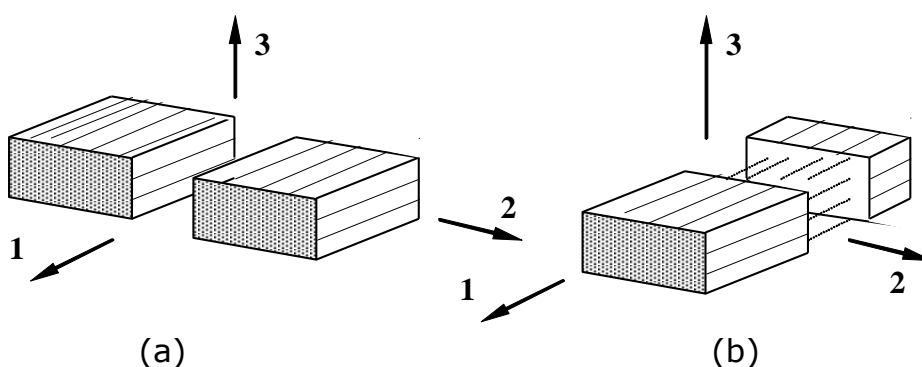

Noțiuni privind teoriile de rupere aplicate în studiul materialelor compozite

Moduri de producere a ruperii

În cadrul acestei discuții, trebuie mai întâi urmărit cum se poate produce deteriorarea compozitelor sub acțiunea diverselor tipuri de încărcări, exemplificând tot pe compozite armate cu fibre lungi, unidirecționale, pentru care aceste fenomene au complexitatea cea mai mare. Folosind o lamelă unidirecțională, se imaginează acționând asupra ei un complex de încărcări, producând o stare plană de tensiuni, cu valorile principale σ_1 , σ_2 , respectiv τ_{12} ; cedarea lamelei se poate produce în două moduri de bază:

- (a) prin fisurarea matricei;
- (b) prin distrugerea capacității de rezistență a fibrelor.



Tipuri de cedare în cazul compozitelor cu fibre lungi.

Fisurarea matricei înseamnă un ansamblu de fenomene, inclusiv ruperi la interfața fibre-matrice, sau propriu-zis în matrice, dar cu suprafețele de rupere orientate aproximativ pe direcția fibrelor; acest tip de cedare apare la stări de solicitare în care predomină tensiunile normale σ_2 și/sau tensiunile de forfecare τ_{12} .

Deteriorarea prin distrugerea calităților mecanice ale **elementelor de armare** implică ruperea (totală sau parțială) a fibrelor, însoțită de extragerea lor (locală) din matrice, ca și de ruperea matricei (în acele zone); pe această bază, ariile de rupere apar *perpendiculare* pe direcția armării; cedările de acest tip apar în stările de încărcare dominate de tensiunile normale σ_1 .

Se poate astfel preciza (analizând aspectul și orientarea suprafețelor de rupere dintr-un compozit cu armare unidirecțională) starea de tensiuni dată de o anumită solicitare; făcând raționamentul în sens invers, dacă se poate estima cu suficientă precizie starea reală de tensiuni dintr-un compozit, va fi posibilă estimarea, din faza de proiectare, a felului cum va avea loc cedarea materialului.

Caracterizarea stărilor concrete de tensiuni

Se imaginează o probă de compozit armat cu fibre lungi, așezate pe o singură direcție, plasată sub anumite încărcări mecanice, pentru care se cunosc parametrii stării de tensiuni ce se induce în material, cu raportare la sistemul de axe xyz , aceste axe fiind alese începând de la

direcția de solicitare; în aceste condiții, trebuie stabilite (relațiile cu care se calculează) valorile **principale** ale tensiunilor și deformațiilor specifice din probă, valori care apar în raționamentele și calculele implicate de teoriile de rupere.

Tensiunile principale se determină (după ce se stabilesc direcțiile lor de acțiune), în funcție de tensiunile de pe axele **xyz**, prin aplicarea unor *relații de transformare* pentru tensiuni (din teoria elasticității), care sunt *independente* de proprietățile materialului; **deformațiile specifice principale** se obțin ulterior din *relații de constituire* potrivite cu gradul de simetrie a proprietăților compozitului, respectiv prin aplicarea *relațiilor de transformare* pentru deformațiile specifice.

TEORII MACROMECHANICE DE RUPERE

În cazul cel mai general de material și de solicitare, este probabil ca **direcțiile principale** ale *materialului*, respectiv ale *tensiunilor și deformațiilor* să nu coincidă între ele; rezistența unei lamele compozite depinde inclusiv de orientarea solicitării exterioare, deci valoarea maximă a tensiunilor nu va reprezenta, de una singură, factorul critic în ruperea materialului.

Apare astfel ca necesară stabilirea unor *teorii anizotrope de rupere*, care să ia în considerare variația, în funcție de direcția solicitării, atât a tensiunilor (care depind de nivelul solicitării), cât și a rezistenței lamelei (depinzând de calitățile materialului, dar și de orientarea lamelei față de direcțiile principale ale acestuia).

Pentru stările **uniaxiale** de tensiuni sunt ușor de exprimat, pe baza parametrilor de rezistență ai materialului, valorile *maxime admisibile* ale tensiunilor ce se produc într-o structură, plasată într-o stare de solicitare dată, ca să nu se ajungă la ruperea structurii; mult mai dificil se obțin astfel de condiții pentru stările de solicitare complexe (**multi-axiale**), caracterizate prin prezența *simultană* a unor tensiuni de valori nenule, de naturi și direcții diferite; sunt necesare niște condiții matematice relativ complexe, denumite **criterii de rupere**, care pun în legătură parametrii stării de tensiuni cu parametrii de rezistență ai materialului analizat.

Criteriile de rupere clasice, stabilite pentru materialele *omogene și izotrope* sunt bine fundamentate, fiind bazate, ca factor determinant pentru ruperea unei structuri, pe un anumit parametru al solicitării, precum:

- tensiunea normală maximă (criteriul Rankine);
- tensiunea tangențială maximă (Tresca);
- energia potențială modificatoare de formă (von Mises).

Pentru studiul compozitelor s-au propus extinderi și adaptări ale acelor criterii, care să ia în considerare anizotropia proprietăților de rezistență și de rigiditate ale acestor materiale; se apreciază că peste 40 astfel de teorii au fost dezvoltate până în prezent, iar cele mai multe asumă următoarele **ipoteze simplificatoare**:

- ⇒ materialul este *omogen* și se comportă *liniar-elastic* până la rupere;
- ⇒ pentru fiecare combinație de tensiuni, produse prin solicitare, se ajunge la o *combinație precizată* de deformații specifice;
- ⇒ toate componentele unei stări de tensiuni și de deformații specifice *cresc în aceeași proporție* pe măsură ce crește nivelul solicitării.

