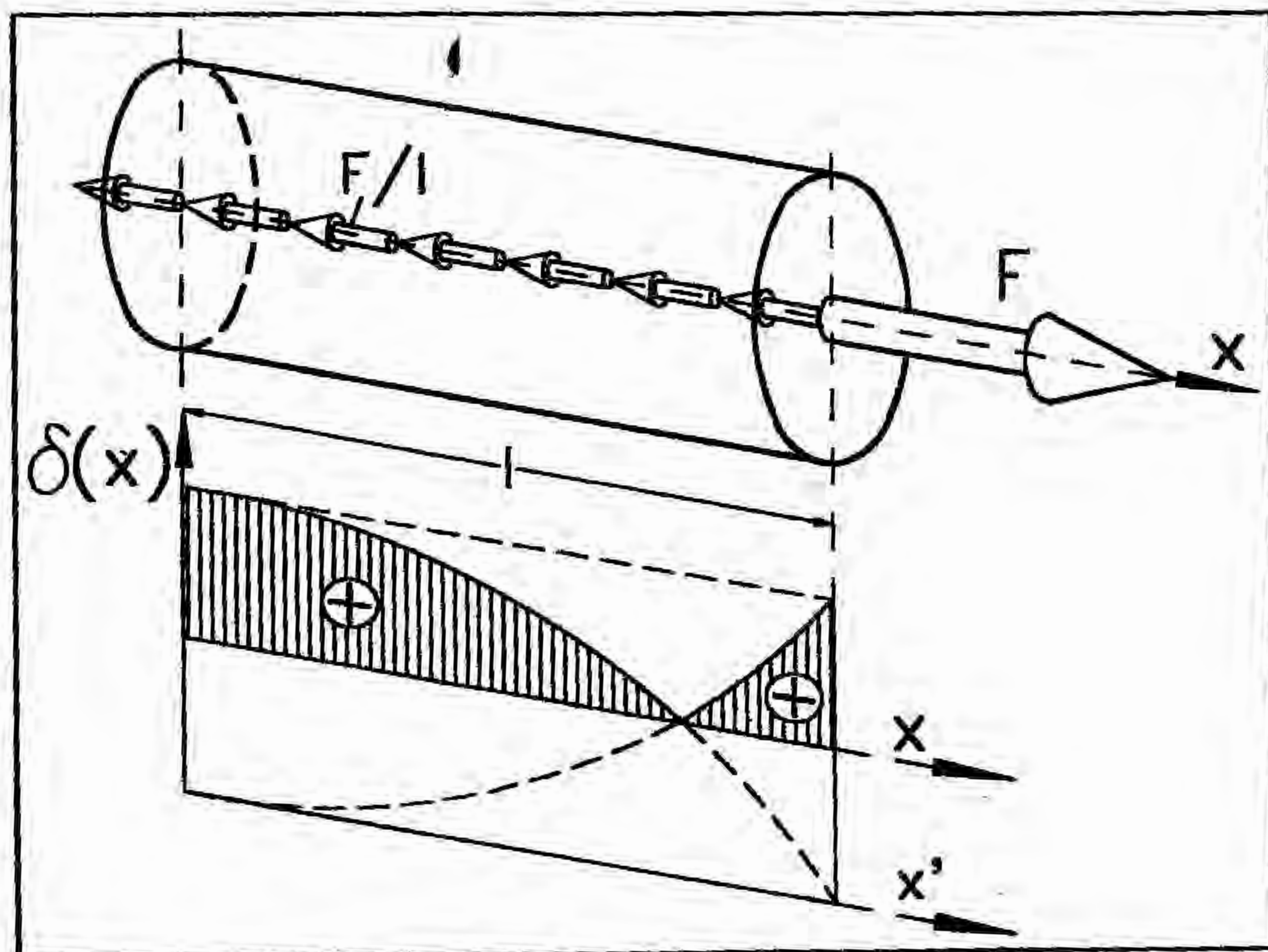


VIOREL GOANȚĂ

# REZISTENȚA MATERIALELOR

• NOȚIUNI FUNDAMENTALE •



Editura "GH. ASACHI"

Iasi - 2021



**Editura „GH. ASACHI”**  
**Universitatea Tehnică Iași**  
**Bd. D. Mangeron, nr. 67,**  
**6600, Iași, Romania**  
**Tel: 032 - 23.13.43**  
**Fax: 032 - 21.42.90.**

**Director editură:**

**Prof.univ.dr.ing. Mihail VOICU**

**Referenți științifici:**

**Prof.univ.dr.ing. Valerian PALIHOVICI**

**Prof.univ.dr.ing. Paul-Doru BÂRSĂNESCU**

**Redactor:**

**Prof. Georgeta ANICULĂEȘI**

**Culegere și tehnoredactare computerizată:**

**Viorel GOANȚĂ**

**Coperta:**

**Viorel GOANȚĂ**



## **Prefață**

*Rezistența materialelor* face parte din grupul de discipline tehnice generale și are ca scop proiectarea rațională și economică a structurilor de rezistență, elementelor de construcție, pieselor, etc.. În cadrul Rezistenței materialelor, spre deosebire de alte discipline înrudite, se ia în considerare deformabilitatea elastică și (sau) plastică a corpurilor. Condițiile în baza cărora se stabilesc dimensiunile corpurilor ce urmează a funcționa în situații reale sunt cele de rezistență, rigiditate și stabilitate.

Lucrarea de față cuprinde noțiunile fundamentale necesare pentru proiectarea corpurilor supuse solicitărilor simple.

Noțiunile introductive din primul capitol pun în evidență, atât modalitățile posibile de încărcare și rezemare a corpurilor cât și eforturile, tensiunile, deplasările și deformațiile respectivelor corpuri, care apar ca urmare a solicitării exterioare.

Noțiunile despre materiale prezintă succint caracteristicile mecanice și elastice ale acestora și încercările pe baza cărora se determină. Acest capitol trebuie completat pe baza noțiunilor dobândite în cadrul orelor de laborator.

Având în vedere faptul că, pe parcursul lucrării se pun în evidență tensiunile și deformațiile la care este supus corpul ca urmare a solicitărilor aplicate, capitolul ce cuprinde elemente de teoria elasticității pune în evidență tocmai aceste mărimi.

În cadrul capitolelor care tratează solicitările simple, se face un calcul al tensiunilor, deformațiilor și deplasărilor specifice fiecărei solicitări în parte. Se prezintă de asemenea, modalitățile concrete de calcul al reacțiunilor și de trasare a diagramelor de eforturi ce reprezintă primul pas în rezolvarea unei probleme de rezistență.

În capitolele ce cuprind *Solicitarea axială* și cea de *răsucire* se prezintă o modalitate proprie de trasare a *diagramei deplasărilor* pentru barele nerezemate supuse solicitărilor respective. ***Procedeeul descris și menționat ca atare, reprezintă o contribuție proprie a autorului în cadrul acestei lucrări.***

Pentru calculul deplasărilor și ridicarea nedeterminării la încovoiere, s-au propus patru metode care pot rezolva cu succes problemele propuse.

Aplicațiile prezente în cadrul anumitor capitole sunt propuse pentru a fixa mai bine cunoștințele teoretice dobândite. Evident că, aceste cunoștințe trebuiesc aprofundate în cadrul orelor de aplicații și pe baza lucrărilor ce cuprind, în special, asemenea aplicații.



Prin conținutul său teoretic și aplicativ, lucrarea propune o abordare riguroasă, fără a fi foarte complexă, a noțiunilor fundamentale necesare unui calcul de rezistență.

Autorul speră că, parcurgerea acestei lucrări va necesita un efort minim și va contribui la familiarizarea cu noțiunile de bază folosite în Rezistența materialelor și necesare inginerilor din oricare ramură de activitate.

*Coperta prezintă, în mod sugestiv, contribuția autorului la determinarea deplasărilor reale pentru secțiunile transversale ale barelor nerezemate supuse la solicitarea axială și cea de răsucire.*

Mulțumesc referenților științifici, prof. dr. ing. Valerian PALIHOVICI și prof. dr. ing. Paul Doru BÂRSĂNESCU, pentru indicațiile date în cadrul elaborării acestei lucrări și pentru ajutorul acordat pe parcursul întregii mele activități didactice.

Autorul



# CAPITOLUL 1

## NOȚIUNI INTRODUCTIVE

- 
- 1.1. Obiectul și problemele Rezistenței materialelor
  - 1.2. Clasificarea corpurilor solide în Rezistența materialelor
  - 1.3. Modalități de rezemare a corpurilor
  - 1.4. Condiții de rezemare
  - 1.5. Calculul reacțiunilor
  - 1.6. Sarcini exterioare
  - 1.7. Eforturi interioare
  - 1.8. Clasificarea solicitărilor
  - 1.9. Relații între sarcini și eforturi
  - 1.10. Tensiuni
  - 1.11. Relații între eforturi și tensiuni
  - 1.12. Deplasări și deformații
  - 1.13. Relații între tensiuni și deformații
  - 1.14. Con tracția transversală
- 

### 1.1. Obiectul și problemele Rezistenței materialelor

Rezistența materialelor este o disciplină tehnică care face parte din grupul disciplinelor ce studiază mecanica corpului deformabil: Teoria elasticității, Teoria plasticității, Mecanica ruperii, Mecanica contactului, etc.

Sub acțiunea diferitelor sarcini exterioare corpurile își schimbă forma geometrică și dimensiunile inițiale. Dacă sarcinile aplicate depășesc anumite valori, corpurile solicitate își pot pierde stabilitatea sau

---



pot ajunge la distrugere. Atunci când un corp solid deformabil este sollicitat din exterior, în interiorul acestuia se dezvoltă eforturi. În aceste condiții, corpul solid se găsește într-o stare de sollicitare care trebuie determinată pentru a se constata dacă acel corp va *rezista* sollicitării aplicate.

Având în vedere cele expuse se poate spune că, Rezistența materialelor studiază comportarea corpurilor solide, deformabile, sub acțiunea diferitelor sollicitări. În urma acestui studiu se are în vedere dimensionarea economică a elementelor mașinilor și structurilor pe baza condițiilor de rezistență, rigiditate și stabilitate.

O mare importanță în ceea ce privește concluziile desprinse ca urmare a studiului efectuat o au proprietățile mecanice ale materialelor utilizate. Cauza principală a rezistenței unui corp constă, pe de o parte, în mărimea forțelor de legătură existente între atomi și pe de altă parte, în neomogenitățile fizico-mecanice ale materialelor reale și în defectele inerente care apar în structura acestora.

Rezistența materialelor rezolvă probleme legate de *proiectarea* și *verificarea* elementelor unui ansamblu.

*Proiectarea* constă în stabilirea dimensiunilor și a materialelor din care trebuie să fie confecționate diferitele elemente care alcătuiesc ansamblul respectiv. În cadrul proiectării se au în vedere două criterii: economia de material și siguranța în exploatare. Cum aplicarea fiecăruia din cele două criterii conduce la soluții contradictorii, se elaborează metodologii de calcul în vederea realizării unei optimizări. Condițiile care se impun sunt:

- condiții de rezistență care au în vedere valorile eforturilor interioare ale corpului sollicitat de un sistem de sarcini exterior;
- condiții de rigiditate care se referă la valorile deformațiilor sau (și) ale deplasărilor suferite;
- condiții de stabilitate impuse în vederea menținerii formei finale cât mai aproape de cea inițială și a echilibrului static.

Prin *verificare* se stabilește dacă un corp solid sollicitat îndeplinește condițiile menționate mai sus și se stabilește coeficientul de siguranță pentru fiecare element și pentru întreaga structură în ansamblul său.



## 1.2. Clasificarea corpurilor solide în Rezistența materialelor

O structură, o mașină, o construcție, are în componența sa mai multe elemente, piese, etc.. Geometria acestora este destul de complicată astfel încât Rezistența materialelor le schematizează scoțând în evidență esențialul și neglijând aspectele care nu influențează în mod semnificativ comportarea în exploatare a elementului sau structurii respective. Prin schematizare și folosirea anumitor ipoteze se ajunge la corpuri mai simple ca formă. Studiind un corp schematizat, concluziile generale desprinse pot fi extrapolate asupra întregii clase de corpuri din care acesta face parte. Relațiile de calcul ce se stabilesc pentru corpurile simple sunt acceptabile sub raportul dificultății matematice. Prin schematizare nu trebuie să se producă o distanțare inacceptabilă în raport cu cazul real.

Dacă se consideră *raportul dintre cele trei dimensiuni de gabarit*, sub formă schematizată, putem deosebi:

1 - *Corpuri lungi*, la care o dimensiune este mult mai mare în raport cu celelalte două. Ca reprezentare geometrică acest tip de corpuri poate lua naștere prin deplasarea unei figuri plane după o anumită curbă generatoare, plană sau spațială. Curbă generatoare *C* poate fi axa geometrică a barei, iar figura plană *S* al cărui centru de greutate se deplasează și este perpendiculară pe această curbă se numește *secțiune transversală*, figura 1.1a. Formele secțiunilor transversale cele mai folosite sunt arătate în figura 1.1b. În funcție de forma curbei generatoare aceste corpuri pot fi: *drepte cotite sau curbe*, figura 1.1c.

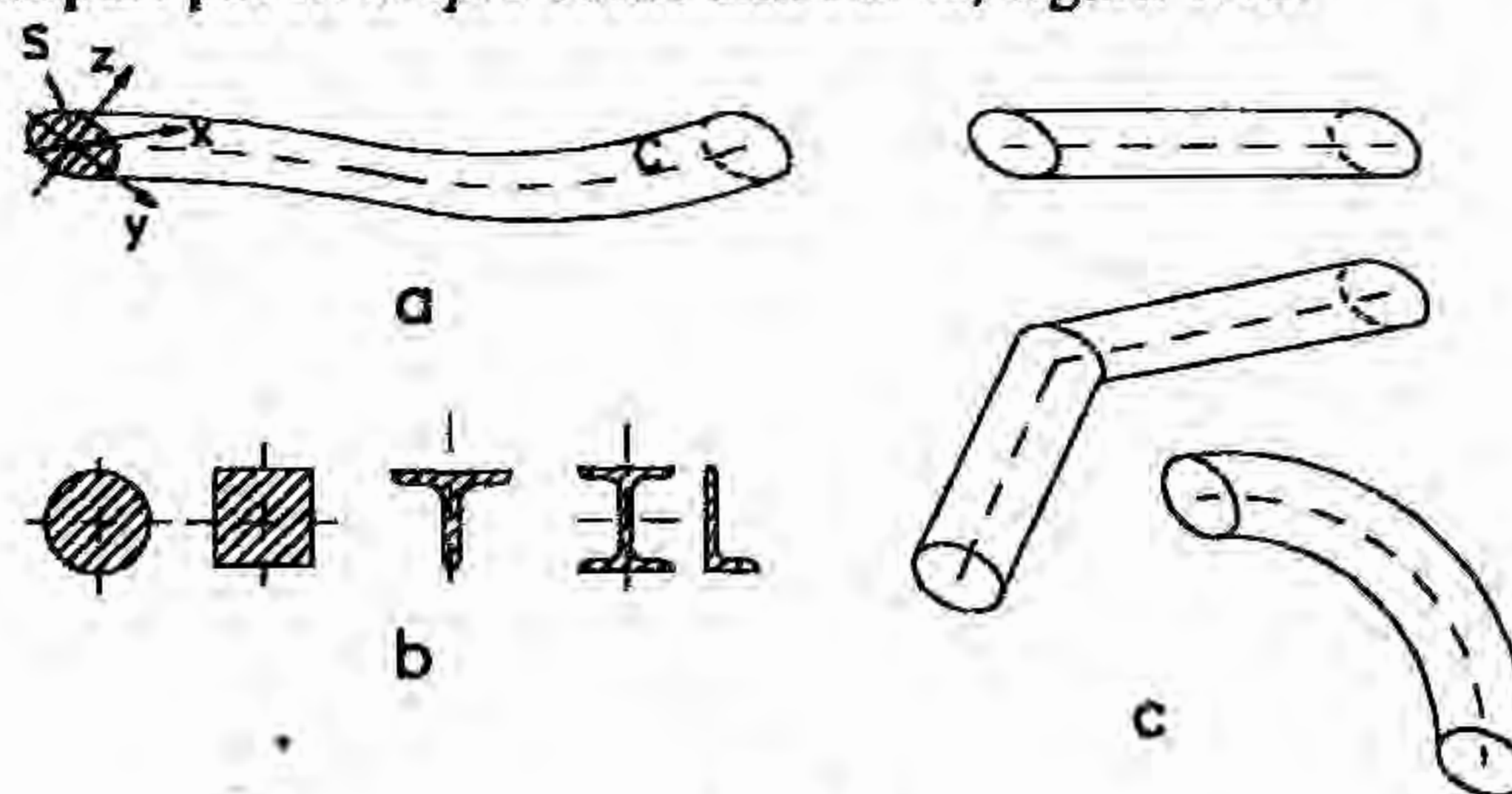


Fig. 1.1



În funcție de *destinație și solicitare*, *corpurile lungi* se pot clasifica astfel:

- *bare, cabluri, fire, tiranți* - solicitate la tracțiune;
- *coloane* - solicitate la compresiune;
- *grinzi* - solicitate la încovoiere;
- *arbori* - solicitați la încovoiere și torsiune.

2. - *Corpuri subțiri*, figura 1.2, care au o dimensiune, ( $h$ ) mult mai mică în raport cu celelalte două, ( $l_1, l_2$ ). În funcție de *forma lor geometrică* dar și de *relațiile specifice de calcul aplicate*, aceste corpuri pot fi clasificate după cum urmează:

- *anvelope, învelitori* (vase, tuburi, fuselaje, carcase, acoperișuri);
- *membrane*;
- *plăci* (circulare, eliptice, dreptunghiulare).

3. - *Corpuri masive*, figura 1.3, la care cele trei dimensiuni, ( $l_1, l_2, l_3$ ), au valori comparabile. În această categorie regăsim: *batiuri, fundații, blocuri, bile, role, etc.*

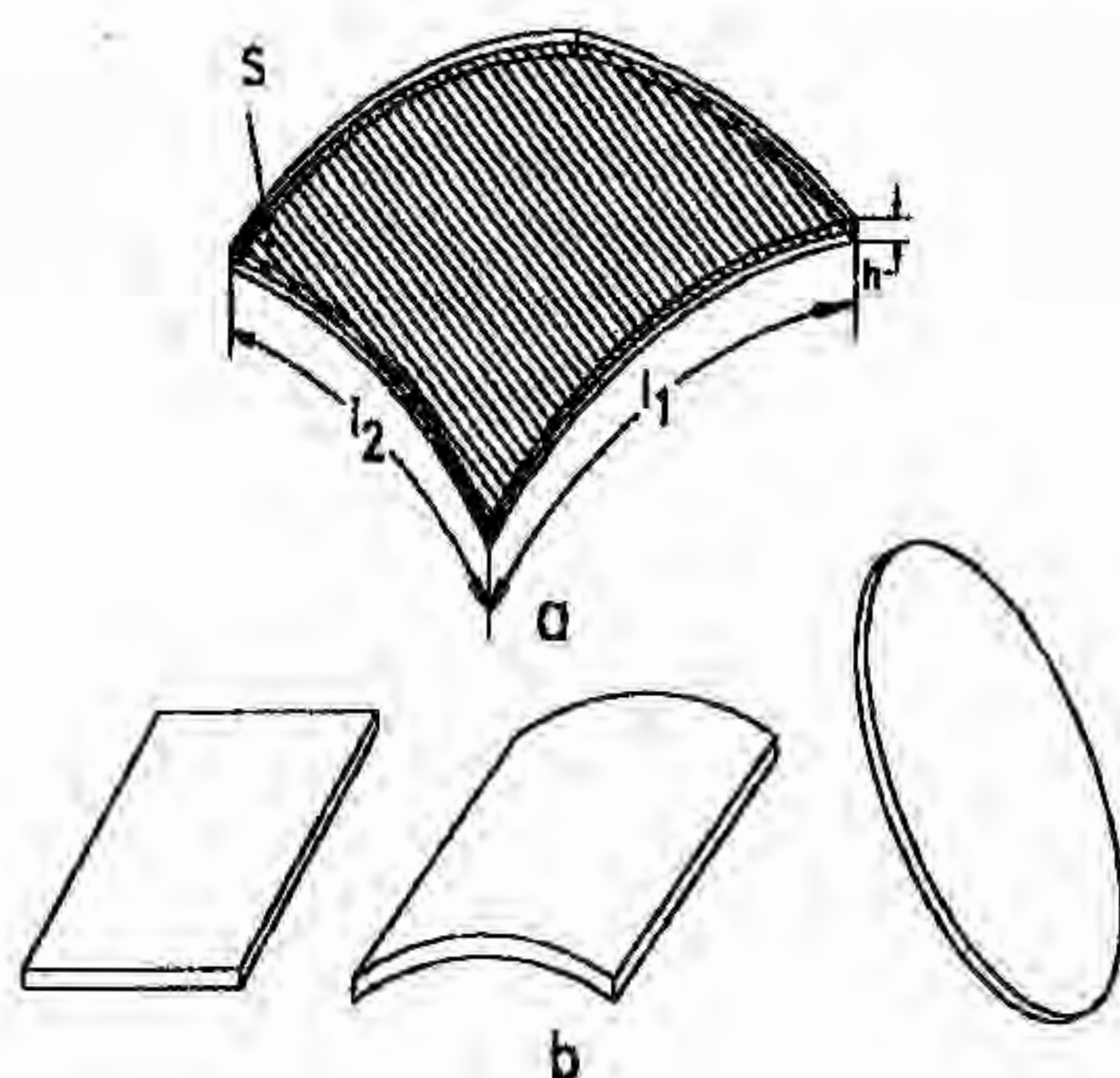


Fig. 1.2.

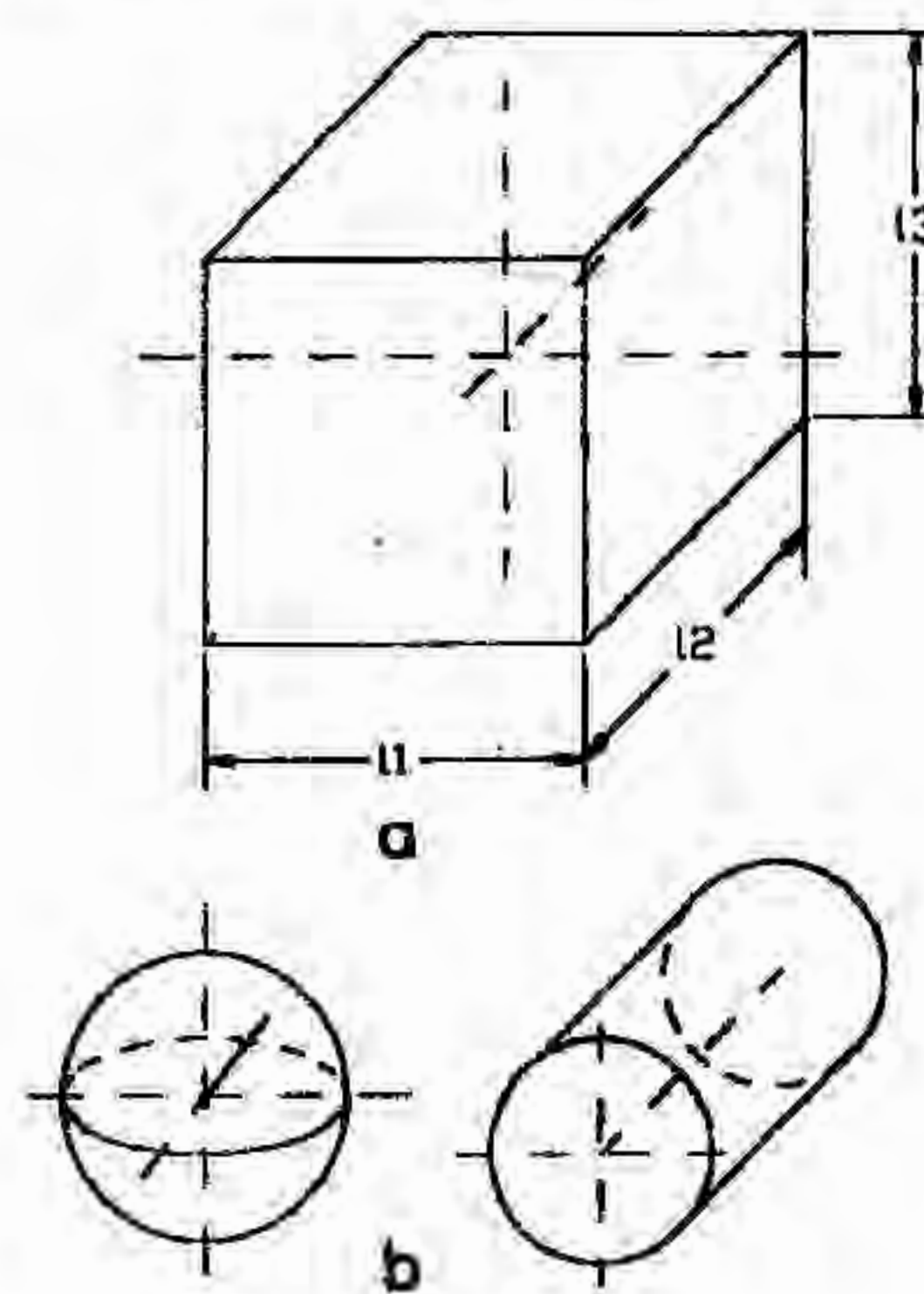


Fig. 1.3

Calcululele de rezistență diferă de la o grupă la alta. Aceste calcule sunt relativ simple în cazul corpurilor lungi și devin mai complicate în cazul corpurilor din a doua și a treia categorie.



În aceste condiții, o importanță deosebită trebuie acordată încadrării corecte a pieselor sau elementelor de construcție în una sau alta dintre cele trei grupe sau chiar în interiorul aceleiași grupe.

### 1.3. Modalități de rezemare a corpurilor

Fixarea unui corp de alte corpuri înconjurătoare se face cu ajutorul unor legături numite *reazeme*. Atunci când un corp este solicitat din exterior cu un sistem de sarcini, în reazeme apar reacțiuni (forțe sau cupluri). Legarea unui corp presupune introducerea de reazeme care să suprimă un anumit număr din gradele de libertate ale acestuia. Legăturile sunt *totale* atunci când imobilizează complet corpul și *critice* atunci când permit anumite grade de libertate. *Echilibrul static* al unui corp sau al unui sistem se realizează când acestora le este împiedicată orice posibilitate de mișcare cinematică.

Astfel, studiul echilibrului unui sistem necesită analiza prealabilă a modului de fixare și a corectitudinii legăturilor.

În cazul structurilor plane, axele tuturor elementelor componente, forțele exterioare și forțele de reacțiune, se află în același plan. Un corp poate avea în plan trei grade de libertate: translații după axele din plan și rotație după axa perpendiculară pe acel plan. În funcție de numărul de grade de libertate din plan pe care le împiedică, reazemele se pot clasifica astfel:

- *reazem simplu*, figura 1.4, care împiedică deplasarea corpului pe o singură direcție ( $y$ ) permițând astfel translația pe cealaltă direcție ( $x$ ) și rotația după axa perpendiculară pe plan ( $z$ ). Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.4a, 1.4b, 1.4c și 1.4d. Reazemul simplu introduce o singură forță de reacțiune  $R_y$  aflată pe direcția deplasării pe care o împiedică;

- *articulația cilindrică sau plană*, figura 1.5, care împiedică deplasările după ambele direcții din plan dar permite rotație după axa  $z$  ( $z$ ). Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.5a și 1.5b. Articulația cilindrică introduce o forță de reacțiune  $R$  care se poate descompune după direcțiile deplasărilor împiedicate în componentele  $R_y$  și  $R_x$ ;

- *încastrarea plană*, figura 1.6, care împiedică translațiile după cele două direcții din plan și rotația după direcția perpendiculară pe plan.



Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.6a și 1.6b. Incastrarea plană introduce o forță de reacțiune  $R$  aflată în planul celor două direcții împiedicate și un moment de reacțiune  $M_z$  dirijat după cea de-a treia direcție. Descompunerea forței de reacțiune după direcțiile împiedicate duce la apariția componentelor  $R_x$  și  $R_y$ .

În spațiu, un corp poate avea șase grade de libertate: translații și rotații după cele trei axe. Pentru a împiedica anumite grade de libertate din *spațiu* se utilizează următoarele tipuri de reazeme:

- *articulația sferică sau spațială*, figura 1.7, care împiedică deplasările pe toate cele trei direcții dar permite rotații după oricare direcție care trece prin punctul de articulație. Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.7a și 1.7b. Articulația sferică introduce o forță de reacțiune  $R$  care se poate descompune după cele trei direcții în componentele  $R_x$ ,  $R_y$  și  $R_z$ ;

- *încadrarea spațială*, figura 1.8, care împiedică atât translațiile cât și rotațiile după oricare direcție. Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.8a și 1.8b. Incastrarea spațială introduce o forță de reacțiune  $R$  și un moment de reacțiune  $M$ . Prin descompunerea acestora după cele trei direcții se obțin componentele forței:  $R_x$ ,  $R_y$  și  $R_z$  respectiv componentele momentului:  $M_x$ ,  $M_y$  și  $M_z$ ;

- *reazem mixt*, figura 1.8, care împiedică orice translație, împiedică de asemenea rotația după două axe dar permite rotația după cea de-a treia axă ( $r_x$ ). Reprezentările schematice ale acestui tip de reazem sunt prezentate în figurile 1.9a și 1.9b. Componentele reacțiunilor introduse de acest tip de reazem sunt forțele  $R_x$ ,  $R_y$  și  $R_z$  și momentele  $M_y$  și  $M_z$ .

Evident că se pot imagina și alte tipuri de reazeme formate prin combinații ale celor enumerate mai sus. Reazemele prezentate mai sus au deformații mult mai mici decât corpurile pe care le fixează și ca urmare pot fi considerate *perfect rigide*. În practică, pot exista reazeme la care deformațiile sunt semnificative: suspensii pe arcuri, cauciucuri, medii elastice, etc., reazemele de acest fel numindu-se *reazeme elastice sau tasabile*, după caz.



