EVALUAREA ANALITICĂ A PROPRIETĂŢILOR MATERIALELOR COMPOZITE

Proprietăţile compozitelor pot fi studiate pe cale analitică, un aspect cu totul special pentru proiectarea acestor materiale şi un avantaj important pentru utilizarea lor; studiul analitic se referă la calcularea (sau estimarea) valorilor unor caracteristici globale pornind, cel mai adesea, de la cele ale constituenţilor, adică pe principii de analiză **micromecanică**; se porneşte de la adoptarea unui anumit **model** al structurii materialului, pentru a se aproxima comportarea lui reală, dar şi a înlesni gruparea pe clase a metodelor prin care sunt evaluate proprietăţile compozitelor.

Necesitatea practică a evaluărilor analitice

Comportarea elastică a unei lamele compozite unidirecţionale, într-o **stare plană** de tensiuni şi deformaţii, se poate descrie complet prin *patru* proprietăţi de bază – notate $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{G_{12}}$, respectiv $\boldsymbol{\nu_{12}}$ şi numite *caracteristici elastice* ale materialului; privind *macromecanic*, se admite că acestea se pot stabili, în orice situaţie, prin *determinări experimentale directe*; valorile lor pot să varieze însă mult, pentru un compozit dat, de la un lot de fabricare la altul, pentru că depind de factori ca *proporţia* şi *proprietăţile* constituenţilor, sau *parametrii structurali* şi *geometrici* efectivi ai materialului global.

Se poate înţelege că aceste caracteristici reprezintă aspecte particulare ale compozitului, care cu greu pot fi repetate, identic, la fiecare lot fabricat; nu este însă potrivit şi nici convenabil din punct de vedere economic să se facă determinări experimentale asupra fiecărui lot de materiale; ar fi de dorit să existe metode (cu grad de aproximare cât mai mic) de a prognoza proprietăţile compozitelor (eventual, chiar în etapa de proiectare a lor), în funcţie de parametrii amintiţi; aceştia sunt mai uşor de determinat, pentru un lot de semifabricate, decât proprietăţile efective ale materialului, ceea ce înseamnă că evaluarea analitică se va putea face rapid şi cu cheltuieli minime.

Influenţa trăsăturilor particulare ale materialelor compozite

Este necesară o distincţie clară între compozitele armate *unidirecţional* şi cele armate *dispers*, cu privire la tipurile de caracteristici fizice şi mecanice care pot fi obţinute pentru fiecare dintre cele două variante:

- La armarea cu **fibre lungi**, fundamentală este *anizotropia* materialului compus, proprietăţile mecanice având valori foarte diferite, în funcţie de direcţia de studiu - *pe direcţia armării* sunt apropiate de ale *fibrelor*, iar *transversal* seamănă cu ale *matricei*.
- Pentru compozite *aproximativ* **izotrope** (cum sunt cele armate dispers), *modulul de elasticitate* poate varia în limite largi şi depinde mai ales de conţinutul de elemente de armare (putând fi chiar de 4-5 ori mai mare decât al matricei), pe când *rezistenţa mecanică* este doar *de ordinul celei a matricei*, uneori chiar mai mică.

Trebuie spus că unele materiale de armare (de exemplu fibrele de carbon sau de grafit) sunt ele însele *anizotrope*, având mai multe valori (diferite în funcţie de direcţia de studiu) ale constantelor de elasticitate, încât se poate ajunge la o gamă mult mai largă de proprietăţi ale compozitelor care le conţin, decât în cazul armării cu particule.

Un alt aspect important este asumarea unor **ipoteze** privind *dispunerea fazei de ranforsare* în structura compozitului, concretizate în tipul de *volum elementar* de compozit asociat unui element individual de armare, când este analizat independent: pentru **fibrele lungi**, se constată că pentru *fracţii volumice mici* aşezarea fibrelor în secţiunile transversale este relativ *întâmplătoare*, dar în compozitele cu un *conţinut mare* de fibre aranjamentul lor poate fi considerat *regulat*; se admite astfel că *volumul de matrice revenit unei fibre* are formă de **prismă hexagonală dreaptă** (ca la fagurii albinelor, care se consideră că modelează corect structura compozitului); aceasta este deci forma de bază pentru elementele de volum, în analizele compozitelor armate unidirecţional.

Principalele categorii de metode analitice

Obiectivul principal al micro-mecanicii compozitelor este să se obţină relaţii de calcul care să evalueze valoric constantele lor de elasticitate (primele care au fost studiate) dar şi, în general, diverse proprietăţi fizice şi mecanice; relaţiile folosesc parametrii de bază ai materialului compus, dintre care mai importanţi sunt:

- natura şi proprietăţile fazelor constituente;
- conţinutul de elemente de armare;
- forma şi dimensiunile acestora.

A. Metode bazate pe principiile rezistenţei materialelor

Această categorie cuprinde metode de evaluare dezvoltate după principiile clasice ale ştiinţei materialelor, bazate pe anumite ipoteze simplificatoare şi pe ideea că solicitarea mecanică aplicată compozitului studiat conduce la o *stare uniformă* de tensiuni şi/sau de deformaţii; conduc, în general, la rezultate confirmate de datele experimentale pentru proprietăţile de pe direcţia *longitudinală* a unui compozit (direcţia armării) – de exemplu modulul $\mathbf{E_1}$ şi coeficientul de tip Poisson $\boldsymbol{\nu_{12}}$ (numit “principal”, spre deosebire de cel “secundar” $\boldsymbol{\nu_{21}}$), despre care se admite că nu sunt influenţate de forma şi de distribuţia fibrelor (în planul principal transversal al materialului).

Comparaţia cu rezultatele testelor arată că proprietăţile de forfecare ale compozitelor (cum este modulul $\mathbf{G_{12}}$) şi cele de pe direcţia lor principală *transversală* (ca modulul $\mathbf{E_2}$) sunt de obicei *subestimate* prin relaţiile date de metodele din această categorie.

B. Metode semi-empirice

Aceste metode au fost dezvoltate pentru a evita, măcar parţial, dificultăţile abordărilor de mai sus, şi pentru a se ajunge la simplificări ale calculelor de evaluare; exemple tipice de aplicare a acestui gen de metode sunt *relaţiile Halpin-Tsai* (discutate mai jos), folosite pentru evaluarea mai multor proprietăţi elastice ale compozitelor; se bazează pe *interpolări* ale limitelor (superioară şi inferioară) stabilite prin metode variaţionale, sau ale modelelor de tip “serie” şi “paralel”, care simulează răspunsul compozitelor la solicitări mecanice. Relaţiile de calcul conţin o mărime particulară, *parametrul de interpolare*, notat de obicei cu litera $\boldsymbol{\xi}$ şi fiind o *măsură a eficienţei ranforsării* (realizarea corectă a transferului de sarcină între constituenţi) pentru compozitul studiat; forma finală a relaţiilor include valorile recomandate ale acestui parametru, stabilite prin compararea rezultatelor din estimările analitice cu valorile efective (stabilite experimental) ale proprietăţilor studiate.

1. Estimarea caracteristicilor elastice ale compozitelor armate cu fibre lungi, unidirecţionale

1.a. Cazul proprietăţilor longitudinale de elasticitate

Pentru compozitele cu armare **unidirecţională** aceste proprietăţi sunt dominate de calităţile *fibrelor*, care sunt mai *rezistente*, mai *rigide* şi au *deformaţii la rupere mai mici* decât matricea; proprietăţile elastice ale compozitului vor avea deci valori mai ridicate pe direcţie longitudinală decât pe oricare altă direcţie; se admite că datele experimentale sunt modelate corect prin predicţii bazate pe **regula** (*directă* a) **amestecurilor** - o lege de adiţionare liniară, denumită şi *modelul paralel* de a combina proprietăţile constituenţilor unui compozit, ţinând seama de fracţia lor volumică (V_i).

Trebuie precizat că se folosesc două soluţii „extreme” în acest tip de modelare: de o parte se află modelul ***paralel***, introdus de Voigt (1928), bazat pe ipoteza că încărcarea aplicată produce deformaţii specifice egale în cele două faze, tensiunea globală fiind suma tensiunilor preluate de fiecare fază. De cealaltă parte se află modelul ***serie*** (propus de Reuss în 1929), numit şi regula *inversă* a amestecurilor, în care se admite că cele două faze preiau o aceeaşi mărime a tensiunii, iar deformaţia specifică globală este suma celor ale fazelor.

Aplicând (pentru un compozit unidirecţional) modelul paralel se deduce că modulul Young (modulul de elasticitate global de pe direcţia încărcării de tracţiune longitudinală) se poate calcula ca medie (*ponderată* prin fracţiile volumice) a modulilor fazelor constituente:

$$E_1 = k_f \cdot V_f \cdot E_{1f} + V_m \cdot E_m \tag{1}$$

unde indicii se referă la fibre, respectiv la matrice; notaţia $\mathbf{k_f}$ este un coeficient (nu face parte din forma generală a regulii amestecurilor), care depinde de *gradul de ordonare* în dispunerea fibrelor în matrice; are valoarea **1** pentru alinierea corectă a fibrelor pe direcţia longitudinală a eşantionului de compozit.