Criteriile (anizotrope) de rupere se exprimă în funcție de *parametrii fundamentali de rezistență* ai lamelei compozite; unele teorii includ și ipoteza că nu există interacțiuni între componentele stărilor de tensiuni, altele iau în seamă aceste interacțiuni, în măsuri diferite; aplicarea unora dintre teorii necesită cunoașterea unor *proprietăți adiționale* de rezistență, de exemplu dintre cele studiate prin încercări mecanice de tip *biaxial*. Dintre numeroasele teorii macromecanice de rupere existente patru sunt considerate cele mai reprezentative, încât au și utilizarea cea mai largă (fiind și descrise pe scurt mai jos).

1. Teoria tensiunilor maxime

Această teorie consideră că ruperea lamelei compozite se produce atunci când *cel puțin una* dintre componentele de tensiuni de pe direcțiile axelor principale ale lamelei *depășește* nivelul *limitei* corespunzătoare *de rezistență* a materialului, în direcția respectivă; dacă se cunosc, sau se pot stabili, expresiile tensiunilor σ_1 , σ_2 și τ_{12} de pe axele principale ale materialului, atunci condiția de producere a ruperii se concretizează în **trei subcriterii**, scrise astfel:

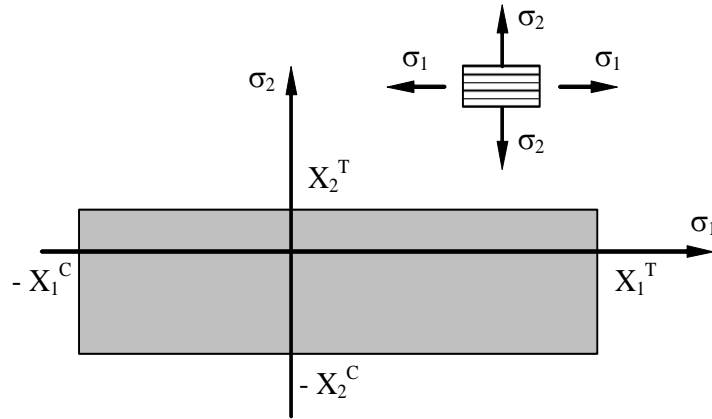
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sigma_1 &= \begin{cases} X_1^T & \text{pentru } \sigma_1 > 0 \\ -X_1^C & \text{pentru } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad \sigma_2 &= \begin{cases} X_2^T & \text{pentru } \sigma_2 > 0 \\ -X_2^C & \text{pentru } \sigma_2 < 0 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad &|\tau_{12}| = X_{12}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Cedarea lamelei se va produce, conform acestei teorii, atunci când devine adevărată cel puțin una (*oricare*) dintre cele trei condiții de mai sus; este interesant și util să se obțină și exprimări *vizuale* pentru aceste condiții, lucru valabil la oricare teorie de rupere; pentru *stările plane* de tensiuni este relativ ușor de realizat imaginea grafică a unui criteriu, dar operația devine complicată când crește complexitatea stării de solicitare analizate.

Prin modul de obținere, un astfel de grafic reprezintă **învelitoarea stărilor de cedare** (*failure envelope*) care sunt definite prin acel criteriu de rupere; se evidențiază astfel **limitele** valorilor admisibile ale tensiunilor produse de solicitarea considerată, ușurând stabilirea nivelului de încărcare la care se periclitează integritatea materialului; graficele de acest tip sunt folositoare, dacă pot fi trasate ușor, pentru orice stare concretă de încărcare.

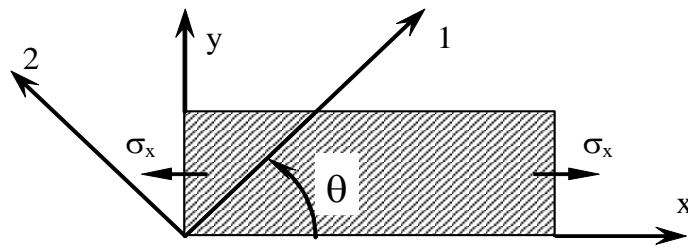
Se exemplifică această reprezentare, bazată pe *teoria tensiunilor maxime*, la o stare bidimensională de tensiuni (componenta τ_{12} fiind nulă); se plasează cele patru valori limită ale tensiunilor normale (două dintre ele *pozitive* –rezistențele la tracțiune ale materialului, două *negative* – pentru comprimare) pe axele de coordonate σ_1 - σ_2 ; valorile permise ale tensiunilor sunt incluse într-un **dreptunghi**, care este învelitoarea căutată a stărilor limită de încărcare.

Utilitatea practică a învelitorilor se înțelege dacă se imaginează o stare de tensiuni cu valori arbitrare, dar cunoscute, ale tensiunilor principale σ_1 și σ_2 ; pentru a verifica dacă ea poate fi preluată de materialul studiat, este suficient să se marcheze pe desen punctul de coordonate $(\sigma_1; \sigma_2)$; conform teoriei tensiunilor maxime, încărcarea va fi *permisă*, în condiții de siguranță, dacă punctul ce o reprezintă se află *în interiorul* dreptunghiului stărilor limită, dar va fi *interzisă* (va depăși capacitățile de rezistență ale materialului) dacă punctul se află *în afara* dreptunghiului (sau chiar și pe liniile sale de contur).



Trasarea învelitorii stărilor limită pentru o încărcare normală biaxială, după teoria tensiunilor maxime.

Cele discutate mai sus s-au referit la solicitări raportate la *direcțiile principale* ale lamelei compozite; pentru un caz general de solicitare, cu încărcarea aplicată pe o axă *înclinată* față de direcțiile principale, se trece de la tensorul tensiunilor scris în sistemul $\mathbf{x-y}$ la cel al tensiunilor *principale*, folosind *relațiile de transformare* pentru tensiuni, cu raportare la axele principale ale materialului.



Lamela unidirecțională solicitată la tracțiune dezaxată.

Se consideră de exemplu o lamelă unidirecțională, solicitată *uniaxial* cu tensiuni normale σ_x , orientate *oblic* față de direcțiile principale ale lamelei (adică o solicitare *dezaxată*, “off-axis”); componentele tensiunilor pe direcțiile principale se exprimă în funcție de tensiunea σ_x și de unghiul θ , astfel:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta ; \quad \sigma_2 = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta ; \quad \tau_{12} = -\sigma_x \cdot \sin \theta \cos \theta \quad (2)$$

Se poate imagina că fiecare dintre componente poate ajunge să egaleze parametrul de rezistență (a materialului analizat) care îi corespunde, determinând astfel cedarea, sub solicitarea aplicată, a compozitului; se pot obține astfel valorile limită ale tensiunii σ_x , adică tocmai *rezistența* lamelei \mathbf{X}_x pentru cazul în care este solicitată *axial* sub unghiul θ față de direcția armării.