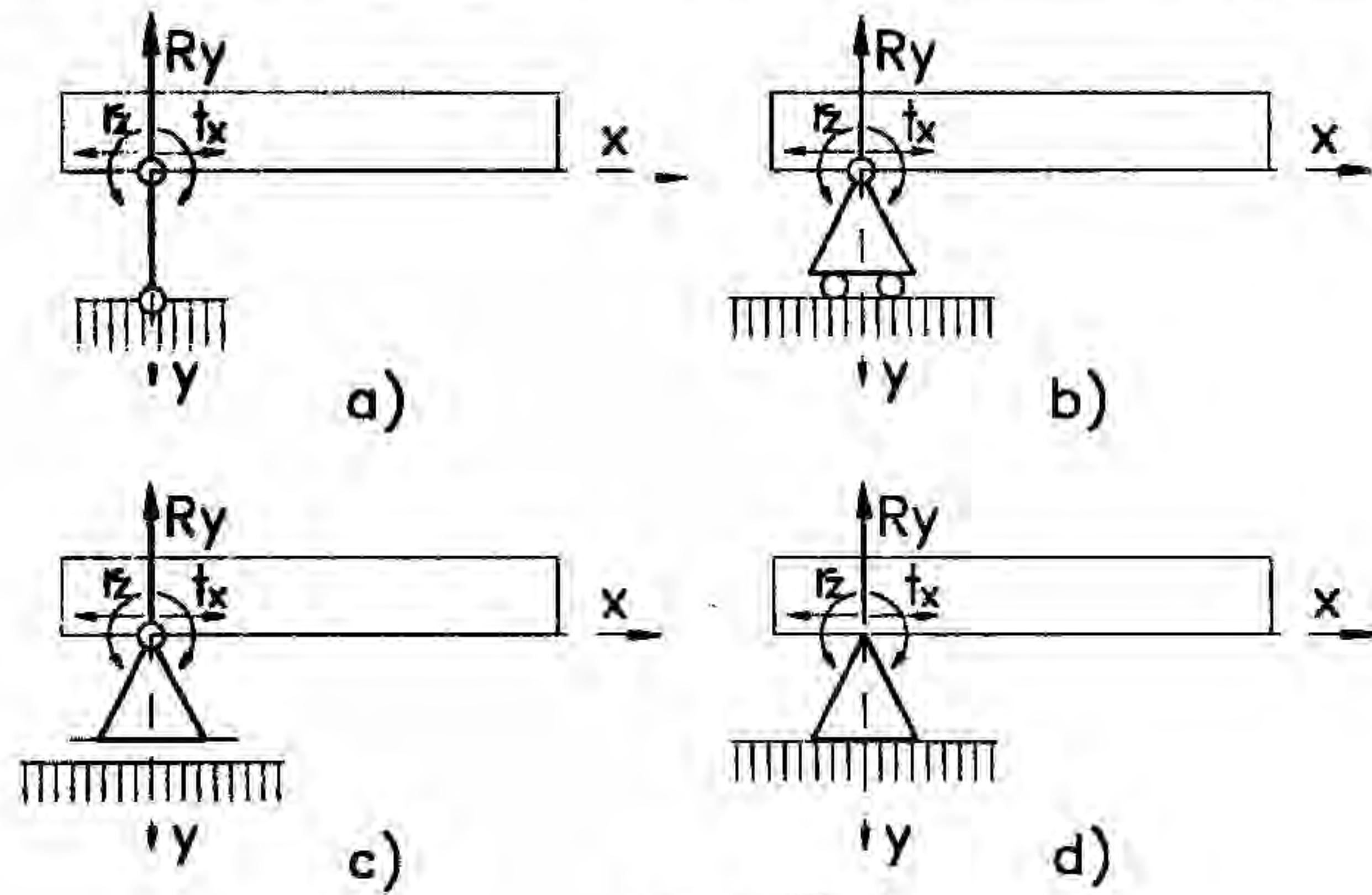


Fig. 1.4

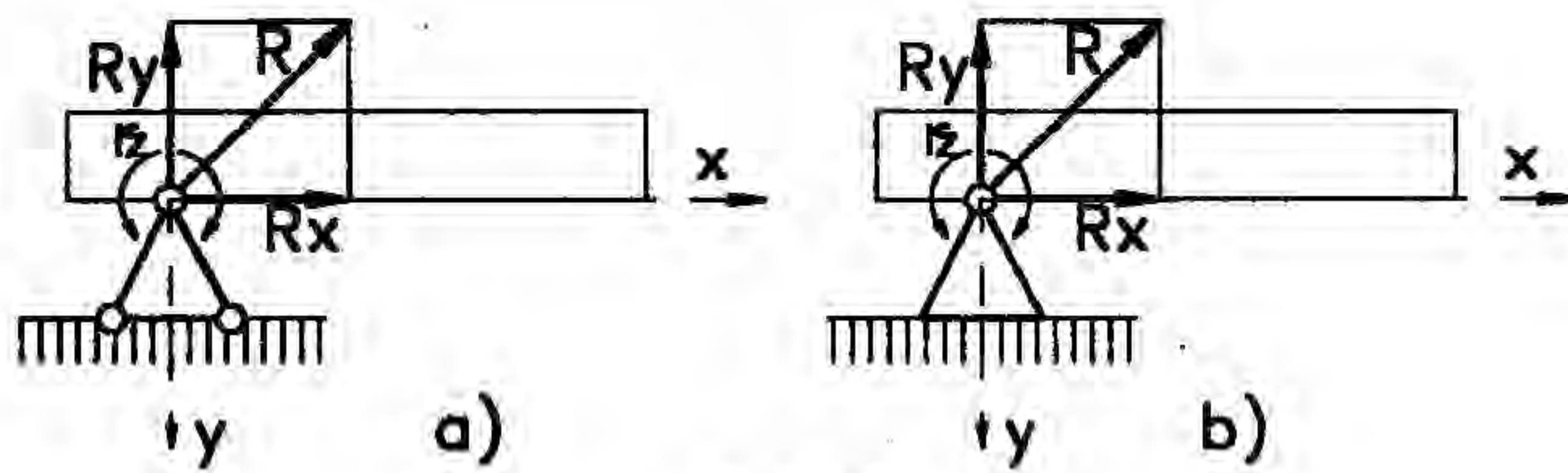


Fig. 1.5

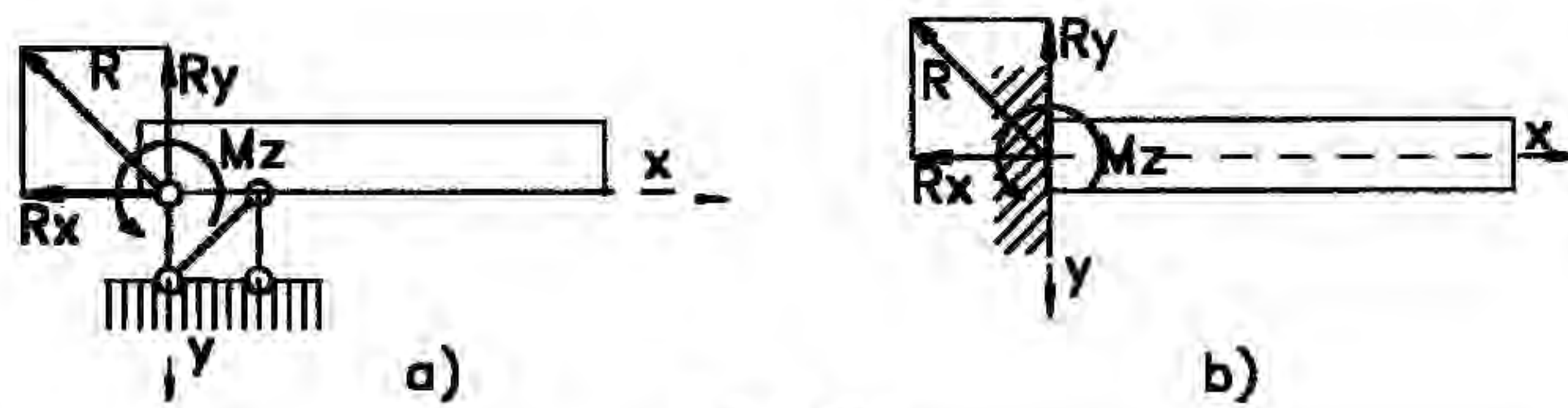


Fig. 1.6



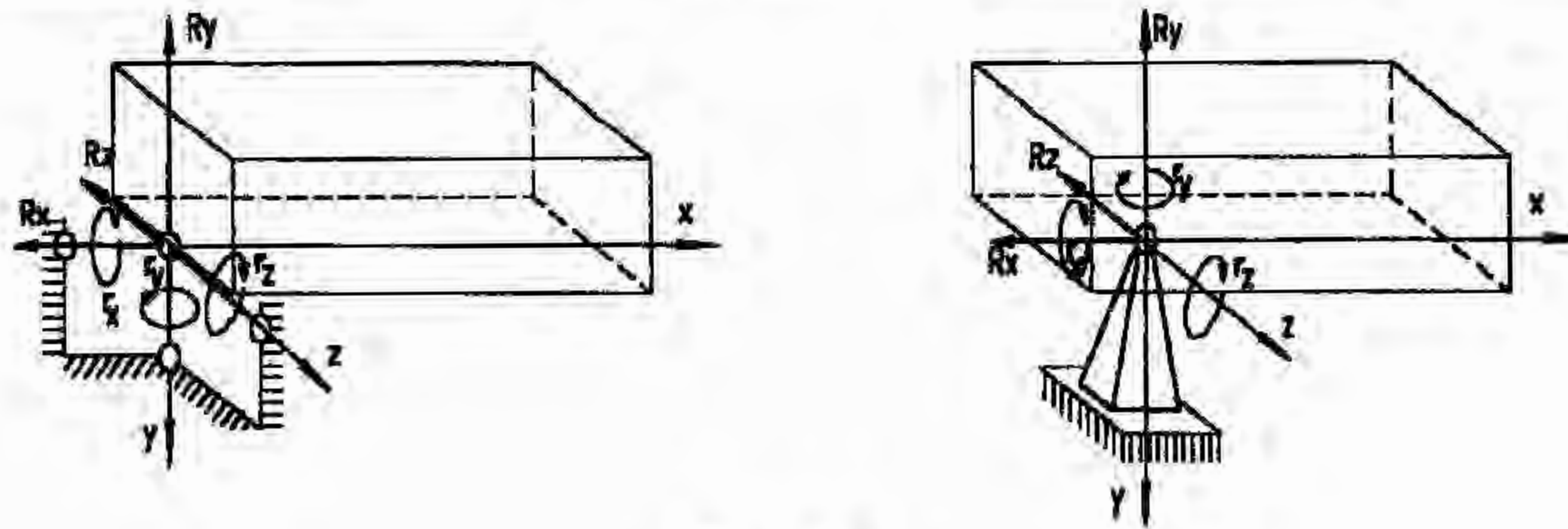


Fig. 1.7

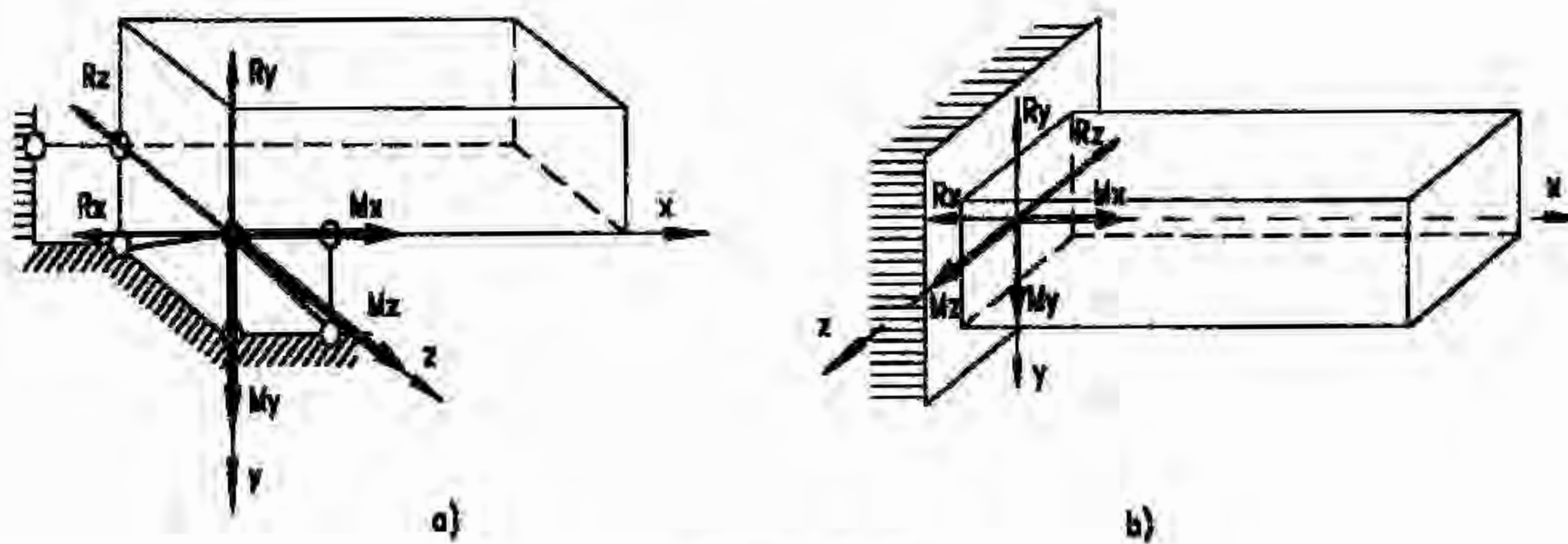


Fig. 1.8

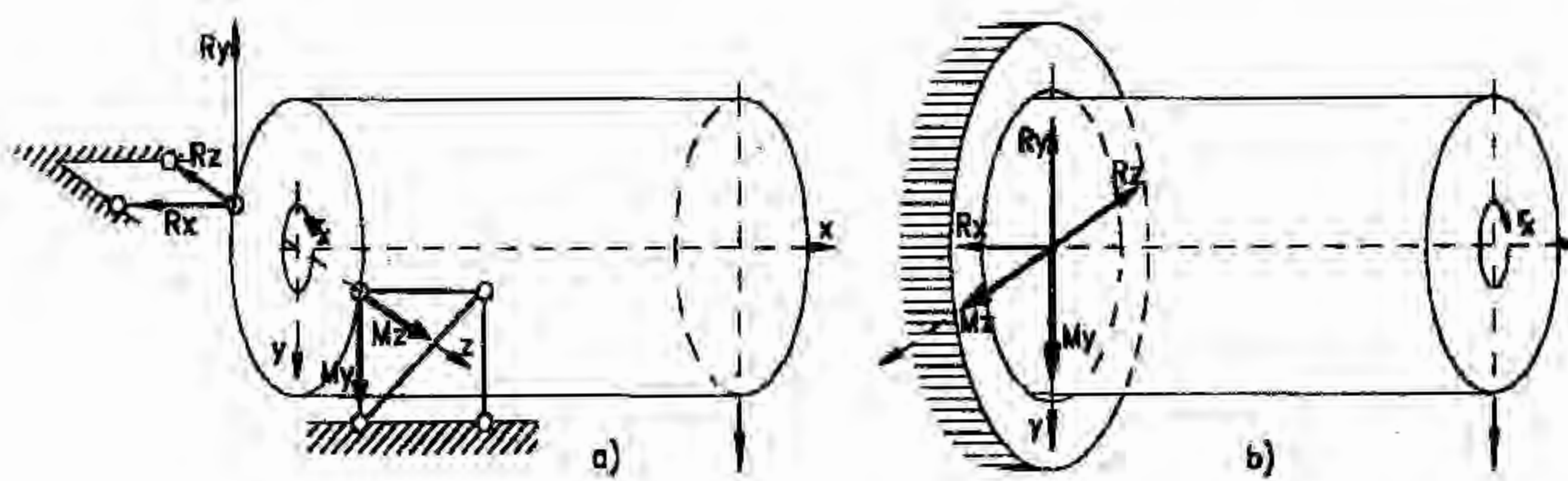


Fig. 1.9



## 1.4. Condiții de rezemare

### 1.4.1. Condiții de rezemare în plan

În cazul în care axele tuturor elementelor componente ale unei structuri se află în același plan și dacă sarcinile care acționează produc doar deplasări limitate în planul respectiv, acea structură poate fi considerată plană. Așa cum s-a arătat, o structură plană poate avea trei grade de libertate: translații după cele două axe din plan și rotație după axa perpendiculară pe plan. Ca urmare, pentru a fixa o structură plană sunt necesare trei legături simple, figura 1.10a. Fixarea este complet *rigidă* dacă direcțiile reacțiunilor din reazemele simple se întâlnesc două câte două în trei puncte *distincte*  $P_1$ ,  $P_2$  și  $P_3$ . Reacțiunile  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$  se determină cu ajutorul a trei ecuații de echilibru. Acestea sunt reprezentate, de obicei, prin două ecuații de proiecții de forțe după două direcții oarecare din plan și o ecuație de momente după o axă perpendiculară pe plan și față de oricare punct din plan. Pentru corectitudinea determinării reacțiunilor se poate folosi o nouă ecuație de momente scrisă față de un alt punct din plan. Se face observația că, această din ultimă ecuație se folosește doar pentru verificare și ea este strict dependentă de celelalte trei ecuații.

Legăturile devin *critice* în următoarele două cazuri:

- atunci când direcțiile reacțiunilor sunt paralele, figura 1.10b;
- atunci când direcțiile celor trei reacțiuni sunt concurente în același punct  $P$ , figura 1.10c.

În primul caz nu poate fi satisfăcută ecuația de proiecții după o direcție  $\Delta$  perpendiculară pe direcțiile reacțiunilor iar structura respectivă poate avea deplasări după această direcție. În al doilea caz nu poate fi satisfăcută ecuația de momente față de polul  $P$  iar structura din plan poate avea rotație față de acest pol.

### 1.4.2. Condiții de rezemare în spațiu

Pentru fixarea unei structuri spațiale sunt necesare cel puțin șase legături simple în vederea eliminării celor șase grade de libertate pe care acea structură le poate avea, figura 1.11. Pentru calculul celor șase

---



reacțiuni se folosesc trei ecuații de forțe și trei ecuații de momente relative la cele trei direcții. În anumite cazuri aceste legături pot deveni *critice*. Pentru ca acest lucru să nu se întâmple trebuie îndeplinite următoarele condiții:

- direcțiile tuturor celor șase legături să nu poată fi întâlnite de o aceeași dreaptă  $\Delta$ . În caz contrar, forțele de reacțiune nu dau momente față de această dreaptă rămânând neechilibrat momentul dat de sarcinile exterioare. Astfel, corpul are tendința de rotire față de dreapta  $\Delta$ ;

- proiecția fiecărei forțe de reacțiune pe aceeași direcție  $\Delta$  să nu fie zero. În caz contrar ar rămâne neechilibrate componentele obținute prin proiecția forțelor exterioare pe direcția  $\Delta$  iar structura respectivă are tendința de translație după această direcție.

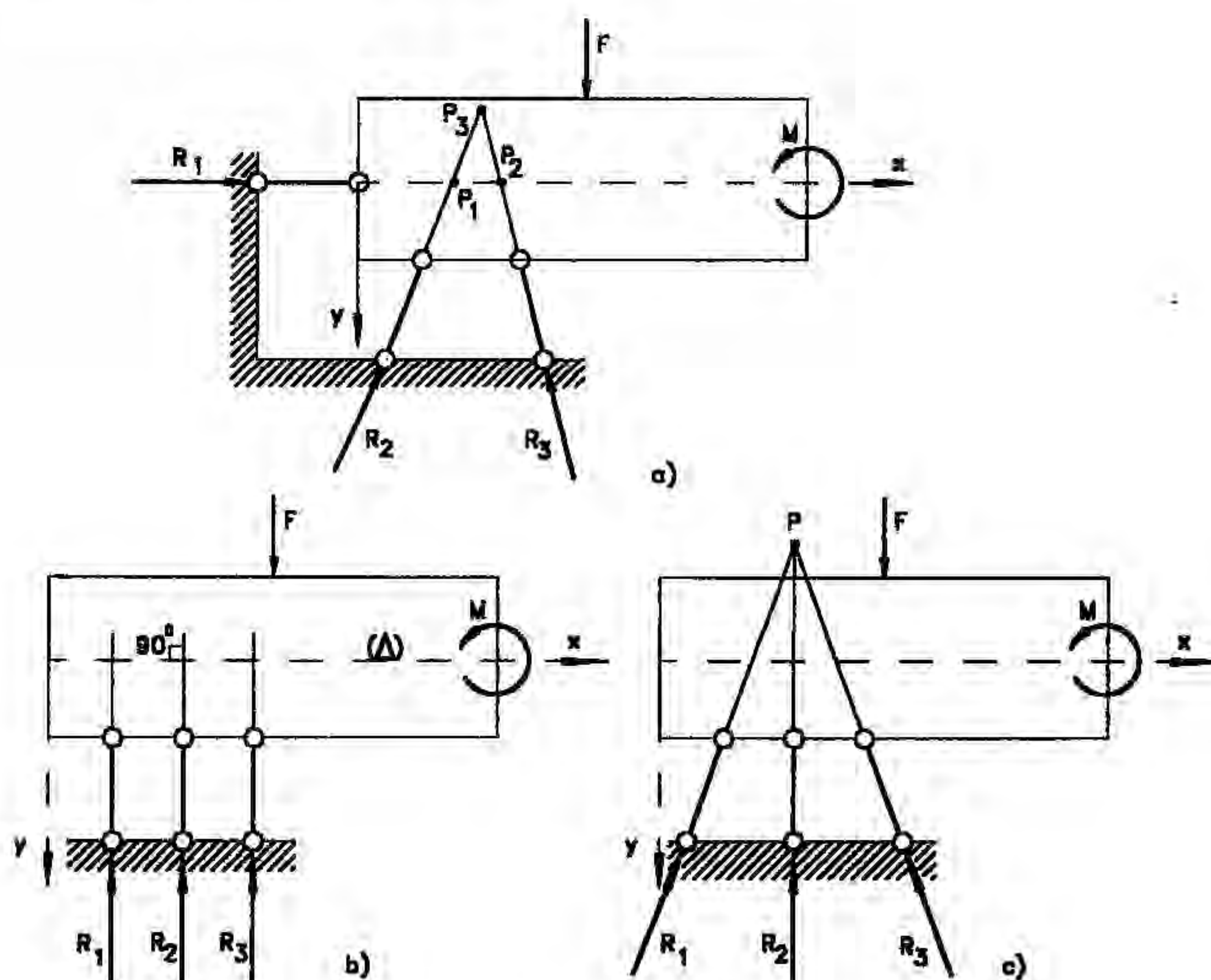


Fig. 1.10



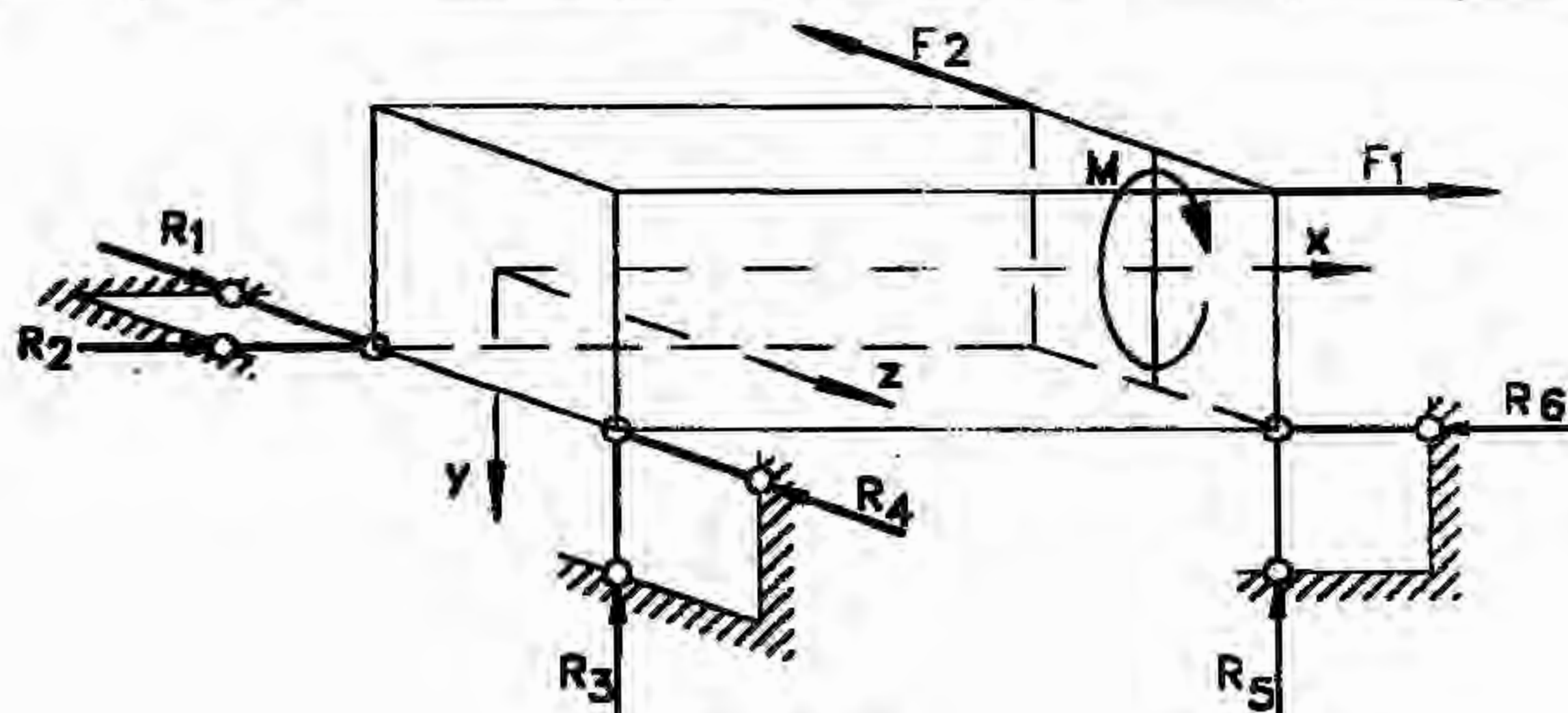


Fig. 1.11.

### 1.5. Calculul reacțiunilor

Reacțiunile se determină din ecuațiile de echilibru independente scrise pentru sistemul de sarcini aplicat din exterior, în care intră și respectivele reacțiuni. Dacă deformațiile și deplasările diferitelor puncte ale corpului sunt mici și nu influențează sensibil valoarea reacțiunilor, ecuațiile de echilibru se scriu pentru *starea nedeformată* a corpului.

În figura 1.12a se prezintă o bară inițial dreaptă, încastrată la un capăt, liberă la celălalt și solicitată cu forța  $F$ . După deformare axa medie a barei va căpăta o nouă poziție care afectează brațul forței  $F$  față de încastrare. Cum valoarea deplasării pe orizontală,  $u$ , este mult mai mică decât lungimea barei, ( $u \ll l$ ), aceasta se poate neglija iar ecuațiile de echilibru se scriu pentru poziția inițială a barei.

Sistemul fiind în totalitate plan, în încastrare apar următoarele reacțiuni: o forță de reacțiune  $R$ , cu orientare oarecare în planul respectiv, ce se decompune în componentele  $V$  și  $H$ , și momentul  $M$ . Ecuațiile de echilibru se scriu pentru poziția barei de dinaintea deformării, care este cea din figura 1.12b. Valorile reacțiunilor se determină din următoarele ecuații de echilibru static:

- suma proiecțiilor tuturor forțelor pe orizontală să fie zero;
- suma proiecțiilor tuturor forțelor pe verticală să fie zero;
- suma tuturor momentelor după o axă oarecare perpendiculară pe plan să fie zero. Aceste ecuații se scriu astfel:



$$\begin{cases} \sum_i (F_{iX}) = 0 \Rightarrow H \\ \sum_i (F_{iY}) = 0 \Rightarrow V \\ \sum_i (M_{iZ}) = 0 \Rightarrow M \end{cases}$$

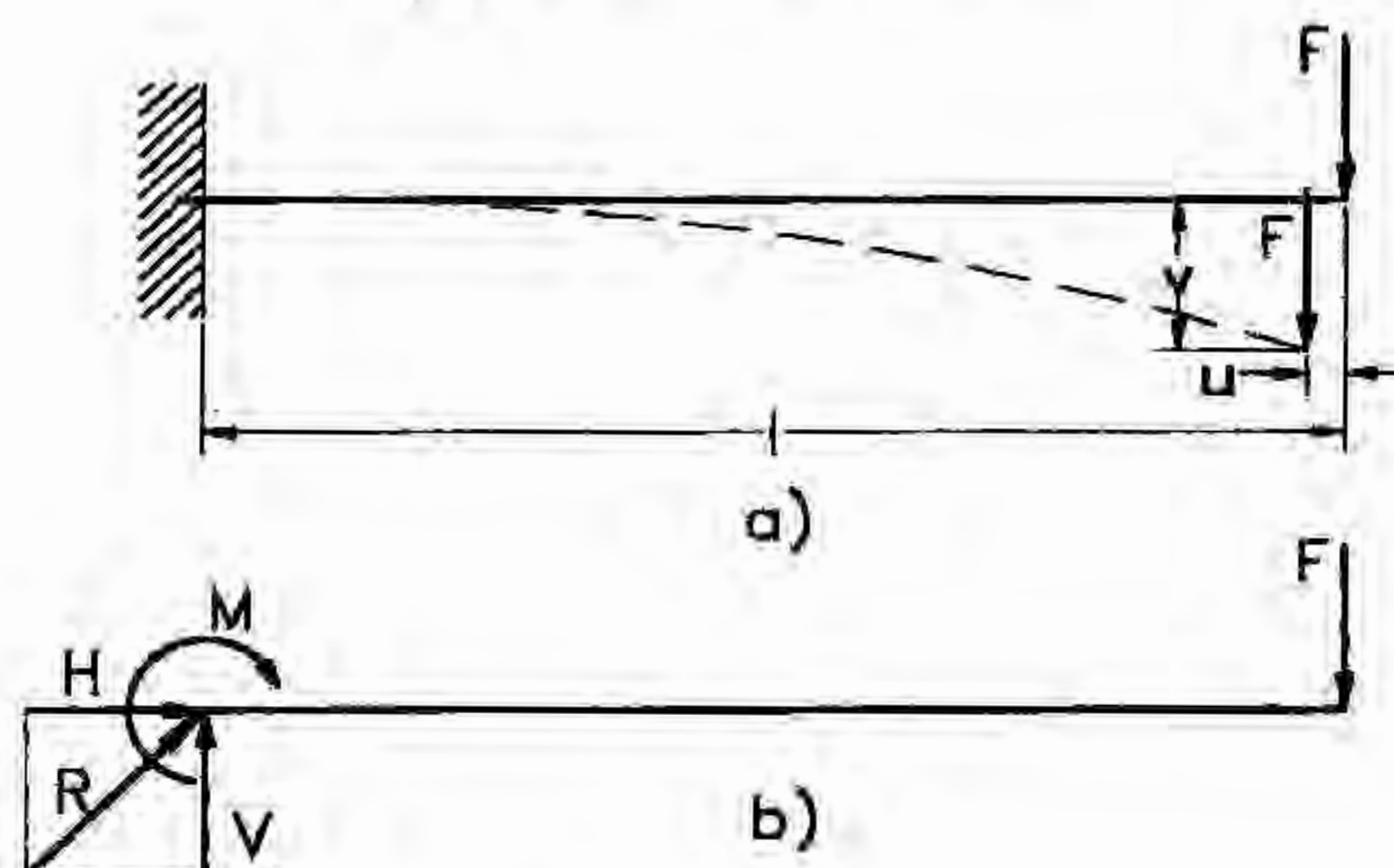


Fig. 1.12

Verificarea valorilor obținute pentru reacțiunile verticale și momente se face folosind o ecuație de momente față de o dreaptă perpendiculară pe plan, (z), dar care trece prin alt punct decât cel ales inițial.

Pentru un sistem spațial care cuprinde, eventual, și o stare spațială de solicitare, ecuațiile de echilibru static se scriu astfel:

$$\begin{cases} \sum_i (F_{iX}) = 0 \\ \sum_i (F_{iY}) = 0 \\ \sum_i (F_{iZ}) = 0 \\ \sum_i (M_{iX}) = 0 \\ \sum_i (M_{iY}) = 0 \\ \sum_i (M_{iZ}) = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{F}} = 0 \\ \mathbf{T} = 0 \\ \bar{\mathbf{M}} = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$



în care  $I$  reprezintă torsorul forțelor iar  $\bar{M}$  reprezintă torsorul momentelor.