Pe aceleaşi baze teoretice se poate obţine o relaţie pentru estimarea valorii *principale* (longitudinale) a coeficientului Poisson, care se scrie astfel:

$$\nu_{12} = V_f \cdot \nu_{12f} + V_m \cdot \nu_m \tag{2}$$

1.b. Cazul proprietăţilor transversale de elasticitate

Pentru încărcările cu tensiuni normale de direcţie transversală, starea de tensiuni în matricea din jurul fibrelor este complexă şi afectată de interacţiunile dintre fibrele vecine; proprietăţile elastice de pe această direcţie sunt dominate de calităţile matricei, dar şi sensibile la starea locală de tensiuni; s-a constatat că estimarea acestor caracteristici se face mulţumitor prin expresii bazate pe regula *inversă* a amestecurilor; se vor prezenta două cazuri de aplicare a principiilor descrise.

I. Estimarea modulului de elasticitate **pe direcţie transversală**

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_{2f}} + \frac{V_m}{E_m} \quad \text{sau} \quad E_2 = \frac{E_{2f} \cdot E_m}{V_f \cdot E_m + V_m \cdot E_{2f}} \tag{3}$$

în care **E_{2f}** este modulul transversal al fibrelor (despre care, aşa cum s-a precizat anterior, se admite că pot fi *anizotrope*); de obicei în aceste expresii se introduce o valoare *corijată* a modulului E_m al matricei, de tipul:

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - \upsilon_m^2} \tag{3a}$$

la numitor fiind coeficientul Poisson al matricei; se ia astfel în considerare micşorarea rigidităţii ei transversale, ca urmare a introducerii în structura sa a fibrelor de armare.

II. Estimarea modulului **de forfecare**

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{12f}} + \frac{V_m}{G_m} \quad \text{sau} \quad G_{12} = \frac{G_{12f} \cdot G_m}{V_f \cdot G_m + V_m \cdot G_{12f}} \tag{4}$$

în care logica notaţiilor este la fel ca mai sus.

Observaţii:

1. *Pentru compozitele cu fibre lungi efectele pozitive ale armării asupra modulului de elasticitate pe direcţie transversală sunt mult mai mici (uneori acesta nici măcar nu egalează modulul matricei), în raport cu efectele asupra modulului longitudinal.*
2. *Armarea cu fibre scurte sau cu particule disperse (dacă au modul mai mare ca al matricei) duce şi ea la o creştere a modulului de elasticitate global, dar* ***mai mică*** *decât cea preliminată prin regula amestecului, încât aceasta nu se consideră potrivită pentru a evalua efectele produse de armările disperse.*

În general, influenţa variaţiei conţinutului de material de armare asupra modulului de elasticitate global este mereu mai mică , la trecerea de la armarea cu fibre lungi către elementele de armare de tot mai mici dimensiuni, aşa cum vor arăta exemplificările care urmează.

2. Estimarea caracteristicilor elastice ale compozitelor armate cu fibre discrete (scurte)

Pentru aceste materiale s-au propus diverse variante, distincte ca ipoteze de bază, de expresii ale dependenţei dintre modulul global şi cei ai constituenţilor; nici una dintre aceste variante nu produce estimări corecte pentru oricare situaţie practică, încât se exemplifică două relaţii cu utilizare mai largă.

a. Modelul **Cox**:

$$E_c = E_f \cdot V_f \left[1 - \frac{1}{k\frac{L}{2}} \operatorname{th}\left(k\frac{L}{2} \right) \right] + E_m (1 - V_f) \tag{5}$$

în care **L** este lungimea medie a fibrelor, iar **k** este o constantă şi depinde de caracteristicile elementelor de armare şi de dispunerea lor geometrică.

b. Modelul propus, pe baza regulii amestecurilor, de **Nielsen**:

$$E_c = F \cdot E_f \cdot V_f + E_m (1 - V_f) \tag{6}$$

unde **F** este un coeficient de întărire efectivă a materialului, depinzând de fracţia volumică $\mathbf{V_f}$ şi de raportul (E_f / E_m).

3. Estimarea caracteristicilor de elasticitate ale compozitelor armate cu particule disperse

Relaţiile propriu-zise de calcul estimativ pentru aceste compozite sunt rare în literatură, dar există totuşi câteva prin care se pot evalua *valorile limită* ale modulului global, la o solicitare uniaxială; de exemplu, acestea se pot deduce printr-o metodă de tip *variaţional*, care a fost propusă de **B. Paul**, bazată pe legi ale teoriei clasice a elasticităţii, din categoria teoremelor energetice; se face ipoteza că matricea şi particulele au coeficienţi Poisson de valori aproximativ egale, adică $\boldsymbol{\nu_p = \nu_m = \nu}$; aceasta poate să fie o simplificare destul de grosieră, de exemplu pentru cazurile (foarte frecvente) în care matricea şi particulele sunt materiale de naturi diferite, dar rezultatele s-au dovedit utile în multe situaţii practice, fiind confirmate şi experiemental; în mod tipic, limitele modulului global al compozitului sunt exprimate ca un şir de inegalităţi de forma următoare:

$$\frac{1}{\dfrac{V_m}{E_m} + \dfrac{V_p}{E_p}} \le E_c \le E_m \cdot V_m + E_p \cdot V_p \tag{7}$$

Se observă că limitele date de relaţiile (7) sunt exprimate la fel cu expresiile modulului global date de regula directă şi respectiv de cea inversă ale amestecurilor.

În mod analog se pot scrie valorile limită ale modulului global de forfecare $\mathbf{G_C}$, în funcţie de valorile $\mathbf{G_i}$ care corespund constituenţilor.

Tot pentru armarea discontinuă (cu fibre scurte, whiskere sau particule), evaluarea modulului de elasticitate global se poate face cu o relaţie mai generală, propusă de Halpin, Tsai şi Kardos:

$$E_c = E_m \frac{1 + 2s \cdot q \cdot v_p}{1 - q \cdot v_p} \quad \text{în care factorul este} \quad q = \frac{\dfrac{E_p}{E_m} - 1}{\dfrac{E_p}{E_m} + 2s} \tag{8}$$

iar **s** este coeficientul de formă (*aspect ratio*) al elementelor de armare (indicele **p** se referă la acestea); cunoscută ca *modelul Halpin-Tsai* pentru armarea dispersă, această regulă de calcul estimativ apare frecvent în literatura din acest domeniu.

4. Estimarea proprietăţilor materialelor compozite prin metode semi-empirice

S-a arătat că metodele de predicţie bazate pe mecanica materialelor *subevaluează* proprietăţile elastice ale compozitelor *unidirecţionale*, pe direcţie *transversală*; rezultate mai apropiate de datele experimentale se pot obţine dacă se folosesc relaţii de tip *semi-empiric*; potrivirea dintre predicţiile de acest fel şi rezultatele practice depinde de stabilirea corectă a valorii parametrului de interpolare, de obicei notat cu ξ; se exemplifică aplicarea acestui fel de calcule la două situaţii frecvent întâlnite în proiectarea compozitelor.

I. Evaluarea modulului Young *pe direcţie transversală*

$$E_2 = E_m \frac{1+\xi_1\eta_1 V_f}{1-\eta_1 V_f} \quad \text{unde} \quad \eta_1 = \frac{E_{2f} - E_m}{E_{2f} + \xi_1 E_m} \tag{9}$$

în care ξ_1 este factorul de eficienţă a ranforsării la încărcări transversale; s-a constatat că acest factor trebuie să fie cuprins între **1** şi **2**; dacă se dispune de o valoare sigură a modulului $\mathbf{E_2}$ pentru o variantă de compozit, din relaţia (9) se găseşte valoarea potrivită a factorului ξ_1; aceasta se va utiliza pentru predicţii ale modulului E_2, pentru diverse fracţii volumice de fibre ale compozitului.

II. Evaluarea modulului *de forfecare*

$$G_{12} = G_m \frac{1+\xi_2\eta_2 V_f}{1-\eta_2 V_f} \quad \text{unde} \quad \eta_2 = \frac{G_{12f} - G_m}{G_{12f} + \xi_2 G_m} \tag{10}$$

în care ξ_2 este factorul de eficienţă a ranforsării pentru forfecarea în plan.

Concordanţă bună cu datele experimentale se obţine dacă se atribuie factorului de interpolare valoarea **1**, caz în care relaţia de evaluare se scrie:

$$G_{12} = G_m \frac{(G_{12f} + G_m) + V_f (G_{12f} - G_m)}{(G_{12f} + G_m) - V_f (G_{12f} - G_m)} \tag{11}$$

Pentru cele două clase de proprietăţi de mai sus se poate admite că eficienţa ranforsării (raportul dintre valoarea unei anumite caracteristici pentru compozit, respectiv pentru matricea fără armare) creşte odată cu conţinutul de fibre, cu atât mai pronunţat cu cât este mai mare raportul dintre valorile caracteristicii respective pentru fibre şi matrice.