Dacă solicitarea produce tensiuni *pozitive* ($\sigma_x > 0$), se obțin limitele (care nu trebuie atinse de tensiunea σ_x !) de **rezistență la tracțiune** pe direcția \mathbf{x} :

$$\mathbf{X}_x^T = \frac{\mathbf{X}_1^T}{\cos^2 \theta} ; \quad \mathbf{X}_x^T = \frac{\mathbf{X}_2^T}{\sin^2 \theta} ; \quad \mathbf{X}_x^T = \frac{\mathbf{X}_{12}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3)$$

Pe de altă parte, pentru solicitarea cu tensiuni *negative* ($\sigma_x < 0$), se obține **rezistența la comprimare** pe direcția **x**:

$$X_x^C = \frac{X_1^C}{\cos^2 \theta} ; \quad X_x^C = \frac{X_2^C}{\sin^2 \theta} ; \quad X_x^C = \frac{X_{12}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (4)$$

Observații:

1. Pentru o valoare dată a unghiului de înclinare a încărcării (în raport cu direcția de armare) se reține drept cifră a rezistenței doar unul singur (primul la care se ajunge când solicitarea crește, cel mai mic în valoare absolută!) dintre rezultatele obținute din relațiile (3) sau (4).
2. După cum s-a arătat anterior, dacă tensiunile și rezistențele de **forfecare** sunt raportate la direcțiile principale ale materialului, atunci semnul lor nu are importanță, iar în relațiile de calcul se introduc valorile absolute.

Este interesant că această metodă de estimare a rezistenței lamelei permite, pe baza unor analize și relații ca mai sus, chiar și stabilirea preliminară a modului în care se va produce ruperea lamelei, fiind posibilă și ilustrarea grafică a acestor evaluări, care facilitează utilizarea lor practică.

Prognozarea modului de rupere folosind teoria tensiunilor maxime

Fiind cunoscute valorile celor 5 parametri fundamentali de rezistență ai lamelei compozite, se pot trasa graficele funcțiilor din relațiile discutate mai sus:

$$X_x^T = \frac{X_1^T}{\cos^2 \theta} ; \quad X_x^T = \frac{X_2^T}{\sin^2 \theta} ; \quad X_x^T = \frac{X_{12}}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$X_x^C = \frac{X_1^C}{\cos^2 \theta} ; \quad X_x^C = \frac{X_2^C}{\sin^2 \theta} ; \quad X_x^C = \frac{X_{12}}{\sin \theta \cos \theta}$$

În cazul în care unghiul θ ia toate valorile între 0° și 90° ; conform unei observații care a fost făcută anterior, pentru fiecare valoare a lui θ se consideră valabilă și se trece pe graficul final doar cea mai mică dintre valorile prognozate ale rezistenței (X_x); desigur că valorile privind încărcările de întindere sunt pozitive și se figurează deasupra axei absciselor, pe când cele de compresiune se așează sub această axă.

Pentru fiecare domeniu de reprezentare (adică potrivit cu semnul tensiunilor produse), cele trei relații (subcriterii) vor avea evoluții grafice distincte, în sensul că fiecare va putea conduce la valoarea minimă (dintre cele trei calculate) pentru un anumit interval de pe axa orizontală a graficului; prin reunirea tuturor acestor porțiuni de minim se obține ceea ce va reprezenta *învelitoarea stărilor limită*, pentru solicitarea dezaxată a lamelei, în funcție de direcția pe care se aplică încărcarea.

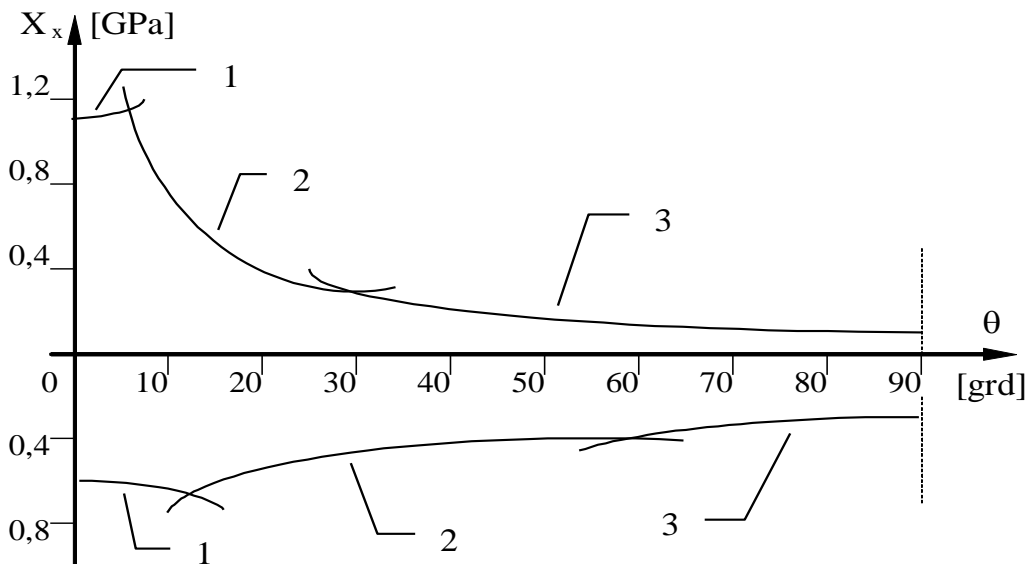
Urmărind care dintre condițiile de mai sus conduce la valoarea limită într-un anumit punct de pe grafic, adică pentru o anumită înclinare a direcției de solicitare față de axele principale ale materialului, se poate prognoza modul cum se va rupe lamela; cele prezentate anterior (privind tipurile de rupere) au arătat că cedarea lamelei se poate produce în două categorii de variante:

- prin atingerea limitei de rezistență la **tracțiune** sau la **compresiune longitudinală**, caz în care cedarea va fi determinată de *pierderea capacității de rezistență a fibrelor*;
- prin egalarea limitelor de rezistență la **solicitările uniaxiale transversale**, respectiv a rezistenței la **forfecare**, oricare dintre acestea conducând la cedare prin *fisurarea matricei*.

Pentru concretizare, acest tip de grafic se poate trasa și pur teoretic, pentru un material ale cărui caracteristici de rezistență pot fi găsite în literatură; se propune spre analiză un compozit cu matrice din rășină *epoxidică* și armare cu fibre lungi de *sticlă E*; parametrii fundamentali de rezistență se consideră a fi următorii:

$$X_1^T = 1080; X_1^C = 620; X_2^T = 39; X_2^C = 128; X_{12} = 89 \quad [\text{MPa}]$$

Se introduc aceste date în fiecare dintre subcriteriile teoriei, urmând procedura de mai sus; se obține o imagine a modului cum variază, în funcție de unghiul de înclinare a încărcării, rezistența (X_x) a lamelei, la solicitările uniaxiale dezaxate.



Variația rezistenței la solicitări uniaxiale a unui compozit sticlă E /epoxi, în funcție de orientarea solicitării față de fibrele de armare.

