem2} = \frac{\tau_c}{3}\left(3 - 4\frac{a}{R} + \frac{a^4}{R^4}\right) \tag{52}$$

b) *când secțiunea este solicitată în întregime în domeniul plastic* (*figura 35)*:

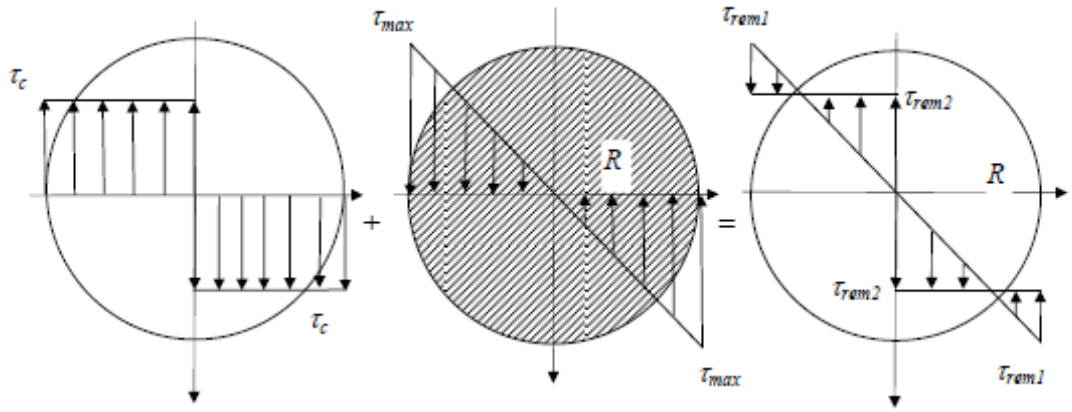


Figura 35

$$\tau_{\max} = \frac{M_{tcap}}{W_p} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{4\tau_c}{3} \tag{53}$$

$$\tau_{rem1} = \tau_{\max} - \tau_c \Rightarrow \tau_{rem1} = \frac{\tau_c}{3} \tag{54}$$

$$\tau_{rem2} = \tau_c \tag{55}$$

6. CALCULUL LA ÎNCOVOIERE PURA ÎN DOMENIUL PLASTIC

Se consideră o bară dreaptă solicitată la încovoiere pură de secțiune constantă. Ipotezele de calcul pentru studiul încovoierii în domeniul elasto-plastic sunt:

- materialul este omogen şi izotrop ;

- încovoierea pură este simetrică: cuplurile de forțe sunt situate într-un plan principal de simetrie *Oxz* care conține axa longitudinală şi o axă de simetrie a secțiunii ca în *figura 36* (în secțiunea barei nu apar decât eforturi încovoietoare);

- ipoteza lui Bernoulli sau a secţiunii transversale plane şi normale la axa barei;

- ipoteza stării plane de tensiuni;

- ipoteza comportării materialului:

a) elasto-plastice sau

b) ideal elasto-plastice;

- ipoteza unei comportări simetrice la întindere şi compresiune.

Fie un element de lungime *dx* aflat la distanţa *x* de capătul barei o supus la încovoiere pură astfel încât în două secţiuni aflate la distanţa *dx* acţionează eforturile încovoietoare $\boldsymbol{M_{iy}}$ respectiv $\boldsymbol{M_{iy}+dM_{iy}}$ (*figura 36*).

În *figura 36* s-a reprezentat cu linie întreruptă elementul înainte de deformare şi cu linie continuă după deformare. Se consideră axa longitudinală *CC'* a barei după deformare fiind un *arc de cerc de rază* ρ. Fie o fibră *MN* situată la distanţa *z* de axa longitudinală, o linie dreaptă înainte de deformare care devine un arc de cerc *M'N'* de rază *(* ρ *+z)* după deformare.