5. Relaţii pentru evaluarea altor proprietăţi fizice şi mecanice ale materialelor compozite

Comportarea în condiţiile unor variaţii de temperatură (a mediului de lucru) face parte dintre proprietăţile importante ale compozitelor, mai ales dacă au matrice metalică; pentru acestea este destul de greu să se evite diferenţa mare între coeficienţii de dilatare termică ai constituenţilor, astfel încât este importantă posibilitatea de a controla valorile caracteristicilor de dilatare, pe baza reglării conţinutului volumic de elemente de armare, respectiv a dispunerii lor în matrice.

Au fost propuse diverse modele teoretice pentru evaluarea **coeficientului de dilatare termică** (**α**) pentru *compozitele metalice*, care este dependent de forţele inter-atomice şi de structura cristalină; cu cât forţele de legătură sunt mai puternice, cu atât modulul Young (E) este mai ridicat, iar coeficientul (α) are o valoare mai mică.

Dacă materialul *de armare* estede tip **ceramic** (având un coeficient de dilatare mult inferior – cam cu un ordin de mărime –celui al metalelor), coeficientul global va fi *tot mai mic*, la creşterea fracţiei de ranforsant; aceasta avantajează utilizările practice ale acestor compozite, mai ales pentru că ele conferă stabilitate dimensională pieselor, în timpul funcţionării la temperaturi ridicate.

Pentru compozite **armate unidirecţional**, coeficienţii de dilatare termică (*longitudinal* – α_1, respectiv *transversal* – α_2) se pot evalua astfel:

$$\alpha_1 = \frac{E_f \cdot \alpha_f \cdot V_f + E_m \cdot \alpha_m \cdot V_m}{E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m} \tag{12}$$

respectiv:

$$\alpha_2 = \alpha_f V_f (1+\nu_f) + \alpha_m V_m (1+\nu_m) - \frac{E_f \alpha_f V_f + E_m \alpha_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} (\nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot V_m) \tag{13}$$

Pentru compozite metalice **armate cu particule** factorul de dilatare se poate *aproxima* printr-o relaţie (propusă de *Turner*) de forma:

$$\alpha = \frac{\alpha_m \cdot V_m \cdot K_m + \alpha_p \cdot V_p \cdot K_p}{V_m \cdot K_m + V_p \cdot K_p} \tag{14}$$

(α_i) fiind coeficientul de dilatare al celor trei materiale, (V_i) este fracţia volumică de constituenţi, iar (K_i) = modulul "volumic" de elasticitate (din teoria elasticităţii) al acelor materiale.

6. Estimarea analitică a proprietăţilor de rezistenţă ale compozitelor

Estimarea precisă a rezistenţei compozitelor la solicitări mecanice este greu de atins, în principal datorită următoarelor obstacole:

- Spre deosebire de materialele omogene, ruperea compozitelor implică, la nivel microscopic, etape suplimentare (ruperea ranforsantului, plastifieri locale, separarea componentelor la interfeţe), greu de cuantificat prin calcule estimative.
- Valorile tensiunilor şi deformaţiilor la rupere sunt greu de obţinut analitic, întrucât acestea depind de anumite detalii ale microstructurii, care de obicei nu se cunosc în momentul efectuării calculelor.
- Mecanismele ruperii unui compozit şi procesele pe care le implică la nivel de constituenţi (la scară micro-mecanică) variază după tipul încărcării şi proprietăţile fizice şi mecanice ale matricei, elementelor de armare şi zonelor de interfaţă.
- Varietatea fenomenelor micro-mecanice împiedică să fie stabilite, pentru cele mai multe tipuri de solicitări, criterii de rupere unanim acceptate pentru diversele clase de compozite.
- Chiar având la dispoziţie un model micro-structural, analiza teoretică a tensiunilor în prezenţa micro-ruperilor interactive (care au loc în materialul constituenţilor şi la interfeţele lor) încă reprezintă o problemă dificilă.

Cercetarea posibilităţilor de a prognoza rezistenţa mecanică a compozitelor a ajuns totuşi la rezultate importante; cele mai interesante aplicaţii s-au dezvoltat pentru compozite armate unidirecţional, iar dintre acestea cel mai mult au fost studiate cele cu matrice *polimerică*.

Trebuie remarcat că valoarea reală a rezistenţei compozitelor *metalice* este de obicei mai mare decât estimările bazate pe regula amestecului, de exemplu pentru că apar modificări micro-structurale în matricea metalică, prin introducerea elementelor de armare (creşte densitatea dislocaţiilor, sau se schimbă aspectul grăunţilor), cu efecte favorabile asupra rezistenţei mecanice finale. Se poate aprecia şi că această proprietate a compozitelor citate *nu* *depinde* hotărâtor de *conţinutul de elemente de armare* (cum se întâmplă cu modulul de elasticitate), fiind puternic influenţată (mult mai mult decât la compozitele polimerice) de rezistenţa materialului folosit ca matrice; rezistenţa mecanică a compozitelor metalice poate fi deci "reglată" începând cu alegerea tipului de aliaj folosit ca matrice şi a tratamentului termic aplicat, nişte grade de libertate în plus pe care proiectantul se poate baza atunci când le “programează” proprietăţile fizico-mecanice.

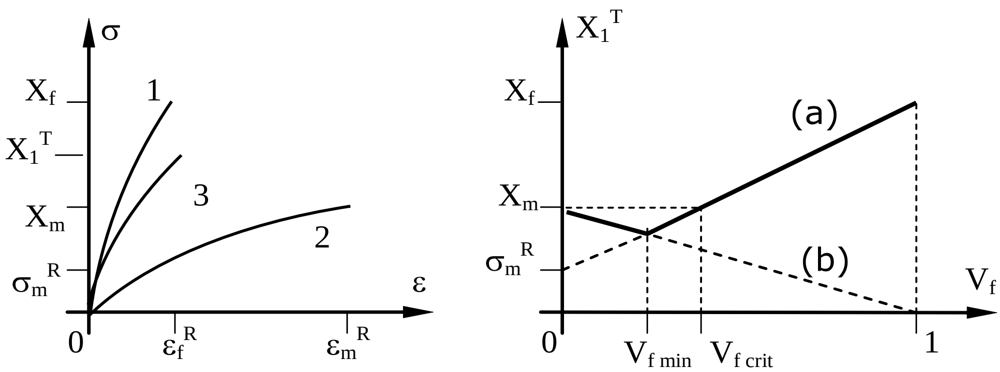
6.a. Cazul compozitelor armate cu fibre continue unidirecţionale

I. Evaluarea rezistenţei la tracţiune longitudinală (X_1^T)

Trebuie stabilită valoarea *maximă* pe care o pot atinge, fără riscuri pentru material, *tensiunile normale* de întindere ($\boldsymbol{\sigma_1}$); admiţând că fibrele sunt înglobate perfect în matrice, **tensiunea medie** pe direcţie *longitudinală* este evaluată pe baza *fracţiilor volumice* şi a *tensiunilor medii* de direcţie longitudinală ($\boldsymbol{\sigma_f}$ respectiv $\boldsymbol{\sigma_m}$) din constituenţi, folosind regula amestecului:

$$\sigma_{1med} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m \tag{15}$$

Pierderea capacităţii de rezistenţă se produce întâi în constituentul având o valoare mai mică a parametrului **alungire specifică la rupere** ($\boldsymbol{\varepsilon^R}$); răspunsul la solicitare se va analiza deci diferit în funcţie de raportul între valorile parametrului citat – pentru *matrice* ($\boldsymbol{\varepsilon_m^R}$), respectiv pentru *fibrele de armare* ($\boldsymbol{\varepsilon_f^R}$); se admite că rezistenţa constituenţilor nu variază de la un punct de material la altul, şi nici de la o entitate (o fibră, sau o epruvetă) de material la alta.



Evaluarea rezistenţei la tracţiune pentru compozitele cu armare unidirecţională, având fibrele mai rigide decât matricea.

Graficele din stânga în figurile analizate în continuare dau *curbele caracteristice* la tracţiune pentru *fibrele de armare* (1), pentru *matrice* (2), respectiv (ca alură estimată) pentru *compozit* în ansamblu (3); de pe acestea se pot extrage, pentru fiecare constituent, valorile parametrilor de rezistenţă la tracţiune ($\mathbf{X_i}$), respectiv de deformabilitate la rupere ($\boldsymbol{\varepsilon_i^R}$); acestea sunt apoi trecute pe graficele din dreapta, care arată cum se face *estimarea* rezistenţei la tracţiune a compozitului; pe axa absciselor apare *fracţia volumică* de fibre, (teoretic) cuprinsă între 0 (când se încearcă o probă din matrice, fără ranforsare) şi 1 (cazul fibrelor neincluse în matrice şi solicitate separat, în mănunchi); segmentele notate cu (**a**) şi (**b**) arată modul specific de modelare a capacităţii de rezistenţă a compozitului, asumând ca predominante proprietăţile **fibrelor de armare**, respectiv ale materialului **matricei**.