Zonele delimitate pe grafic prin intermediul celor șase porțiuni de curbe, de ecuații diferite permit să se facă distincția între diverse moduri în care se poate produce ruperea materialului; astfel, în porțiunile notate cu (1) rezistența cea mai mică a compozitului se înregistrează la *tracțiune* (deasupra axei absciselor), respectiv *compresiune* (sub axă) de tip *longitudinal* (dată de tensiunile σ_1), iar ruperea se produce prin *distrugerea* (locală) a *fibrelor*; pentru unghiurile de înclinare a încărcării din zonele (2), cedarea se produce sub acțiunea tensiunilor de *forfecare* τ_{12} , adică prin *fisurarea matricei*; același mod de rupere va fi dominant pe zonele (3), dar sub acțiunea tensiunilor σ_2 , adică prin *tracțiune* (respectiv *compresiune*) *transversală*.

Concluzii asupra primei teorii de rupere

Teoria de producere a ruperii compozitelor datorită **tensiunilor maxime** din starea de solicitare aplicată este ușor de înțeles și de utilizat în analize de uz general; **dezavantajul** ei principal (pe lângă dificultatea separării condiției de rupere în *trei subcriterii*, în locul unui eventual criteriu unic) este că *nu ține seama de vreo interacțiune a tensiunilor*, în stări biaxiale de solicitare; în consecință, pentru astfel de solicitări teoria nu conduce la potriviri mulțumitoare cu rezultatele experimentelor.

Teoria are însă **avantajul** că permite *prognostizarea modului de cedare a lamelei*, plus emiterea unor predicții asupra tensiunilor principale care vor duce la distrugerea materialului, dar și cu privire la modul specific de producere a ruperii – prin deteriorarea fibrelor, sau a matricei; se consideră că această teorie este aplicabilă cu rezultate corecte în special pentru materiale cu *ruperi fragile*.

2. Teoria deformației specifice maxime

Cedarea structurii se produce, conform acestei teorii, atunci când *cel puțin una* dintre componentele de *deformații specifice* de pe *direcțiile principale* ale materialului *depășește valoarea deformației ultime* (deformația specifică la rupere) a materialului (pe direcția respectivă); are meritul de a lua în considerare, într-o anumită măsură, **interacțiunea** dintre componentele stării de tensiuni, prin apariția coeficienților de contracție Poisson (care fac legătura între tensiunile normale și alungirile specifice de pe direcții diferite).

Pentru exprimarea condițiilor matematice ale teoriei trebuie cunoscute **deformațiile specifice la rupere** ale materialului, care se notează astfel:

- $\epsilon_{1u}^{T(C)}$ = alungirea specifică la rupere pentru tracțiune (compresiune) *longitudinală*;
- $\epsilon_{2u}^{T(C)}$ = alungirea specifică la rupere pentru tracțiune (compresiune) *transversală*;
- γ_{12}^u = lunecarea specifică la rupere, pentru forfecare *în planul armării*.

Notând cu ϵ_1 , ϵ_2 și γ_{12} – deformațiile specifice produse de solicitarea analizată și raportate la direcțiile principale ale lamelei, teoria conduce la **trei subcriterii** de producere a ruperii:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \epsilon_1 &= \begin{cases} \epsilon_{1u}^T & \text{pentru } \epsilon_1 > 0 \\ \epsilon_{1u}^C & \text{pentru } \epsilon_1 < 0 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad \epsilon_2 &= \begin{cases} \epsilon_{2u}^T & \text{pentru } \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_{2u}^C & \text{pentru } \epsilon_2 < 0 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad |\gamma_{12}| &= \gamma_{12}^u
 \end{aligned} \tag{5}$$

Să presupunem că se aplică teoria unei solicitări cu o *stare biaxială de tensiuni*, componentele tensiunilor fiind orientate arbitrar față de axele principale ale materialului; folosind relațiile de transformare pentru tensiuni se găsesc componentele tensiunilor de pe direcțiile axelor principale, σ_1 , σ_2 și τ_{12} , iar din legea lui Hooke generalizată se obțin componentele deformațiilor specifice:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \cdot \sigma_2); \epsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \cdot \sigma_1); \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \tag{6}$$

Deformațiile specifice la rupere ale materialului se stabilesc prin încercări mecanice uniaxiale și de forfecare pură, apoi sunt puse în legătură cu parametrii fundamentali de rezistență:

$$\varepsilon_{1u}^T = \frac{X_1^T}{E_1}; \quad \varepsilon_{1u}^C = -\frac{X_1^C}{E_1}; \quad \varepsilon_{2u}^T = \frac{X_2^T}{E_2}; \quad \varepsilon_{2u}^C = -\frac{X_2^C}{E_2}; \quad \gamma_{12}^u = \frac{X_{12}}{G_{12}} \quad (7)$$

Cele trei subcriterii (5) se scriu, în funcție de tensiunile principale și de parametrii

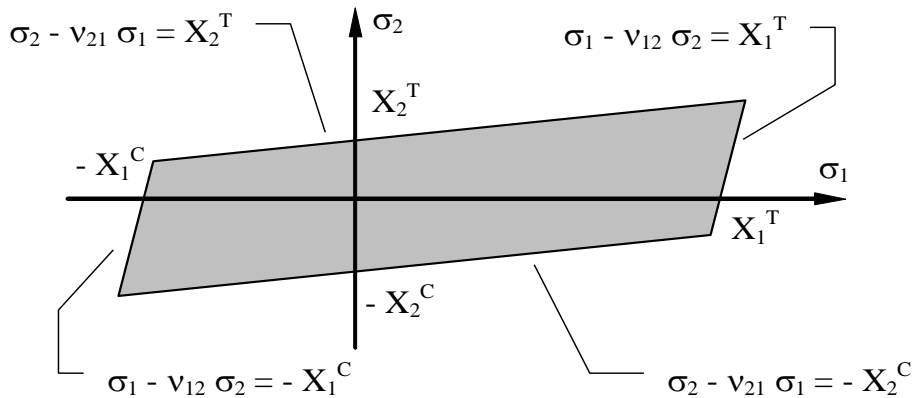
$$\sigma_1 - \nu_{12} \cdot \sigma_2 = \begin{cases} X_1^T & \text{pentru } \varepsilon_1 > 0 \\ -X_1^C & \text{pentru } \varepsilon_1 < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_2 - \nu_{21} \cdot \sigma_1 = \begin{cases} X_2^T & \text{pentru } \varepsilon_2 > 0 \\ -X_2^C & \text{pentru } \varepsilon_2 < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$|\tau_{12}| = X_{12}$$

fundamentali de rezistență, astfel:

Ca și la prima teorie, imaginea grafică a stărilor limită se obține ușor pentru o stare bidimensională de tensiuni (la care $\tau_{12} = 0$), observând că primele două condiții (8) reprezintă în planul $(\sigma_1 - \sigma_2)$, câte o *pereche de drepte*, paralele între ele, dar având direcții înclinate față de axele de coordonate.



Trasarea unei învelitori a stărilor limită pentru o încărcare normală biaxială, conform teoriei deformației maxime.

Valorile admisibile ale tensiunilor principale pentru starea de încărcare studiată se reprezintă prin *punctele din interiorul paralelogramului* format de dreptele-limită de mai sus; trebuie observat că rezistențele materialului la tracțiune și compresiune diferă între ele, pe ambele direcții, astfel încât paralelogramul obținut ca *învelitoare a stărilor de cedare* are centrul deplasat față de originea sistemului de axe.