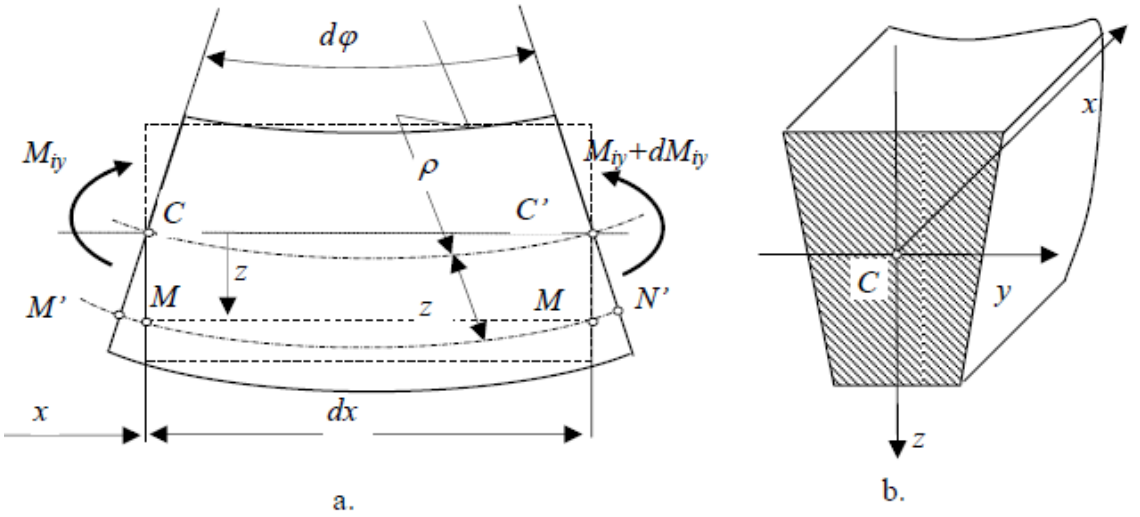


Figura 36

Ţinând seama de notaţiile din *figura 36* şi de ipotezele de mai sus, lungirea specifică a fibrei situată la distanţa ***z*** de axa grinzii este:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho} \qquad (56)$$

Încovoierea pură simetrică pentru secțiunea cu două axe de simetrie

Se consideră o secțiune cu două axe de simetrie şi o comportare elasto-plastică simetrică la întindere compresiune a materialului (*figura 37*).

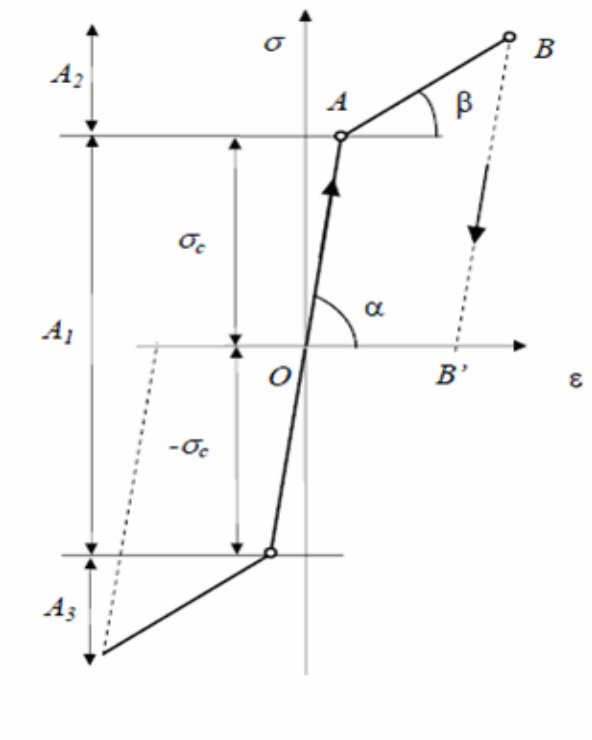


Figura 37

Variația tensiunii se poate exprima astfel:

a) *în zona elastică de arie* A_1 ($-\sigma_c < \sigma < \sigma_c$):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \text{pentru } \varepsilon \in \left(0, \frac{\sigma_c}{E}\right) \qquad (57)$$

b) *pentru zona plastică de arie* A_2 ($\sigma > \sigma_c$):

$$\sigma = \sigma_c + \left(\varepsilon - \frac{\sigma_c}{E}\right) \cdot E_p \qquad \text{pentru } \varepsilon \geq \frac{\sigma_c}{E} \qquad (58)$$

şi *zona plastică de arie* A_3 ($\sigma < -\sigma_c$) :

$$\sigma = -\sigma_c - \left(\varepsilon - \frac{\sigma_c}{E}\right) \cdot E_p \qquad \text{pentru } \varepsilon \le -\frac{\sigma_c}{E} \tag{59}$$