A) Pentru compozitele care au *fibrele mai rigide decât matricea*, pentru care este adevărată condiţia $\boldsymbol{\varepsilon_m^R > \varepsilon_f^R}$, prin realizarea materialului compus se pot exploata în totalitate caracteristicile de rezistenţă ale fibrelor, întrucât rezistenţa la tracţiune a acestor compozite este dominată de fibre (*fiber-dominated strength*).

Comparând acum curbele caracteristice (date în figura anterioară) se constată că limita de rupere ($\mathbf{X_1^T}$) a compozitului se atinge atunci când alungirea specifică a fibrelor (de fapt, a materialului compus) ajunge la valoarea ($\boldsymbol{\varepsilon_f^R}$), care corespunde pierderii de către fibre a capacităţii lor de rezistenţă.

Atunci când fibrele nu mai pot prelua partea care le revine din încărcarea aplicată compozitului, aceasta nu poate fi susţinută numai de materialul matricei, deci se produce ruperea; în acel moment al solicitării valoarea efectivă a tensiunilor din matrice nu ajunge la limita de rupere (X_m) a acestui material, ci la o valoare mai mică $\boldsymbol{\sigma_m^R}$ (*tensiunea medie din matrice în clipa ruperii fibrelor*); capacitatea de rezistenţă mecanică a matricei nu este încă epuizată, iar în calculele de evaluare se va folosi tensiunea σ_m^R drept caracteristică de rezistenţă a materialului de bază din compozit.

Pe aceste baze, se pot înlocui în relaţia (15) valorile limită (din clipa ruperii) ale tensiunilor din constituenţi, astfel că rezistenţa la tracţiune a compozitului se poate *aproxima* folosind relaţia următoare:

$$X_1^T = \sigma_X{}^R = V_f \cdot X_f + V_m \cdot \sigma_m{}^R \tag{16}$$

Se ştie că suma fracţiilor de constituenţilor este 1, iar dacă porozitatea este neglijabilă (conţinutul de goluri V_g tinde la zero), expresia devine:

$$X_1^T = V_f \cdot X_f + \left(1 - V_f\right) \cdot \sigma_m{}^R \quad \text{sau} \quad X_1^T = \sigma_m^R + \left(X_f - \sigma_m^R\right) \cdot V_f \tag{17}$$

Ultima exprimare arată o *dependenţă liniară* (de forma y = a x + b) între rezistenţa compozitului şi fracţia volumică de fibre; dând lui $\mathbf{V_f}$ valorile extreme din intervalul de definiţie (0 şi 1), se obţin pentru funcţia studiată valorile de capăt $\boldsymbol{\sigma_m^R}$, respectiv $\mathbf{X_f}$, puncte care se unesc printr-un segment de dreaptă notat cu **a** pe graficul de evaluare din figură.

Relaţia de evaluare a rezistenţei la tracţiune poate fi scrisă şi sub o altă formă; dacă se admite (cu o anumită aproximaţie) o comportare *liniar-elastică* la tracţiune a materialelor reprezentând constituenţii compozitului, atunci tensiunea din matrice în momentul ruperii fibrelor se va exprima în funcţie de alungirea lor la rupere, iar apoi de rezistenţa lor la tracţiune, astfel:

$$\sigma_m^R = E_m \cdot \varepsilon_f^R = E_m \cdot \frac{X_f}{E_f} \tag{18}$$

În expresia de evaluare a rezistenţei la tracţiune a compozitului sunt făcute astfel să apară caracteristicile de elasticitate ale constituenţilor:

$$X_1^T \cong X_f \cdot \left(V_f + V_m \cdot \frac{E_m}{E_f}\right) \tag{19}$$

*Această relaţie se poate scrie în formă aproximată, simplu de utilizat, pentru o categorie specială de compozite - cele armate cu **fibre foarte rigide** (având modulii de elasticitate* *în relaţia* $E_f >> E_m$ *), cu o valoare rezonabil de mare a fracţiei volumice de fibre; membrul drept de mai sus poate fi atunci restrâns la un singur termen, adică*

$$X_1^T \cong X_f \cdot V_f \tag{20}$$

Pentru variantele de compozit cu fracţii de fibre relativ mici, orice încărcare trebuie preluată de matrice, ale cărei caracteristici vor fi determinante pentru rezistenţa globală; pentru evaluare se va lua în considerare limita de rupere a părţii din compozit formată din matrice (solicitată separat):

$$X_1^T = X_m \cdot V_m \tag{21}$$

Cum $V_m = 1 - V_f$, funcţia se reprezintă printr-o dreaptă descrescătoare care, pe intervalul considerat, se restrânge la porţiunea iniţială de pe segmentul **b** din figură; prin urmare, evaluarea rezistenţei la tracţiune longitudinală a compozitului va folosi ecuaţiile (16) şi (21), reprezentate de porţiunile îngroşate de pe segmentele (a) şi (b) din figură. Există o zonă iniţială pe grafic, delimitată în partea sa dreaptă de valoarea $\mathbf{V_{f\,min}}$ a fracţiei de fibre, până la care limita de rezistenţă dată de ecuaţia (16) este mai mică decât cea dată de ecuaţia (21); punctele de pe segmentul **a** nu reprezintă stări de încărcare determinante pentru cedarea compozitului, întrucât în această zonă tensiunile normale nu egalează limita de rupere la solicitarea de tracţiune nici pentru matrice, nici pentru fibrele de armare.

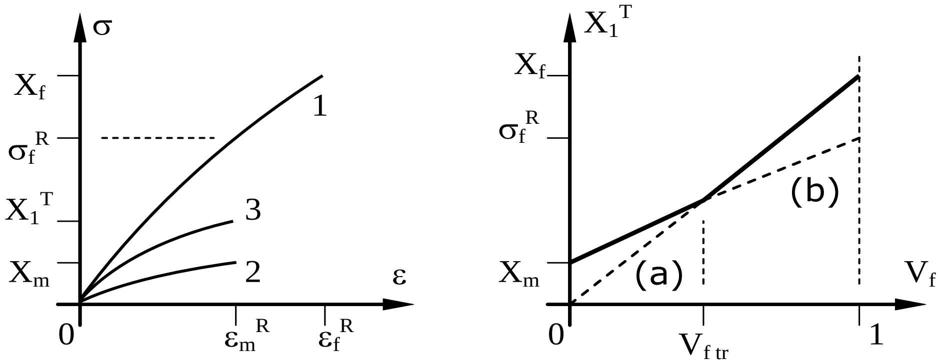
Pentru compozitele cu o fracţie de fibre *mai mică* decât $\mathbf{V_{f\,min}}$ se admite că **limita de rupere la tracţiune** a compozitului este **dată de rezistenţa matricei** (amendată de factorul subunitar al conţinutului efectiv de matrice din compozit) şi trebuie evaluată pe segmentul **b**; în continuare, până la capătul graficului, valorile estimate cu ecuaţia (16) – situate pe segmentul **a**, sunt mereu mai mari decât tensiunile limită din matrice – segmentul **b**, deci ecuaţia (16) va evalua rezistenţa globală.

Trebuie remarcat că, pentru o porţiune scurtă a graficului din acest interval, valorile evaluate rămân mai mici decât rezistenţa la tracţiune (X_m) a matricei, iar pentru ca noul material să fie o *întărire efectivă a matricei* ($\mathbf{X_1^T > X_m}$), fracţia de fibre trebuie să fie *mai mare* ca *valoarea critică* $\mathbf{V_{f\,crit}}$!

Pentru compozite unidirecţionale cu fibre mai rigide (şi mai fragile) ca matricea, rezistenţa la tracţiune longitudinală se evaluează pe o porţiune din segmentul ***b*** *– dacă* V_f *este mai mic decât* $\mathbf{V_{f\,min}}$*, respectiv folosind ecuaţia (16) şi segmentul* ***a*** *– pentru un conţinut de fibre mai mare ca acea limită (segmentele îngroşate din figura de mai sus); armarea este eficientă pentru un conţinut de fibre egal cel puţin cu valoarea* $\mathbf{V_{f\,crit}}$*.*

B) Dacă fibrele sunt relativ *elastice*, iar materialul de bază *rigid (fragil)*, atunci între alungirile specifice la rupere există relaţia $\boldsymbol{\varepsilon_f^R > \varepsilon_m^R}$; situaţia (ilustrată de curbele caracteristice din figura următoare) este întâlnită când matricea este dintr-un material ceramic (având valori mari de rigiditate şi fragilitate); prin introducerea fibrelor de armare în ceramice se ameliorează tenacitatea globală, sau rezistenţa la şoc, iar rezistenţa acestor compozite este *dominată de matrice* (*matrix-dominated strength*).