Concluzii cu privire la a doua teorie de rupere

Teoria **deformațiilor specifice maxime** este relativ simplu de aplicat, iar relațiile la care conduce se exprimă (ca și la prima teorie) în funcție de tensiunile principale din starea de încărcare; este remarcabil că se ia în considerare un anumit grad de *interacțiune* între tensiunile principale de pe direcții diferite. Punctele slabe ale teoriei sunt exprimarea condiției de rezistență prin *trei subcriterii*, precum și *lipsa posibilității de predicție* a modului în care se va produce *ruperea* compozitului.

3. Teoria energiei potențiale modificatoare de formă (criteriul Tsai-Hill)

Titulatura amintește de anumite noțiuni din teoria clasică a elasticității; criteriile de acest tip au fost propuse în trecut, pentru *materiale izotrope* (metale, în special) de tip *ductil*, de cercetători ca von Mises, Hencky sau Nadai; de exemplu, pentru o stare bidimensională de tensiuni, cu raportare la direcțiile principale ale tensiunilor, *criteriul* de cedare *von Mises* se scrie sub forma următoare:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_L^2 \quad (9)$$

unde σ_L este valoarea *tensiunii limită* care a fost adoptată pentru material, în starea de solicitare respectivă.

O formă modificată acestui criteriu a fost propusă de *Hill*, cu aplicare pentru *materiale ductile cu proprietăți anizotrope*, astfel:

$$A \cdot \sigma_1^2 + B \cdot \sigma_2^2 + C \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + D \cdot \tau_{12}^2 = 1 \quad (10)$$

unde coeficienții A, B, C, D trebuie stabiliți, pentru cazul particular aflat în studiu; ei reprezintă *parametri ai materialului*, caracterizând inclusiv gradul lui de *anizotropie*.

Este interesant de remarcat că o astfel de ecuație *nu se poate folosi* drept criteriu energetic de cedare pentru *materiale general anizotrope*, la care nu se pot separa efectele produse de *energia potențială de modificare a formei*, de modificările de volum (dilatările) date de caracterul *anizotrop* al materialului; criteriul a fost ulterior adaptat, de *Azzi și Tsai*, la *compozite ortotrope* (inclusiv lamele izotrope transversal), observând că parametrii din ecuația (10) se pot pune în legătură cu parametrii de rezistență ai lamelei, prin încercări mecanice elementare de tipul explicat anterior.

Pentru o încărcare uniaxială de tracțiune *longitudinală*, dusă până la ruperea probei, parametrii de tensiuni din ecuația de mai sus vor fi $\sigma_1^u = X_1$; $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$, încât primul coeficient va fi:

$$A = \frac{1}{X_1^2} \quad (11)$$

La aplicarea unei încărcări uniaxiale de tracțiune *transversală*, rezultă al doilea coeficient:

$$B = \frac{1}{X_2^2} \quad (12)$$

La o încărcare de *forfecare (pură) în plan*, dusă, de asemenea, până la rupere, parametrii de tensiuni vor fi $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\tau_{12}^u = X_{12}$, astfel încât *coeficientul tensiunii tangențiale* din ecuația de mai sus rezultă sub forma:

$$D = \frac{1}{X_{12}^2} \quad (13)$$

Despre coeficientul C, care a rămas nedeterminat, se poate spune că reprezintă în ecuație *măsura în care se produc interacțiuni* între tensiunile normale $\sigma_1 - \sigma_2$, astfel încât trebuie stabilit printr-o *încercare mecanică de tip biaxial*; presupunând că aceasta se produce sub acțiunea simultană a tensiunilor normale $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, cu $\tau_{12} = 0$, se poate admite că ruperea ar avea loc după criteriul tensiunii maxime, în sensul că materialul va ceda atunci când, datorită solicitării, se atinge pragul de rezistență al uneia dintre tensiunile normale, adică σ_1 și σ_2

ajung la pragul de rezistență la *tracțiune transversală* X_2 (care pt. materiale ortotrope armate unidirecțional este mult mai mică decât rezistența *longitudinală* X_1); se introduc acestea și valorile de mai sus în ecuația (10) și se obține (pt. starea de încărcare biaxială considerată) următoarea expresie a criteriului:

$$\frac{1}{X_1^2} \cdot X_2^2 + \frac{1}{X_2^2} \cdot X_2^2 + C \cdot X_2 \cdot X_2 + \frac{1}{X_{12}^2} \cdot 0 = 1$$

După efectuarea simplificărilor se ajunge la valoarea coeficientului căutat:

$$C = -\frac{1}{X_1^2} \quad (14)$$

Dacă se introduc coeficienții astfel calculați în ecuația (10), se ajunge la expresia finală a **criteriului energetic de rupere Tsai-Hill**, pentru materiale *ortotrope* aflate în *stare plană de tensiuni*, astfel:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{X_{12}^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X_1^2} = 1 \quad (15)$$

Se observă că în această ecuație nu se poate face o *distincție* aparentă între *rezistențele* axiale de *tracțiune/compresiune* ale materialului dar, în funcție de semnul tensiunilor normale principale ale stării de solicitare, în ecuație se pot introduce valorile potrivite ale rezistențelor respective, astfel:

$$X_1 = \begin{cases} X_1^T & \text{pentru } \sigma_1 > 0 \\ X_1^C & \text{pentru } \sigma_1 < 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$X_2 = \begin{cases} X_2^T & \text{pentru } \sigma_2 > 0 \\ X_2^C & \text{pentru } \sigma_2 < 0 \end{cases}$$

Învelitoarea stărilor limită de la acest criteriu de rupere reprezintă o reunire a unor porțiuni de suprafețe curbe de tip “membrană”, de formă complexă, delimitând un volum închis în spațiul tri-dimensional ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$); secțiuni plane din el se obțin pentru valori constante (fixate) k ale raportului (τ_{12}/X_{12}) dintre tensiunea tangențială principală și rezistența la forfecare în plan a materialului studiat.

În acest fel, ecuațiile acestor secțiuni învelitoare ajung la forma următoare:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X_1^2} = 1 - k^2 \quad (17)$$

Imaginea grafică se va obține prin reprezentarea unei astfel de *proiecții plane* a învelitorii stărilor limită; aceasta este relativ complexă, fiind formată din patru arce de elipsă (câte unul pentru fiecare cadran din sistemul de axe), având punctele lor de intersecție (două câte două) plasate chiar pe axele de coordonate σ_1 și σ_2 .

Mai trebuie discutat despre modul cum se poate aplica *criteriul Tsai-Hill* la solicitări care nu se dirijează pe axele principale ale materialului; dacă se consideră o încărcare uniaxială “dezaxată” sub unghiul θ față de axele principale ale lamelei, se poate propune (prin analogie cu cele prezentate la teoria tensiunilor maxime) să se evalueze *rezistența* ($\sigma_x^u = X_x$) lamelei la o *solicitare uniaxială* aplicată pe direcția x .