La încovoierea în elasto-plastic avem:

a) o zonă centrală de deformații elastice corespunzătoare unor deformații specifice:

$$-\varepsilon_c \le \varepsilon \le \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$$

b) două zone periferice de deformații plastice corespunzătoare unor deformații specifice:

$$\varepsilon \le -\varepsilon_c$$

$$\varepsilon \ge \varepsilon_c$$

În cazul încovoierii pure simetrice eforturile $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M_{iz}}$ sunt nule, iar efortul $\boldsymbol{M_{iy}}$ este nenul, astfel încât se pot scrie urmatoarele ecuații de echivalenta:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

$$M_{iz} = \int_A \sigma \cdot y \; dA = 0 \tag{60}$$

$$M_{iy} = \int_A \sigma \cdot z \, dA \neq 0$$

Prima *relație (60)* furnizează poziția axei neutre a secțiunii şi se mai scrie:

$$\int_A \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot dA + \int_A \left[\sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) + \frac{z}{\rho} E_p \right] \cdot dA + \\ + \int_A \left[-\sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) - \frac{z}{\rho} E_p \right] \cdot dA = 0 \tag{61}$$

unde: ***A1*** - aria suprafeței centrale corespunzătoare zonei elastice;

A2 - aria suprafeței corespunzătoare zonei plastice cu tensiuni pozitive.

A3 - aria suprafeței corespunzătoare zonei plastice cu tensiuni negative.

$\varepsilon = \frac{z}{\rho}$ - deformația specifică a fibrei situată la distanța z de axa neutră.

Cu unele excepții, poziția axei neutre dată de prima *relație (60)* diferă față de cazul solicitării în domeniul elastic (unde axa neutră trece prin centrul de greutate C al secțiunii). A doua *relație (60)* arată că ***Oy*** este o axă de simetrie a secțiunii.

Cea de-a treia relație se mai scrie:

$$\int_A \frac{E}{\rho} \cdot z^2 \cdot dA + \int_A \left[\sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) + \frac{z}{\rho} E_p \right] \cdot z \cdot dA + \\ + \int_A \left[-\sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) - \frac{z}{\rho} E_p \right] \cdot z \cdot dA = M_{iy} \tag{62}$$

Aplicatie:

Se consideră cazul particular al secțiunii dreptunghiulare (cu două axe de simetrie) având dimensiunile ***b*** şi ***h*** (*figura 38*). Prima *relație (60)* devine:

$$\int_{-h/2}^{-a} \sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \cdot b \cdot dz + \int_{a}^{h/2} \sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \cdot b \cdot dz + \int_{-a}^{a} \frac{E}{\rho} \cdot zb \cdot dz + \\ + \int_{-h/2}^{-a} \frac{E_p}{\rho} \cdot zb \cdot dz + \int_{a}^{h/2} \frac{E_p}{\rho} \cdot zb \cdot dz = 0 \tag{63}$$

Suma primelor două integrale din *relatia (63)* este nulă, iar in celelalte trei intervin momentele statice ale celor trei zone ale secțiunii dreptunghiulare, care sunt nule:

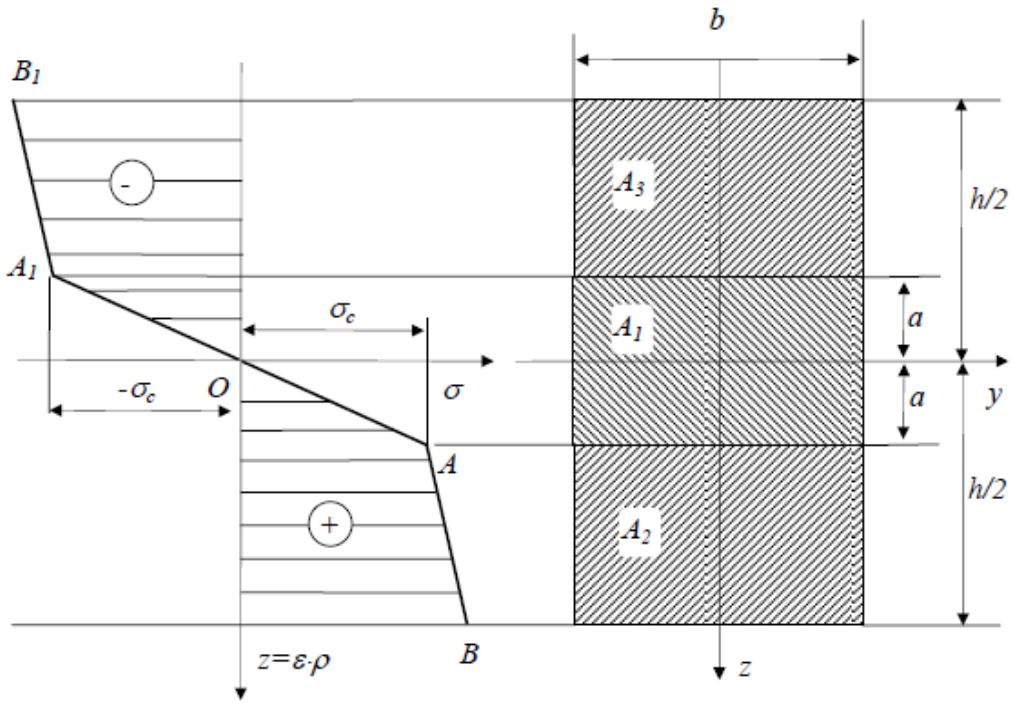


Figura 38

$$S_{ze} = \int_{-a}^{a} zb \cdot dz = 0$$

$$S_{zp} = \int_{-h/2}^{-a} zb \cdot dz + \int_{a}^{h/2} zb \cdot dz = 0$$

Rezultă că axa *Oy* trece în acest caz prin centrul de greutate al secţiunii, ca şi în cazul solicitării elastice.