La fel ca mai sus se poate imagina că pierderea capacităţii de rezistenţă la tracţiune a compozitului se va produce când alungirea lui specifică pe direcţie longitudinală va egala valoarea $\boldsymbol{\varepsilon_m^R}$; tensiunile din matrice ajung atunci la limita de rupere ($\mathbf{X_m}$), dar tensiunile normale medii din fibre nu ating limita de rezistenţă (**X_f**), ci o valoare mai mică **σ_f^R** (*tensiunea medie din fibre în momentul ruperii* compozitului), folosită în evaluarea rezistenţei globale.



Evaluarea rezistenţei la tracţiune pentru compozitele cu armare unidirecţională, având fibrele mai puţin rigide decât matricea.

În relaţia (15) de evaluare a tensiunilor medii normale se introduc tensiunile din constituenţi, având valorile din clipa când compozitul cedează, iar pentru rezistenţa lui la tracţiune longitudinală se obţine următoarea relaţie *de aproximare*:

$$X_1^T = \sigma_f^R \cdot V_f + X_m \cdot V_m \tag{22}$$

Întrucât suma fracţiilor de constituenţi trebuie să fie 1, membrul drept de mai sus devine:

$$X_1^T = \sigma_f^R \cdot V_f + (1 - V_f) \cdot X_m \quad \text{sau} \quad X_1^T = X_m + (\sigma_f^R - X_m) \cdot V_f \tag{23}$$

Ultima exprimare reprezintă o lege de *dependenţă liniară* (ecuaţie de gradul întâi), între mărimea evaluată şi fracţia de fibre de armare; pentru trasarea graficului ei, în limitele variabilei independente, se dau acesteia din urmă valorile extreme, pentru care se obţin următoarele rezultate:

$$V_f = 0 \;\Rightarrow\; X_1^T = X_m\,, \text{ respectiv } V_f = 1 \;\Rightarrow X_1^T = \sigma_f^R \tag{24}$$

Se obţine segmentul de dreaptă **b** din figură, care va fi utilizat la evaluarea rezistenţei compozitului; pe grafic apare şi segmentul **a**, dat de rezistenţa la tracţiune a mănunchiului de fibre din compozit, când sunt încercate separat (neincluse în matrice), având ecuaţia:

$$X_1^T = X_f \cdot V_f \tag{25}$$

Cele două segmente se intersectează într-un punct, ilustrând un compozit cu un conţinut de fibre **$V_{f\,tr}$**; în domeniul aflat la stânga acestei valori, evaluarea rezistenţei globale se va face pe segmentul **b**, cu ecuaţia (22), iar pentru compozitele cu fracţii volumice mai mari ca **$V_{f\,tr}$** evaluarea se va face pe segmentul **a**, deci cu ecuaţia (25) (a se observa porţiunile îngroşate ale acelor segmente); pentru aceste compozite matricea este capabilă să preia o parte relativ mică din încărcarea aplicată; dacă matricea se fisurează, sarcina suplimentară transferată fibrelor nu este suficientă pentru ruperea lor, încât cedarea nu se va produce decât la atingerea limitei calculate pe baza ecuaţiei (25).

În relaţia (22) de evaluare a rezistenţei la tracţiune pot fi făcute să apară, la fel ca în cazul anterior, caracteristicile de elasticitate ale constituenţilor; cu anumită aproximaţie se admite că materialele constituente au (când sunt încercate separat) o c*omportare liniar-elastică* la tracţiune, încât tensiunea din fibre în momentul ruperii compozitului va fi:

$$\sigma_f^R = E_f \cdot \varepsilon_m^R = E_f \cdot \frac{X_m}{E_m} \tag{26}$$

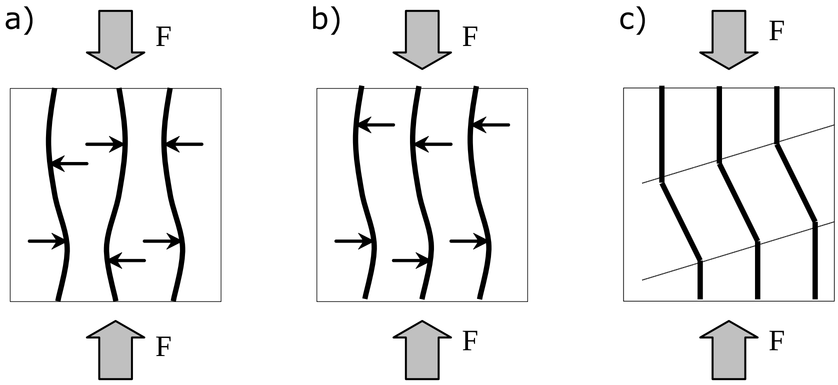
Ecuaţia de evaluare (22) ajunge astfel într-o nouă formă (aproximativă):

$$X_1^T \cong X_m \cdot \left(V_m + V_f \cdot \frac{E_f}{E_m} \right) \tag{27}$$

Ultima expresie are avantajul de a conţine numai caracteristici fizico-mecanice ale constituenţilor, fără să fie necesar parametrul $\boldsymbol{\sigma_f^R}$; acesta are inconvenientul că trebuie determinat prin experimente speciale, asupra unor probe din compozit, putând să apară astfel probleme noi la interpretarea rezultatelor încercărilor.

II. Evaluarea rezistenţei la compresiune longitudinală ($\mathbf{X_1^C}$)

În acest caz cedarea poate să apară nu doar prin depăşirea capacităţii de rezistenţă a compozitului, ci şi prin pierderea stabilităţii elastice - manifestată prin deteriorarea elementelor de armare, mai precis prin îndoirea fibrelor peste limita lor de stabilitate (flambaj longitudinal); există trei moduri distincte în care se poate produce deformarea fibrelor în timpul solicitării, fiecare ducând la relaţii de calcul specifice pentru evaluarea rezistenţei compozitului.



Moduri posibile de producere a deformării, la solicitarea de comprimare longitudinală, pentru compozitele armate cu fibre lungi: a) în extensie; b) în forfecare; c) destabilizare zonală.

(a) – Flambaj **în extensie** (*în opoziţie de fază*) - matricea este supusă la *tracţiune* şi *compresiune* pe direcţia principală *transversală*; apare la compozite cu un conţinut *mic* de fibre şi cu matrice din material cu *ductilitate mare*; prin metode energetice s-a stabilit o relaţie (aproximativă) de calcul, rezistenţa compozitului fiind legată de constantele elastice ale constituenţilor, prin intermediul fracţiei de fibre:

$$X_1^C = 2 \cdot V_f \cdot \sqrt{\frac{V_f \cdot E_m \cdot E_f}{3 \cdot (1 - V_f)}} \tag{28}$$

(b) – Flambaj **în forfecare** (*în fază*) - matricea suportă *forfecare transversală*; apare la compozite cu fracţii *mari* de fibre şi matrice relativ *flexibilă*; pentru acest caz se face doar o evaluare aproximativă a rezistenţei compozitului, astfel:

$$X_1^C = \frac{G_m}{1 - V_f} \tag{29}$$

(c) – Flambaj **localizat** (*cu destabilizare zonală*) – iniţiat în zonele cu multe porozităţi, sau cu fibre de armare mai puţin numeroase; întâlnit la compozite cu matrice rigidă sau armare multidirecţională; este un caz particular de flambaj în fază; tensiunile de întindere şi comprimare ce apar în fibre prin îndoirea lor duc la apariţia în structură a unor *zone defectate*, evidenţiate prin *deformaţii pronunţate* ale fibrelor (dacă sunt ductile, de exemplu aramidice), sau prin apariţia unor *plane de rupere* (pentru fibre fragile, cum sunt cele de carbon), înclinate faţă de direcţia solicitării.

Acest mod de cedare este asemănător cu ruperea propriu-zisă prin forfecare a compozitelor unidirecţionale comprimate longitudinal (cu probabilitate mare de apariţie la valori mari ale fracţiei de fibre), având *un singur plan de rupere*, dirijat aproximativ la 45° faţă de planul principal transversal al compozitului; de obicei suprafeţele de rupere din compozit au aspect regulat şi se află (atât pentru fibre, cât şi pentru matrice) în planul global de forfecare.