### Aplicații

4.1.1. Să se determine reacțiunile pentru grinda în consolă prezentată în figura 1.13.

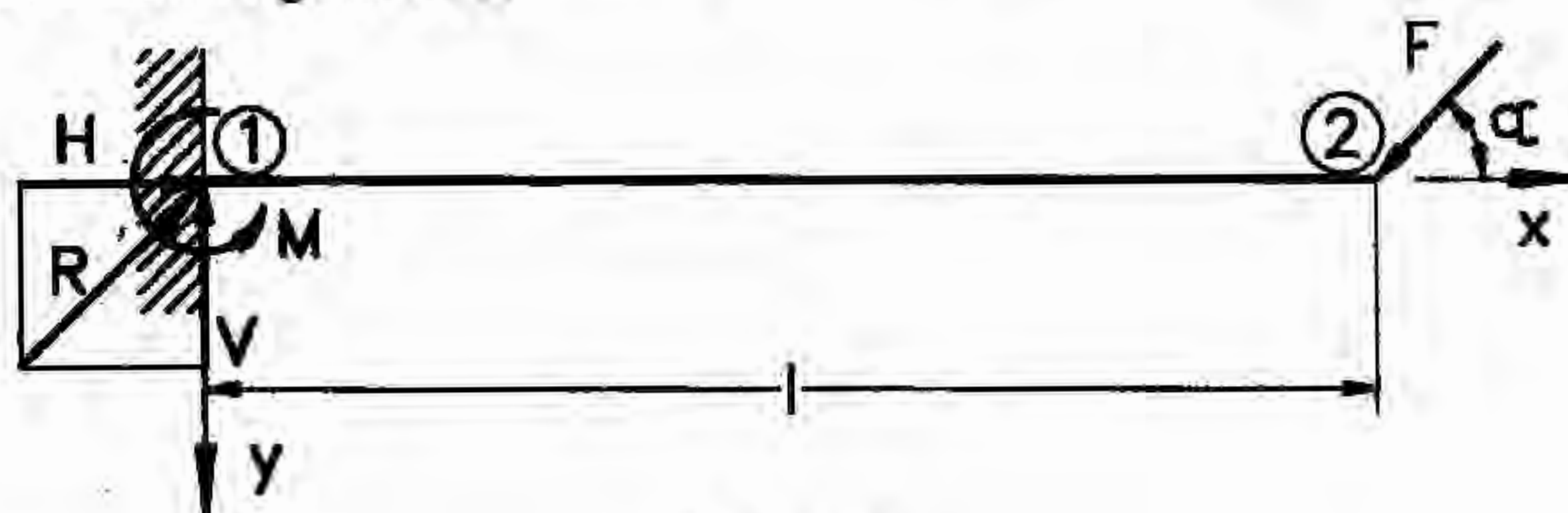


Fig. 1.13

Se observă că avem o grindă dreaptă, cu secțiunea constantă, ale cărei deplasări, datorate sarcinii exterioare, se produc numai în planul XOY. Ca urmare, fiind vorba de un sistem plan, reacțiunile din încastrare vor fi: o forță  $R$  care are o direcție oarecare în plan și momentul  $M$  ce are direcția perpendiculară pe planul menționat și este simbolizat ca în figura 1.13. Descompunerea forței  $R$  după cele două direcții din plan duce la apariția unei forțe verticale  $V$  și a unei forțe orizontale  $H$ . Ecuațiile de echilibru static vor fi în acest caz următoarele:

$$\begin{aligned}\sum_i (F_{ix}) &= 0 \Rightarrow H - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow H = F \cos \alpha \\ \sum_i (F_{iy}) &= 0 \Rightarrow -V + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow V = F \sin \alpha \\ \sum_i (M_{iz(i)}) &= 0 \Rightarrow M - F \sin \alpha l = 0 \Rightarrow M = F l \sin \alpha\end{aligned}\tag{1.2}$$

Se observă că ecuația de momente folosită a fost scrisă față de punctul 1. Pentru verificarea corectitudinii rezultatelor obținute se va scrie o ecuație de momente față de punctul 2, (de exemplu). Această ecuație de momente se folosește doar pentru verificare, ea fiind dependentă de ultimele două ecuații ale sistemului (1.2).



$$\sum_i (M_{iz(2)}) = 0 \Rightarrow M - V l = 0 \Rightarrow F l \sin \alpha - F l \sin \alpha = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Ca urmare, rezultatele obținute pentru valorile reacțiunilor sunt corecte.

A.1.2. Să se determine reacțiunile din reazemele grinzii prezentată în figura 1.14, așezată pe un reazem articulat (1) și un reazem simplu (2) și solicitată de o forță concentrată  $F$  și un moment concentrat  $M = (F l)/3$ .

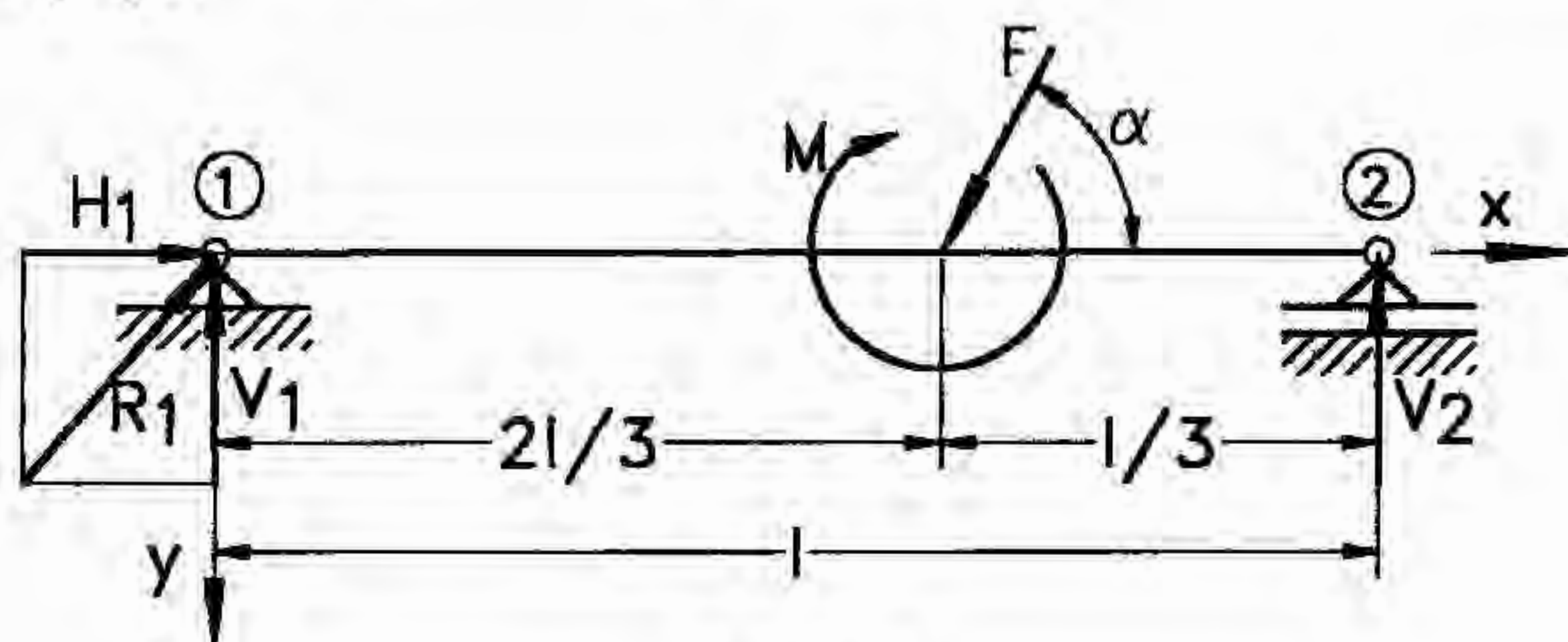


Fig. 1.14

Reacțiunile care apar în reazeme sunt:

- o forță  $R_1$  care apare în reazemul articulat, are direcție oarecare în plan și prin descompunere pe cele două direcții din plan duce la apariția forțelor  $V_1$  și  $H_1$ ;
- o forță pe direcție verticală, care se introduce în reazemul simplu și care a fost notată cu  $V_2$ .

Ecuatiile de echilibru static sunt următoarele:

$$\sum_i (F_{ix}) = 0 \Rightarrow H_1 - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow H_1 = F \cos \alpha$$

$$\sum_i (F_{iy}) = 0 \Rightarrow -V_1 - V_2 + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{F}{3} (\sin \alpha - 1)$$

$$\sum_i (M_{iz(1)}) = 0 \Rightarrow V_2 l - F \sin \alpha \frac{2l}{3} - M = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{F}{3} (2 \sin \alpha + 1)$$

Pentru verificare se utilizează ecuația de momente față de punctul (2):



$$\sum_i (M_{iz(2)}) = 0 \Rightarrow$$

$$V_1 l + M - F \sin \alpha \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow \frac{Fl}{3} (\sin \alpha - 1) + \frac{Fl}{3} - \frac{Fl}{3} \sin \alpha = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Ca urmare, rezultatele obținute pentru valorile reacțiunilor sunt corecte.

În cazul în care numărul reacțiunilor care apar în reazeme depășește numărul ecuațiilor care se pot scrie, se spune că avem de-a face cu un *sistem static nedeterminat*. Gradul de nedeterminare  $n$  este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru independente:

$$n = N_n - N_e$$

În vederea ridicării nedeterminării mai sunt necesare  $n$  ecuații care se scriu din condiția de deformație a corpului respectiv.

### 1.6. Sarcini exterioare

Piesele, elementele unei construcții, etc. sunt supuse acțiunii forțelor și momentelor exterioare. Rezistența materialelor denumeste aceste forțe și momente ca fiind *sarcini*. Aplicarea sarcinilor asupra corpurilor solide se face prin intermediul altor corpuri. Toate corpurile se consideră a fi *deformabile* și ca urmare se poate deduce că, transmiterea sarcinilor de la un corp la altul se face prin intermediul unor suprafețe.

Dacă se ia în considerare *mărimea suprafeței* prin care își transmit acțiunea sau *modul de repartizare*, sarcinile exterioare se pot clasifica astfel:

- sarcinile se consideră a fi *concentrate* în cazul în care suprafețele prin intermediul cărora își exercită acțiunea sunt relativ mici în raport cu dimensiunile corpului. Se presupune că aceste sarcini se aplică într-un punct care este centrul de greutate al suprafeței mici prin intermediul căreia acționează. Exemple de sarcini concentrate sunt prezentate în figura 1.15;

- sarcini *distribuite* a căror acțiune asupra corpului se poate face după o dreaptă, o curbă sau o suprafață, figura 1.16. În funcție de legea de distribuție acestea pot fi;



- uniform distribuite, figura 1.17a;
- liniar distribuite, figura 1.17b;
- alte legi de distribuție, figura 1.17c.

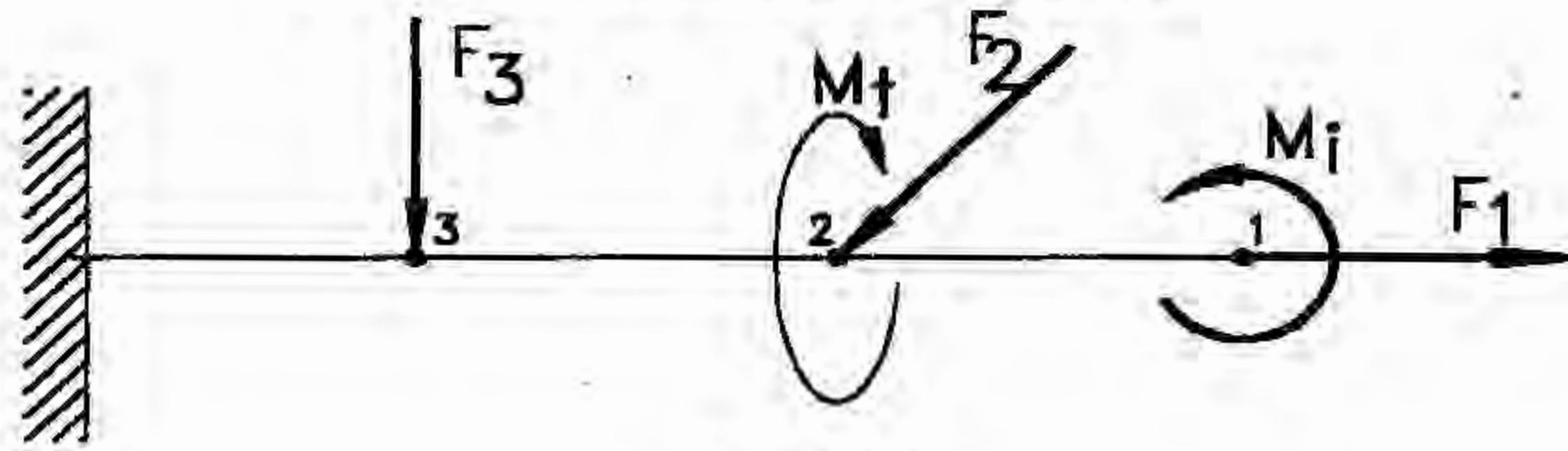


Fig. 1.15

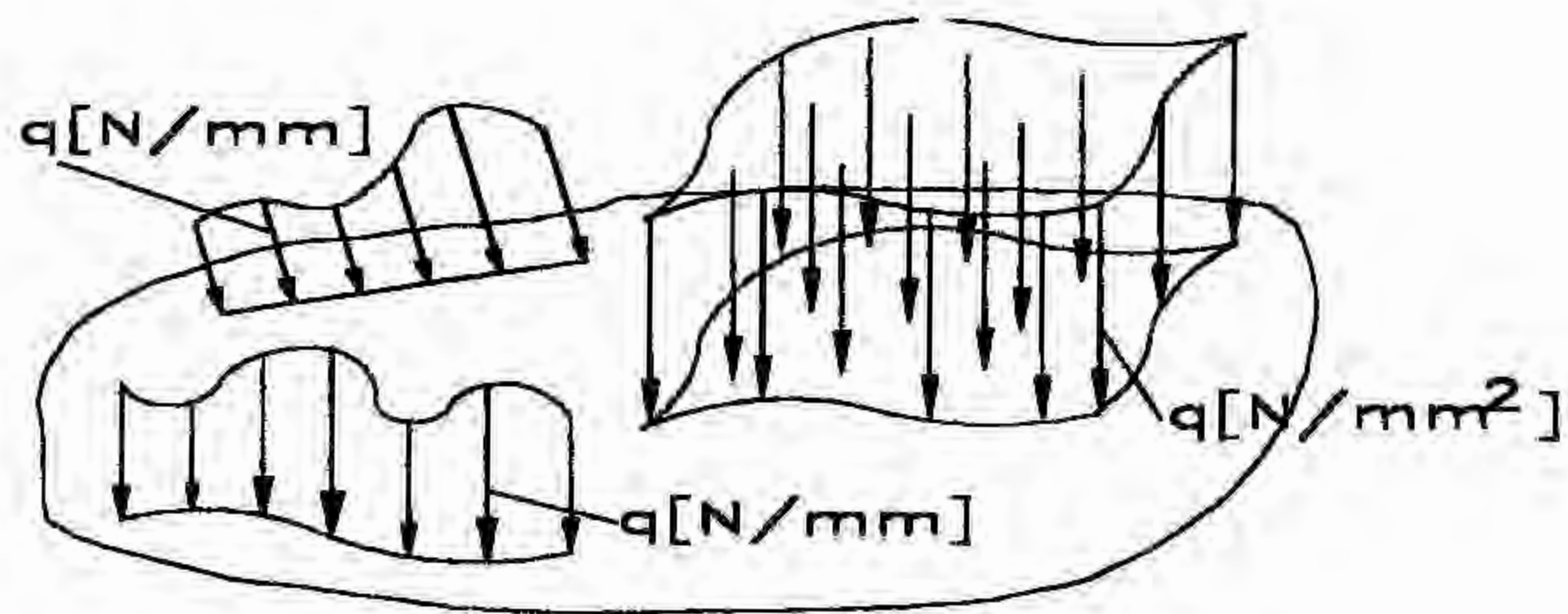


Fig. 1.16

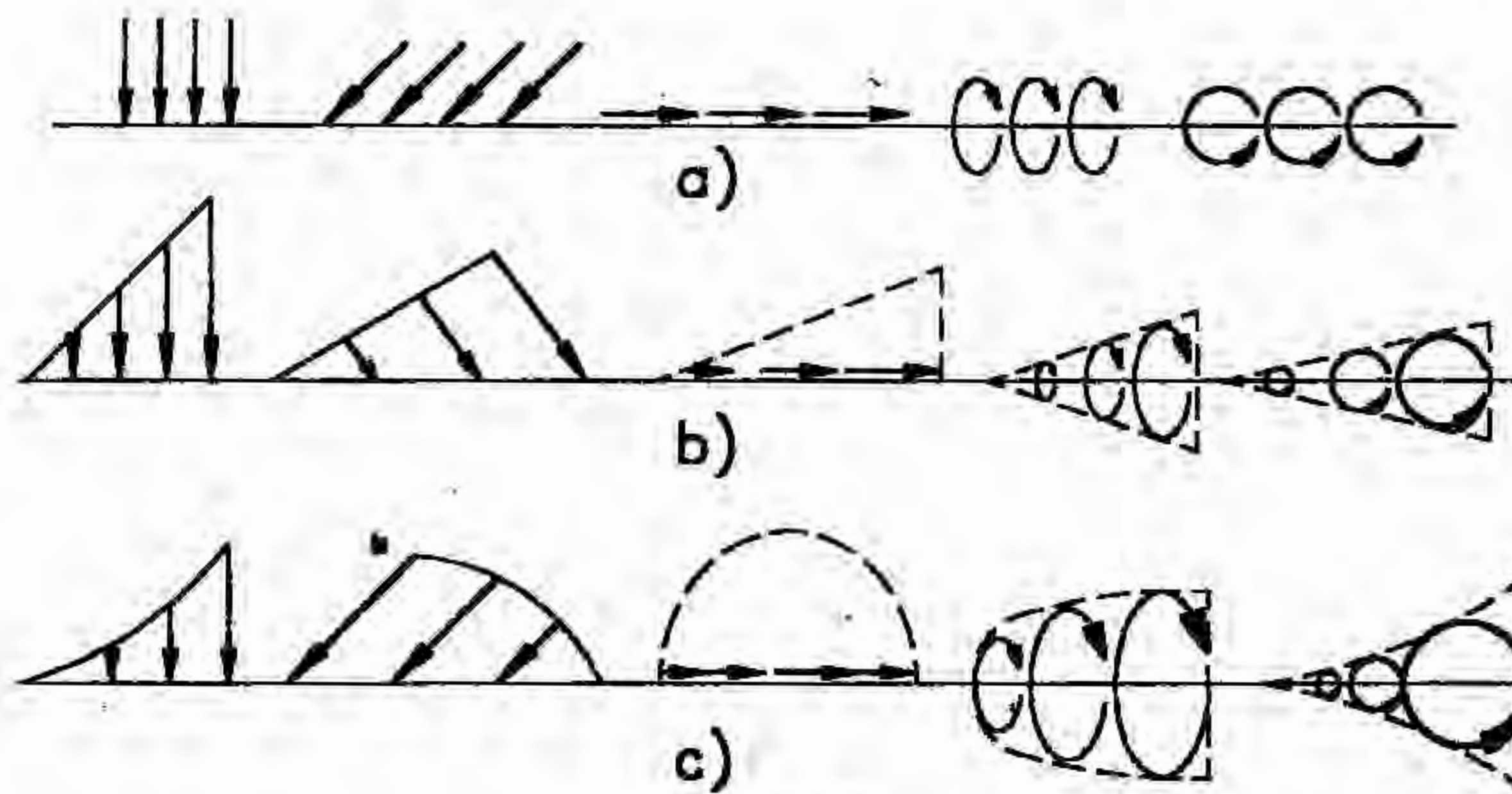


Fig.1.17



Așa cum s-a văzut, ecuațiile de echilibru se scriu de obicei pentru starea nedeformată a corpului. În acest caz, acțiunea sarcinilor distribuite poate fi înlocuită cu acțiunea forțelor concentrate. Pentru aceasta trebuie cunoscute *intensitatea sarcinii* concentrate înlocuitoare, static echivalentă cu cea distribuită și *punctul său de aplicare*. Fie bara dreaptă din figura 1.18, supusă acțiunii sarcinii distribuite după o lege oarecare  $q(x)$  pentru  $x \in [a, b]$ .

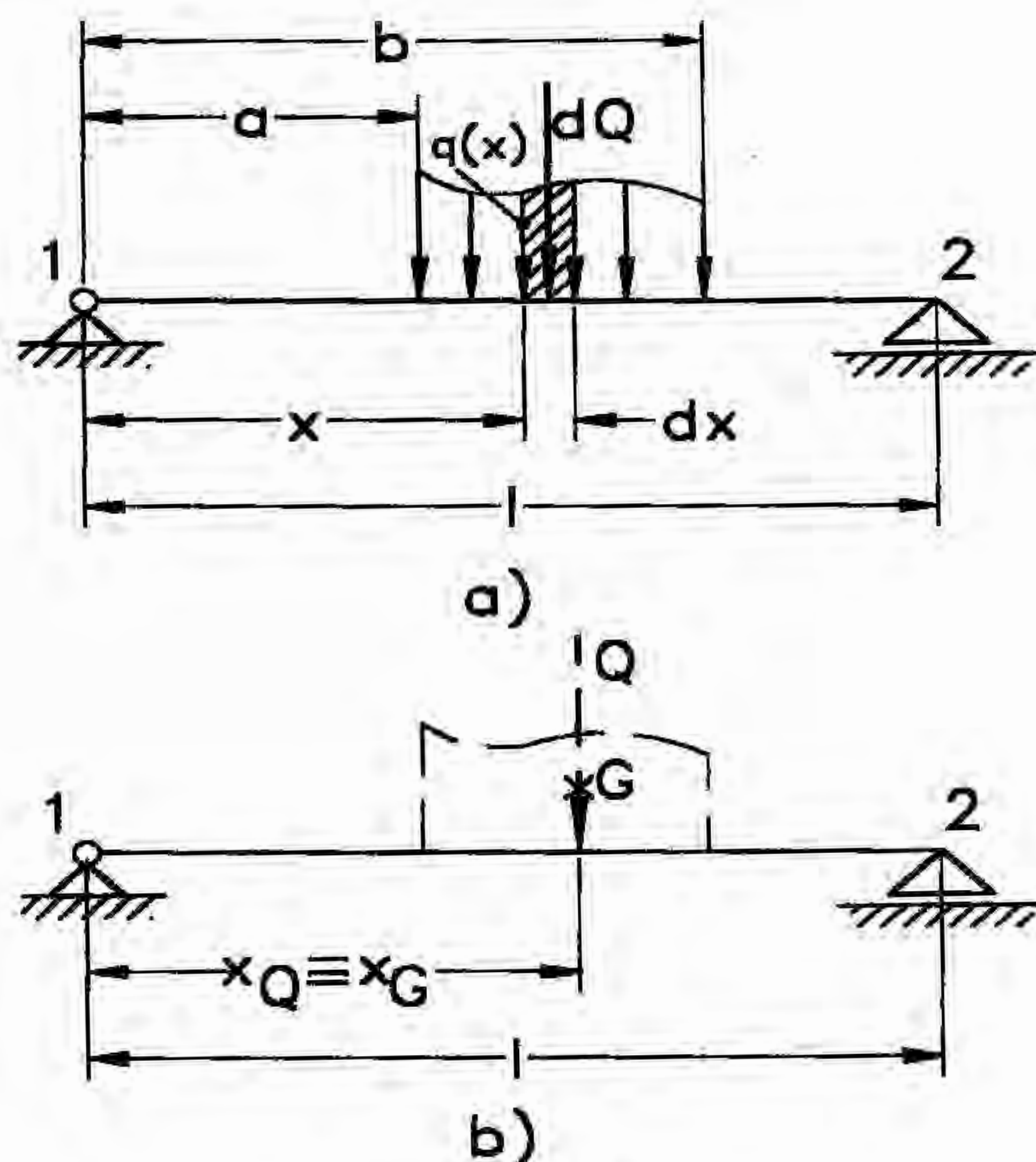


Fig. 1.18

Dat fiind faptul că sarcina distribuită acționează asupra corpului prin intermediul unei drepte ea se măsoară în  $[N/mm]$ . Sarcina elementară ce acționează pe elementul de lungime  $dx$  este dată de relația:

$$dQ = q(x) dx$$



Ca urmare, sarcina totală ce acționează asupra barei prin intermediul sarcinii distribuite este dată de relația:

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b q(x) \cdot dx \quad (1.3)$$

Integrala din relația 1.3 reprezintă aria suprafeței determinată de distribuția respectivă. Se constată astfel că, *intensitatea* sau *mărimea* unei sarcini concentrate care înlocuiește o sarcină distribuită este egală cu *aria suprafeței generată de legea de distribuție*.

Trebuie remarcat faptul că, momentul sarcinii concentrate înlocuitoare față de un anumit punct, trebuie să fie egal cu suma momentelor tuturor sarcinilor distribuite față de același punct. Dacă se scrie momentul față de punctul 1 vom avea:

$$Q \cdot x_Q = \int_a^b q(x) \cdot x \cdot dx \quad (1.4)$$

Integrala din partea dreaptă a egalității (1.4) reprezintă momentul static  $S_1$  al ariei cuprinse sub legea de distribuție, față de punctul 1. Ca urmare vom avea:

$$x_Q = S_1 / Q = S_1 / A = x_G$$

Se constată că, sarcina concentrată înlocuitoare trece prin *centrul de greutate* al suprafeței generate de legea de distribuție. Pentru o distribuție după o lege oarecare  $q(x)$ , distanța de la centrul de greutate la punctul față de care s-a considerat valabilă și legea de distribuție, este dat de relația:

$$x_Q \equiv x_G = \frac{\int_a^b q(x) \cdot x \cdot dx}{\int_a^b q(x) \cdot dx}$$

Dacă legea de distribuție este simplă, se poate calcula ușor aria suprafeței de distribuție și deci intensitatea sarcinii concentrate înlocuitoare. Pentru aceleași legi de distribuție simple se cunosc, de obicei, pozițiile centrelor de greutate prin care trec direcțiile sarcinilor concentrate înlocuitoare. Câteva exemple în acest sens sunt prezentate în figura 1.19.



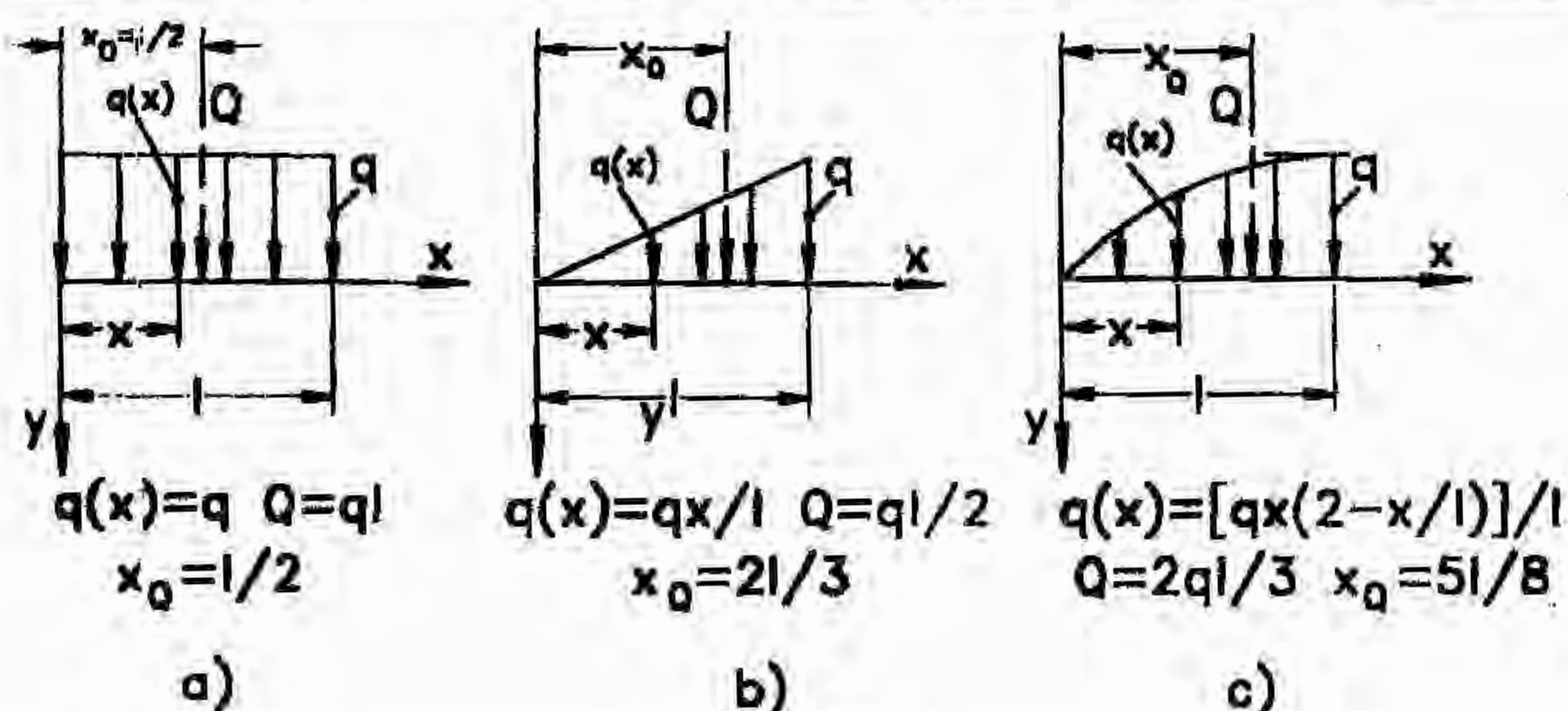


Fig. 1.19

Dacă se iau în considerare *pozițiile punctelor de aplicație* ale sarcinilor față de corpul asupra căruia acționează, acestea se pot clasifica astfel:

- *sarcini de suprafață* sau de contur care sunt aplicate din exteriorul corpului și provin din interacțiunea cu alte corpuri;
- *forțe masice* care sunt date de greutatea proprie a corpului sau provin din inerție.

În funcție de *poziția în timp* a sarcinilor se disting:

- *sarcini fixe* care nu-și schimbă poziția față de un reper fixat pe corpul asupra căruia acționează;
- *sarcini mobile* ale căror puncte de aplicație se schimbă în timp.

Dacă ne referim la *modul de acțiune în timp*, sarcinile se pot clasifica astfel:

- *sarcini statice*, a căror intensitate se aplică lent crescător în timp, de la zero la valoarea maximă după care rămân constante, figura 1.20a;
- *sarcini dinamice* care pot fi:
  - sarcini aplicate în mod brusc, cu *șoc*, figura 1.20b;
  - *sarcini variabile periodice* a căror variație se produce în mod ciclic între o valoare minimă și una maximă, figura 1.20c;
  - sarcini variabile aperiodice sau cu *variație reală* în timp, figura 1.20d.