Se folosesc mai întâi relațiile (2), transformând tensiunea σ_x după axele principale ale materialului, apoi se imaginează, după modelul relației (3) sau (4) că în urma solicitării se ajunge ca fiecare tensiune principală să egaleze parametrul de rezistență respectiv; se exprimă astfel, prin acei parametri, rezistența X_x , apoi se fac înlocuirile corespunzătoare în ecuația generală (15) a criteriului Tsai-Hill.

Se ajunge astfel la o relație de estimare a rezistenței (X_x) a compozitului:

$$\frac{1}{X_x^2} = \frac{m^4}{X_1^2} + \frac{n^4}{X_2^2} + \left[\frac{1}{X_{12}^2} - \frac{1}{X_1^2} \right] m^2 \cdot n^2 \quad (18)$$

La fel ca mai sus, cu m și n sunt notate funcțiile trigonometrice (cosinus, sinus) ale unghiului θ dintre direcția x a solicitării și direcția armării; expresia permite estimarea unei valori a rezistenței compozitului la solicitarea axială pe orice direcție, înclinată față de fibrele de armare, dacă se cunosc valorile celor trei parametri principali ai rezistenței materialului care apar în membrul drept din relația (18).

Este de remarcat că, pentru *compozite de rezistență înaltă*, la care caracteristica X_1 de rezistență la tracțiune sau compresiune longitudinală este mult mai mare ca valoare, în raport cu rezistența la forfecare X_{12} , ecuația se restrânge la o *formă aproximativă*, mai simplă, în felul următor:

$$\frac{1}{X_x^2} \cong \frac{m^4}{X_1^2} + \frac{n^4}{X_2^2} + \frac{m^2 \cdot n^2}{X_{12}^2} \quad (19)$$

Această relație poate fi utilă pentru calcule rapide, fără pretenții asupra preciziei rezultatelor.

Concluzii cu privire la a treia teorie de rupere

Teoria de rupere **Tsai-Hill** are *avantajul* că se exprimă printr-un *criteriu unic*, față de un număr de trei subcriterii prin care se scriu condițiile de rupere la cele două teorii anterioare; prin aplicarea ei se ia în considerare în măsură apreciabilă *interacțiunea* dintre componentele tensiunilor principale σ_1 , σ_2 și τ_{12} , încât rezultatele estimărilor sunt mai aproape de datele experimentale, față de teoriile precedente. Există și un **dezavantaj** care nu poate fi neglijat - *nu se poate face* în mod direct *distincția* între folosirea rezistenței la *întindere* și la *comprimare* ale materialului; o atenuare se obține prin soluția ca parametrii de rezistență să se înlocuiască, în ecuația (15), în concordanță cu semnele tensiunilor normale din starea de tensiuni studiată, așa cum s-a specificat mai sus.

4. Teoria polinomială a tensorului interactiv (criteriul Tsai-Wu)

În ultimele decenii s-au cercetat *teorii generale* de rupere pentru materialele *anizotrope*, care să evite limitările teoriilor anterioare, încât să se poată prognoza rezistența materialului într-o stare generală de tensiuni, pentru care nu există date experimentale prealabile; se ajunge, în principiu, la un *criteriu* de forma unui *invariant* (o valoare numerică precizată), scris ca *sumă de termeni* în care apar, la diferite puteri, componentele tensorilor tensiunilor și/sau ai deformațiilor specifice.

O **teorie polinomială tensorială** s-a propus de Tsai și Wu, presupunând că există o *suprafață critică de rupere* în spațiul definit de tensiunile principale (σ_1 , σ_2 , σ_3); se face exemplificarea pe o *stare plană de tensiuni*, caz în care criteriul se exprimă în forma:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_S \cdot \tau_{12}^2 + 2 F_{12} \cdot \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (20)$$

Unul dintre avantajele importante ale teoriei provine din faptul că *termenii liniari* din această ecuație permit să se facă distincția, la înlocuire, între valorile *rezistențelor materialului* la tracțiune și comprimare, iar prin coeficientul F_{12} se ține seama și de *interacțiunea dintre tensiunile normale* σ_1 și σ_2 .

Pentru o stare concretă de încărcare, este necesar să fie particularizată expresia ecuației (20); trebuie deci stabiliți coeficienții F_i , de exemplu aplicând (imaginar) încercări mecanice elementare pe o lamelă din compozitul analizat; mai întâi, considerând o încercare de **tracțiune longitudinală** (uniaxială, pe direcția principală 1 a materialului) dusă *până la rupere*, aceasta va fi caracterizată de parametrii $X_1^T = \sigma_1^u$; $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$

Ecuția de tip (20) se va scrie așadar sub forma:

$$F_1 \cdot X_1^T + F_{11} \cdot (X_1^T)^2 = 1 \quad (21)$$

În mod analog, o încercare (uniaxială) de **compresiune longitudinală** va fi particularizată prin valorile: $-X_1^C = \sigma_1^u$; $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$

Prin înlocuirea lor în ecuația (20) se ajunge la expresia:

$$-F_1 \cdot X_1^C + F_{11} \cdot (X_1^C)^2 = 1 \quad (22)$$

Ultimele două ecuații formează un sistem, cu două necunoscute, din care se obțin valorile primilor doi coeficienți:

$$F_1 = \frac{1}{X_1^T} - \frac{1}{X_1^C}, \text{ respectiv } F_{11} = \frac{1}{X_1^T \cdot X_1^C} \quad (23)$$

Procedând similar, dar luând în considerare *încercări uniaxiale transversale* de **tracțiune** și de **compresiune** se obține a doua pereche de coeficienți:

$$F_2 = \frac{1}{X_2^T} - \frac{1}{X_2^C}, \text{ respectiv } F_{22} = \frac{1}{X_2^T \cdot X_2^C} \quad (24)$$

Urmând aceeași cale, pentru o încercare de **forfecare pură** dusă *până la rupere* se obține condiția:

$$F_S = \frac{1}{X_{12}^2} \quad (25)$$

Coeficientul F_{12} trebuie obținut printr-o **încercare mecanică** biaxială; folosind o încărcare normală egal biaxială, cu parametrii: $\tau_{12} = 0$; $\sigma_1^u = \sigma_2^u = X_{(1-2)}$ se ajunge la scrierea ecuației (21) sub forma următoare:

$$(F_1 + F_2) X_{(1-2)} + (F_{11} + F_{22} + 2 F_{12}) X_{(1-2)}^2 = 1 \quad (26)$$

Notația $X_{(1-2)}$ din această relație reprezintă rezistența, care trebuie determinată experimental, a materialului studiat, la solicitarea de întindere egală biaxială, caracterizată prin condiția $\sigma_1 = \sigma_2$; această valoare numerică este relativ greu de stabilit, încât constituie principala dificultate în aplicarea prezentului criteriu de rupere.