Estimarea rezistenţei la comprimare longitudinală a compozitului se bazează pe *rezistenţa la forfecare* ($\mathbf{X_f^F}$) *a fibrelor de armare*:

$$X_1^C = 2 \cdot X_f^F \left[V_f + (1 - V_f) \frac{E_m}{E_f} \right] \tag{30a}$$

Această relaţie dă valori ale rezistenţei mai mari decât cele experimentale, de exemplu pentru că nu ia în considerare eventuala deformare plastică a matricei (limita ei de curgere se află sub limita de elasticitate a fibrelor şi poate fi atinsă sub încărcări de comprimare longitudinală); au fost deci propuse şi relaţii ale rezistenţei în funcţie de limita de curgere ($\mathbf{X_m^c}$) a matricei:

$$X_1^C = \sqrt{\frac{V_f \cdot E_f \cdot X_m^c}{3 \cdot (1 - V_f)}} \tag{30b}$$

Aplicaţii

1. Deducerea expresiilor bazate pe regula (directă şi inversă) a amestecurilor.

a. Modulul Young (compozit cu fibre lungi, unidirecţionale, solicitat pe direcţia armării)

Se admite că adeziunea la interfaţa fibre - matrice este foarte bună, încât acestea se vor deforma în aceeaşi măsură, adică având aceeaşi valoare a deformaţiei specifice, valabilă de altfel şi pentru întregul eşantion de compozit aflat în studiu:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m = \varepsilon_f. \tag{1}$$

Despre încărcarea totală ($\mathbf{F_c}$) aplicată probei, se poate spune că este suma părţilor din ea care sunt preluate de matrice ($\mathbf{F_m}$) şi respectiv de fibre ($\mathbf{F_f}$); notând cu $\boldsymbol{\sigma_i}$ - tensiunea care se produce în compozit şi în fiecare constituent, datorită încărcării analizate şi cu $\mathbf{A_i}$ - aria totală a secţiunii transversale a eşantionului, respectiv a părţilor reprezentate de *matrice*, respectiv de *fibre*, se poate scrie că $\mathbf{F_i = \sigma_i \cdot A_i}$, ceea ce conduce la expresia:

$$\sigma_c \cdot A_c = \sigma_m \cdot A_m + \sigma_f \cdot A_f \tag{2}$$

Dacă se împarte fiecare termen prin cantitatea (strict pozitivă) $\mathbf{A_c}$, lungimea eşantionului fiind fixată, rapoartele dintre $\mathbf{A_m}$, respectiv $\mathbf{A_f}$ şi aria totală a secţiunii $\mathbf{A_c}$ sunt egale cu fracţiile volumice de constituenţi, $\mathbf{V_m}$ respectiv $\mathbf{V_f}$, se obţine legătura dintre tensiuni şi fracţiile volumice, astfel:

$$\sigma_c = \sigma_m \cdot V_m + \sigma_f \cdot V_f \tag{3}$$

Ţinând seama de relaţia (1), această expresie rămâne valabilă dacă se împarte fiecare termen la valoarea corespunzătoare a deformaţiei specifice, adică

$$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \cdot V_m + \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} \cdot V_f \tag{4}$$

Admiţând că nivelul încărcării este ales astfel încât fiecare constituent, dar şi compozitul în ansamblu, să se deformeze în domeniul lor de *elasticitate*, atunci pentru fiecare dintre cele trei materiale se poate scrie expresia legii lui Hooke **$E_i = \sigma_i / \varepsilon_i$** ajungându-se la exprimarea cunoscută a regulii **directe** a amestecurilor:

$$E_{c\ long} = E_m \cdot V_m + E_f \cdot V_f \tag{5}$$

Această expresie permite evaluarea modulului longitidinal de elasticitate, pentru un compozit cu fibre continue şi aliniate pe direcţia solicitării (de tracţiune).

b. Modulul Young transversal (perpendicular pe direcţia fibrelor de armare)

În acest caz se admite că tensiunea produsă la nivel global în compozit are aceeaşi valoare cu tensiunile din matrice, respectiv din fibre:

$$\sigma_c = \sigma_m = \sigma_f = \sigma \tag{6}$$

La fel ca mai sus deformaţia specifică a eşantionului de compozit se poate scrie ca sumă ponderată a deformaţiilor celor două materiale constituente:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m \cdot V_m + \varepsilon_f \cdot V_f \tag{7}$$

Admiţând că pentru fiecare material este aplicabilă legea lui Hooke, rezultă:

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_m}{E_m} \cdot V_m + \frac{\sigma_f}{E_f} \cdot V_f \tag{8}$$

folosind condiţia (6) se poate împărţi fiecare termen prin **σ**, ajungând astfel la regula inversă a amestecurilor:

$$\frac{1}{E_{c\,trans}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \tag{9}$$

care se mai poate scrie şi sub forma:

$$E_{c\,trans} = \frac{E_m \cdot E_f}{V_m \cdot E_f + V_f \cdot E_m} \tag{10}$$

2. Exemple de calcule bazate pe aceste relaţii

2.1. Să se analizeze efectele pe care le produce variaţia fracţiei de fibre de armare asupra modulului de elasticitate, pe direcţie *longitudinală*, respectiv *transversală*, pentru un compozit cu matrice de **răşină poliesterică**, având modulul E_m = 3GPa şi armare cu **fibre de sticlă** lungi, unidirecţionale, care au modulul E_f = 70GPa.

Pentru această exemplificare se vor considera patru cazuri distincte de valori ale fracţiei volumice de fibre de armare:

a) **V_f = 0,2** (un conţinut de fibre de 20% din volumul compozitului)

Observaţie: La fel ca în prezentarea generală, pentru analizele şi exemplele de faţă se admite că porozitatea compozitului este neglijabilă (conţinutul de goluri din structură V_g tinde la zero), astfel încât suma fracţiilor volumice de fibre şi matrice trebuie să fie egală cu unitatea: $V_f + V_m = 1$.

Valoarea estimată a modulului *longitudinal* de elasticitate va fi:

$$E_{c\ long} = 0.2 \cdot 70GPa + 0.8 \cdot 3GPa = 14GPa + 2.4GPa = 16.4GPa$$

adică introducerea fibrelor în matrice creşte de peste 5 ori valoarea modulului.

Estimarea modulului *transversal* conduce la valoarea:

$$E_{c\,trans} = \frac{3GPa \cdot 70GPa}{0.8 \cdot 70GPa + 0.2 \cdot 3GPa} = \frac{210}{56 + 0.6} GPa = 3.71GPa$$

arătând că se produce o creştere a modulului, faţă de cel al matricei, dar mult mai modestă ca intensitate decât în cazul modulului de pe direcţia armării.

b) $\mathbf{V_f = 0,4}$

$$E_{c\ long} = 0.4 \cdot 70GPa + 0.6 \cdot 3GPa = 28GPa + 1.8GPa = 29.8GPa$$

$$E_{c\,trans} = \frac{3GPa \cdot 70GPa}{0.6 \cdot 70GPa + 0.4 \cdot 3GPa} = \frac{210}{42 + 1.2} GPa = 4.86GPa$$

c) $\mathbf{V_f = 0,6}$

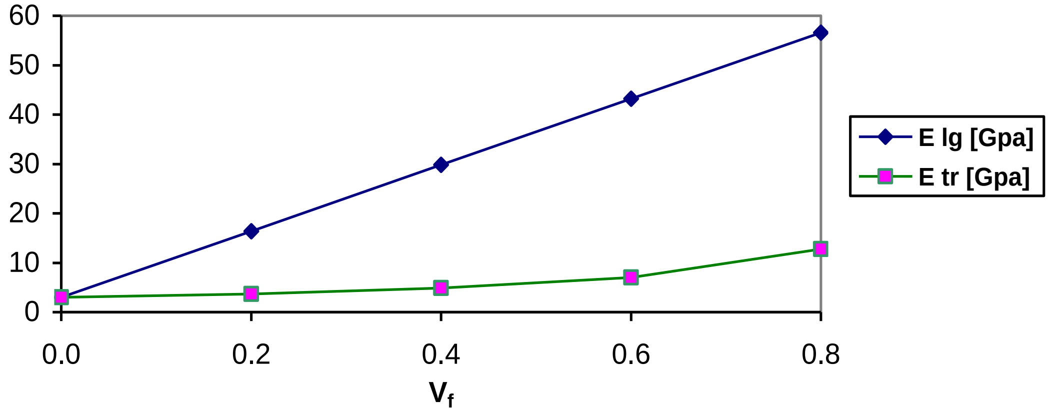
$$E_{c\ long} = 0.6 \cdot 70GPa + 0.4 \cdot 3GPa = 42GPa + 1.2GPa = 43.2GPa$$

$$E_{c\,trans} = \frac{3GPa \cdot 70GPa}{0.4 \cdot 70GPa + 0.6 \cdot 3GPa} = \frac{210}{28 + 1.8} GPa = 7.05GPa$$

d) $\mathbf{V_f = 0,8}$

$$E_{c\ long} = 0.8 \cdot 70GPa + 0.2 \cdot 3GPa = 56GPa + 0.6GPa = 56.6GPa$$

$$E_{c\,trans} = \frac{3GPa \cdot 70GPa}{0.2 \cdot 70GPa + 0.8 \cdot 3GPa} = \frac{210}{14 + 2.4} GPa = 12.80GPa$$



Variaţia valorilor estimate ale modulilor de elasticitate, la creşterea conţinutului de fibre de armare.