Se notează cu *2a* înălţimea zonei centrale solicitate elastic. În cazul particular al secţiunii dreptunghiulare *relaţia (62)* devine:

$$\int_{-a}^{a} \frac{E}{\rho} \cdot z^2 b \cdot dz + \int_{-h/2}^{-a} -\sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) \cdot zb \cdot dz + \int_{a}^{h/2} \sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) \cdot zb \cdot dz + 2 \int_{a}^{h/2} \frac{E_p}{\rho} \cdot z^2 b \cdot dz = M_{iy} \tag{64}$$

În *relația (64)* se notează cu $\boldsymbol{I_{ye}}$ *momentul de inerție* al secțiunii centrale solicitate în *domeniul elastic*, cu $\boldsymbol{S_{yp1}}$ şi $\boldsymbol{S_{yp2}}$ *momentele statice* ale zonelor zonelor solicitate în domeniul plastic şi $\boldsymbol{I_{yp}}$ *momentul de inerție* al zonelor exterioare:

$$I_{ye} = \int_{-a}^{a} z^2 b \cdot dz$$

$$S_{yp1} = \int_{-h/2}^{-a} -zb \cdot dz$$

$$S_{yp2} = \int_{a}^{h/2} zb \cdot dz \qquad (65)$$

$$I_{yp} = \int_{a}^{h/2} z^2 b \cdot dz$$

Cu aceste notații *relația (64)* devine:

$$M_{iy} = \frac{\sigma_c}{a} I_{ye} + \sigma_c \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) \cdot \left(S_{yp1} + S_{yp2}\right) + \frac{\sigma_c}{a} \cdot \frac{E_p}{E} \cdot I_{yp} \qquad (66)$$

În *relația (66)* s-a ținut seama de relația dintre *a* şi ρ : se observă în *figura 38* că punctul ***A*** de abscisă σ_c corespunde unei ordonate:

$$\varepsilon_c \cdot \rho = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\varepsilon_c}$$

Deoarece $\sigma_c = E \cdot \varepsilon_c$ rezultă:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_c}{a}$$

Dacă se calculează integralele din *relatia (65)* se obține:

$$I_{ye} = \frac{b \cdot (2a)^3}{12}$$

$$S_{yp1} = S_{yp2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right)$$

$$I_{yp} = \frac{2b}{3} \left(\frac{h^3}{8} - a^3 \right)$$

Înlocuind în *relația (66)* se obține:

$$M_{iy} = \sigma_c \cdot \frac{2ba^2}{3} \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \left(\frac{h^2}{4a^2} - 1 \right) + \frac{E_p}{E} \left(\frac{h^3}{8a^3} - 1 \right) \right] \qquad (67)$$

Se notează: $u = \frac{2a}{h}$ şi $W_{ye} = \frac{bh^2}{6}$ *modulul de rezistență la încovoierea elastică a secțiunii*. Cu aceste notații *relația (67)* se scrie:

$$M_{iy} = \sigma_c \cdot W_{ye} \cdot u^2 \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) + \frac{E_p}{E} \left(\frac{1}{u^3} - 1 \right) \right] \qquad (68)$$

Cu ajutorul *relației (68)* se determină înălțimea ***2a*** a secțiunii solicitate în domeniul elastic.

Cazul *comportării ideal elasto-plastice* (*figura 16*) poate fi considerat un caz particular al comportării elasto-plastice prezentate mai sus în care $\boldsymbol{E_p = 0}$. *Relația (68)* devine în acest caz: $M_{iy} = \sigma_c \cdot \frac{W_{ye}}{2} \cdot \left(3 - u^2 \right)$

Concluzii:

1) *dacă materialul se deformează în domeniul plastic, se produce o creştere a rezistenței pentru secțiunea dreptunghiulară.*

2) *Dacă într-o secțiune deformațiile specifice sunt foarte mari, întreaga secțiune se deformează în domeniul plastic şi se obține în secțiunea respectivă* ***articulația plastică.***