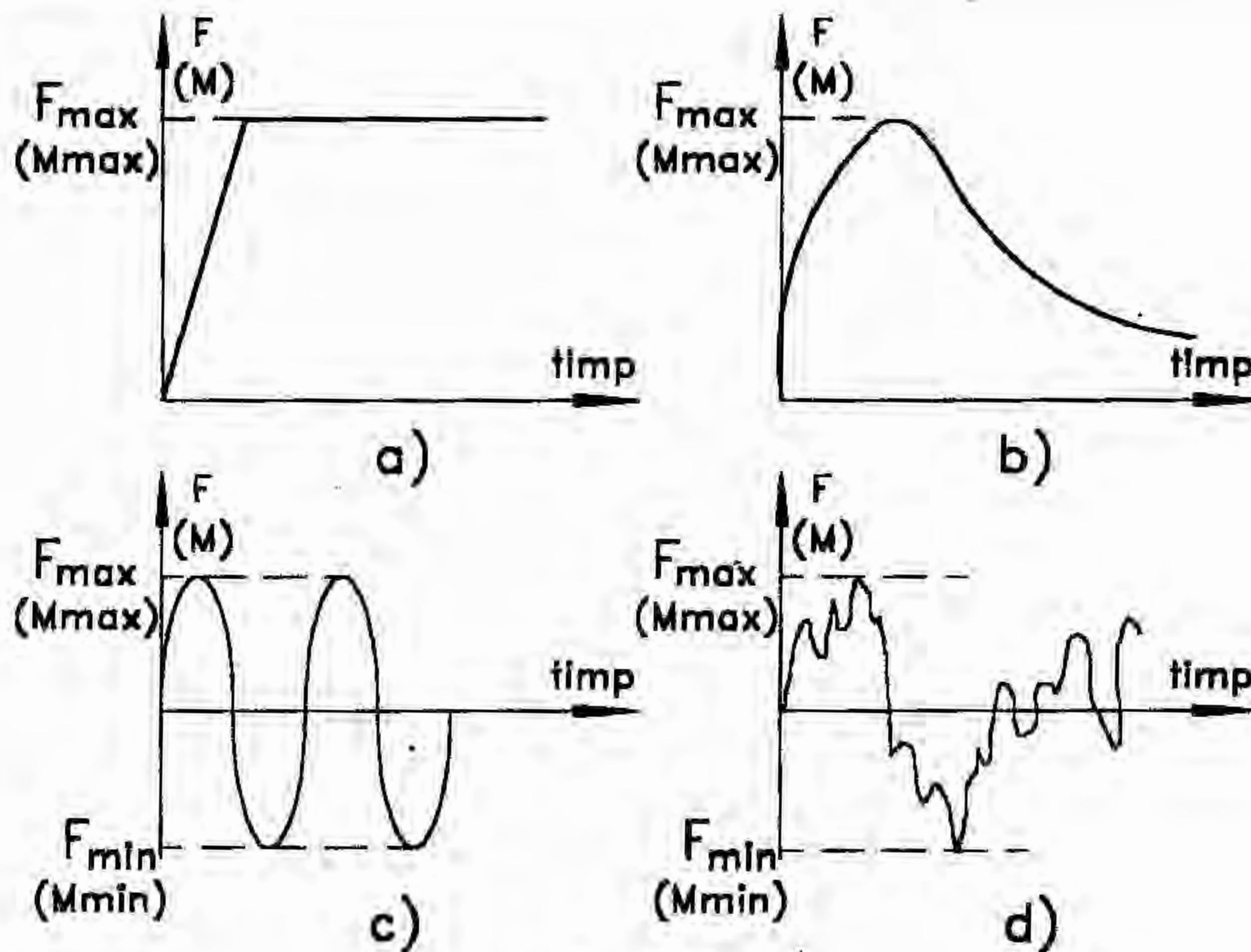


Fig. 1.20

În funcție de *importanța* lor, sarcinile pot fi:

- sarcini *principale* care sunt reprezentate de totalitatea sarcinilor pentru care este proiectată piesa respectivă să reziste;
- sarcini *accidentale* care acționează intermitent și neregulat și care provin de obicei din acțiunea factorilor atmosferici;
- sarcini *extraordinare* care de obicei nu pot fi prevăzute (cutremurele).

În Rezistența materialelor se consideră că:

- sarcinile nu pot fi considerate vectori alunecători ci vectori legați de punctul de aplicație;
- sarcinile aplicate asupra corpului se consideră a fi cele din exterior la care se adaugă și reacțiunile. Acest sistem de sarcini soliciță corpul și îl deformează.



### 1.7. Eforturi interioare

Existența unui corp solid, cu formă și volum proprii, este asigurată de forțele de atracție dintre particulele sale. La distrugerea (ruperea) corpului se ajunge atunci când are loc desfacerea ireversibilă a legăturilor interioare. Nesolicitat, corpul are o anumită structură de echilibru, între perechile de atomi stabilindu-se o anumită distanță care poartă numele de *parametrul rețelei cristaline*. Solicitând corpul cu un sistem de sarcini exterioare, distanțele interatomice se vor modifica și vor apărea forțe suplimentare, de atracție sau respingere. Pentru ruperea legăturilor trebuie să se introducă o energie din exterior. În condițiile în care sarcinile exterioare nu depășesc o anumită valoare, corpul se deformează foarte puțin, modificarea distanței interatomice este mică și la îndepărtarea solicitării structura revine în poziția inițială. În aceste condiții se spune că deformarea corpului s-a produs în *domeniul elastic*. Sarcinile suplimentare care apar în timpul solicitării se numesc *eforturi* iar determinarea lor constituie una dintre problemele principale ale Rezistenței materialelor. Cunoașterea acestor eforturi permite localizarea celor mai solicitate puncte din corpul respectiv. Forțele de atracție atomică ca și eforturile suplimentare nu apar în cadrul ecuațiilor de echilibru static. Acestea își fac echilibru în interior formând un sistem de sarcini echivalent cu zero.

Vom considera un corp solid în repaus, supus acțiunii unui sistem de sarcini exterioare (inclusiv reacțiuni), aflat în echilibru, figura 1.21a.

Secționarea corpului solid cu un plan  $Q$ , având o orientare oarecare, împarte corpul în două părți, I și II. În secțiunea inițial comună celor două părți, sunt puse în evidență *forțele suplimentare* care apar ca urmare a solicitării exterioare, figura 1.21b. Aceste forțe sunt perechi, egale și de sens contrar pentru fiecare punct, inițial comun, al ariei  $A$  obținută prin secționare. Rezultanta tuturor acestor forțe este o forță  $\bar{R}$  cu direcția oarecare și care acționează într-un punct  $P$  oarecare al secțiunii. Față de centrul de greutate  $G$  al secțiunii, rezultanta  $\bar{R}$  se reduce la o forță  $\bar{F}$  și un moment  $\bar{M}$  care au direcții oarecare, figura 1.21c.

---



Forța  $F$  și momentul  $M$  sunt denumite *eforturi secționale* sau mai simplu, *eforturi*.

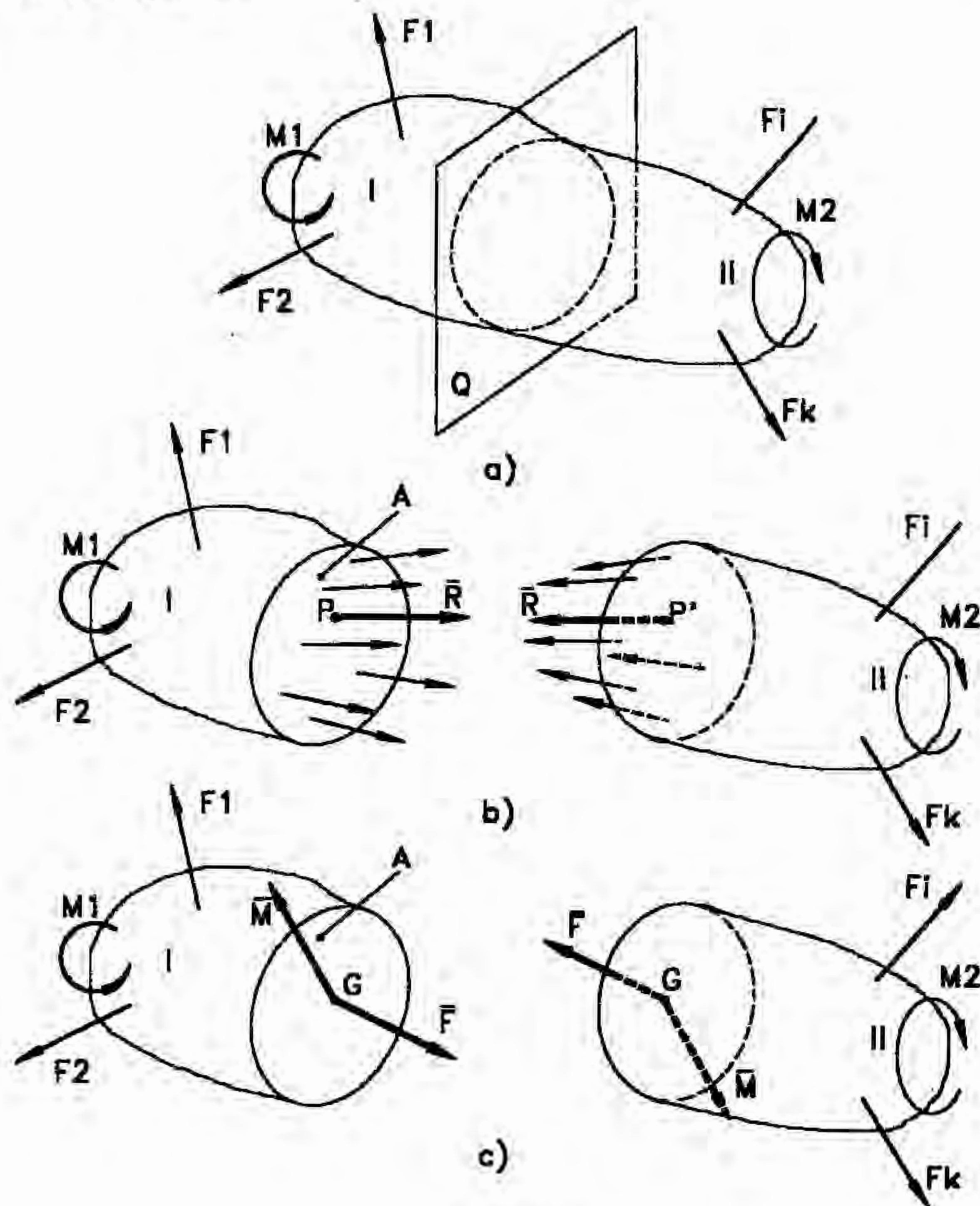


Fig. 1.21

Practic, eforturile reprezentate pe secțiunea uneia din părți reprezintă acțiunea părții îndepărtate asupra părții rămase. Cum inițial, sarcinile exterioare care acționează asupra celor două părți își fac echilibrul rezultă că, același echilibru este respectat între sarcinile



exterioare ale uneia din părți și eforturile care apar în secțiunea aceleiași părți.

Se consideră un sistem ortogonal de axe, având originea în centrul de greutate  $G$  al ariei  $A$  obținută prin secționare, figura 1.22. Axa  $x$  este perpendiculară pe suprafața respectivă iar axele  $y$  și  $z$  se află în planul acestei suprafețe.

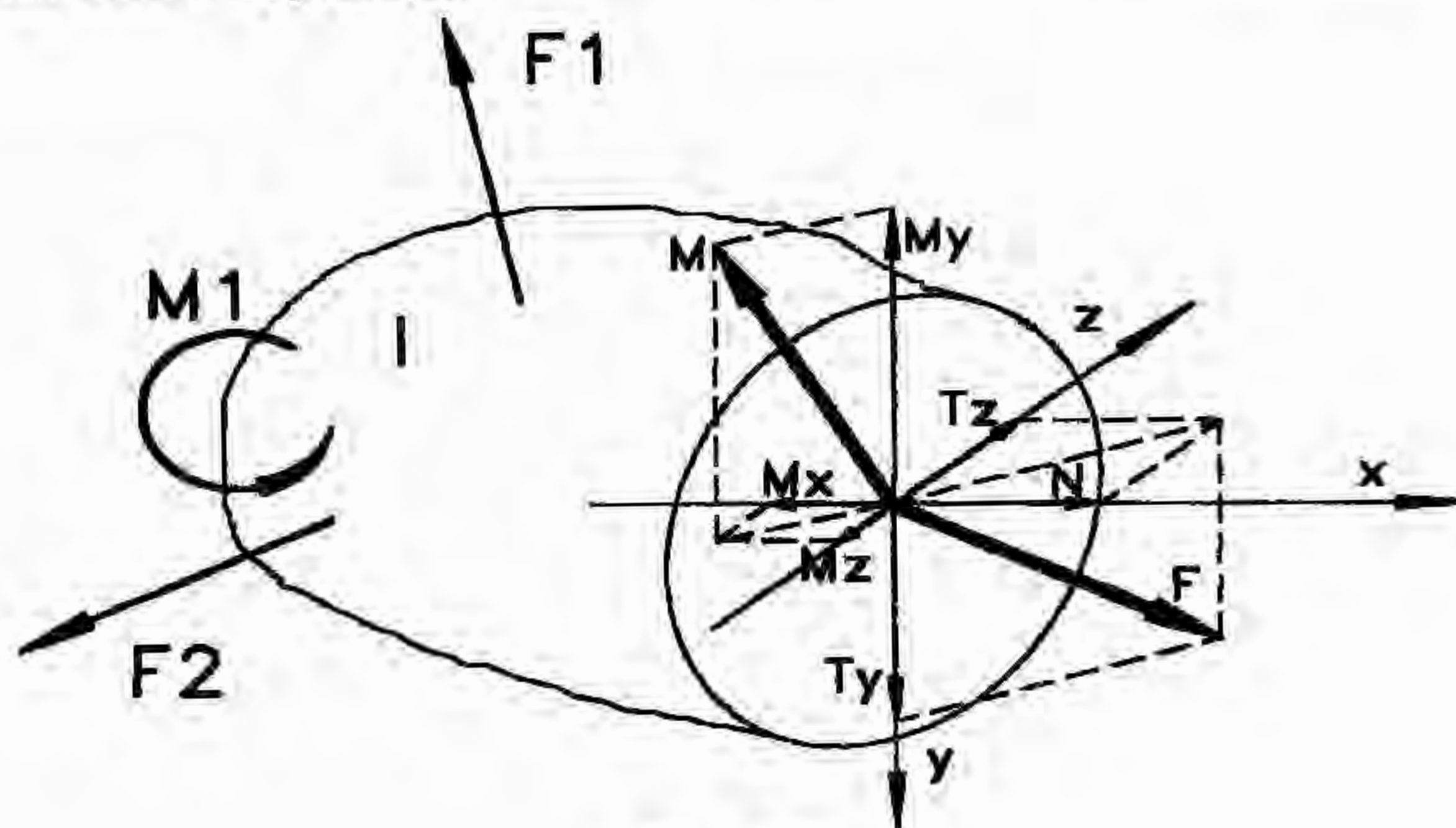


Fig. 1.22

Descompunerea eforturilor  $\bar{F}$  și  $\bar{M}$  după cele trei axe duce la apariția următoarelor eforturi componente:

- după axa  $x$  este dirijată componenta  $N$  a forței  $\bar{F}$  numită *efort axial*;
- după axele  $y$  și  $z$  apar componentele  $T_y$  și  $T_z$  ale forței  $\bar{F}$  numite *eforturi tăietoare*;
- după axa  $x$  este dirijată componenta  $M_x$  a momentului  $\bar{M}$  numită *moment de torsiune*;
- după axele  $y$  și  $z$  sunt dirijate componentele  $M_y$  și  $M_z$  ale momentului  $\bar{M}$  numite *momente încovoietoare*.

Pentru determinarea tuturor acestor eforturi în funcție de încărcarea exterioară vom recurge la *metoda secțiunilor*. Astfel, un corp supus acțiunii unui sistem de sarcini exterioare se va secționa imaginar cu un plan. Pentru ca una din părți să rămână în echilibru static trebuie



ca, în secțiunea rezultată să se introducă sarcinile corespunzătoare acțiunii părții îndepărtate asupra părții rămase. Aceste sarcini reprezintă tocmai eforturile secționale puse în evidență în figura 1.22. *Metoda secțiunilor* consideră eforturile interioare ca forțe și momente exterioare care își fac echilibrul cu sistemul de sarcini inițial aplicat din exterior părții considerate. Din ecuațiile de echilibru scrise în aceste condiții, vor rezulta:

- efortul axial  $N$ , ca fiind egal cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa  $x$  ale tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra părții corpului luate în considerare;

- eforturile tăietoare  $T_y$  și  $T_z$ , ca fiind egale cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa  $y$ , respectiv  $z$ , ale tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra părții corpului luate în considerare;

- efortul moment de torsiune  $M_x$ , ca fiind egal cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa  $x$  ale tuturor momentelor exterioare ce acționează asupra părții corpului luate în considerare;

- eforturile momente încovoietoare  $M_y$  și  $M_z$ , ca fiind egale cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa  $y$ , respectiv  $z$ , ale tuturor momentelor exterioare ce acționează asupra părții corpului luate în considerare.

Valorile și sensurile reale ale tuturor acestor eforturi vor reieși din calcule. Evident că, pe fațeta părții îndepărtate eforturile vor avea, corespunzător, aceleași valori și, conform principiului acțiunii și reacțiunii, vor fi de sensuri contrarii cu cele determinate pentru fațeta părții luate în considerare.

Dat fiind faptul că, eforturile se regăsesc în fiecare secțiune a corpului, de-a lungul corpului respectiv se vor putea trasa diagramele de variație pentru aceste eforturi. În Rezistența materialelor s-au impus anumite reguli care stabilesc semnele eforturilor secționale.

Fie o bară dreaptă pe care este fixat sistemul de axe  $oxyz$  pentru care axa  $x$  coincide cu axa geometrică a barei, figura 1.23. Se consideră pozitive:

- forțele care pe fațeta din partea dreaptă a barei sunt orientate în sensul pozitiv al axelor:

- momentele care pe fațeta din partea stângă a barei sunt orientate în sensul negativ al axelor.

---



Eforturile pozitive pentru ambele fațete în cazul spațial și cel plan sunt arătate în figura 1.23, b și c.

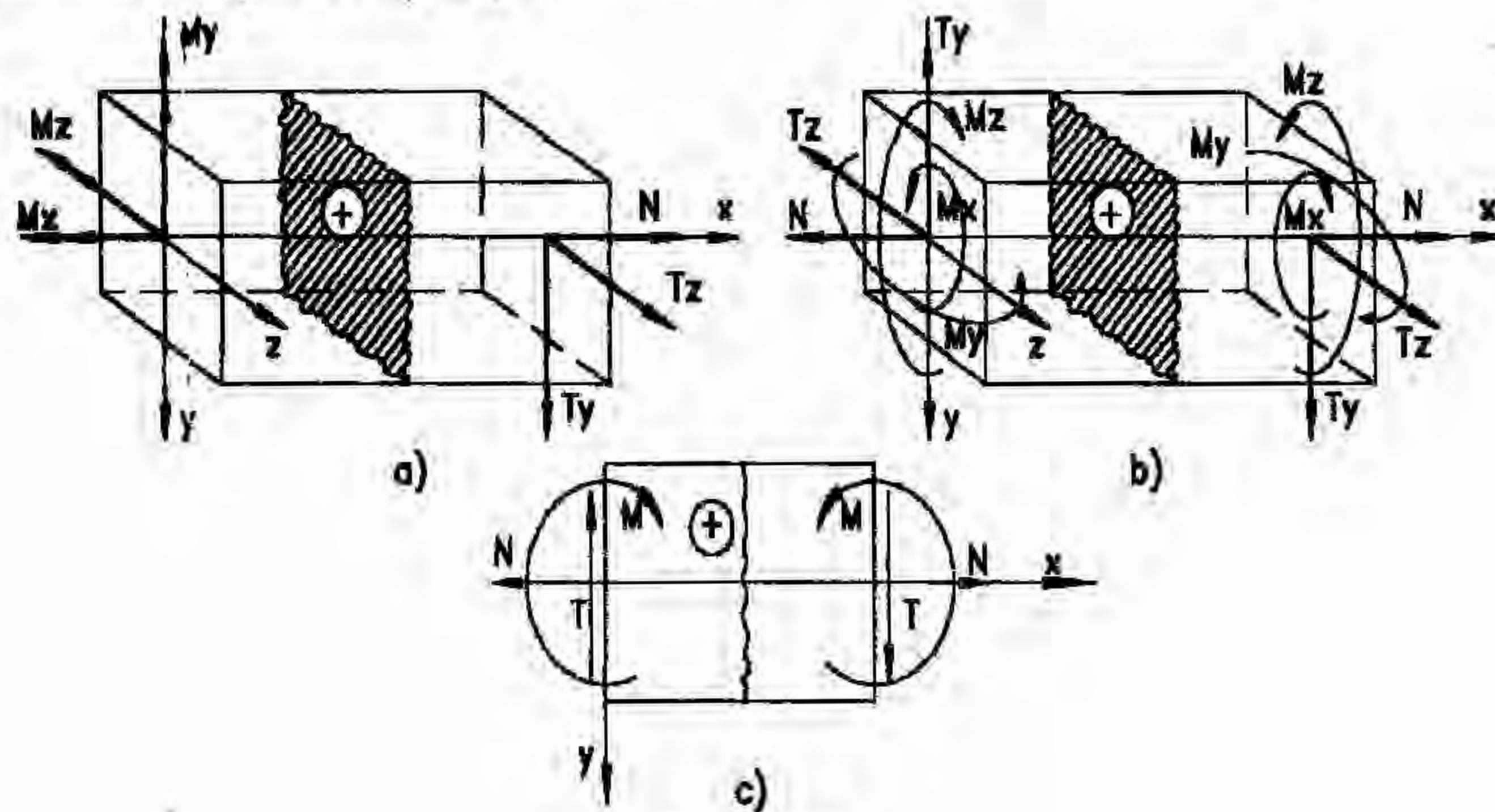


Fig. 1.23

### Aplicații

11.3. Să se calculeze eforturile secționale pentru bara din figura 1.24a.

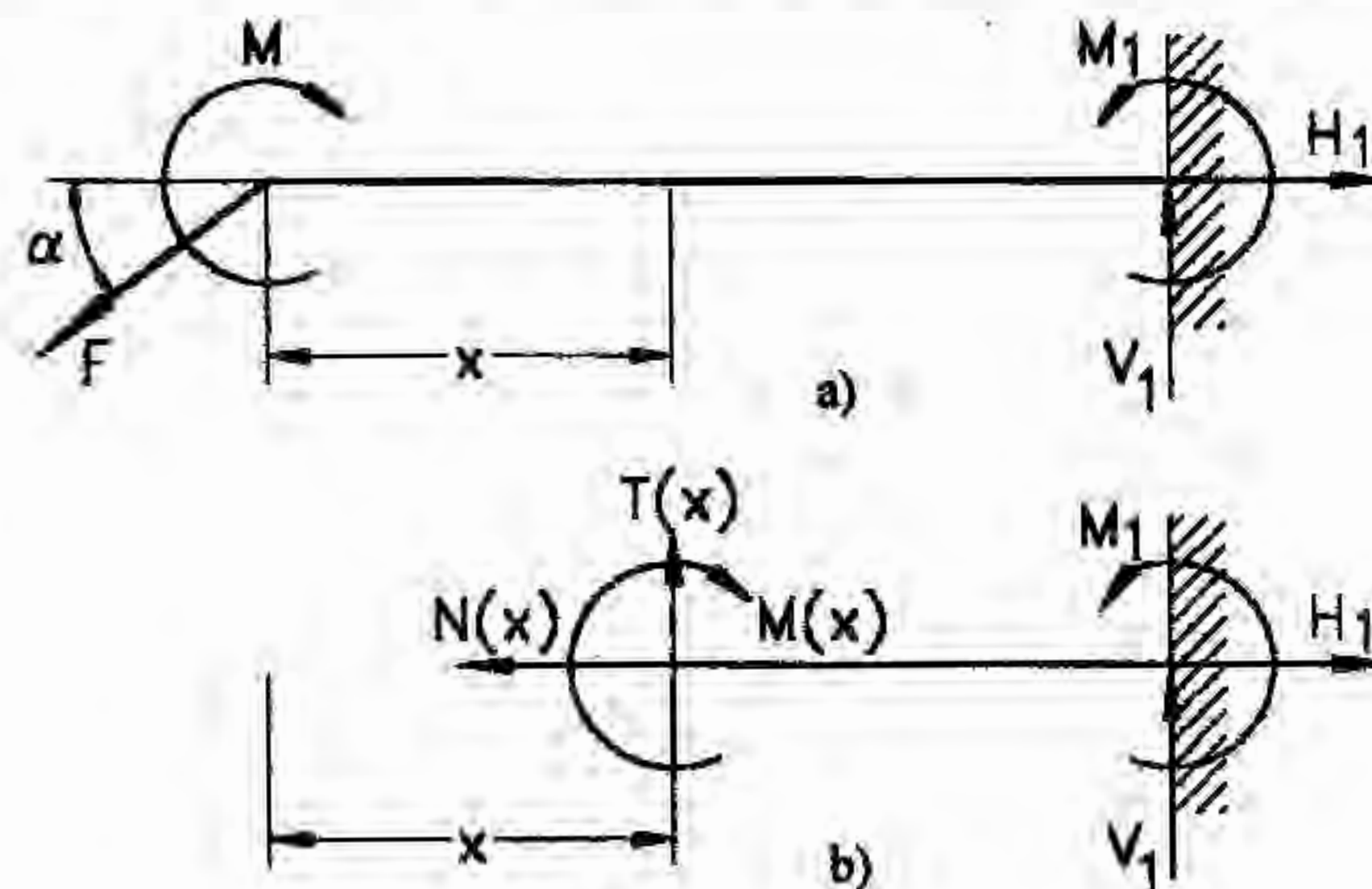


Fig. 1.24

Pentru a calcula eforturile din secțiunea barei aflată la distanța  $x$ , trebuie îndepărtată (imaginar) porțiunea din bară aflată la stânga secțiunii considerate, figura 1.24b. Așa cum s-a subliniat anterior, eforturile din



secțiunea barei rămase - cea din dreapta - vor fi determinate pe baza echivalenței acestora cu acțiunea părții îndepărtate asupra părții rămase. Astfel vom avea:

$$N(x) = F \cos \alpha$$

$$T(x) = -F \sin \alpha$$

$$M(x) = M - (F \sin \alpha) x$$

Aceleași eforturi, aparținând de această dată secțiunii părții din stânga, se vor putea determina dacă se îndepărtează partea din dreapta, relativ la secțiunea considerată. În acest caz este necesar a se calcula mai întâi reacțiunile  $H_1$ ,  $V_1$  și  $M_1$  care apar în încăstrare.

### 1.8. Clasificarea solicitărilor

Toate cele șase componente ale eforturilor secționale apar numai în cazul general de solicitare exterioară. În cele mai multe cazuri însă, solicitările exterioare produc un număr mai mic de eforturi. În cazul în care, oricare ar fi o secțiune a unui corp, aceasta este solicitată doar de un efort secțional, solicitarea se numește *simplă*. În cazul în care secțiunile corpului sunt solicitate de două sau mai multe eforturi, solicitarea se numește *compusă*. Astfel, în funcție de componentele eforturilor care se introduc într-o secțiune a unei bare, solicitările pot fi de:

- *întindere sau compresiune*, atunci când în fiecare secțiune apare numai un *efort axial* (forță axială)  $N$ , pozitiv, respectiv negativ;
- *forfecare*, atunci când în secțiune apare numai unul din eforturile  $T_y$  sau  $T_z$ , denumite și *forțe tăietoare*;
- *răsucire sau torsiune*, atunci când în secțiune apare numai efortul  $M_x$  denumit și *moment de torsiune*;
- *încovoiere pură*, atunci când în secțiune apare numai unul din eforturile  $M_y$  sau  $M_z$  denumite și *momente încovoietoare*;
- *încovoiere simplă*, atunci când în secțiune apar împreună forța tăietoare  $T_y$  și momentul încovoietor  $M_z$  sau *forța tăietoare*  $T_z$  și *momentul încovoietor*  $M_y$ ;
- *încovoiere oblică* atunci când în secțiune apar în același timp *momentele încovoietoare*  $M_y$  și  $M_z$ ;



- *încovoiere simplă cu forță axială* atunci când în secțiune apar în același timp *forța axială*  $N$ , *forța tăietoare*  $T_y$  și *momentul încovoiator*  $M_z$  sau *forța axială*  $N$ , *forța tăietoare*  $T_z$  și *momentul încovoiator*  $M_y$ ;

- *încovoiere oblică cu forță axială* atunci când în secțiune apar în același timp *forța axială*  $N$ , *momentul încovoiator*  $M_y$  și *momentul încovoiator*  $M_z$ ;

- *încovoiere simplă cu torsiune* atunci când în secțiune apar în același timp *forța tăietoare*  $T_y$ , *momentul încovoiator*  $M_z$  și *momentul de torsiune*  $M_x$ .

Evident că sunt și alte posibilități de solicitare în funcție de eforturile care apar în secțiuni. Modalitățile de calcul devin specifice fiecărui tip de solicitare în parte.

### 1.9. Relații între sarcini și eforturi

Se consideră o bară dreaptă pe care acționează o sarcină distribuită după o lege oarecare, figura 1.25a. În aceste condiții, bara este solicitată și în fiecare secțiune a acesteia se introduc eforturi.

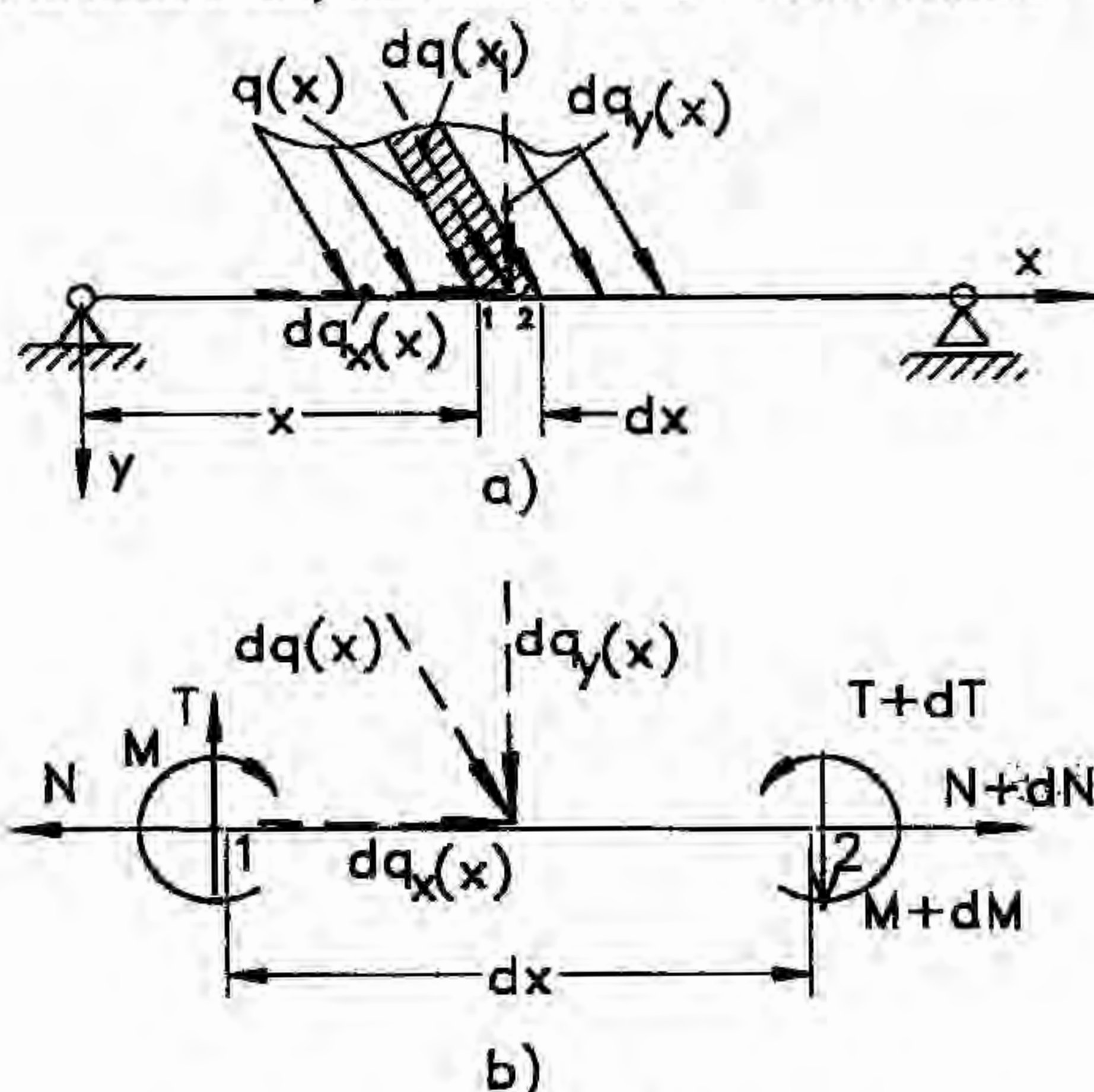


Fig. 1.25



Elementului de lungime  $dx$  îi revine sarcina  $dq(x) = q(x)dx$ , figura 1.25b. Componentele acestei sarcini după direcțiile  $ox$  și  $oy$  sunt  $dq_x(x)$  și  $dq_y(x)$ .