După cum se arată şi pe graficele de mai sus, evaluarea modulului *longitudinal* de elasticitate, pentru compozitul considerat, cu o relaţie dată de regula **directă** a amestecurilor prognozează creşterea modulului, *direct proporţional* cu fracţia volumică de fibre de armare din compozit;

de cealaltă parte, modulul *transversal* estimat cu regula **inversă** a amestecurilor are o creştere mult mai puţin pronunţată, ceea ce de altfel se verifică şi prin determinări experimentale.

2.2. Să se evalueze felul cum variază, atunci când creşte conţinutul de particule de armare, valorile limită (superioară şi inferioare) ale modulului global de elasticitate, pentru un compozit cu matrice din **cupru** (E_m = 60GPa) şi faza de armare formată din **particule de wolfram** (E_p = 320GPa).

Se ştie că valorile limită ale modulului de elasticitate se evaluează, pentru aceste compozite, folosind relaţii *echivalente* cu regulile amestecurilor; procedând ca mai sus în privinţa valorilor fracţiei volumice de particule, se obţin următoarele rezultate:

a) **V_f = 0,2** (un conţinut de particule de 20% din volumul compozitului)

Valoarea estimată a limitei superioare a modulului de elasticitate va fi:

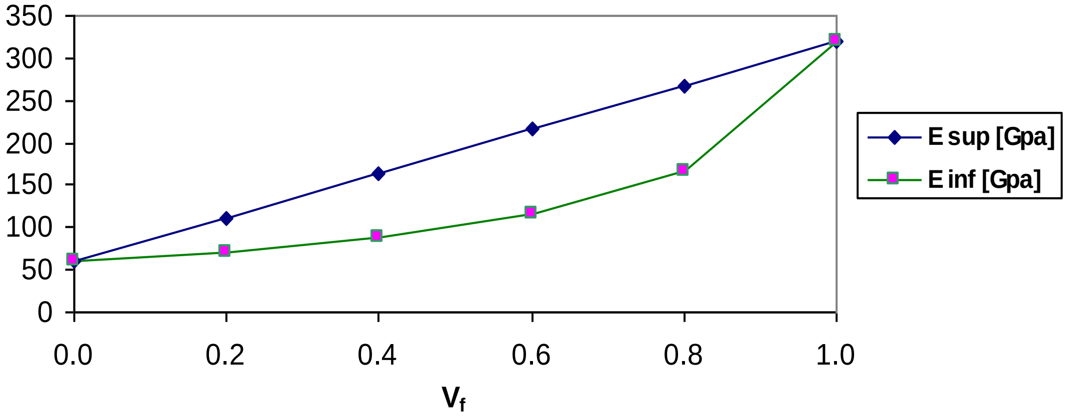
$$E_{c\ sup} = 0.2 \cdot 320GPa + 0.8 \cdot 60GPa = 64GPa + 48GPa = 112GPa$$

adică se prognozează că introducerea particulelor de wolfram în matricea de cupru duce la creşterea de aproape 2 ori a modulului.

Estimarea limitei inferioare a modulului conduce la valoarea:

$$E_{c\inf} = \frac{60GPa \cdot 320GPa}{0.8 \cdot 320GPa + 0.2 \cdot 60GPa} = \frac{19200}{256 + 12} GPa = 71.64GPa$$

deci se produce o creştere a modulului, faţă de al matricei, mai modestă ca intensitate decât în cazul limitei superioare a modulului.



Variaţia estimată a limitelor modulului de elasticitate, pentru un compozit Cu-$W_{(p)}$, la creşterea conţinutului volumic de particule de armare.

b) **V_f = 0,4**

$$E_{c\ sup} = 0.4 \cdot 320GPa + 0.6 \cdot 60GPa = 128GPa + 36GPa = 164GPa$$

$$E_{c\inf} = \frac{60GPa \cdot 320GPa}{0.6 \cdot 320GPa + 0.4 \cdot 60GPa} = \frac{19200}{192 + 24} GPa = 88.89GPa$$

c) **V_f = 0,6**

$$E_{c\ sup} = 0.6 \cdot 320GPa + 0.4 \cdot 60GPa = 192GPa + 24GPa = 216GPa$$

$$E_{c\inf} = \frac{60GPa \cdot 320GPa}{0.4 \cdot 320GPa + 0.6 \cdot 60GPa} = \frac{19200}{128 + 36} GPa = 117.07GPa$$

d) **V_f = 0,8**

$$E_{c\,sup} = 0.8 \cdot 320GPa + 0.2 \cdot 60GPa = 256GPa + 12GPa = 268GPa$$

$$E_{c\inf} = \frac{60GPa \cdot 320GPa}{0.2 \cdot 320GPa + 0.8 \cdot 60GPa} = \frac{19200}{64 + 48} GPa = 165.52GPa$$

Rezultatele acestor calcule au fost utilizate pentru trasarea celor două grafice de mai sus.

3. Probleme de *evaluare* a caracteristicilor de elasticitate

3.1. Să se evalueze modulul de elasticitate transversal ($E_2 = E_{c\ trans}$) pentru un compozit cu **fibre** unidirecţionale de **carbon**, într-o matrice de **răşină epoxidică**, cunoscând că:

ν_m = 0,36; V_f = 0,65; E_m = 3,45GPa; E_{2f} = 14,8GPa; se va considera ξ_1 = 1.

După cum s-a arătat, în mod obişnuit această evaluare se face prin două metode.

a) După principiile mecanicii materialelor (regula inversă a amestecurilor) – relaţia (10)

$$E_2 = \frac{E_{2f} \cdot E_m}{V_f \cdot E_m + V_m \cdot E_{2f}}$$

Folosind valorile numerice date în enunţ se obţine că:

$$E_2 = \frac{14.8 \cdot 3.45}{0.65 \cdot 3.45 + 0.35 \cdot 14.8} GPa = \frac{51.06}{7.4225} = 6.879GPa$$

S-a arătat că, în cadrul acestei metode de calcul, efectul fibrelor de armare asupra deformabilităţii matricei, pe direcţie transversală, poate fi luat în considerare dacă se calculează o valoare *corectată* a modulului matricei:

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - \upsilon_m^2} \tag{11}$$

din care cu valorile de faţă se obţine: $E'_m = \dfrac{3.45\,GPa}{1 - 0.36^2} = 3.964GPa$

Refăcând calculele de mai sus cu această valoare pentru **E_m** se ajunge la o altă valoare estimată, pentru modulul transversal - E_2 = 7,564GPa; corectura a condus la o valoare estimată *mai mare cu 10%* faţă de aplicarea propriu-zisă a regulii amestecurilor.

b) Folosind relaţiile semi-empirice Halpin-Tsai:

$$E_2 = E_m \frac{1 + \xi_1 \eta_1 V_f}{1 - \eta_1 V_f} \quad \text{unde} \quad \eta_1 = \frac{E_{2f} - E_m}{E_{2f} + \xi_1 E_m} \tag{12}$$

dacă se admite valoarea 1 pentru factorul de interpolare ξ_1, atunci se obţine:

$$\eta_1 = \frac{(14.8 - 3.45)\,GPa}{(14.8 + 3.45)\,GPa} = \frac{11.35}{18.25} = 0.622$$

de unde se ajunge la: $E_2 = 3.45GPa \cdot \dfrac{1 + 0.622 \cdot 0.65}{1 - 0.622 \cdot 0.65} = 8.133GPa$

Aşa cum rezultă din literatură, calculele bazate pe regula inversă a amestecurilor tind să subevalueze modulul transversal de elasticitate, ceea ce apare şi din rezultatele de mai sus: metoda de evaluare bazată pe relaţii Halpin-Tsai a estimat o valoare mai mare cu 20% (sau cu

10%, dacă se ia în calcul valoarea *corijată* a modulului matricei) faţă de rezultatul obţinut cu prima metodă.

3.2. Să se evalueze modulul de elasticitate transversal ($E_2 = E_{c\ trans}$) pentru un compozit cu **fibre** unidirecţionale de **carbură de siliciu** (SiC), într-o matrice de **aluminiu**, cunoscând că:

$\nu_m = 0,33$; $V_f = 0,4$; $E_m = 69GPa$; $E_{2f} = 366GPa$; se va considera $\xi_1 = 2$.