Bibliografie

1. Anghel A., - *Rezistența materialelor, partea 1-a*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2001

2. Atanasiu, M. - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor,* Ed. U.P.B. 1994

3. Babeu T., - *Rezistența materialelor,* vol.1, Universitatea Tehnică Timişoara, 1991

4. Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, I. - *Probleme alese de Rezistența materialelor,* Ed. U.P.B. 1985

5. Bauşic V. (coord.), - *Rezistența materialelor,* Inst. Politehnic-Iaşi, 1978

6. Bârsănescu P. D., - *Rezistența materialelor,* vol.1, Solicitări simple, Ed. Gh.Asachi, Iaşi, 2001

7. Bia C., Ille V., Soare M.V., - *Rezistența mat. şi Teoria elasticității,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967

8. Buzdugan, Gh. - *Rezistența materialelor,* Ed. Academiei, Bucureşti 1986

9. Buzdugan, Gh. s.a. - *Culegere de probleme din Rezistența Materialelor,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1979.

10. Constantinescu, I., Dăneț, G.V. - *Metode noi pentru calcule de rezistență,* Ed.Tehnică, Bucureşti 1989

11. Constantinescu, I.N., Piciu, R.C., Hadar,A., Gheorghiu, H. - *Rezistența materialelor pentru inginerie mecanică,* Ed. BREN, Bucureşti 2006

12. Crețu, A. - *Probleme alese din Rezistența materialelor*, Ed. Mediamira, Cluj- Napoca 2001.

13. Crețu, A. - *Tensiuni, Stress, Contraintes*, Ed. UT Cluj-Napoca 1993

14. Curtu I., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Univ. Braşov, 1988

15. Curtu I., Ciofoaia M., Baba M., Cerbu C., Repanovici A., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Probleme IV, Ed. Infomarket, Braşov, 2005

16. Deutsch I., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

17. Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez Fl., - *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

18. Deutsch, I. s.a. - *Probleme din rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1986

19. Drobotă, V. - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1982

20. Dumitru I., Faur N., - *Elemente de calcul şi aplicații în rezistența materialelor,* Ed. Politehnică, Timişoara, 1999

21. Dumitru I., Neguț N., - *Elemente de Elasticitate, Plasticitate şi Rezistența Materialelor,* vol. I, Ed. Politehnică, Timişoara, 2003

22. Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N. - *Analiza structurilor din materiale izotrope şi anizotrope*, Editura Printech, Bucureşti 1998

23. Goia I., - *Rezistența materialelor,* vol. 1, ediția a 3-a, Editura Transilvania, Braşov, 2000

24. Horbaniuc D., - *Rezistența materialelor,* vol. 1, Inst. Politehnic-Iaşi, 1979

25. Horbaniuc D. (coord.), - *Rezistența mat. Elasticitate. Probleme,* Ed. „Gh. Asachi", Iaşi, 1993

26. Ispas, B., Constantinescu E., Alexandrescu, I. - *Rezistența materialelor. Culegere de probleme,* Ed Tehnică, Bucureşti 1997.

27. Iliescu, N., Jiga, G., Hadar A. - *Teste grilă de Rezistența materialelor*. Ed. PRINTECH, Bucureşti 2000

28. Marin, C - *Rezistența materialelor şi elemente de teoria elasticității,* Editura BIBLIOTHECA, Târgovişte 2006.

29. Mocanu D.R., - *Incercarea materialelor,* vol. 1-3, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982

30. Mocanu D.R., - *Rezistența materialelor,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980

31. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, Ed. CERMI, Iaşi, 1998

32. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, vol1, Ed. TEHNOPRESS, Iaşi, 2006

33. Ponomariov S.D. ş.a., - *Calculul de rezistență în construcția de maşini*, vol. I, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964

34. Ponomariov S.D. ş.a., - *Calculul de rezistență în construcția de maşini*, vol. III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967

35. Posea, N. s.a. - *Rezistența materialelor. Probleme,* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică Bucureşti 1986

36. Radu, Gh., Munteanu, M - *Rezistența materielelor şi elemente de Teoria Elasticității,* Vol. 2. Ed. MACARIE, Târgovişte 1994

37. Timoshenko, S.P. - *Teoria stabilității elastice*. Ed. Tehnică, Bucureşti 1967

38. Tripa M., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967

39. Tudose I, Constantinescu D.M., Stoica, M. - *Rezistența materialelor. Aplicații,* Ed. Tehnică, Bucureşti 1990

40. Voinea R., Voiculescu D., Simion P.F., - *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie,* Ed. Academiei, Bucureşti, 1989