Pe cele două fețe, 1 și 2, ale elementului de lungime  $dx$ , se introduc eforturile  $N$ ,  $T$  și  $M$ , respectiv  $N+dN$ ,  $T+dT$  și  $M+dM$ . Se pot scrie trei ecuații de echilibru pe elementul respectiv:

- proiecții de forțe pe axa  $ox$ :

$$-N + dq_x(x) dx + N + dN = 0$$

- proiecții de forțe pe axa  $oy$ :

$$-T + dq_y(x) dx + T + dT = 0$$

- sumă de momente față de punctul 2:

$$M + T dx - dq_y(x) dx dx/2 - M - dM = 0$$

Neglijând în ecuația a treia infinitesimale de ordinul doi, vor rezulta relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -q_x(x) \\ \frac{dT}{dx} &= -q_y(x) \\ \frac{dM}{dx} &= T \end{aligned} \quad (1.5)$$

denumite relațiile diferențiale dintre sarcini și eforturi. Cunoscând intensitățile componentelor sarcinii distribuite,  $q_x(x)$  și  $q_y(x)$ , se pot obține expresiile eforturilor  $N$ ,  $T$  și  $M$  în oricare secțiune a barei, pe baza integrării relațiilor (1.5). În urma integrării, vor rezulta constante de integrare care se determină prin impunerea condițiilor la limită ce reprezintă valori cunoscute pentru eforturile  $N$ ,  $T$  și  $M$  în anumite secțiuni.

### 1.10. Tensiuni

Vom considera porțiunea I a corpului secționat din figura 1.21b. Așa cum s-a văzut, eforturile care apar în secțiunea considerată reprezintă acțiunea părții îndepărtate asupra părții rămase. Aceste eforturi își fac echilibrul cu sarcinile exterioare ce acționează asupra porțiunii considerate. Vom presupune că, materialul corpului considerat este continuu, deci are proprietatea de a umple întregul volum delimitat



de acel corp. Vom considera pe suprafața secționată, în jurul unui punct M, o arie elementară  $dA$ , figura 1.26a.

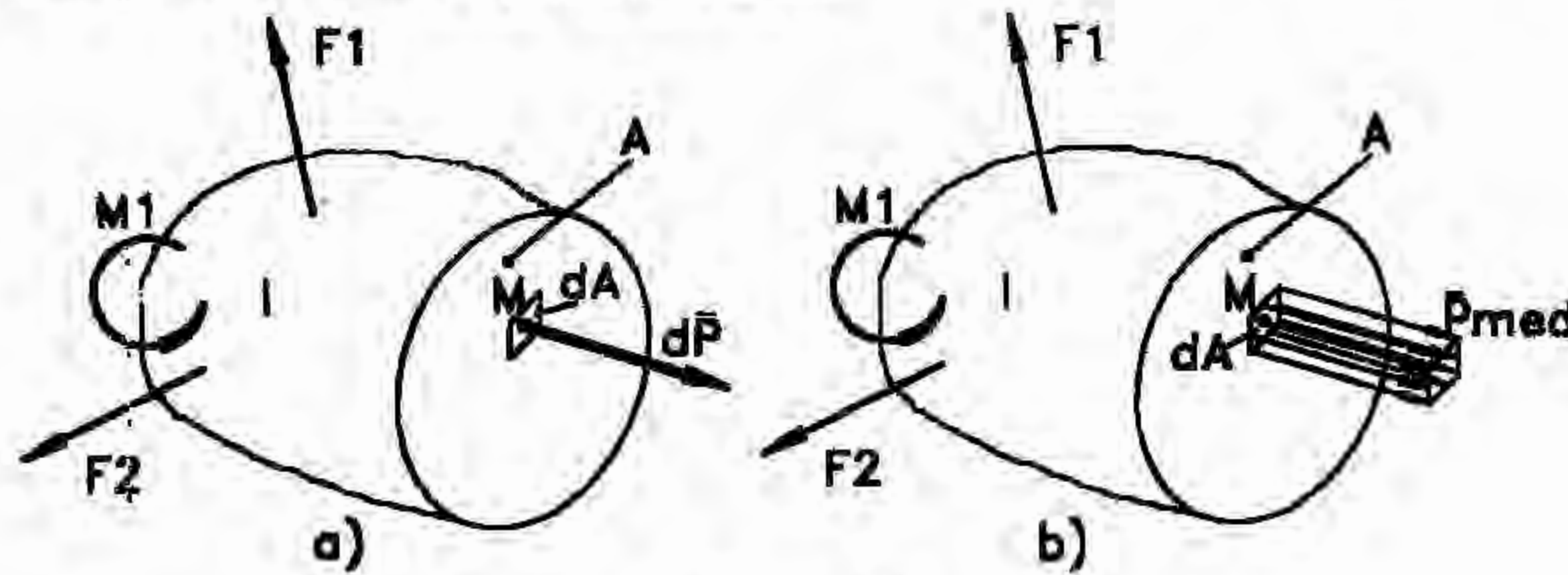


Fig. 1.26

Suma tuturor forțelor suplimentare (eforturilor) de pe aria  $dA$  va da o rezultantă în punctul M notată cu  $d\bar{P}$ . În fiecare punct al suprafeței elementare  $dA$  se pot înlocui forțele suplimentare rezultate cu o forță static echivalentă, uniform distribuită pe suprafața  $dA$ , a cărei intensitate este:

$$p_{med} = \frac{d\bar{P}}{dA} \quad (1.6)$$

Această mărime se numește *tensiune medie* sau efort unitar mediu și se măsoară în  $[N/mm^2]$ , figura 1.26b. Dacă se trece la limită, având în vedere continuitatea menționată, va rezulta:

$$\bar{p} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\bar{P}}{dA} \quad (1.7)$$

în care  $\bar{p}$  reprezintă *tensiunea* din punctul M. Trecerea la limită se poate face numai în cazul în care tensiunile au o repartiție continuă în jurul punctului M. Vectorul tensiune  $\bar{p}$  are o direcție oarecare față de elementul de arie  $dA$ . Dacă se consideră normala  $v$  la aria  $dA$  în punctul M, figura 1.28a, tensiunea  $\bar{p}$  se poate descompune după două direcții, normală și tangențială, obținându-se:

- tensiunea  $\sigma$  normală la suprafață (orientată după direcția  $v$ );
- tensiunea  $\tau$  aflată în planul suprafeței.



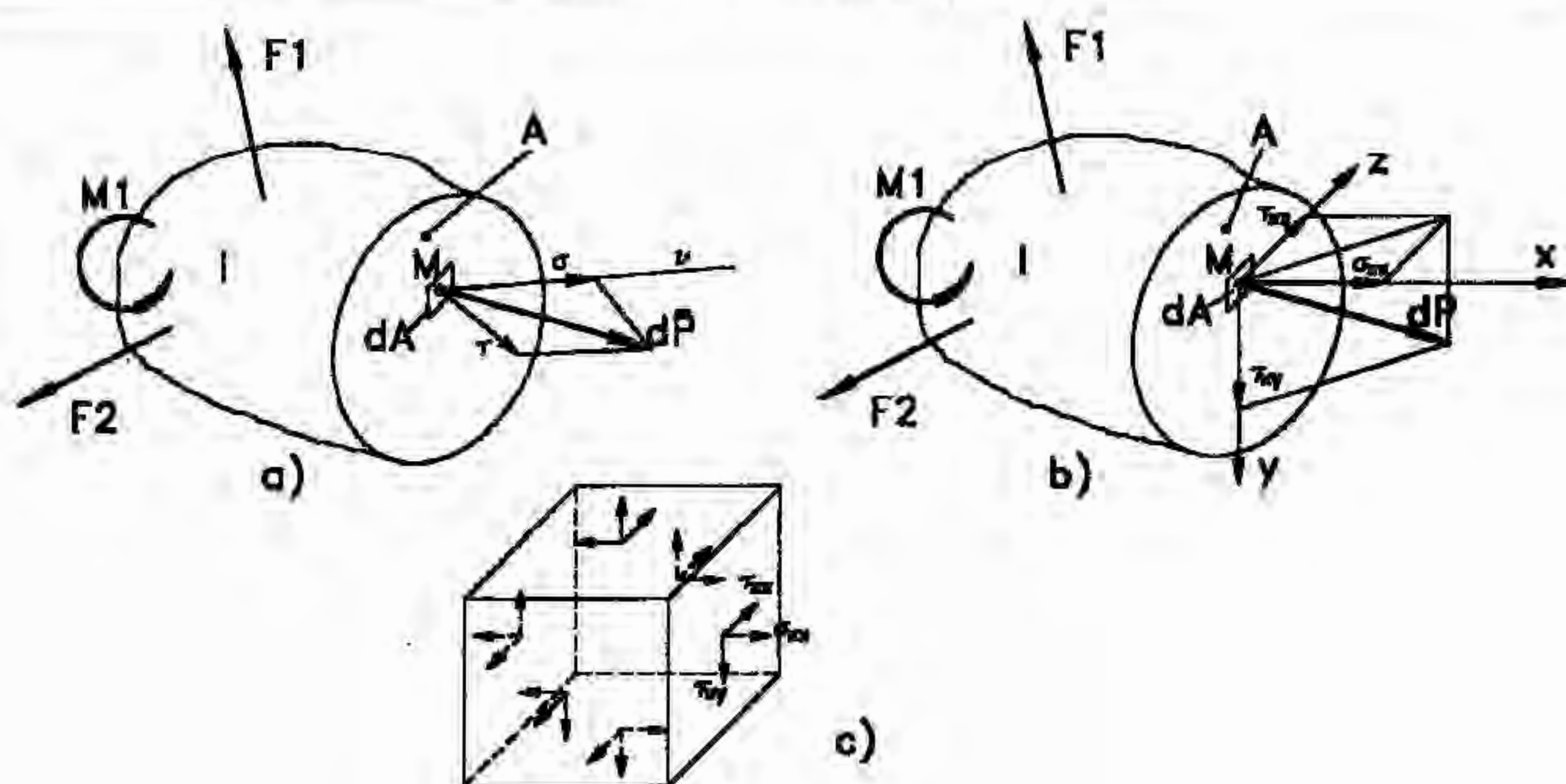


Fig. 1.27

Tensiunea  $\sigma$  este denumită *tensiune normală* sau efort unitar normal iar tensiunea  $\tau$  este denumită *tensiune tangențială* sau efort unitar tangențial. Este evidentă legătura dintre aceste tensiuni:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1.8)$$

Tensiunile  $p$ ,  $\sigma$  și  $\tau$  se exprimă în  $[N/mm^2]$ . Mărimea tensiunilor dintr-un anumit punct reflectă *gradul de solicitare* al corpului în punctul considerat. Tensiunile exprimă mult mai bine decât eforturile starea de solicitare a corpului în diferitele sale puncte. Eforturile reprezintă mărimi cumulate pe întreaga secțiune în care, putem avea tensiuni diferite în diferitele puncte ale secțiunii respective. Dacă prin acțiunea sistemului de sarcini exterior, într-un anumit punct al unui corp se introduc tensiuni care depășesc la un moment dat forțele de legătură interatomică, în acel punct începe distrugerea corpului. Dacă tensiunea  $p$  se descompune după un sistem triortogonal de axe în care axa  $ox$  este perpendiculară pe suprafață iar axele  $oy$  și  $oz$  se află în planul suprafeței, componentele tensiunii din punctul  $M$  vor fi:  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{xz}$ , figura 1.27b. Semnificația indicilor este următoarea:

- primul indice este cel al axei perpendiculare pe suprafață;
- al doilea indice este cel al axei paralelă cu tensiunea respectivă.

Elementul de suprafață de arie  $dA$  poate constitui o față a unui element de volum, figura 1.27c. Sub acțiunea sarcinilor exterioare



aplicate corpului, pe fiecare față a elementului de volum se vor dezvolta tensiuni normale și tangențiale raportate la fețele elementului de volum respectiv. Ansamblul acestor tensiuni determină starea de tensiune din jurul punctului considerat. Determinarea stării de tensiune din jurul unui punct se va aprofunda în capitolul 3.

### 1.11. Relații între eforturi și tensiuni

Tensiunea medie  $p_{med}$  reflectă nivelul solicitării din fiecare punct al corpului. Eforturile  $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  și  $M_z$  au fost puse în evidență în centrul de greutate al unei secțiuni și reprezintă rezultantele tensiunilor care apar în fiecare punct al respectivei secțiuni. Evident că, există relații de legătură între eforturi și tensiuni. Pentru stabilirea acestora se izolează o porțiune dintr-un corp, supus acțiunii unui sistem de sarcini exterioare aflat în echilibru static. În secțiunea rezultată se pun în evidență atât eforturile cât și componentele tensiunii într-un punct oarecare  $M$  al secțiunii, figura 1.28.

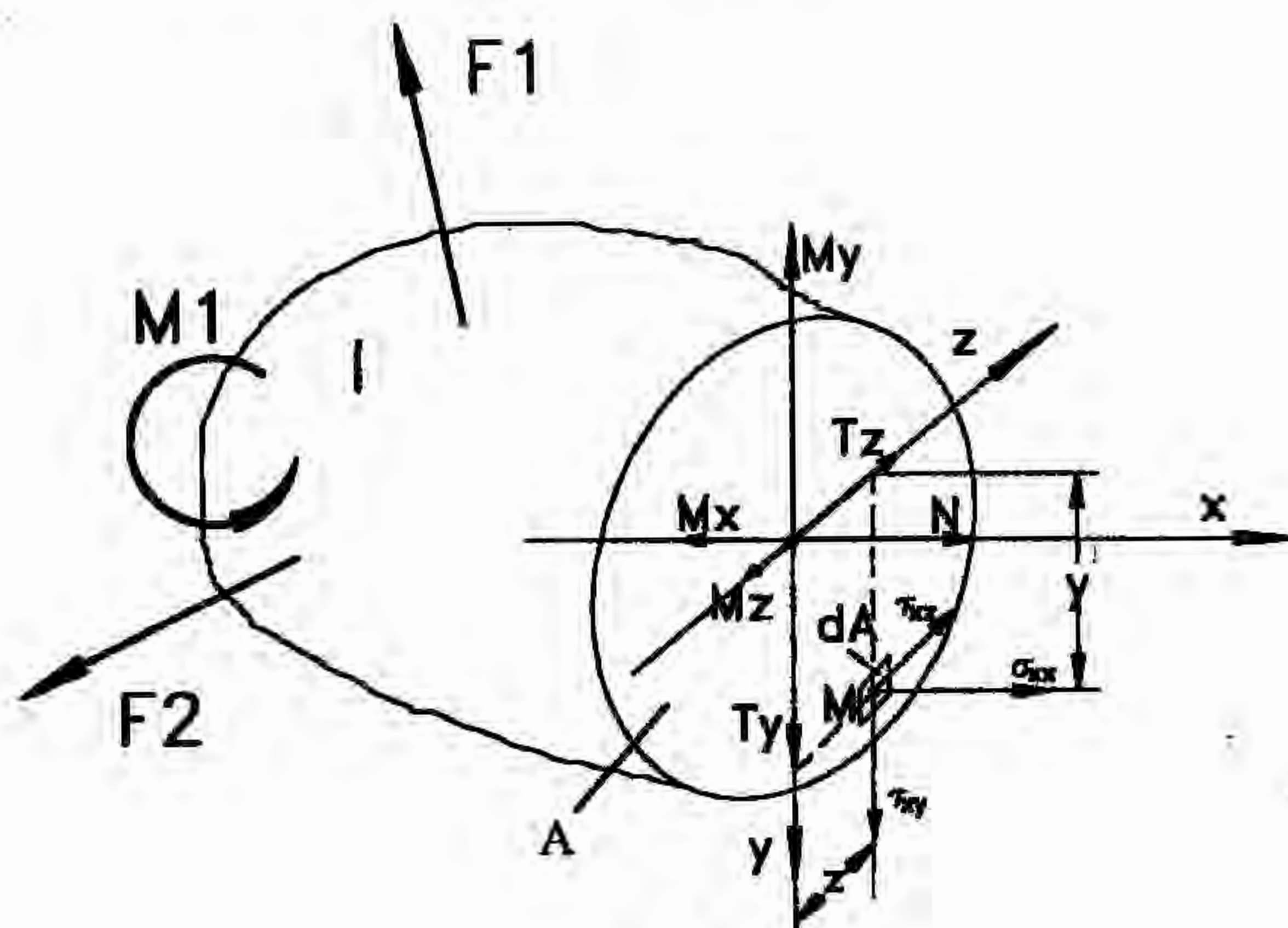


Fig. 1.28



În cazul general de solicitare, legătura dintre eforturile secționale și tensiunile din fiecare punct al secțiunii se scrie astfel:

$$\begin{aligned} 1) N &= \int_A \sigma_x dA; & 2) T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & 3) T_z &= \int_A \tau_{xz} dA \\ 4) M_x &= \int_A (\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y) dA & 5) M_y &= - \int_A \sigma_x \cdot z dA & (1.9) \\ 6) M_z &= \int_A \sigma_x \cdot y dA \end{aligned}$$

Aceste relații poartă numele de *ecuații de echivalență* între eforturi și tensiuni.

În cazuri particulare de încărcare numărul relațiilor de mai sus se reduce. Astfel, în cazul barelor supuse numai la solicitare axială vom avea numai ecuația 1. În cazul barelor supuse numai la răsucire vom avea numai ecuația 4, etc..

Cele șase ecuații stabilite anterior sunt independente de caracteristicile de material.

### 1.12. Deplasări și deformații

Sub acțiunea sarcinilor exterioare, diferitele puncte ale corpurilor solide se deplasează. Aceste deplasări pot fi:

- *deplasări cinematice* atunci când corpul, fie se deplasează liber, fie legăturile permit deplasări mari iar corpul solid își schimbă poziția relativă în spațiu;

- *deplasări produse prin deformarea corpului solid* atunci când acesta își schimbă doar forma geometrică și dimensiunile inițiale.

Deplasările cinematice sunt studiate de către Mecanica teoretică. Deplasările datorate *deformării corpului solid* sub acțiunea unui sistem de sarcini aplicat din exterior, sunt studiate de către Rezistența materialelor. Dacă sarcinile aplicate nu depășesc anumite valori, aceste deplasări sunt mici în raport cu dimensiunile corpului solid și se numesc *deformații elastice*. În acest caz, odată cu îndepărtarea sistemului de sarcini exterior, corpul revine la forma și dimensiunile inițiale.

Se consideră un corp solid, aflat în echilibru static sub acțiunea unui sistem de sarcini exterioare, figura 1.29.



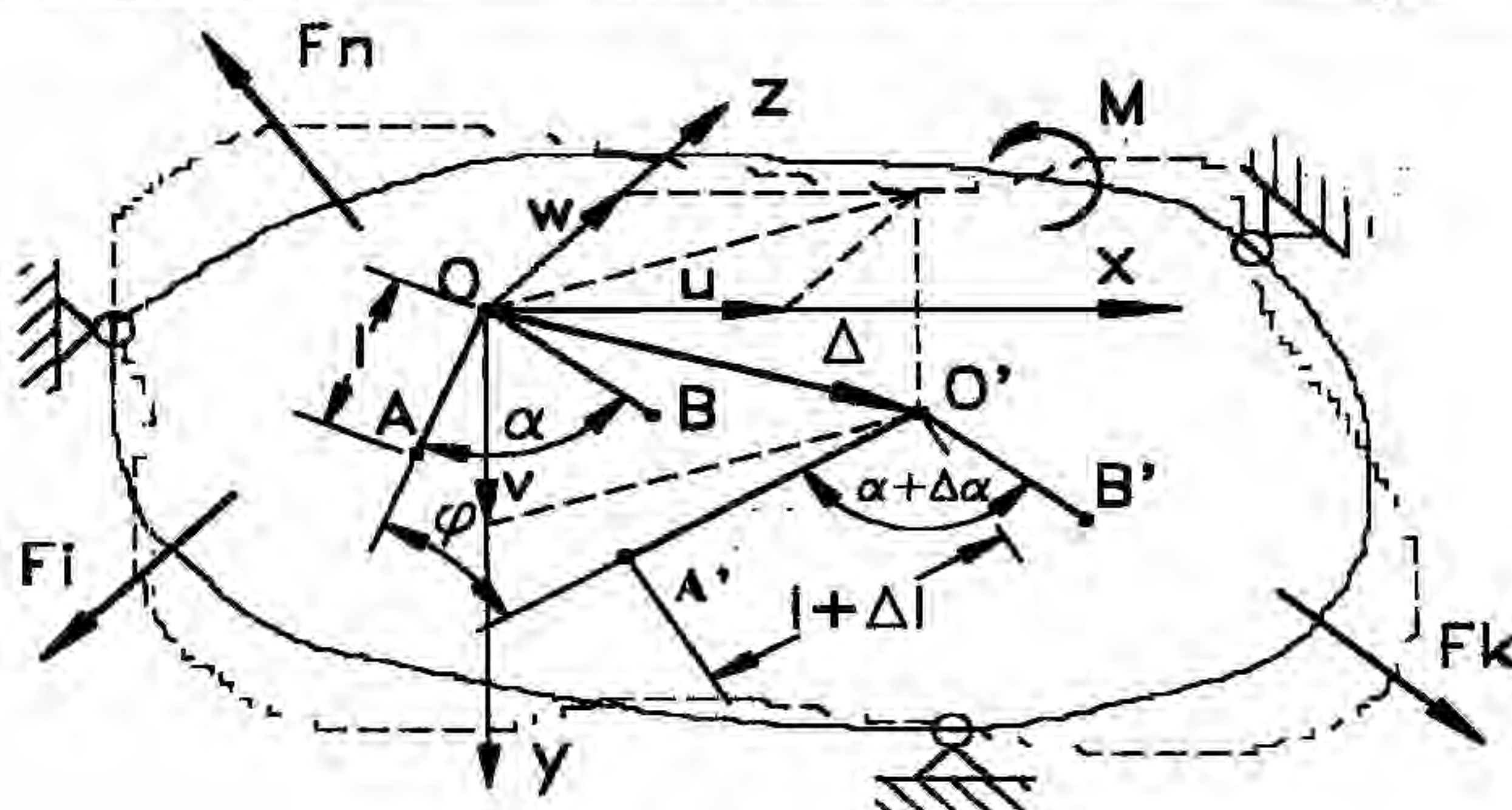


Fig. 1.29

În aceste condiții corpul se deformează iar diferitele sale puncte se deplasează. Deformația corpului, oricât de complexă ar fi, se poate descompune în elemente geometrice simple. Trei puncte aflate într-o poziție oarecare O, A și B, se vor deplasa și vor ajunge în noile poziții O', A' și B'. Pentru a caracteriza starea deformată a corpului trebuie puse în evidență mai multe mărimi.

- Vectorul  $\Delta$  ce are originea în poziția inițială O și vârful în poziția finală O' a aceluiaș punct se numește *deplasare totală* a punctului respectiv. Proiecțiile acestui vector, pe axele unui sistem triortogonal de axe, pun în evidență componentele deplasării totale notate cu  $u$  - proiecția pe ox,  $v$  - proiecția pe oy și  $w$  - proiecția pe oz. Dacă se cunosc valorile acestor componente, mărimea deplasării totale va fi dată de relația:

$$\Delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Deplasarea totală  $\Delta$  este o deplasare liniară și se măsoară în unități de lungime.

Segmentul OA își schimbă poziția unghiulară după deformarea corpului, în raport cu un sistem exterior de referință. Dacă luăm în considerare noua poziție a segmentului OA, respectiv segmentul O'A', observăm că poziția finală este rotită față de cea inițială cu unghiul  $\varphi$ .



- Unghiul cu care se rotește un segment sau o secțiune dintr-un corp solid se numește *rotire* și se notează cu  $\varphi$ .

Este posibil ca lungimea segmentului  $O'A'$  să nu mai fie aceeași cu lungimea sa inițială  $OA$ .

- Diferența dintre lungimea finală și cea inițială a unui segment dat poartă numele *alungire* sau *deformație liniară absolută* și se notează cu  $\Delta l$ :

$$\Delta l = [O'A'] - [OA]$$

- Se numește *alungire specifică* sau *deformație liniară specifică* limita raportului dintre alungire și lungimea inițială, pentru lungimea inițială tinzând la zero:

$$\varepsilon = \lim_{OA \rightarrow 0} \frac{[O'A'] - [OA]}{[OA]}$$

Alungirea specifică este adimensională și exprimă alungirea unității de lungime. Dacă  $[O'A'] > [OA]$  atunci variația respectivă se numește *lungire* iar dacă  $[O'A'] < [OA]$  variația respectivă poartă numele de *scurtare*.

- În afară de deformațiile liniare, corpul suferă și deformații unghiulare. Unghiul  $\Delta\alpha$  cu care variază unghiul inițial  $\alpha = \angle(AOB)$  se numește *lunecare* sau *deformație unghiulară*:

$$\Delta\alpha = \lim_{OB \rightarrow 0, OA \rightarrow 0} [\angle(A'O'B') - \angle(AOB)]$$

- Se numește *deformație unghiulară specifică* sau *lunecare specifică*, cantitatea cu care se modifică un unghi ce avea  $90^\circ$  în starea inițială. Lunecarea specifică se notează cu  $\gamma$ .

Se consideră elementul de volum ABCDEFGH din figura 1.30.

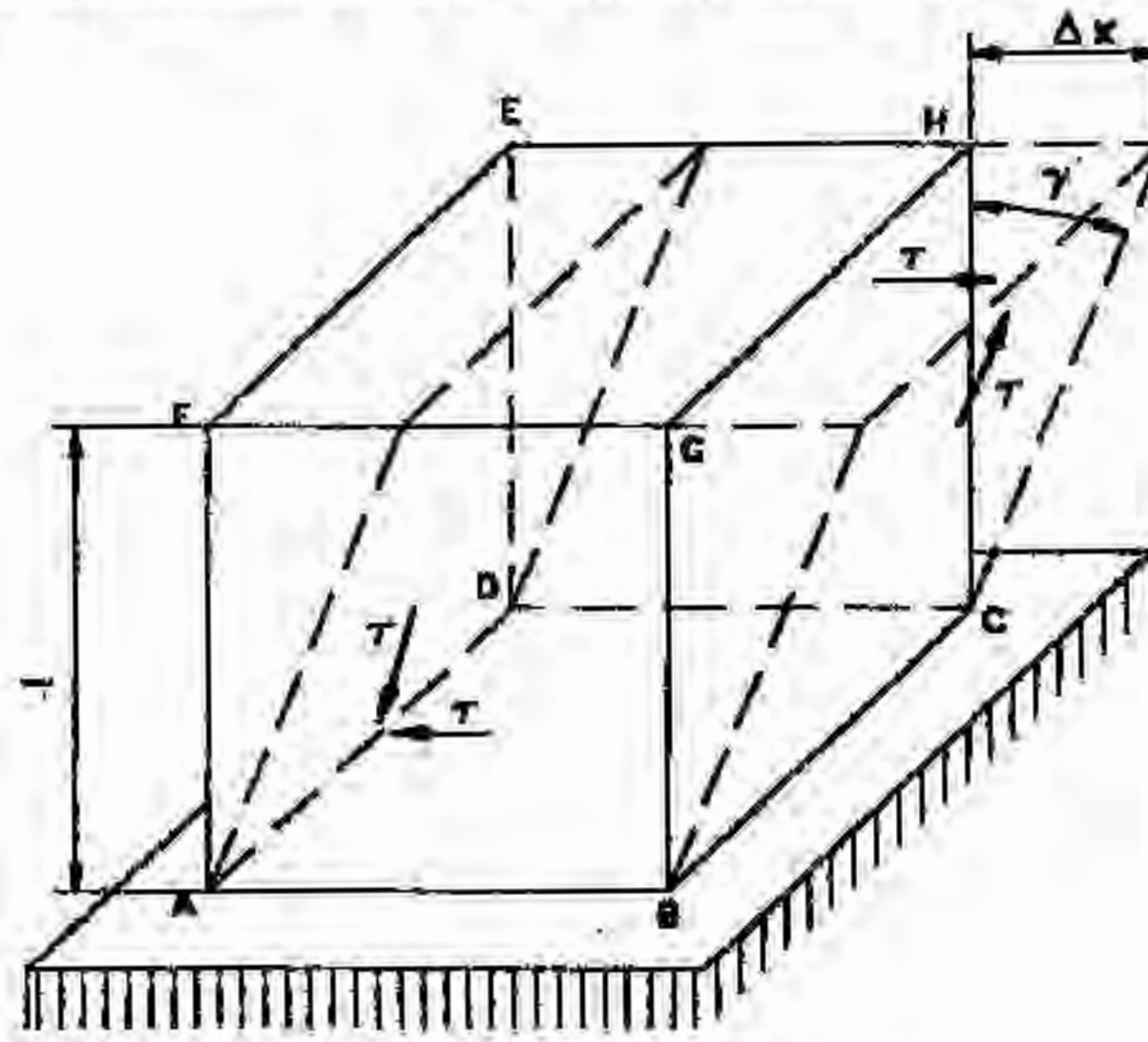


Fig. 1.30



Dacă se presupune că, pe patru fețe ale elementului de volum apar, ca urmare a solicitării exterioare, numai tensiunile tangențiale, iar fața ABCD se consideră fixă, atunci fața EFGH alunecă paralel cu cea fixă. Alunecarea specifică se pune în evidență prin unghiul  $\gamma$  cu care se modifică unghiul inițial drept. Alunecarea specifică se exprimă în radiani, deci este tot o mărime adimensională. Ea se poate calcula astfel:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{l} \approx \gamma$$

Totalitatea componentelor deformațiilor specifice dintr-un anumit punct definesc *starea de deformare* din punctul respectiv.

### 1.13. Relații între tensiuni și deformații

Între componentele care determină gradul de solicitare - *tensiunile* - și cele care determină gradul de deformare - *deformațiile specifice* - există o legătură fizică, determinată experimental și exprimabilă prin relații de calcul. În cazul corpurilor deformabile, în care deplasările tuturor punctelor sunt elastice, s-a constatat că aceste deplasări sunt proporționale cu sarcinile aplicate:

$$\Delta = k \cdot F$$

în care  $\Delta$  este deplasarea totală a unui punct oarecare produsă de forța exterioară  $F$ , iar  $k$  este un coeficient egal cu deplasarea aceluiaș punct și după aceeași direcție cu  $\Delta$ , produsă de o forță exterioară egală cu unitatea. Relația de mai sus poartă denumirea de *legea lui Hooke*.

Se consideră o bară solicitată de tensiunile normale  $\sigma$  și o placă solicitată de tensiunile tangențiale  $\tau$ , figura 1.31 a și b.