La fel ca mai sus, această evaluare se face prin două metode.

a) Folosind mecanica materialelor (regula inversă a amestecurilor) – relaţia (10)

$$E_2 = \frac{E_{2f} \cdot E_m}{V_f \cdot E_m + V_m \cdot E_{2f}}$$

Cu valorile din enunţ se obţine că:

$$E_2 = \frac{366 \cdot 69}{0.4 \cdot 69 + 0.4 \cdot 366} GPa = \frac{25254}{247.2} = 102.16 GPa$$

Valoarea corectată a modulului matricei va fi:

$$E_m' = \frac{E_m}{1 - \upsilon_m^2} \qquad (11\ bis)$$

din care, cu valorile de faţă, se obţine: $E_m' = \frac{69\,GPa}{1 - 0.33^2} = 77.4324 GPa$

Refăcând calculul cu această valoare pentru E_m se obţine altă valoare estimată pentru modulul transversal, $E_2 = 113.1GPa$; corectura a condus, şi aici, la o valoare estimată mai mare cu 10% faţă de aplicarea propriu-zisă a regulii amestecurilor.

b) Folosind relaţiile semi-empirice Halpin-Tsai:

$$E_2 = E_m \frac{1 + \xi_1 \eta_1 V_f}{1 - \eta_1 V_f} \quad \text{unde} \quad \eta_1 = \frac{E_{2f} - E_m}{E_{2f} + \xi_1 E_m} \qquad (12\ bis)$$

cu valoarea 2 pentru factorul ξ_1 se obţine: $\eta_1 = \frac{(366 - 69)\,GPa}{(366 + 2 \cdot 69)\,GPa} = \frac{297}{504} = 0.5893$

de unde rezultă: $E_2 = 69GPa \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.5893 \cdot 0.4}{1 - 0.5893 \cdot 0.4} = 132.8733 GPa$

Rezultatul este cu 18% mai mare faţă de valoarea *corectată* dată de regula amestecurilor; se mai poate observa că diferenţa dintre valorile estimate creşte, atunci când se alege valoarea 2 a factorului de interpolare.

3.3. Să se evalueze modulul de forfecare (G_{12}) pentru un compozit armat cu fibre unidirecţionale de sticlă, într-o matrice de răşină epoxidică, dacă: $V_f = 0,55$; $G_m = 1270$ MPa; $G_f = 28,3$ GPa; $\xi_2 = 1$.

a) Folosind principiile mecanicii materialelor (regula inversă a amestecurilor)

$$G_{12} = \frac{G_f \cdot G_m}{V_f \cdot G_m + V_m \cdot G_f}$$

se obţine că: $G_{12} = \frac{28.3 \cdot 1.27}{0.55 \cdot 1.27 + 0.45 \cdot 28.3} GPa = \frac{35.941}{13.4335} GPa = 2.6755 GPa$

b) Folosind relaţiile semi-empirice Halpin-Tsai (varianta cu $\xi_2 = 1$):

$$G_{12} = G_m \frac{(G_f + G_m) + V_f (G_f - G_m)}{(G_f + G_m) - V_f (G_f - G_m)} \tag{13}$$

rezultă: $$G_{12} = 1.27\text{GPa} \frac{(28.3 + 1.27) + 0.55(28.3 - 1.27)}{(28.3 + 1.27) - 0.55(28.3 - 1.27)} = 3.8382\,\text{GPa}$$

Se poate afirma, şi în acest caz, că aplicarea mecanicii materialelor conduce la valori subevaluate ale modulului, diferenţa faţă de rezultatul dat de relaţiile semi-empirice fiind destul de pronunţată, de peste 40%.

3.4. Pentru un compozit cu **fibre** unidirecţionale de **sticlă**, în matrice de **răşină epoxidică**, se cunosc valorile: $V_f = 0,65$; $E_m = 3,45$GPa; $E_f = 69$GPa, iar rezistenţele la tracţiune ale celor doi constituenţi sunt: $X_m = 104$MPa şi $X_f = 3450$MPa. Se cere:

a) Să se evalueze modulul de elasticitate longitudinal (**E_1**) şi rezistenţa la tracţiune (**X_1**) ale compozitului, admiţând pt. constituenţi şi compozit comportare liniar elastică până la rupere.

b) Admiţând că toate celelalte mărimi îşi păstrează valorile, să se arate cum variază rezistenţa globală **X_1** în funcţie de **E_f** .

a) Pentru modulul **E_1** se aplică relaţia (1), dată de regula directă a amestecurilor, considerând că fibrele sunt dispuse ordonat şi aliniat în matrice, adică: $E_1 = V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m$

Cu valorile din enunţ se obţine: $E_1 = 0.65 \cdot 69\text{GPa} + 0.35 \cdot 3.45\text{GPa} = 46.0575\text{GPa}$

Evaluarea rezistenţei la tracţiune se poate face folosind relaţia bazată pe constantele elastice ale constituenţilor:

$$X_1^T \cong X_f \cdot \left(V_f + V_m \cdot \frac{E_m}{E_f} \right) \tag{14}$$

de unde rezultă: $$X_1^T \cong 3450\,\text{MPa} \cdot \left(0.65 + 0.35 \cdot \frac{3.45}{69} \right) = 2302.875\text{MPa}$$

b) Dacă celelalte mărimi îşi păstrează valorile, din expresia (14) se observă că scăderea lui **E_f** (însemnând folosirea unor fibre de armare mai puţin rigide – dar cu aceeaşi rezistenţă!) creşte rezistenţa la tracţiune a compozitului.

3.5. Să se evalueze modulul longitudinal (**E_1**) şi rezistenţa la tracţiune (**X_1**) pentru un compozit cu **fibre** unidirecţionale de **carbon**, plasate într-o matrice de **răşină epoxidică**, dacă: $V_f = 0,65$; $E_m = 4,14$GPa; $E_{1f} = 235$GPa. Rezistenţele la tracţiune ale constituenţilor sunt: $X_m = 104$MPa şi $X_f = 3450$MPa.

(Această situaţie reprezintă ilustrarea discuţiei de la punctul (b) din problema anterioară; întrucât E_f creşte, este de aşteptat ca rezistenţa estimată a compozitului să scadă, faţă de valoarea obţinută mai sus.)

a) Pentru evaluarea modulului **E_1** se aplică tot relaţia dată de regula directă a amestecurilor, considerând că fibrele sunt dispuse ordonat şi aliniat în matrice, adică:

$$E_1 = 0.65 \cdot 235\text{GPa} + 0.35 \cdot 4.14\text{GPa} = 154.199\text{GPa}$$

În mod firesc, întrucât rigidităţile constituenţilor sunt (mult) mai mari faţă de problema anterioară, valoarea estimată a modulului E_1 este şi ea mai mare.

Evaluarea rezistenţei la tracţiune a compozitului se face tot folosind relaţia (14), care include constantele elastice ale constituenţilor:

$$X_1^T \cong 3450\,\text{MPa} \cdot \left(0.65 + 0.35 \cdot \frac{4.14}{235}\right) = 2263.89\,\text{MPa}$$

b) Rezultatul confirmă aşteptările, cu precizarea că s-a produs o creştere de peste 3 ori a rigidităţii fibrelor, care însă a dus la scăderea cu doar 1,7% a rezistenţei estimate la tracţiune; această constatare se explică prin valoarea foarte mică a raportului dintre $\mathbf{E_m}$ şi $\mathbf{E_f}$, însemnând că influenţa variaţiei de rigiditate a fibrelor este practic nesemnificativă, atunci când fibrele sunt mult mai rigide ca matricea!

3.6. Să se evalueze modulul longitudinal ($\mathbf{E_1}$) şi rezistenţa la tracţiune ($\mathbf{X_1}$) pentru un compozit cu **fibre** unidirecţionale de **carbură de siliciu** (SiC), în matrice tot dintr-un material **ceramic**, dacă se ştie că V_f = 0,4; E_m = 97GPa; E_f = 172GPa; rezistenţele constituenţilor au următoarele valori: X_m = 138MPa şi X_f = 1930MPa.

Pentru evaluarea modulului E_1 se aplică din nou relaţia dată de regula directă a amestecurilor, considerând că fibrele sunt dispuse ordonat şi aliniat în matrice, adică se obţine că:

$$E_1 = 0.4 \cdot 172\,\text{GPa} + 0.6 \cdot 97\,\text{GPa} = 127\,\text{GPa}$$

Deoarece ambii constituenţi sunt ceramici, relaţia pentru evaluarea rezistenţei la tracţiune a compozitului are aspecte diferite, în funcţie de relaţia care există între alungirile la rupere ale fibrelor şi matricei.

a) Dacă fibrele sunt mai rigide ca matricea ($\varepsilon_m^R > \varepsilon_f^R$), se va folosi tot relaţia care include constantele elastice ale constituenţilor:

$$X_1^T \cong 1930\,\text{MPa} \cdot \left(0.4 + 0.6 \cdot \frac{97}{172}\right) = 1425.112\,\text{MPa}$$

b) Dacă matricea este mai rigidă ca fibrele ($\varepsilon_f^R > \varepsilon_m^R$), atunci relaţia de evaluare este:

$$X_1^T \cong X_m \cdot \left(V_m + V_f \cdot \frac{E_f}{E_m}\right)$$

adică: $$X_1^T \cong 138\,\text{MPa} \cdot \left(0.6 + 0.4 \cdot \frac{172}{97}\right) = 180.6834\,\text{MPa}$$

Diferenţa foarte mare dintre rezultatele celor două evaluări provine din faptul că, în al doilea caz, rezistenţa compozitului este doar de ordinul de mărime al rezistenţei matricei (din cauza căreia se va produce şi cedarea materialului compozit)!