TEORII DE RUPERE

În continuare, ecuația (26) poate fi rezolvată, pentru a găsi necunoscuta F_{12} , pe baza valorilor celorlalți coeficienți:

$$F_{12} = \frac{1}{2 X_{(1-2)}^2} \left[1 - X_{(1-2)} \left(\frac{1}{X_1^T} - \frac{1}{X_1^C} + \frac{1}{X_2^T} - \frac{1}{X_2^C} \right) - X_{(1-2)}^2 \left(\frac{1}{X_1^T \cdot X_1^C} + \frac{1}{X_2^T \cdot X_2^C} \right) \right] \quad (27)$$

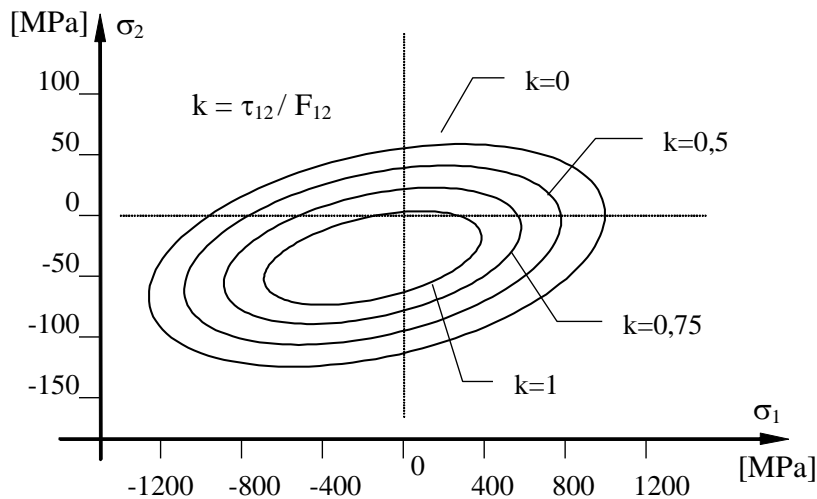
Se remarcă interacțiunea foarte complexă a parametrilor de rezistență, în calculul acestui coeficient, ceea ce îl face și greu de obținut; totuși, pentru multe situații concrete de solicitare acest coeficient nu este hotărâtor, iar o valoare *aproximată* a lui este suficientă; de obicei se consideră acceptabilă, pentru estimarea lui, următoarea relație simplificată:

$$F_{12} \cong - \frac{1}{2 \sqrt{X_1^T \cdot X_2^T \cdot X_1^C \cdot X_2^C}} \quad (28)$$

Se poate vorbi și despre *imagini grafice* pentru condițiile la limită date de această teorie; folosind forma redusă (20) a *criteriului Tsai-Wu* se obține ca *învelitoare a stărilor limită* un volum închis, apropiat de un elipsoid și plasat în sistemul de axe de $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$; pt. a reprezenta una dintre învelitori se apelează la secțiuni transversale ale ei, obținute intersectând volumul citat cu câte un plan perpendicular pe axa τ_{12} a tensiunilor tangențiale principale; se iau în considerare valori arbitrare, dar fixate, ale tensiunii de forfecare, de tip $\tau_{12} = k X_{12}$, (coeficientul k fiind mai mic decât unitatea!), iar ecuația învelitorii devine:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1 - k^2 \quad (29)$$

Dacă se atribuie factorului k diverse valori, între 0 și 1, se obțin în planul (σ_1, σ_2) reprezentări de forma unor *elipse alungite*, cu axele principale înclinate și deplasate față de axele de coordonate; o reprezentare concretă necesită calculul efectiv al coeficienților F_i din ecuația (29), folosind parametrii de rezistență ai materialului pentru care se fac calculele estimative.



Proiecții ale învelitorii stărilor limită, după criteriul Tsai-Wu,
pentru un compozit sticlă E / epoxi, în stare de încărcare biaxială.

De exemplu, folosind procedura descrisă, proiecțiile plane ale învelitorii de rupere pentru un compozit cu matrice din rășină epoxidică, armat (unidirecțional) cu fibre lungi de sticlă E, cu parametri de rezistență cunoscuți, vor arăta ca în figura de mai sus.

În legătură cu reprezentarea stărilor limită date de un criteriu de rupere se reamintește că parametrii oricărei stări de solicitare (tensiunile normale principale σ_1 și σ_2) se vor reprezenta printr-un singur punct pe un desen având aspectul de mai sus; dacă acel punct se va afla *în afara* curbei închise care reprezintă învelitoarea (inclusiv pe conturul ei), se va înțelege că respectiva stare de încărcare este *periculoasă* (poate duce la rupere) pentru compozitul considerat, deci trebuie evitată; în schimb, stările reprezentate prin puncte din interiorul învelitorii pot fi preluate în siguranță de materialul supus evaluării, deci sunt permise.

Concluzii cu privire la a patra teorie de rupere

Criteriul de rupere **Tsai-Wu** este relativ ușor de folosit și de adaptat la calcule automatizate; este *avantajos* întrucât conduce la predicții corecte privind *rezistența la solicitări biaxiale* a materialelor analizate; este remarcabil că, prin termenii liniari din expresia matematică a criteriului *se ține seama de diferențele între rezistențele la tracțiune și la compresiune* ale materialului, ceea ce se realizează prin puține teorii de rezistență. În plus, coeficientul care evaluează *interacțiunea dintre tensiunile normale* principale poate fi tratat ca mărime independentă și poate fi stabilit, dacă se poate face apel la date experimentale corecte și potrivite studiului respectiv; o **deficiență** a teoriei este că nu poate prognoza modul specific în care se va produce ruperea materialului.

Aspecte privind aplicabilitatea diverselor teorii de rupere

Cele patru teorii discutate sunt cele mai reprezentative și utilizate cel mai larg în practica proiectării de compozite dar, ca și la materialele omogene și izotrope, pentru fiecare material și stare de solicitare trebuie stabilit criteriul de rupere potrivit (care conduce la predicții credibile); valabilitatea și posibilitatea de a aplica o anumită teorie depind de ușurința punerii ei în practică și de gradul în care predicțiile ei se pot confirma prin rezultate experimentale disponibile; în cele ce urmează vor fi evidențiate (inclusiv prin intermediul unei sinteze, sub formă de tabel) câteva caracteristici ale teoriilor descrise, grupate după trei criterii utile pentru aplicarea lor în tehnică.

Se consideră că *primele două teorii* sunt aplicabile în cazurile de comportare predominant **fragilă** a materialelor și pentru stări de solicitare care au punctele reprezentative plasate *în primul cadran* (tensiuni σ_1 și σ_2 de valori pozitive) al învelitorii stărilor limită; doar teoria deformației specifice maxime ia în considerare (în măsură relativ mică), interacțiunea dintre tensiunile principale de direcții diferite (prin prezența în relații a coeficienților Poisson); deși simple conceptual, cele două teorii nu sunt convenabile pentru calcule automatizate, în primul rând datorită celor trei subcriterii prin care sunt exprimate.

Criteriile *interactive* (incluzând teoriile *Tsai-Hill* și *Tsai-Wu*) se consideră aplicabile pentru o comportare predominant **ductilă** a materialului, la încărcări de forfecare și/sau de compresiune.