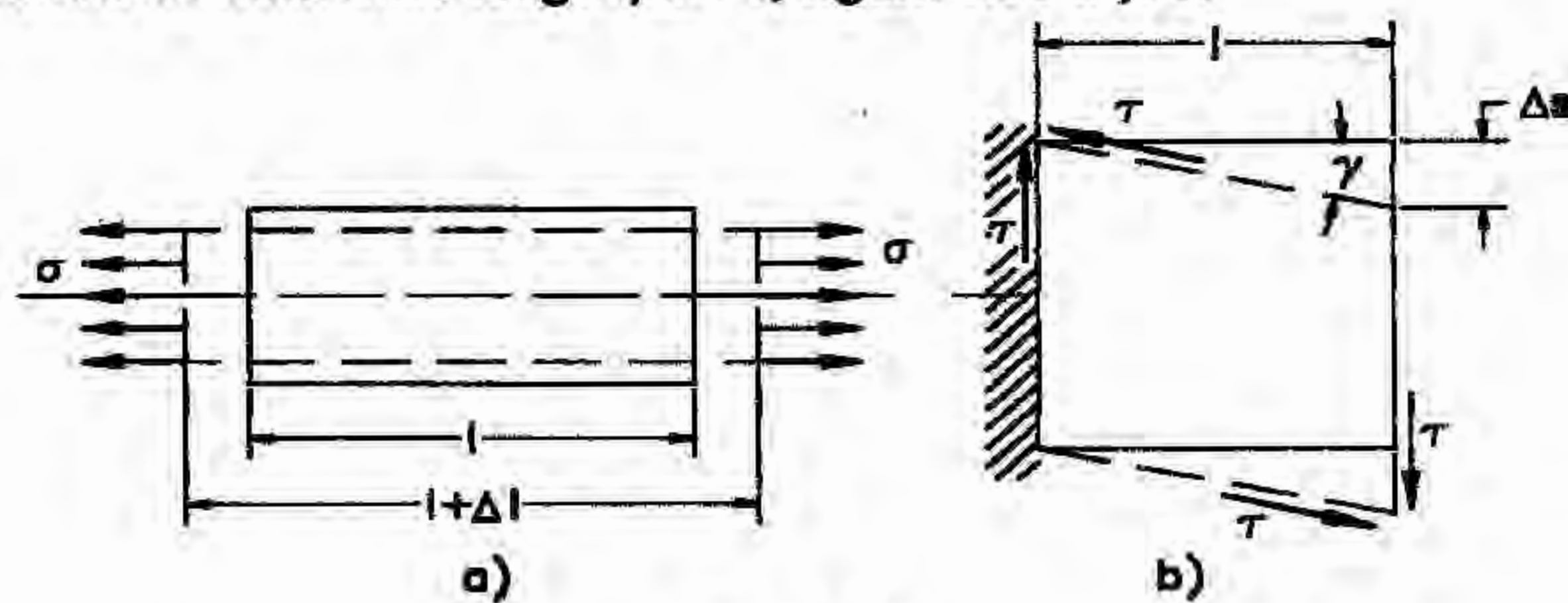


Fig. 1.31



Legea lui Hooke stabilește legătura și între tensiuni și deformațiile specifice având, pentru cele două cazuri, următoarea formă:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \varepsilon \quad \tau = G \cdot \frac{\Delta s}{l} = G \cdot \gamma$$

În aceste relații, constantele de proporționalitate  $E$  și  $G$ , dintre tensiuni și deformații, se numesc module de elasticitate, longitudinal respectiv transversal. Valorile acestor constante se pot determina experimental. Ele depind de natura materialului utilizat în fabricare. Deoarece atât  $\varepsilon$  cât și  $\gamma$  sunt mărimi adimensionale rezultă că, modulele de elasticitate se exprimă în aceleași unități de măsură ca și tensiunile, respectiv  $[\text{N/mm}^2]$ .

#### 1.14. Con tracția transversală

În cazul în care o bară dreaptă este supusă la întindere, se constată experimental că se lungește și că secțiunea ei transversală se micșorează. Fenomenul se produce și invers: la o comprimare a barei are loc atât o scurtare a acesteia cât și o mărire a dimensiunilor secțiunii transversale. Referirile făcându-se în special pentru solicitarea de întindere, această comportare a fost denumită *con tracție transversală*. Pentru bara din figura 1.32 se observă că, fenomenul amintit se stabilește de la o anumită distanță, relativ mică, față de încastrare. De asemenea, în funcție de condițiile aplicării forței  $N$ , con tracția transversală poate avea loc și la o anumită distanță față de zona de aplicare a forței.

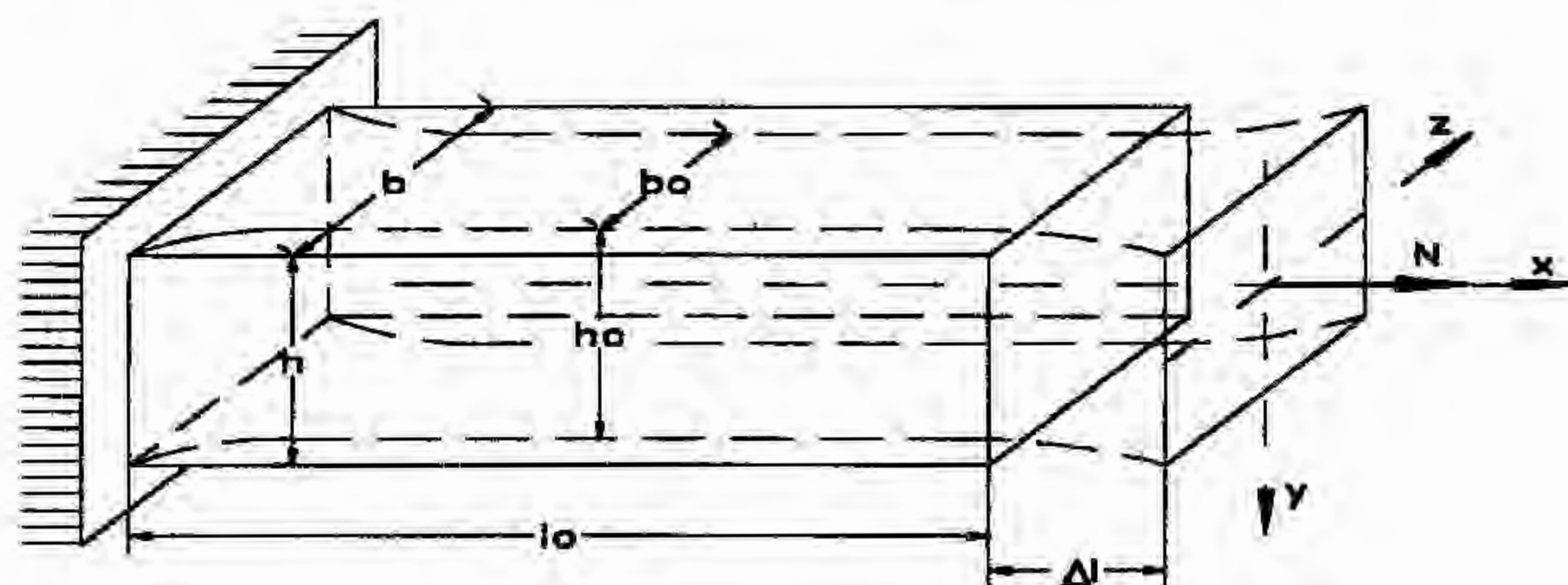


Fig. 1.32



Dacă se notează cu  $\epsilon_{\text{long}}$  lungirea specifică iar cu  $\epsilon_{\text{transv}}$  contracția transversală, se constată experimental că, între cele două mărimi există relația:

$$\epsilon_{\text{transv}} = -\mu \cdot \epsilon_{\text{long}}$$

în care  $\mu$  este denumit *coeficient de contracție transversală* sau *coeficientul lui Poisson*. Semnul “-” provine din faptul că, în mod convențional,  $\epsilon_{\text{long}} > 0$ , iar  $\epsilon_{\text{transv}} < 0$ . Pentru bara prismatică din figura 1.33 (neglijând neuniformitățile de deformare de la capete), avem:

$$\Delta l = \epsilon_{\text{long}} \cdot l_0; \Delta h = \epsilon_{y \text{ transv}} \cdot h_0 = -\mu \cdot \epsilon_{\text{long}} \cdot h_0; \Delta b = \epsilon_{z \text{ transv}} \cdot b = -\mu \cdot \epsilon_{\text{long}} \cdot b_0.$$

Aria secțiunii transversale  $A_0 = b_0 \cdot h_0$  se micșorează și devine:

$$A = b \cdot h = (b_0 + \Delta b)(h_0 + \Delta h) = (b_0 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}} \cdot b_0) \cdot (h_0 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}} \cdot h_0) \\ = b_0 \cdot h_0 \cdot (1 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}})^2 = A_0 \cdot (1 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}})^2$$

Volumul stabilit după deformare va fi:

$$V = V_0 \cdot (1 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}})^2 \cdot (1 + \epsilon_{\text{long}}) \quad (1.10)$$

Raportul dintre variația de volum și volumul inițial se numește *deformație specifică volumică*:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_0}{V} = \frac{(b_0 + \Delta b) \cdot (h_0 + \Delta h) \cdot (l_0 + \Delta l) - b_0 h_0 l_0}{b_0 h_0 l_0} \approx \frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\Delta h}{h_0} + \frac{\Delta l}{l_0}$$

Se constată că, deformația specifică de volum este egală cu suma lungirilor specifice măsurate pe direcția celor trei axe de coordonate:

$$\epsilon_v \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_x \cdot (1 - 2\mu) = \epsilon_{\text{long}} (1 - 2\mu)$$

Dacă vom considera un material ideal incompresibil ( $V = V_0$ ) din relația (1.10) se va putea scrie:

$$1 = (1 - \mu \cdot \epsilon_{\text{long}})^2 \cdot (1 + \epsilon_{\text{long}}) \Rightarrow 1 = (1 - 2\mu \epsilon_{\text{long}} + \mu^2 \cdot \epsilon_{\text{long}}^2) \cdot (1 + \epsilon_{\text{long}})$$

Intrucât  $\epsilon_{\text{long}} \ll 1$  și  $\mu$  este subunitar vom avea  $\mu^2 \epsilon_{\text{long}}^2 \approx 0$ . În aceste condiții va rezulta:

$$1 \approx 1 - 2\mu \epsilon_{\text{long}} + \epsilon_{\text{long}} - 2\mu \epsilon_{\text{long}}^2$$

Neglijându-se ultimul termen se obține:

$$2\mu \epsilon_{\text{long}} = \epsilon_{\text{long}} \text{ de unde } \mu = 1/2.$$

Se constată că deformația barei nu conduce la o modificare de volum dacă  $\mu = 0,5$ . Materialele care nu-și modifică volumul sub acțiunea sarcinilor exterioare sunt lichidele, în schimb gazele tind spre  $\mu=0$ .



## CAPITOLUL 2

### NOȚIUNI DESPRE MATERIALE

- 
- 2.1. Clasificarea materialelor
  - 2.2. Noțiuni despre încercarea materialelor
  - 2.3. Epruvete utilizate pentru încercări mecanice
  - 2.4. Încercarea la tracțiune
  - 2.5. Determinarea caracteristicilor mecanice convenționale
  - 2.6. Încercarea la compresiune
  - 2.7. Încercarea la forfecare
  - 2.8. Încercarea la răsucire
  - 2.9. Încercarea la încovoiere
  - 2.10. Factori de influență asupra caracteristicilor mecanice
  - 2.11. Ipoteze simplificatoare în Rezistența materialelor
  - 2.12. Metode de rezolvare a problemelor în Rezistența materialelor
- 

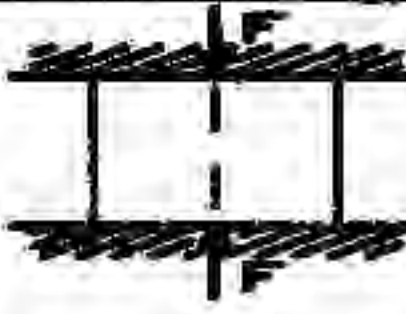
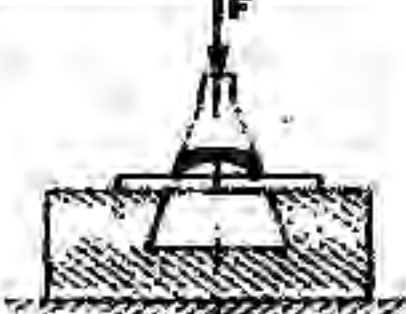
#### 2.1. Clasificarea materialelor

Principalele categorii de materiale utilizate în construcția de mașini, precum și în alte genuri de construcții, sunt: oțelul, fonta, aliajele din aluminiu, aliajele din cupru, materialele plastice, lemnul, betonul, cărămida, etc.. Utilizarea într-un anumit scop a unui material sau altul se face în funcție de caracteristicile mecanice, de prețul de cost și de accesibilitate. Ținând seama de comportarea materialelor sub acțiunea sarcinilor exterioare, acestea se pot clasifica în funcție de mai multe criterii, astfel:

a). În funcție de comportarea *după îndepărtarea sarcinilor* materialele se clasifică în:



Tabelul 2.1

| Schema de solicitare                                                                | Încercarea  |          | Numărul de solicitări | Acțiunea în timp                     |                            | Denumirea                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|----------|-----------------------|--------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------|
|                                                                                     | Tipul       | Modul    |                       | Variația                             | Durata                     |                                            |
|    | Tracțiune   | Statică  | Unică                 | Progresivă<br>Constantă<br>Regresivă | Scurtă<br>Lungă<br>Lungă   | Tracțiune<br>Fluaj<br>Relaxare             |
|                                                                                     |             | Dinamică | Unică                 |                                      |                            | Tracțiune dinamică                         |
|                                                                                     |             |          | Repetată              |                                      |                            | Oboseală la tracțiune                      |
|   | Compresiune | Statică  | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Compresiune<br>Flambaj                     |
|  | Încovoiere  | Statică  | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Încovoiere                                 |
|                                                                                     |             | Dinamică | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Încovoiere prin șoc                        |
|                                                                                     |             |          | Repetată              |                                      | Scurtă sau lungă           | Încovoiere prin oboseală                   |
|  | Răsucire    | Statică  | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Răsucire                                   |
|                                                                                     |             | Dinamică | Unică                 |                                      | Scurtă sau lungă           | Răsucire prin oboseală                     |
|  | Forfecare   | Statică  | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Forfecare                                  |
|  | Contact     | Statică  | Unică                 | Progresivă<br>Constantă              | Scurtă<br>Scurtă sau lungă | Strivire<br>Duritate<br>Duritate de durată |
|                                                                                     |             | Dinamică | Unică                 | Progresivă                           | Scurtă                     | Duritate dinamică                          |



Forma epruvetelor utilizate trebuie să fie astfel aleasă încât să asigure o uniformitate a tensiunilor în fiecare din secțiunile porțiunii calibrate. În vederea măsurării alungirii, pe porțiunea calibrată se trasează repere distincte care nu trebuie să influențeze starea de tensiuni din zonele respective.

Pentru încercarea la compresiune se utilizează epruvete scurte având formă cilindrică, cubică sau de disc, figura 2.1, c, d și e.

Pentru încercarea la răsucire se utilizează epruvete cu secțiunea centrală circulară iar capetele având secțiunea pătrată pentru prinderea în bacuri, figura 2.1 f.

Pentru încercarea la încovoiere se utilizează epruvete cu secțiunea dreptunghiulară, constantă pe întreaga lungime, figura 2.1 g. Pentru materialele fragile colțurile secțiunii transversale sunt rotunjite, figura 2.1 h.

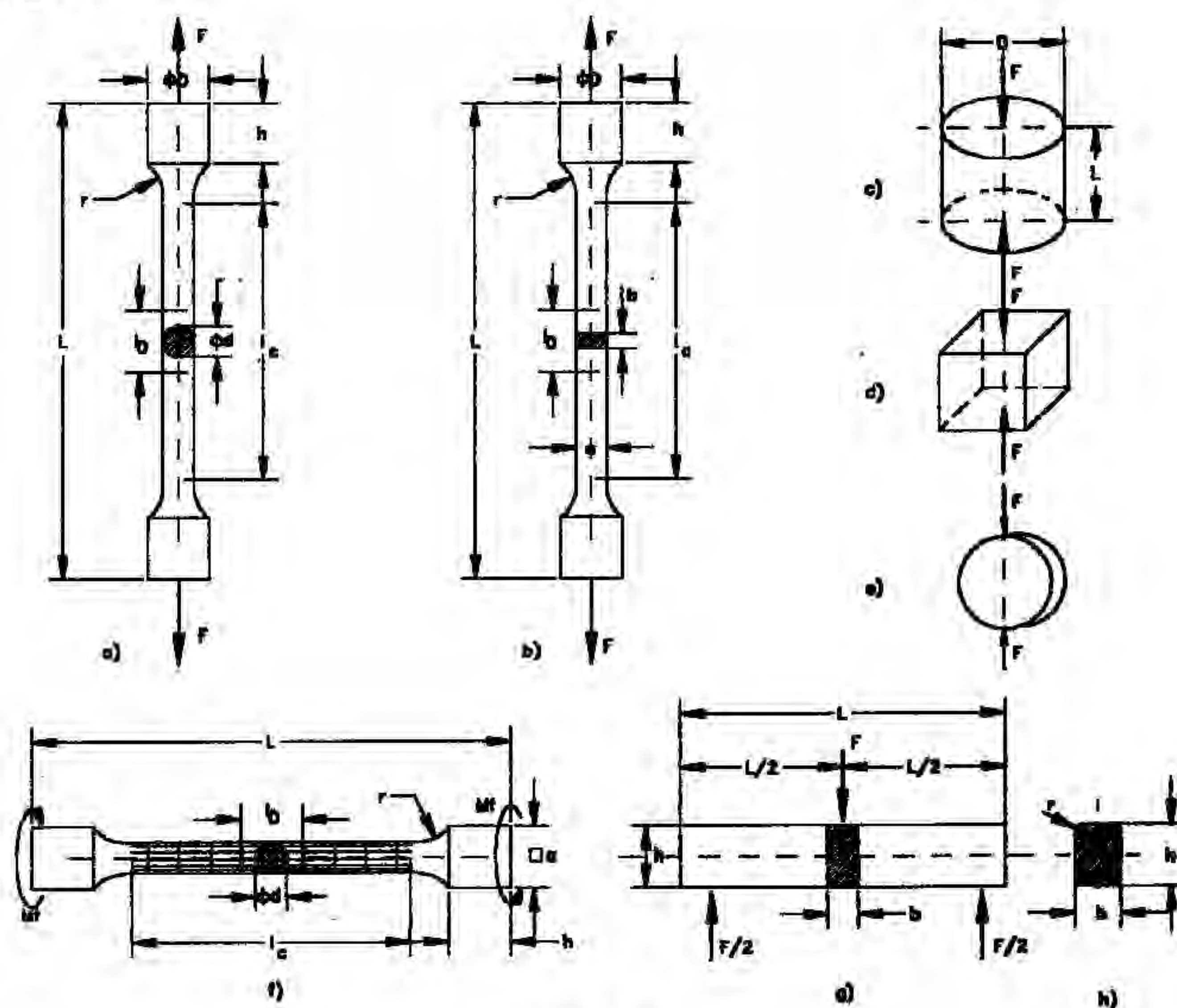


Fig. 2.1



## 2.4. Incercarea la tracțiune

Incercarea la tracțiune constituie încercarea mecanică de bază a unui material. Comportarea materialelor la tracțiunea monoaxială prezintă interes nu numai pentru solicitarea de tracțiune propriu-zisă ci și pentru celelalte stări de solicitare.

Incercarea la tracțiune este normalizată prin standardul SREN 10002-1/95. Ea se execută aplicând unei epruvete o forță axială statică, figura 2.2. Incercarea la tracțiune se efectuează pe mașini universale de încercat, ajungându-se până la ruperea epruvetei.

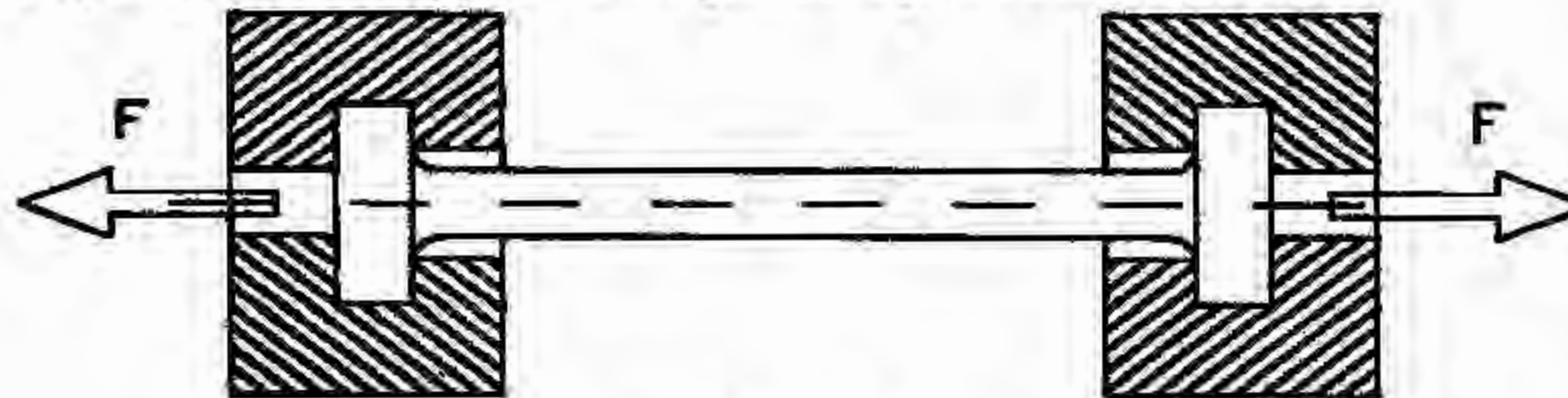


Fig. 2.2

Pentru a defini comportarea materialului la orice valoare a forței de încercare trebuie trasată *curba caracteristică convențională a materialului*. Aceasta exprimă legătura între tensiunea  $\sigma$  și alungirea specifică  $\epsilon$ . Tensiunea, pentru solicitarea de tracțiune, este dată de relația  $\sigma = F/S$  în care  $F$  este forța de încercare iar  $S$  este aria secțiunii transversale măsurată în fiecare moment al încercării. Este dificilă măsurarea secțiunii epruvetei pe toată lungimea și pe toată durata încercării iar alungirea specifică  $\epsilon$  nu este constantă pe toată lungimea epruvetei. Astfel, curba caracteristică se trasează în mod practic în coordonate  $F - \delta$ , în care  $\delta$  este dat de creșterea lungimii între repere și poartă numele de alungire. Forma curbei caracteristice pentru un oțel tenace este prezentată în figura 2.3. Pe această curbă se pot distinge câteva puncte și regiuni caracteristice:

- 0-1 - este o *zonă liniară* în care alungirea epruvetei este liniar proporțională cu forța aplicată. În acest interval este valabilă legea lui Hooke ( $\sigma = \epsilon \cdot E$ );

- 0-2 - poartă numele de *zonă de elasticitate*. Indepărtarea sarcinii în oricare din punctele acestei zone face ca epruveta să-și recapete forma



și dimensiunile inițiale. După depășirea punctului 2 materialul începe să capete deformări plastice (remanente);

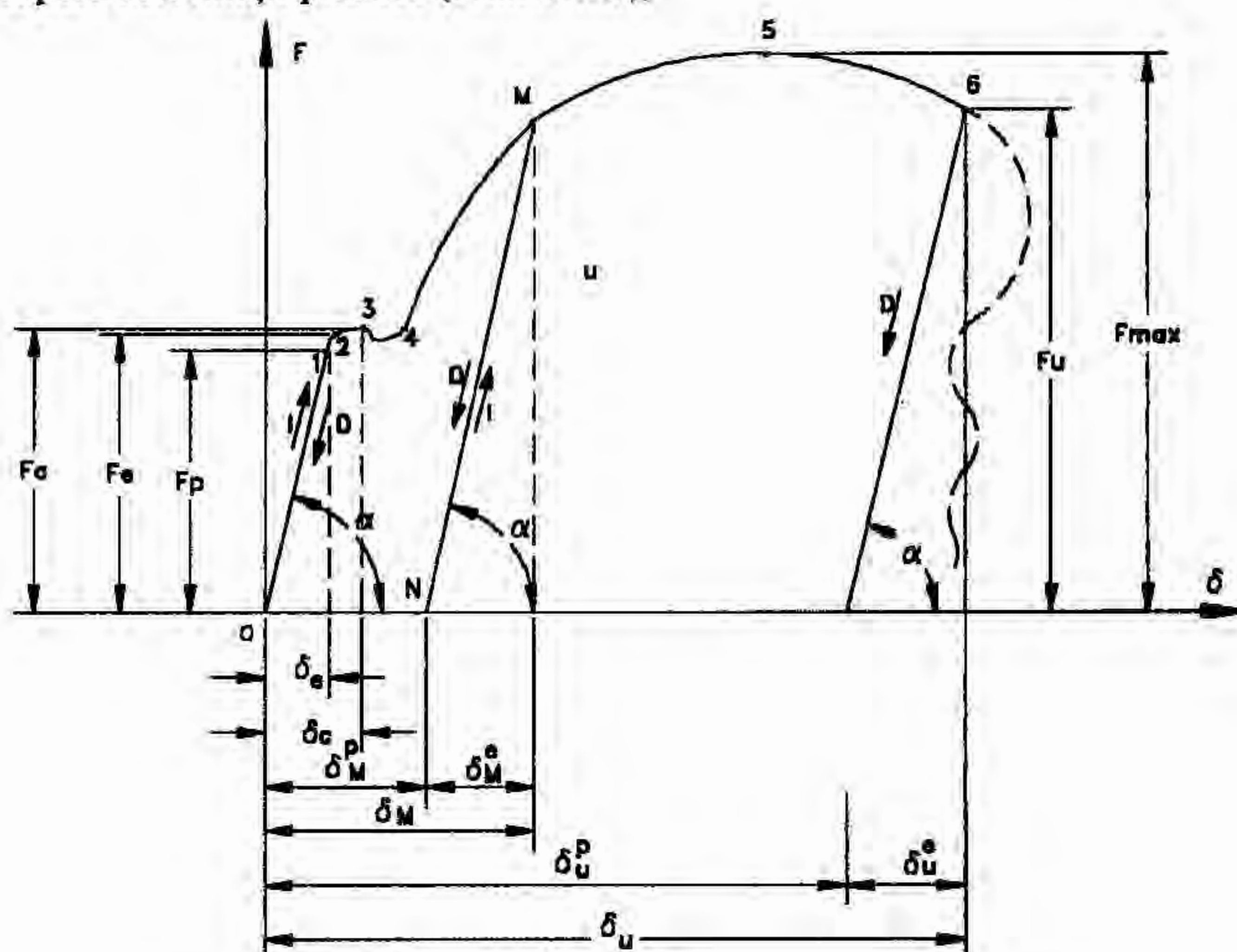


Fig. 2.3

- 2-4 - este numită *zonă de curgere* sau zona deformațiilor plastice accentuate. În funcție de natura materialului această zonă poate avea aspecte diferite. Forța corespunzătoare punctului 3 se numește forță de curgere și se notează cu  $F_c$ . În această zonă materialul se deformează pronunțat, deși forța nu mai crește, obținându-se un palier de curgere;

- 4-5 - este *zona de ecrisare* (întărire). În cadrul acestei zone se observă variații aproximativ uniforme ale alungirii epruvetei în raport cu creșterea forței. Dacă se întrerupe încercarea după depășirea limitei de elasticitate, (punctul 2), de exemplu în punctul M, se constată experimental că descărcarea se produce după o dreaptă MN paralelă cu porțiunea inițială 0-1. Dacă epruveta este reîncărcată, curba caracteristică începe cu dreapta NM după care va parcurge același traseu pe care ar fi



mers dacă încercarea nu s-ar fi întrerupt, respectiv M-5-6. Se constată astfel că, printr-o încercare la tracțiune parțială, se poate mări limita de elasticitate a materialului - zona N-M față de zona 0-2. Deformația înregistrată în timpul încercării în punctul M se poate scrie astfel:

$$\delta_M = \delta_M^e + \delta_M^p$$

în care  $\delta_M^e$  este deformația elastică ce dispare la încetarea aplicării forței iar  $\delta_M^p$  este deformația plastică ce rămâne și după descărcare.

În punctul 5 se înregistrează forța maximă notată cu  $F_{max}$ .

- 5-6 - este zona de cedare. În jurul punctului 5 de pe curba caracteristică apare fenomenul de gâtuire al epruvetei. Zona în care apare gâtuirea este cea în care epruveta se va rupe. După apariția gâtuirii epruveta suferă o deformație plastică locală puternică. Secțiunea micșorându-se, tensiunile devin din ce în ce mai mari și vor duce în cele din urmă la ruperea epruvetei - punctul 6.

## 2.5. Determinarea caracteristicilor mecanice convenționale

Cu ajutorul curbei caracteristice convenționale se pot determina câteva mărimi ce caracterizează comportarea materialului încercat în condiții de exploatare. Astfel, panta dreptei 0-1 reprezintă *modulul de elasticitate convențional* al materialului:  $E = \tan \alpha$ .

Tensiunea corespunzătoare punctului 1 se numește *limită de proporționalitate*:  $\sigma_p = F_p/S_0$  în care  $S_0$  este aria secțiunii inițiale:  $S_0 = (\pi \cdot d_0^2)/4$ .

Tensiunea corespunzătoare punctului 2 poartă numele de *limită de elasticitate*:  $\sigma_e = F_e/S_0$ .

Tensiunea corespunzătoare punctului 3 se numește *limită de curgere*:  $\sigma_c = F_c/S_0$ .

Tensiunea corespunzătoare punctului 5 se numește *rezistență la rupere prin tracțiune*:  $\sigma_r = \sigma_{max} = F_{max}/S_0$ .

Dacă se marchează pe epruvetă două repere aflate inițial la distanța  $l_0$ , după rupere se măsoară distanța  $l_u$  între aceleași repere prin alăturarea celor două părți desprinse, figura 2.4a. Se poate determina, în aceste condiții, alungirea la rupere ca fiind:

$$A = \frac{l_u - l_0}{l_0} \cdot 100 \quad [\%]$$



Dacă se măsoară diametrul  $d_u$  al epruvetei în zona ruperii, se poate determina gătuirea la rupere:

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100 \quad [\%] \text{ în care } S_u = (\pi \cdot d_u^2)/4.$$

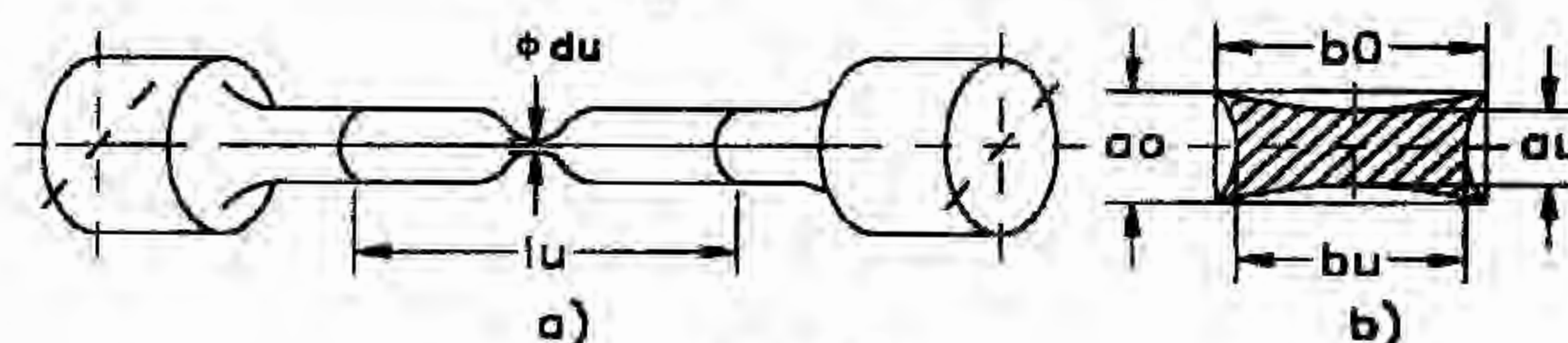


Fig. 2.4

Dacă epruveta are secțiunea inițială dreptunghiulară, secțiunea finală arată ca în figura 2.4b, aria secțiunii ultime fiind:  $S_u = a_u b_u$

Forma și aspectul epruvetei după rupere reflectă preponderența proprietății de ductilitate sau de fragilitate a materialului. În cazul unor materiale fragile, epruvetele supuse la tracțiune se rup brusc, fără deformații plastice semnificative iar suprafața de separație este normală la axa geometrică a respectivei epruvete, figura 2.5a. Secțiunea de rupere are un aspect strălucitor cristalin. Epruvetele confecționate din materiale preponderent ductile, capătă o gătuire pronunțată iar în momentul ruperii secțiunea de rupere poate ajunge la valori foarte mici, figura 2.5b. La materialele cu ductilitate medie apare gătuirea în zona de tensiune maximă care se stabilește de obicei acolo unde există defecte de structură inițiale. Fisura amorsată de la nivelul defectului critic se propagă pe direcția tensiunii tangențiale maxime, adică după plane aflate sub unghiuri de  $45^\circ$  față de direcția de solicitare, figura 2.5c. Aspectul suprafeței este de tip "con - cupă". Gătuirea epruvetei este precedată de lunecări semnificative în rețeaua cristalină. Astfel, pe suprafața materialului apar stricționări înclinate la  $45^\circ$  față de direcția de solicitare, figura 2.5d.