Teoria **Tsai-Hill** este adaptată pentru compozite eterogene *de tip fragil*, dar pentru fiecare cadran al învelitorii de rupere în planul σ_1 - σ_2 necesită date diferite de intrare, datorită inabilității teoriei de a apela automat și distinct la rezistențele materialului la tracțiune și la compresiune; coeficientul de interacțiune dintre tensiunile σ_1 și σ_2 este un factor important în

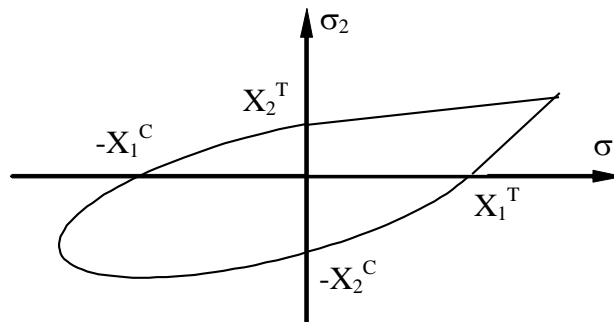
TEORII DE RUPERE

aplicarea metodei, crescând acuratețea rezultatelor, dar reprezintă și un factor de complicare, încât pentru calcule în timp scurt se preferă să fie stabilit cu aproximație; o determinare precisă a lui impune să se realizeze experimental o formă de încercare *biaxială* de rezistență, cu folosirea unei aparaturi speciale de laborator.

Privire comparativă asupra teoriilor de rupere

Baze fizice	Convenabilitate operațională	Cerințe de date experimentale
Teoria tensiunilor maxime :		
Comportarea la tracțiune a materialelor fragile Tensiunile principale nu interacționează	Neconvenabilă (3 subcriterii)	Câțiva parametri, care se obțin prin încercări mecanice simple, unidirecționale, standardizate.
Teoria deformației maxime :		
Idem, cu o anumită interacțiune între tensiuni	Idem	Idem
Criteriul Tsai-Hill :		
Comportarea ductilă a materialelor anizotrope	Poate fi folosit în calculul automatizat	Pe lângă încercările mecanice uniaxiale, este necesară și una de tip biaxial.
Criteriul Tsai-Wu :		
Construcție matematică riguroasă	General, cuprinzător și ușor de aplicat	Parametri numeroși; necesită un program experimental coerent.

Teoria **Tsai-Wu** este bine fundamentată matematic și simplu de aplicat în practică; conține coeficienți suplimentari, care fac inclusiv distincția între rezistențele la compresiune și la tracțiune. Un aspect comun celor două criterii interactive privește coeficientul F_{12} , care poate fi aproximat, sau poate fi determinat mai precis, dacă sunt condiții pentru a efectua încercarea mecanică biaxială; de fapt, trebuie subliniat că, pentru stabilirea numeroșilor parametri de rezistență folosiți în exprimarea criteriului, este necesar să fie stabilit un *program cuprinzător pentru caracterizarea experimentală* a materialului.

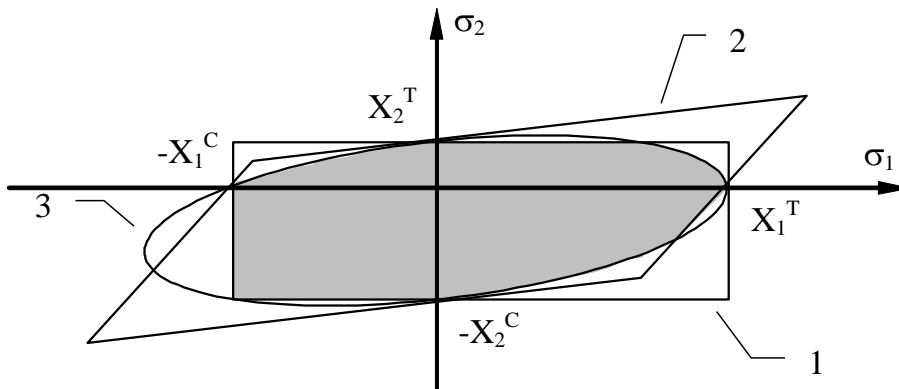


Trebuie făcută observația că, pentru multe materiale anizotrope, folosirea pentru estimări a unei singure teorii de rupere nu este de obicei mulțumitoare (așa este cazul acelor compozite care prezintă “tregeri” între comportarea fragilă și cea ductilă, după tipul solicitării pe care o preiau), fiind necesare criterii de rupere *combinat*e sau *hibride* pentru a le prognoza comportarea; de exemplu (așa cum se arată în figura de mai sus), pentru primul cadran din planul σ_1 - σ_2 se poate folosi teoria deformațiilor specifice maxime, iar pentru celelalte cadrane

– o teorie de tip interactiv; în consecință, învelitoarea stărilor limită va avea o formă adaptată, din porțiuni de învelitori ale criteriilor combinate în respectiva analiză.

O problemă dificilă, în legătură cu verificarea viabilității teoriilor de rupere este aceea că datele experimentale disponibile pentru confirmarea predicțiilor teoretice provin de obicei din stări de încărcare din primul cadran (cu tensiuni normale principale pozitive), care sunt relativ simplu de pus în practică (de exemplu folosind încercări de tracțiune dezaxată); pentru astfel de sollicitări toate cele patru teorii par să conducă la predicții satisfăcătoare, dar pentru stările de încărcare din celelalte cadrane apar diferențe mai importante între rezultatele date de diferite criterii (există o influență negativă a prezenței unor tensiuni normale de compresiune, asupra împrăstierii datelor experimentale). Pe de altă parte, pentru stările de încărcare *biaxiale* datele experimentale disponibile sunt relativ puține, dar cazurile în care au fost posibile verificări experimentale au arătat că teoria Tsai-Wu este cea mai potrivită.

În fine, pentru situațiile de sollicitare în care nu se poate prevedea comportarea materialului și modul de rupere, se folosesc simultan în estimări cele patru teorii; se fac calculele pentru fiecare în parte, apoi se reprezintă imaginea grafică a tuturor criteriilor considerate; pentru exemplificarea din figura de mai jos s-au folosit teoria tensiunilor maxime (1), cea a deformației specifice maxime (2), respectiv criteriul Tsai-Wu (3); *învelitoarea globală de rupere* a diverselor teorii, pentru starea analizată, se obține reunind porțiunile ce pot fi admise ca “acoperitoare” pentru toate domeniile găsite; punctele stărilor de încărcare permise sunt în interiorul acestor domenii, deci pentru îndeplinirea simultană a condițiilor de admisibilitate se alege, de pe granițele stărilor limită ale celor trei criterii, punctele care se află la cele mai mici distanțe față de originea axelor.



Pentru situația de material și de încărcare reprezentată în sistemul de axe din figură se ajunge la o învelitoare globală de forma domeniului închis hașurat; se observă cum diferitele segmente de pe granițele domeniului sunt date, succesiv, de câte o porțiune din învelitorile de rupere ale celor trei teorii folosite în analiză.