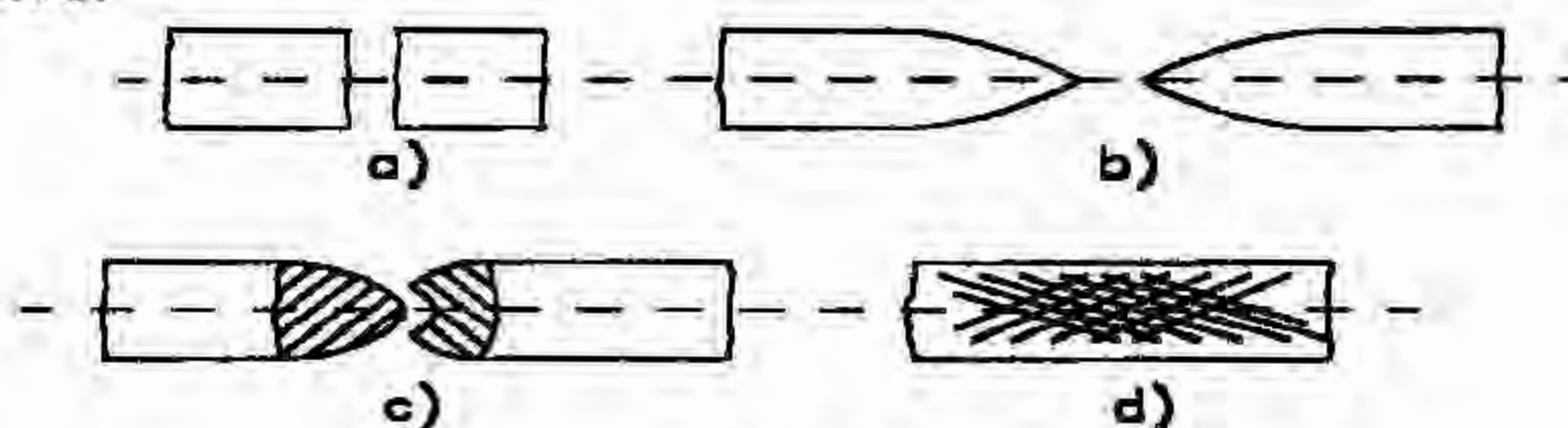


Fig. 2.5.



## 2.6. Încercarea la compresiune

Încercarea de compresiune se realizează așezând epruveta între platanele unei mașini universale de încercat. La încercarea de compresiune nu mai este necesară îngroșarea capetelor epruvetei în vederea prinderii. În schimb, apar două fenomene caracteristice acestei încercări. Este vorba în primul rând de fenomenul de flambaj (pierderea stabilității) care apare la compresiunea barelor lungi:  $l > 5d$  în care  $l$  este lungimea barei iar  $d$  este dimensiunea secțiunii transversale, figura 2.6a. În al doilea rând, datorită frecărilor dintre capetele epruvetei și platanele mașinii de încercat, apare fenomenul de "butoiere", figura 2.6b.

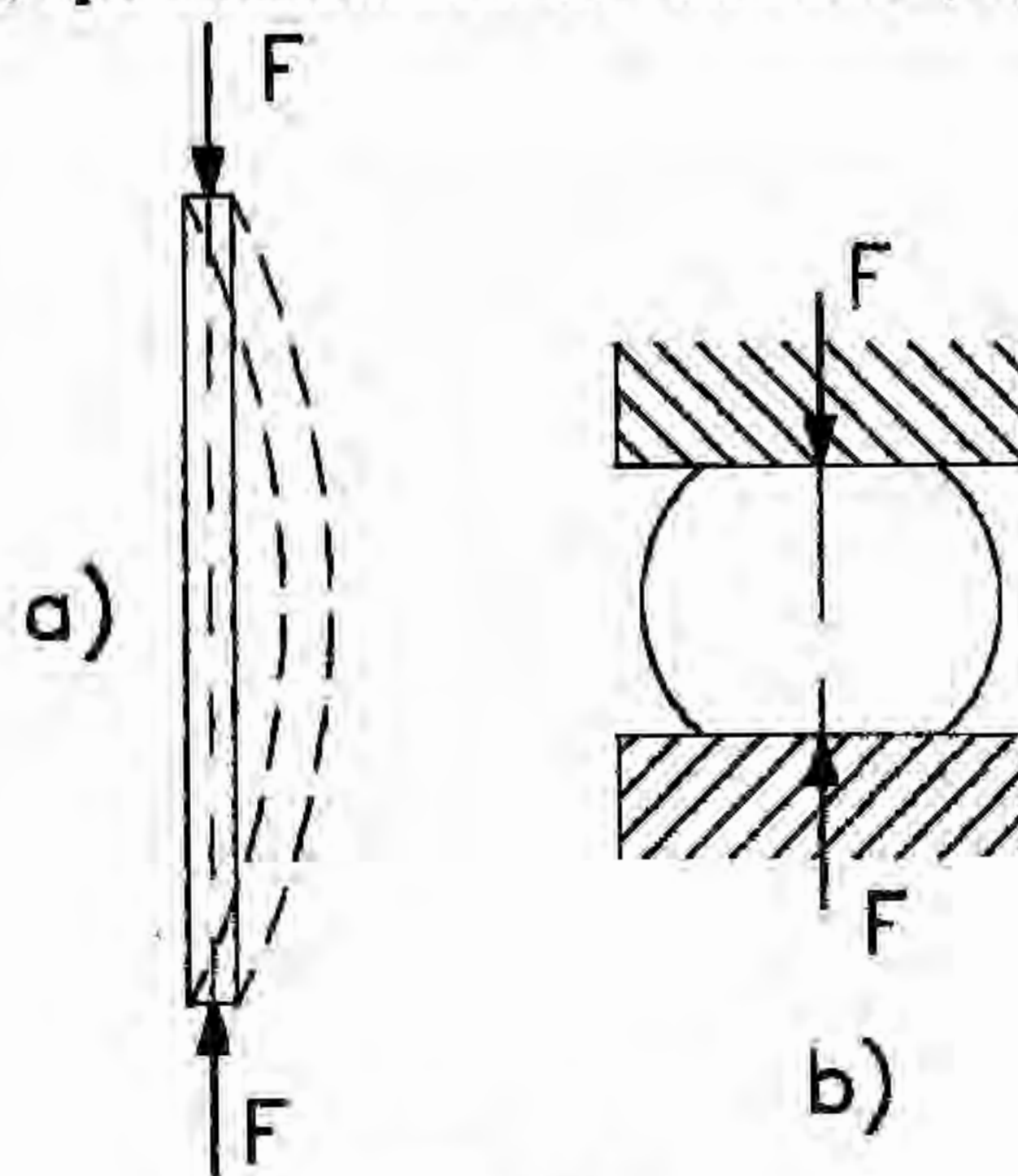


Fig. 2.6

Pentru evitarea acestui fenomen platanele se pot lubrifia cu parafină. Pentru epruvetele executate din materiale fragile trebuie luate precauții suplimentare în vederea evitării accidentelor provocate de ruperea bruscă și desprinderea așchiilor. Materialele tenace pot suporta deformări plastice mari fără să se ajungă la distrugerea acestora. Alura curbei caracteristice obținută la încercarea de compresiune este analoagă cu cea obținută la tracțiune. Sunt unele materiale (în special cele preponderent fragile) la care diferă atât rezistența la rupere cât și modulul de elasticitate longitudinal obținute pe baza încercărilor de tracțiune și de compresiune.



## 2.7. Incercarea la forfecare

Incercarea la forfecare se efectuează pe epruvete de formă cilindrică sau plată. Scopul principal al acestei încercări este de a determina *rezistența la forfecare* a materialelor dată de relația generală:  $R_f = F/S$  în care  $F$  este forța la care se produce ruperea prin forfecare iar  $S$  este aria secțiunii inițiale ce urmează a fi supusă forfecării. Se folosește, pentru încercarea de forfecare, o mașină universală de încercat iar solicitarea respectivă este realizată prin intermediul unui dispozitiv special conceput în acest sens. Schema de solicitare și dispozitivul de încercat, pe baza căruia se realizează încărcarea cu sarcini în vederea forfecării, trebuie astfel alese încât să asigure o solicitare de forfecare pură. Se constată din figura 2.7 că în secțiunea supusă forfecării nu se introduc momente încovoietoare.

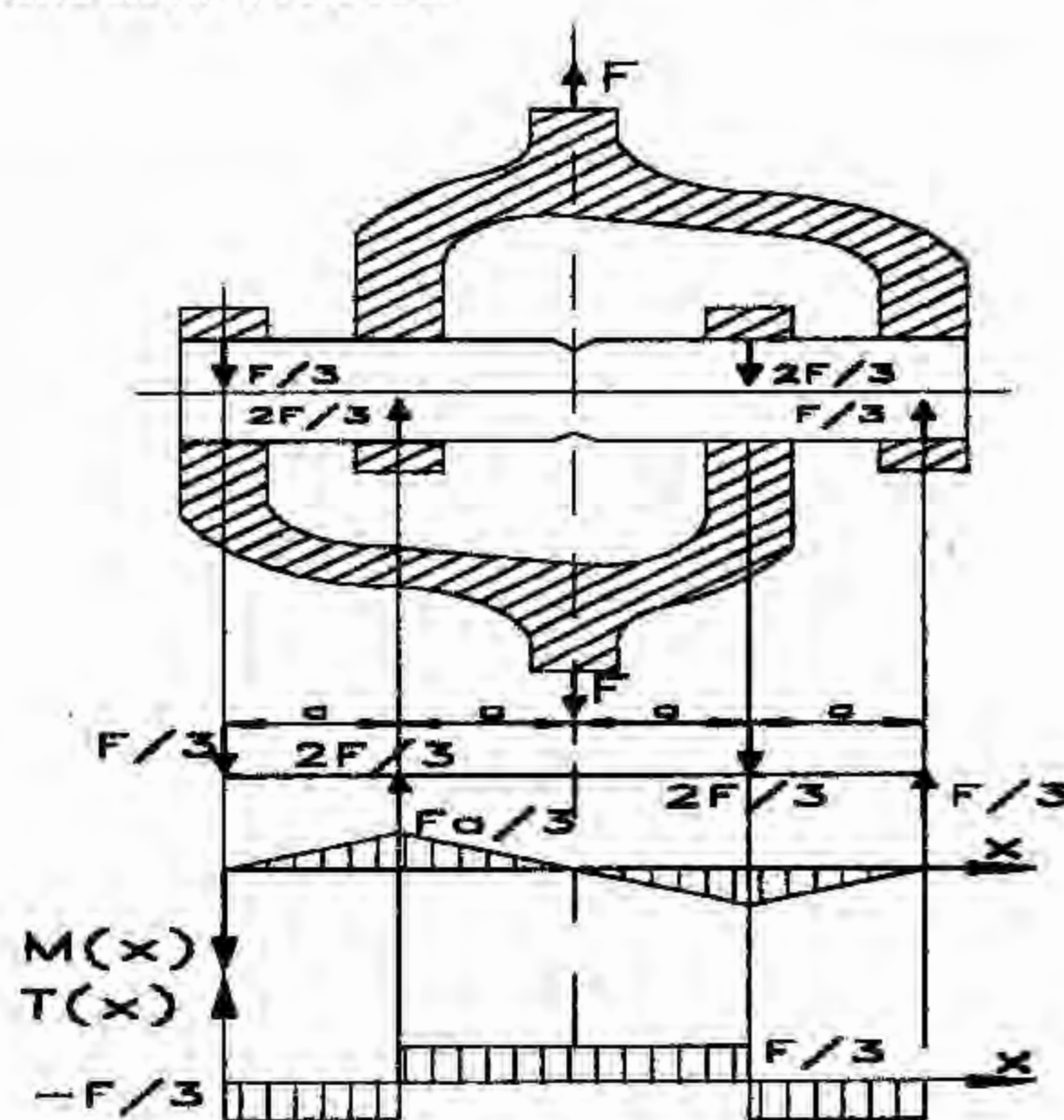


Fig. 2.7

Secțiunea solicitată la forfecare pură este slăbită prin executarea unei creștături pe direcția solicitării. Pornind de la curba caracteristică materialului solicitat la forfecare, se poate trasa curba caracteristică convențională în coordonate  $\tau - \gamma$ . Panta dreptei în origine definește modulul de elasticitate transversal  $G$ :  $\tan \alpha = G$ .



## 2.8. Incercarea la răsucire

Incercarea la răsucire se efectuează asupra epruvetelor de formă cilindrică cu secțiunea plină sau inelară. Capetele epruvetelor sunt îngroșate și de secțiune pătrată pentru a avea posibilitatea aplicării momentului de răsucire, figura 2.8.

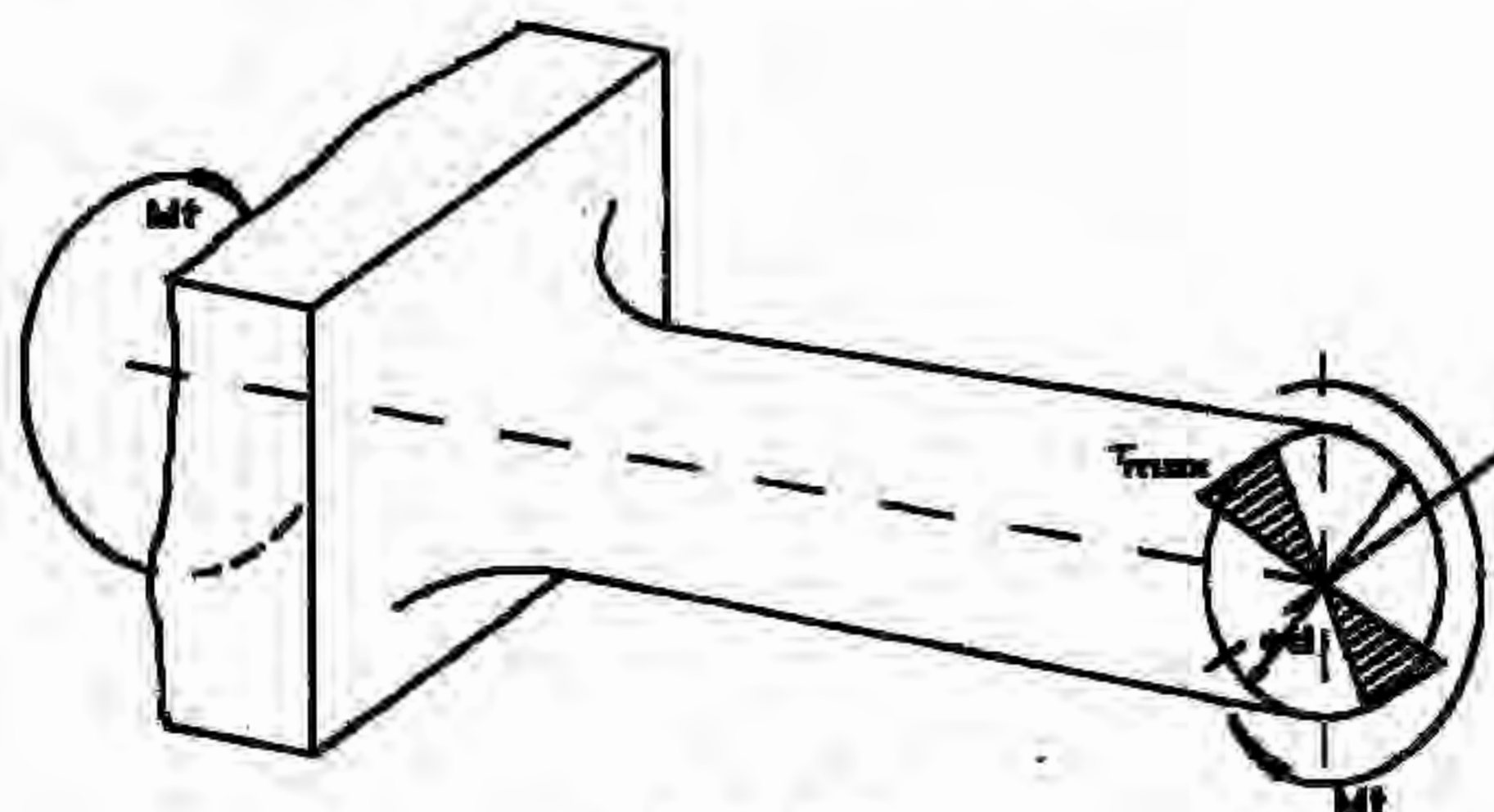


Fig. 2.8

Incercarea la răsucire se efectuează, fie pe mașini universale de încercat folosind dispozitive ce realizează schema de încărcare corespunzătoare, fie pe mașini specializate.

Ca urmare a solicitării cu două momente de răsucire egale și având sensuri contrarii, în secțiunile transversale ale epruvetei se introduc tensiuni tangențiale. Acestea au o variație liniară în raport cu distanța față de centrul de greutate al secțiunii. Rezistența la răsucire este dată de relația:

$$R_T = (12 \cdot M_t) / (\pi \cdot d^3)$$

Alura curbei  $\tau - \gamma$  este asemănătoare cu cea obținută prin încercarea de forfecare.

Dacă epruveta este de formă tubulară și executată dintr-un material tenace, există posibilitatea ca aceasta să-și piardă stabilitatea în timpul încercării fără a se ajunge în mod obligatoriu la rupere. La încercarea de răsucire, ruperea materialelor tenace are loc după o suprafață perpendiculară pe axa geometrică iar ruperea materialelor fragile are loc după o suprafață elicoidală, figura 2.9.



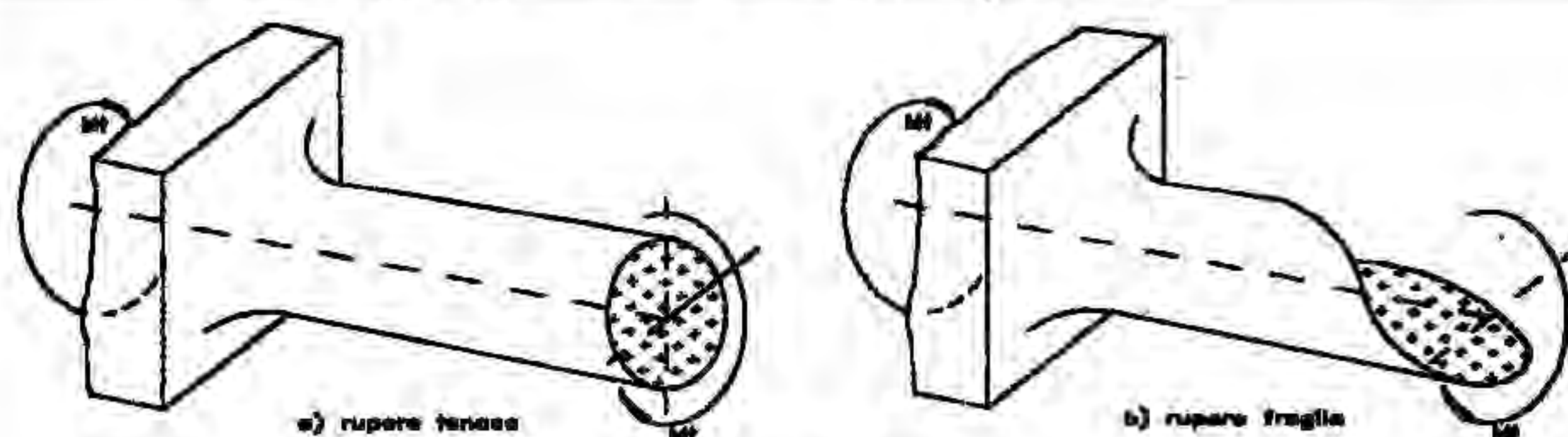


Fig. 2.9

## 2.9. Incercarea la încovoiere

Incercarea la încovoiere se realizează pe mașini universale de încercat cu ajutorul unor dispozitive special concepute în vederea realizării schemei de solicitare corespunzătoare. Dispozitivele folosite pentru această încercare, figura 2.10a, trebuie să conțină:

- două reazeme cilindrice așezate pe una din traversele mașinii de încercat;
- un dorn de încărcare tot de formă cilindrică fixat pe cealaltă traversă a mașinii.

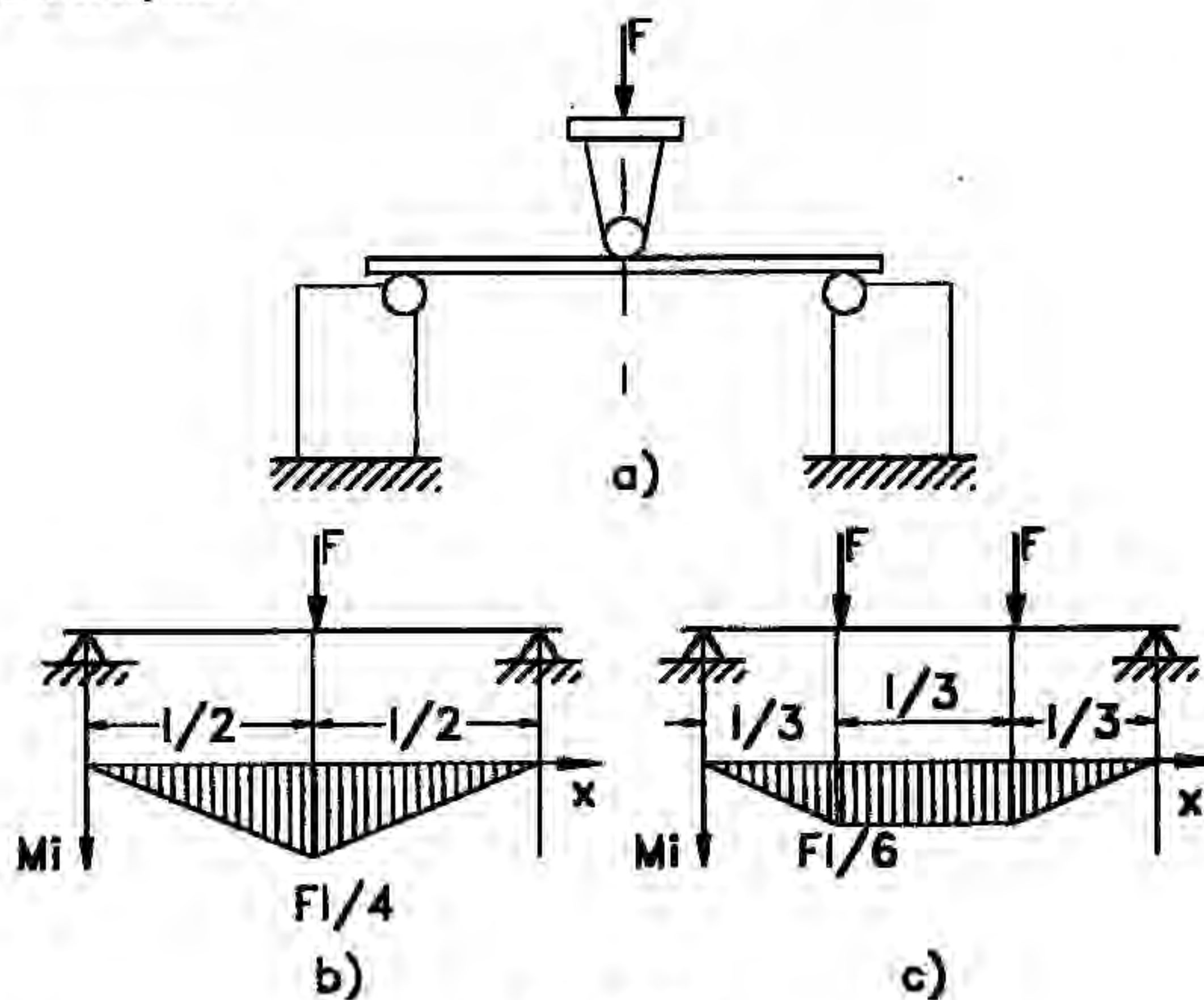


Fig. 2.10



Razele secțiunilor transversale ale reazemelor și dornului trebuie să fie relativ mari pentru a nu se introduce concentratori de tensiune. Schema de încărcare se poate realiza prin trei sau patru puncte de solicitare exterioară în care se includ și reacțiunile din reazeme, figura 2.10, b și c.

Avantajul schemei de încărcare din figura 2.10c este acela că, se realizează o uniformitate a încărcării între punctele de aplicație ale forțelor exterioare. Pe înălțimea secțiunii transversale tensiunea variază liniar având valoarea zero pe axa geometrică a epruvetei. Rezistența la încovoiere este dată de relația:

$$R_i = M_{\max}/W_z$$

în care  $M_{\max}$  este momentul încovoiitor maxim, ca efort interior introdus în secțiunea epruvetei iar  $W_z$  se numește modul de rezistență axial (față de axa z) ce depinde de forma și dimensiunile secțiunii transversale a epruvetei.

Încercarea la încovoiere se aplică în special materialelor care au un comportament preponderent fragil. Pentru materialele tenace există posibilitatea ca epruveta să nu se rupă prin solicitarea de încovoiere în timpul căreia fibrele materialului se dispun sub forma unor arce de cerc. Dacă momentul încovoiitor maxim depășește o anumită valoare, epruveta capătă deformări plastice din ce în ce mai accentuate odată cu creșterea solicitării exterioare. Acest fenomen poartă numele de *îndoire* și poate reprezenta o încercare tehnologică în vederea stabilirii anumitor parametri de plasticitate ai materialului, figura 2.11.

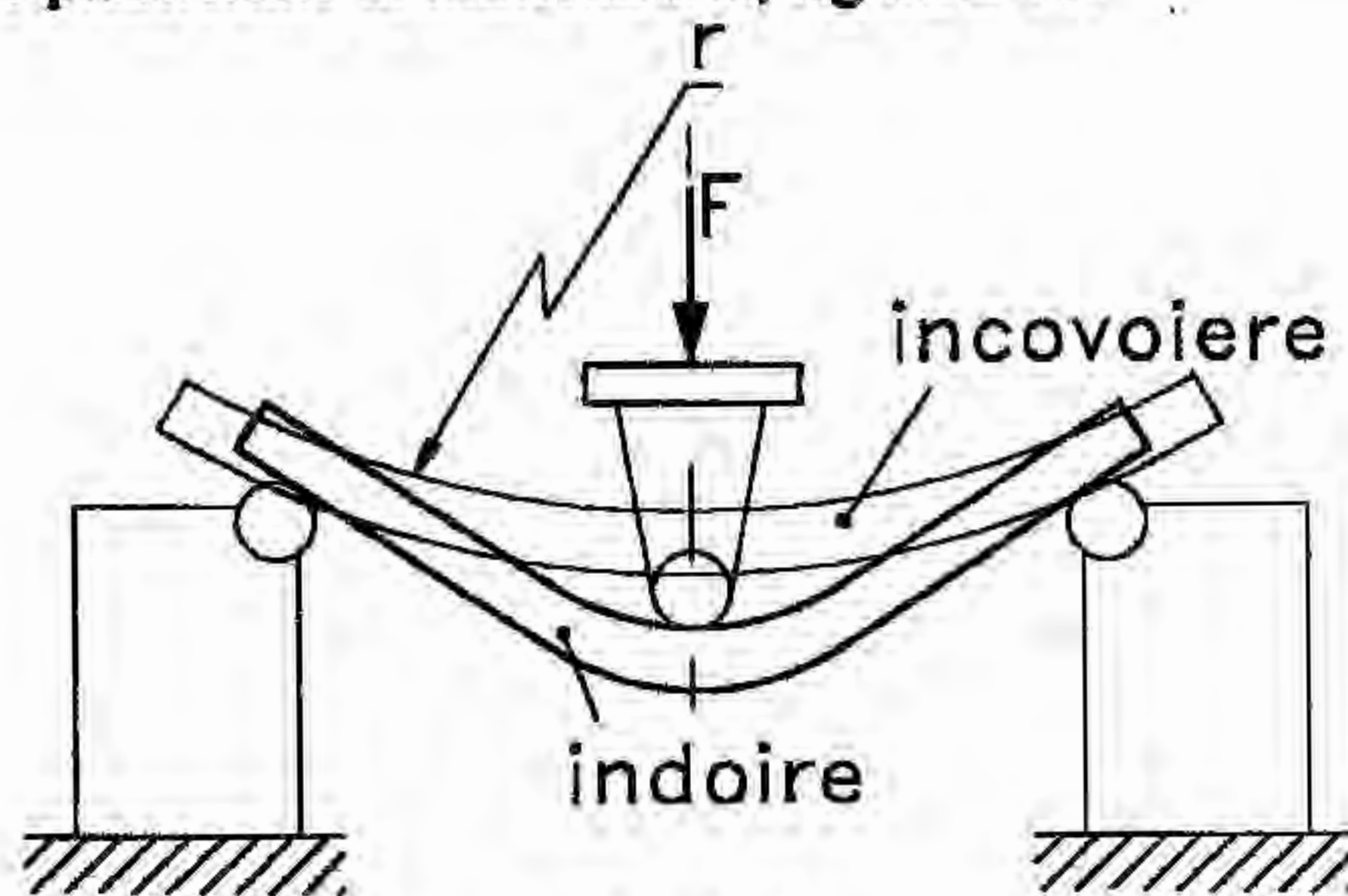


Fig. 2.11



## 2.10. Factori de influență asupra proprietăților mecanice și elastice ale materialelor

Datele experimentale arată că proprietățile mecanice și elastice ale materialelor depind de mai mulți factori. Aceștia pot fi:

- factori aparenti: tehnologia de fabricație, forma și dimensiunile probei, viteza de încărcare, influența mediului de încercare;
- factori reali: temperatura, umiditatea, timpul, etc.

### *Influența vitezei de încărcare*

Materialele tenace manifestă opoziție față de deformație. Astfel, mărirea vitezei de încărcare conduce, pentru aceste materiale, la o creștere a limitei de curgere. La materialele fragile se constată o scădere a caracteristicilor mecanice cu creșterea vitezei de încărcare. Pentru a avea o uniformitate a determinărilor încercările se efectuează în condiții statice, respectiv pentru:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \cong 0,01 \text{ min}^{-1}$$

Această viteză de încercare trebuie menținută constantă pe tot parcursul încercării. Asupra curbei caracteristice a unui oțel tenace, influența vitezei de încărcare este prezentată în figura 2.12.

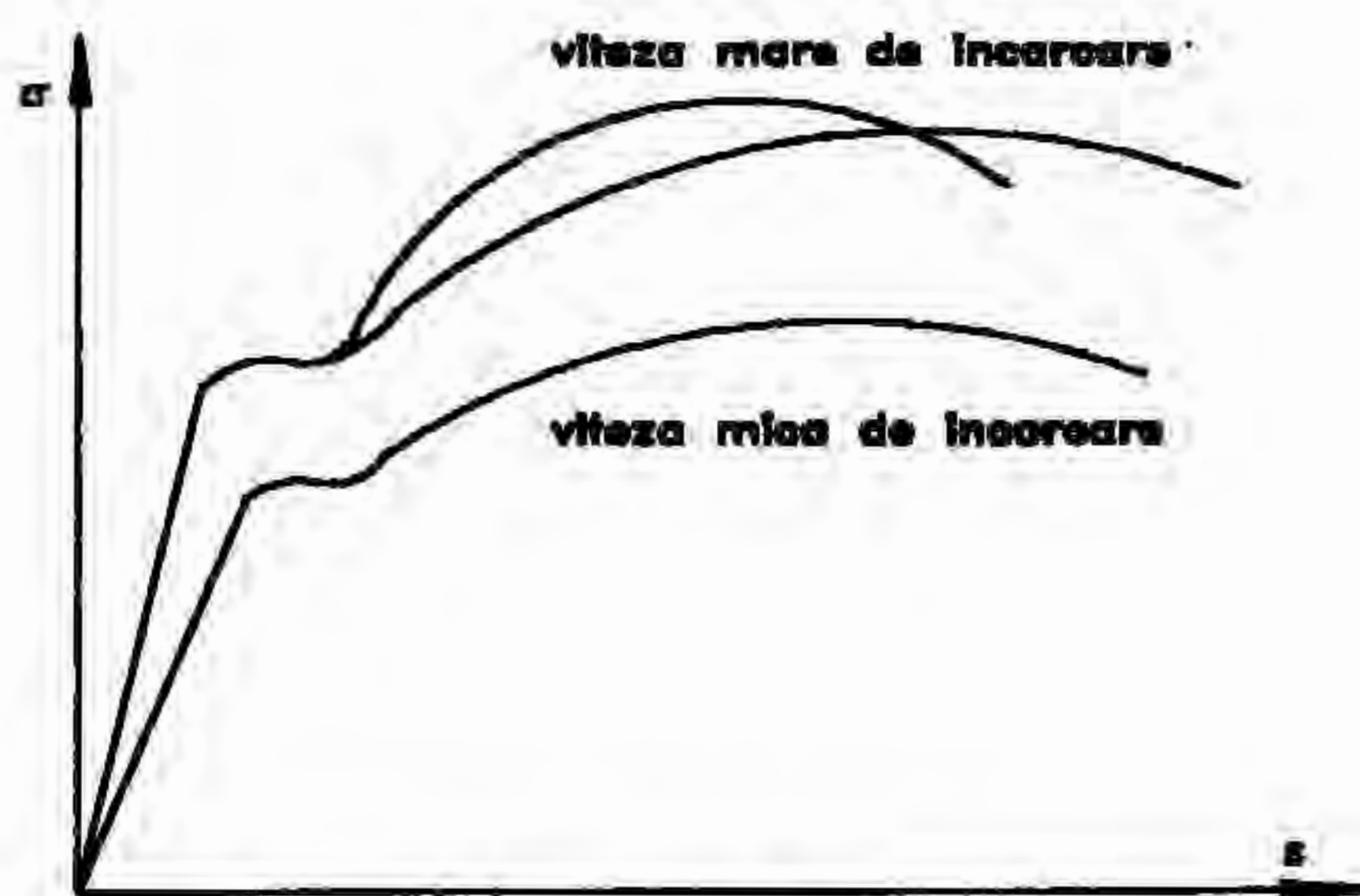


Fig. 2.12

Se observă o limită de curgere și una de rupere mai mari în cazul solicitării unui material tenace solicitat cu o viteză de încărcare mai mare.



### Influența temperaturii

Variația temperaturii influențează în mod sensibil caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor. În mod obișnuit, încercările mecanice se efectuează la temperatura mediului ambiant. În schimb, piesele unor subansamble cum ar fi mașinile termice sau cele frigorifice, lucrează la temperaturi diferite de cele corespunzătoare mediului ambiant. În figura 2.13 se prezintă variația caracteristicilor mecanice și elastice cu temperatura, pentru un oțel tenace.

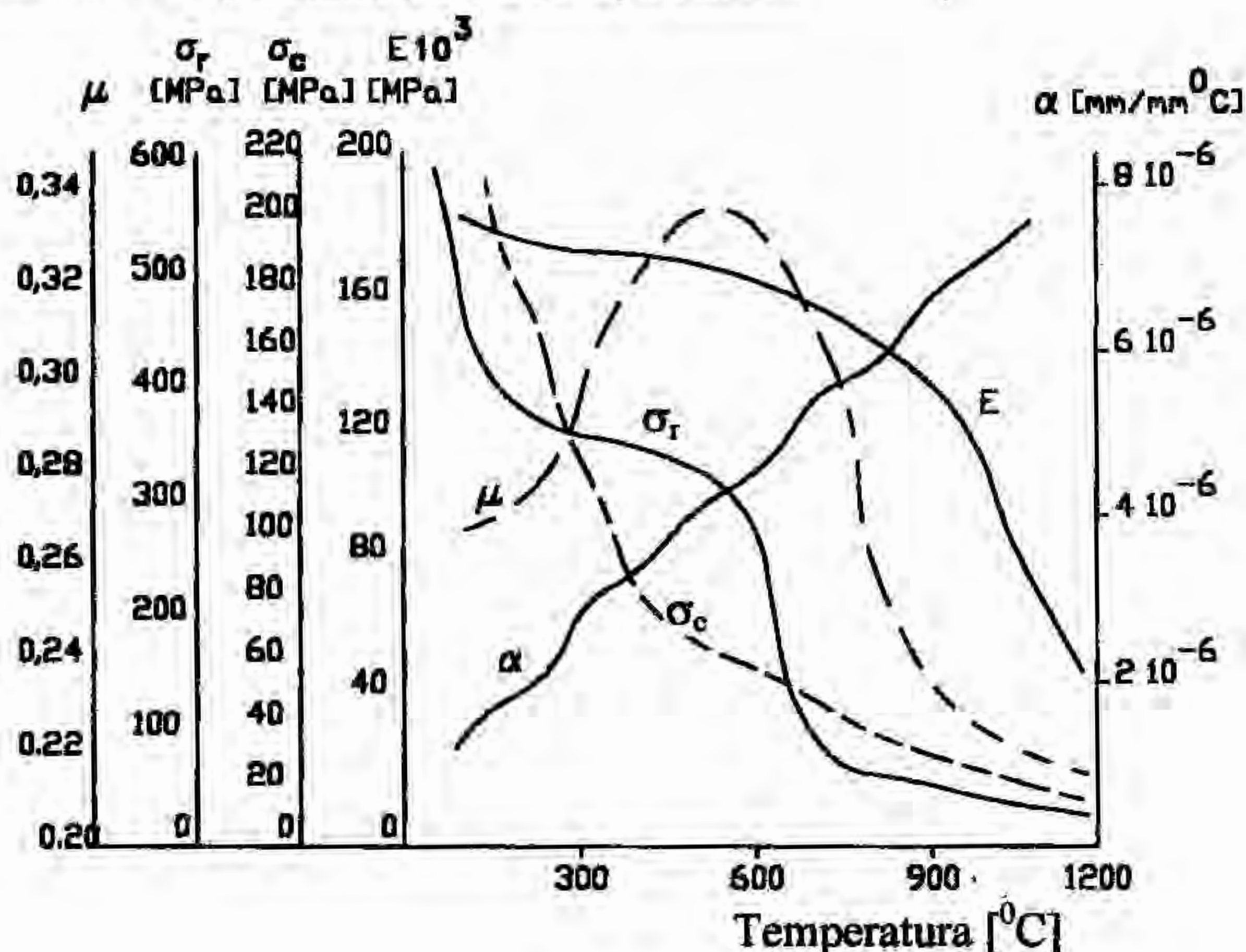


Fig. 2.13

Se observă o scădere lentă dar continuă a tensiunii de curgere cu creșterea temperaturii. Modulul de elasticitate scade continuu cu temperatura dar aceasta scădere este mai accentuată la temperaturi mai mari. Tensiunea de rupere scade lent cu creșterea temperaturii până la valoarea acesteia de 600°C după care scăderea este mai accentuată.

La temperaturi scăzute, cele mai multe materiale tenace se fragilizează și sunt cazuri în care tensiunile de rupere pot crește cu scăderea temperaturii.



*Influența unor factori tehnologici*

Elaborarea unui material din care se vor confecționa elemente de construcții, piese, se poate realiza prin mai multe procedee: turnare, forjare, laminare, etc.. Pentru aceeași compoziție chimică, caracteristicile mecanice și elastice ale unui material depind și de prelucrările ulterioare suferite în vederea aducerii la forma finală. Procedeele tehnologice primare de obținere determină, în primul rând, finețea structurii materialului. Astfel, materialele obținute prin presare sau sinterizare prezintă o structură cu multe defecte înglobate. Evident că, în acest caz, probabilitatea de propagare a unei fisuri de la nivelul defectului critic este mai mare. Pentru un oțel tenace, determinându-se tensiunea de curgere la un număr mare de epruvete provenite din șarje diferite, s-a obținut curba din figura 2.14.

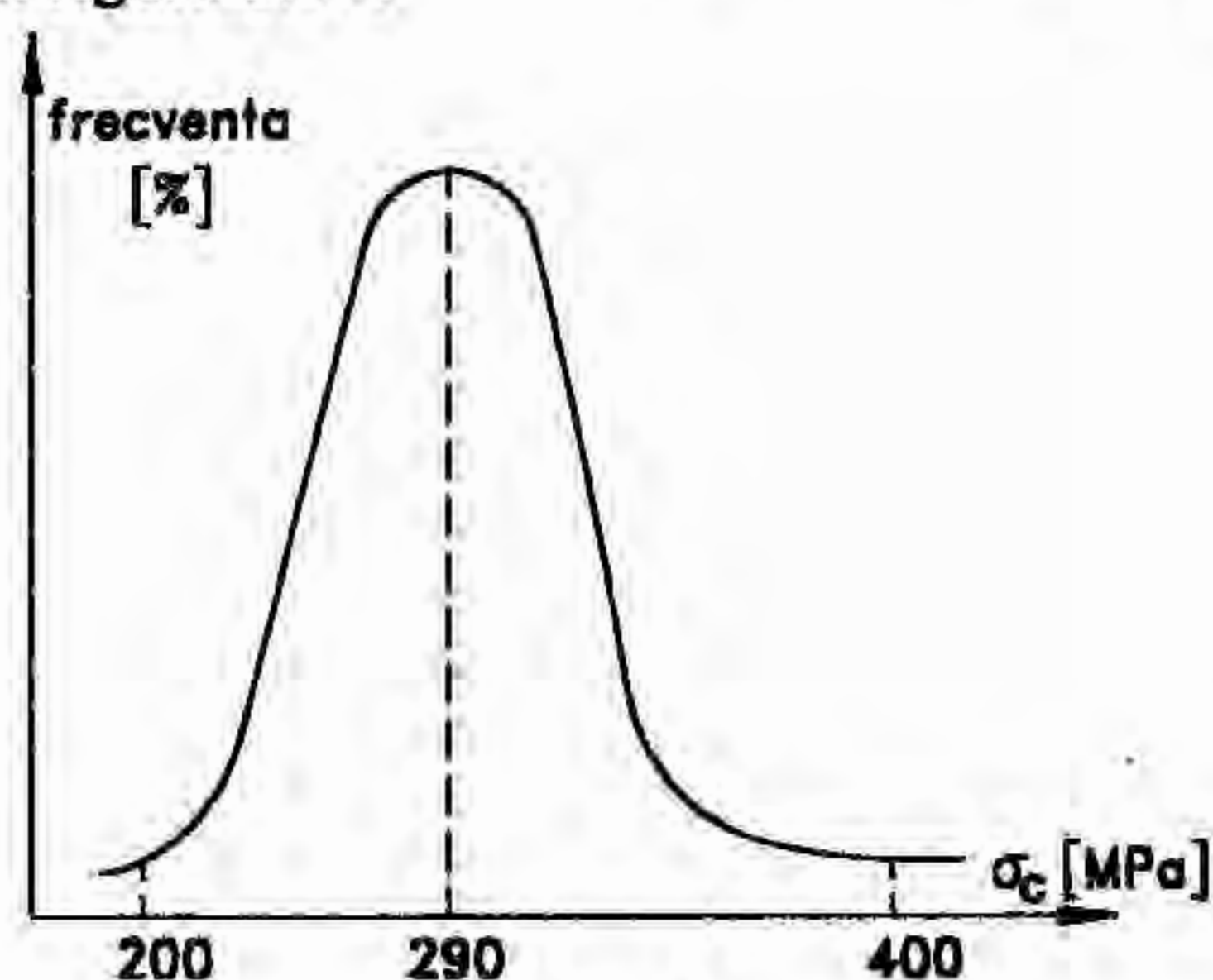


Fig. 2.14

Curbele de distribuție, trasate pentru fiecare material, reflectă gradul de omogenitate structurală a materialului respectiv.

Prin laminare materialele devin anizotrope. Epruveta cu axa geometrică orientată pe direcția laminării are rezistența la rupere mai ridicată decât epruveta extrasă perpendicular pe direcția de laminare. Orice procedeu tehnologic care produce o deformare plastică la rece ridică limita de curgere a materialului dar micșorează alungirea până la rupere (materialul se fragilizează). Prelucrările mecanice prin așchiere sau tratamente termice au, de asemenea, o influență semnificativă asupra caracteristicilor mecanice și elastice.



### *Influența dimensiunilor și geometriei epruvetei*

Pentru materialele cu o structură compactă, bine definită și fără defecte majore, dimensiunile epruvetei nu influențează în mod semnificativ caracteristicile mecanice și elastice. Pentru materialele cu defecte de structură, cu cât dimensiunile epruvetei sunt mai mari cu atât numărul defectelor este mai mare. În acest caz, crește probabilitatea ca o fisură să se poată propaga de la nivelul unui astfel de defect, la tensiuni mai mici decât în cazul unei epruvete cu dimensiuni mai reduse. Influența dimensiunilor dar și a formei epruvetelor este evidențiată în relația tensiunii de rupere pentru un material considerat a avea defecte de structură:

$$\sigma_r = \frac{K_{Ic}}{y \cdot \sqrt{\pi a_c}}$$

în care: -  $K_{Ic}$  reprezintă tenacitatea la fisurare măsurată în  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ;

-  $y$  este un factor geometric care ține seama de geometria și dimensiunile probei utilizate pentru determinarea  $K_{Ic}$ ;

-  $a_c$  este dimensiunea defectului critic.

Pentru epruvetele la care sunt necesare capete de prindere îngroșate, trebuiesc prevăzute raze mari de racordare între aceste capete și porțiunea calibrată. Forma epruvetelor confecționate din materiale fragile poate deveni complicată datorită necesității de a elimina posibilitatea sfărâmării acestora între bacurile mașinii de încercat.

### *Influența timpului*

Piese confecționate din anumite materiale prezintă variații lente în timp a deformațiilor sau tensiunilor. Acest fenomen poartă denumirea de *fluaj*, respectiv *relaxare*. Se poate stabili o relație de forma:

$$\sigma = f(\epsilon, t)$$

Acest fenomen este cu atât mai pronunțat cu cât sarcina este mai mare și cu cât temperatura este mai ridicată. Încercările efectuate pentru punerea în evidență a acestui fenomen privesc două aspecte:

- deformația în timp sub sarcină constantă (fluaj) :  $\epsilon = f(t)$ . În acest caz, deși sarcina de încărcare și temperatura sunt constante, apar deformații în sensul sarcinii de încărcare, figura 2.15a.

- relaxarea, în cadrul căreia se mențin constante deformația și temperatura și are loc o variație în timp a tensiunii, figura 2.15b.



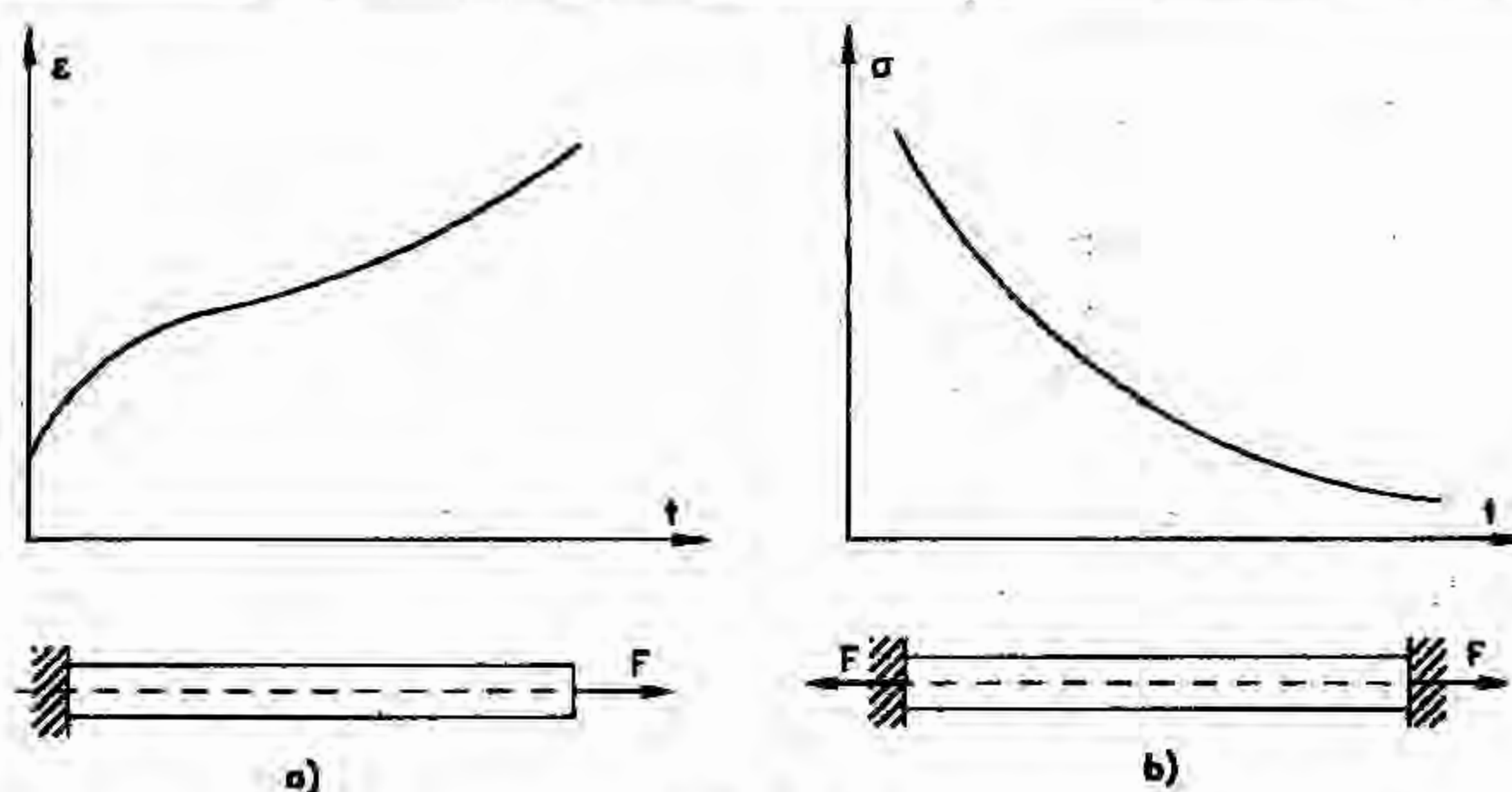


Fig. 2.15

### *Influența concentratorilor de tensiune*

Piese, componente ale structurilor, prezintă în multe cazuri variații bruște ale secțiunii transversale. În regiunile de trecere se produc salturi ale tensiunilor. În cazul unei platbande ce are practicată o gaură are loc variația de tensiune prezentată în figura 2.16.

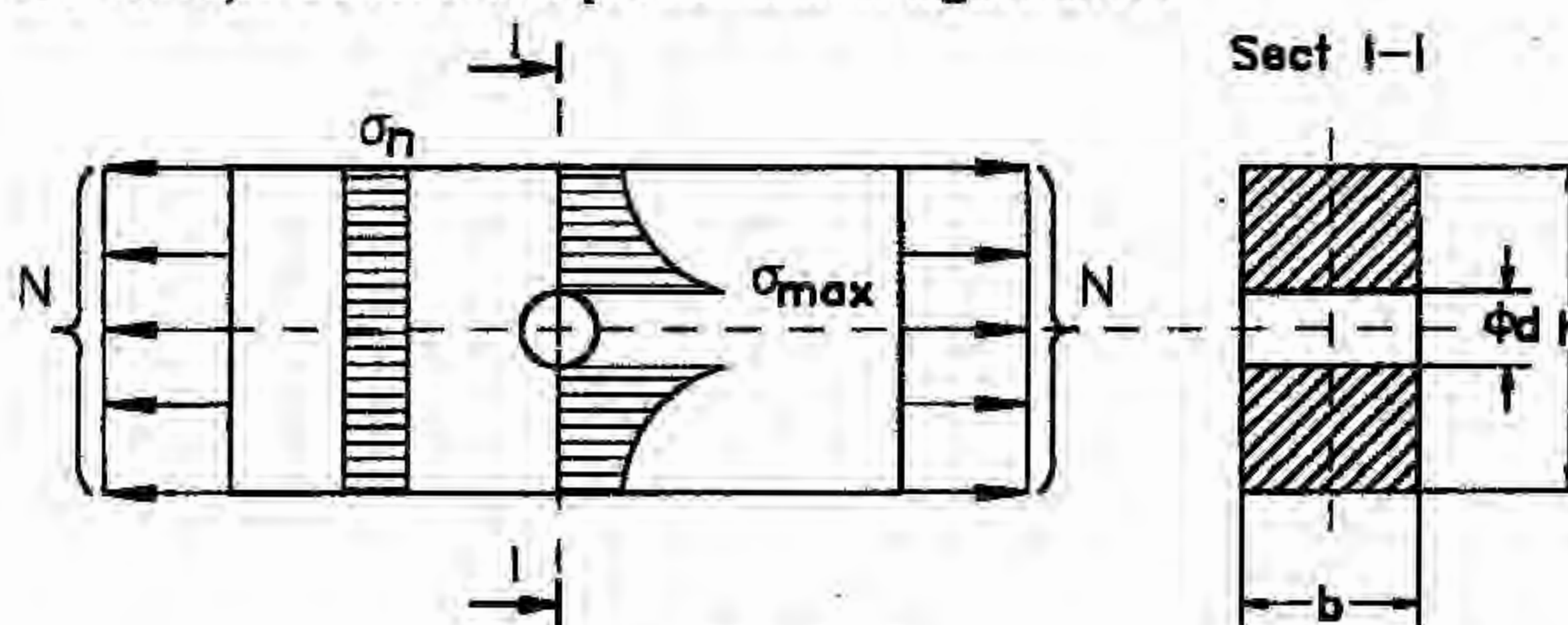


Fig. 2.16

Pentru secțiuni aflate la o anumită distanță de gaură tensiunea (nominală) introdusă este:

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{N}{A} = \frac{N}{b \cdot h}$$

Tensiunea maximă ce apare în imediata vecinătate a găurii are valoarea:

$$\sigma_{\text{max}} \approx 3 \cdot \sigma_{\text{nom}}$$



Asemenea salturi ale tensiunii se produc la orice variație bruscă a secțiunii transversale. Mărimea care ne arată importanța acestor salturi se numește coeficient de concentrare a tensiunii și este dat de relația:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

Valoarea acestui coeficient depinde de configurația și dimensiunile concentratorului. Prezența acestor concentratori are o importanță deosebită în cazul solicitărilor variabile. De obicei, în cazul acestor solicitări, ruperea se produce datorită propagării microfisurilor de la nivelul acestor concentratori.

### 2.11. Ipoteze simplificatoare în Rezistența materialelor

Scopul Rezistenței materialelor este acela de a determina tensiunile și deformațiile produse într-un corp solid ca urmare a solicitării la care este supus din exterior și, pe această bază, să se poată dimensiona, calcula sarcina capabilă sau verifica respectivul corp. Dacă s-ar considera condițiile reale de încărcare și de material, relațiile de calcul rezultate ar deveni complicate. Ca urmare, pentru ușurința calculului ingineresc, se recurge la unele ipoteze simplificatoare care privesc, în special, continuitatea, omogenitatea și izotropia materialului. Din experiență se constată că, simplificările introduse pe baza considerării acestor ipoteze aproximează destul de bine condițiile reale iar erorile de calcul sunt relativ mici.

Cele mai importante ipoteze simplificatoare folosite în Rezistența materialelor sunt descrise în cele ce urmează.

1. *Ipoteza mediului continuu.* Pe baza acestei ipoteze se consideră că mediul studiat este continuu la scară microscopică și ocupă întreg spațiul delimitat de volumul său. Adoptarea acestei ipoteze permite utilizarea calculului infinitezimal al funcțiilor continue. Acest calcul este mai ușor de efectuat față de cel în cadrul căruia s-ar considera structura reală, discontinuă.

2. *Ipoteza omogenității.* În cadrul acestei ipoteze se consideră că mediul studiat are aceleași proprietăți fizico-chimice în oricare din punctele sale.

---



3. *Ipoteza izotropiei.* Se admite că materialul are aceleași posibilități de deformare elastică și aceleași caracteristici mecanice pe orice direcție din jurul oricărui punct al său.

4. *Ipoteza identității proprietăților.* Pe baza acestei ipoteze se consideră că elementul infinit mic are aceleași proprietăți mecanice cu cele ale corpului considerat ca întreg. Considerând această ipoteză se poate studia elementul infinit mic iar relațiile de calcul regăsite se pot extrapola corpului în întregul său.

5. *Ipoteza elasticității perfecte.* Se consideră că, dacă tensiunile introduse de solicitarea exterioară nu depășesc anumite valori, la îndepărtarea sarcinilor exterioare corpul își recapătă forma și dimensiunile inițiale.

6. *Ipoteza deformațiilor mici.* În majoritatea cazurilor de solicitare, deformațiile elastice produse sunt relativ mici în comparație cu dimensiunile corpului. Considerând această ipoteză, relațiile de calcul se stabilesc considerând forma și dimensiunile corpului de dinaintea deformării datorate solicitării exterioare.

7. *Ipoteza proporționalității între tensiuni și deformații.* Atunci când solicitarea se păstrează în limitele în care să producă numai o deformare elastică se consideră că, tensiunea introdusă într-un punct este legată de deformația specifică din același punct prin relația  $\sigma = \varepsilon \cdot E$  care exprimă legea lui Hooke. O consecință importantă a acestei ipoteze este faptul că se poate aplica principiul suprapunerii efectelor pentru rezolvarea anumitor probleme.

8. *Principiul lui Saint - Venant.* Acest principiu presupune că, la distanțe relativ mari de locul de aplicare a sarcinilor exterioare, valoarea și distribuția tensiunilor și a deformațiilor nu depinde de modul efectiv de așezare a sarcinilor pe locul respectiv. În imediata vecinătate a punctului de aplicație a sarcinii există o stare locală de tensiune și deformație foarte greu de determinat. La o anumită distanță însă, starea de solicitare și deformație depinde doar de mărimea solicitării și a distanței respective.

9. *Ipoteza stării naturale.* Se consideră că, în corpurile solide nu există tensiuni în lipsa sarcinilor. În realitate, există atât tensiuni cât și deformații în corpul nesolicitat determinate de anumite cauze. Aceste tensiuni și deformații se numesc remanente și sunt, de obicei, relativ mici în raport cu cele introduse ca urmare a solicitării.

---



10. *Ipoteza lui Bernoulli*. Această ipoteză consideră că, o secțiune plană și perpendiculară pe axa geometrică a unei bare nesolicitate, rămâne plană și perpendiculară pe axă și după sollicitare.

## 2.12. Metode de rezolvare a problemelor în Rezistența materialelor

Calculule de rezistență se efectuează în vederea asigurării siguranței în exploatare a elementelor de construcții, pieselor, etc. Problemele care apar în derularea acestor calcule sunt legate, fie de proiectarea componentelor, fie de verificarea acestora. Există două metode de rezolvare a acestor probleme:

- metoda rezistențelor admisibile;
- metoda coeficienților de siguranță.

*Metoda rezistențelor admisibile* se bazează pe ideea că, tensiunile care se stabilesc într-o piesă nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă determinată pentru materialul respectiv:  $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$ .

Tensiunea admisibilă se definește ca fiind tensiunea maximă acceptată a fi preluată de către un material. Majoritatea pieselor, elementelor de construcție, etc., lucrează în domeniul elastic, deci, odată cu îndepărtarea sarcinii, revin la forma și dimensiunile inițiale. Având în vedere acest lucru, se constată că, tensiunea admisibilă nu poate depăși limita de curgere a materialului respectiv. Pe de altă parte, pot apărea unele erori de calcul sau de modelare a cazului real reflectate prin: posibila depășire a sarcinilor de lucru, simplificarea schemei de lucru, proprietăți mecanice supraevaluate, etc.. În aceste condiții, față de limita de curgere se introduce un coeficient de siguranță și astfel va rezulta:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}$$

sau în funcție de tensiunea de rupere:  $\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c}$  pentru care avem, evident,  $c > c^*$ .

Valoarea coeficientului de siguranță se alege în funcție de mai mulți factori:

- natura materialului - ductil sau fragil;



- importanța piesei respective în ansamblul din care face parte;
- dacă distrugerea piesei proiectate poate duce la accidente grave;
- posibilități de uzură în timp sub acțiunea sarcinilor sau a mediului;
- precizia modelării.

În funcție de natura materialului, valorile pentru coeficientul de siguranță pot fi:

- $2 \div 3$  pentru materiale tenace;
- $3 \div 5$  pentru materiale preponderent fragile;
- $4 \div 10$  pentru materiale cu fragilitate mare.

*Metoda coeficienților de siguranță* presupune calculul a câte unui astfel de coeficient pentru fiecare din factorii care îl influențează. Coeficientul de siguranță global se obține ca urmare a aplicării relației:

$$c_g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$$

Fiecare din coeficienții  $c_i$  poate reprezenta influența unui singur factor sau a unui grup de factori. În final trebuie să fie satisfăcută relația  $c_g < c$  în care  $c$  este coeficientul de siguranță impus.

În afară de condițiile de rezistență stabilite mai sus, se mai pot impune:

- condiții de rigiditate ce limitează deplasările maxime efective ( $\delta_{\max}$ ) la anumite valori admisibile ( $\delta_a$ ):  $\delta_{\max} < \delta_a$ . Valorile admisibile ale deplasărilor se stabilesc în vederea asigurării bunei funcționalități a piesei;
- condiții de stabilitate prin care valorile sarcinilor exterioare ( $F_{\max}$ ) se limitează la valori admisibile sau critice ( $F_{cr}$ ) pentru care forma deformată a piesei reprezintă încă, o poziție de echilibru stabil:  $F_{\max} < F_a < F_{cr}/c_s$  în care  $c_s$  reprezintă coeficientul de siguranță la stabilitate;
- condiții tehnico-economice care impun ca dimensiunile și forma constructivă adoptate să conducă la un consum minim de material în condiții de siguranță în exploatare.



## CAPITOLUL 3

### ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

- 
- 3.1. Introducere
  - 3.2. Starea plană de tensiuni
  - 3.3. Forma matriceală pentru calculul tensiunilor și direcțiilor principale în starea plană de tensiuni
  - 3.4. Cercul lui Mohr pentru variația tensiunilor în starea plană
  - 3.5. Starea spațială de tensiuni
  - 3.6. Deformații și deplasări
  - 3.7. Legea generalizată a lui Hooke
  - 3.8. Calculul energiei de deformație
  - 3.9. Relația între modulele de elasticitate  $E$  și  $G$
  - 3.10. Teorii privind stările limită ale materialelor
- 

#### 3.1. Introducere

Așa cum s-a arătat în capitolele anterioare, într-un corp solid deformabil, solicitat din exterior, apar tensiuni. Starea de tensiuni într-un punct al unui corp este perfect determinată dacă se cunosc tensiunile pe trei elemente de suprafață reciproc perpendiculare și care trec prin acest punct, figura 3.1. Modul de notare a indicilor este următorul:

- tensiunile normale pe planele respective au indicele axei cu care acestea sunt paralele;
  - primul indice al unei tensiuni tangențiale este cel al axei perpendiculare pe elementul de suprafață pe care acționează respectiva tensiune tangențială;
-



- al doilea indice al tensiunii tangențiale este cel al axei cu care această tensiune este paralelă.

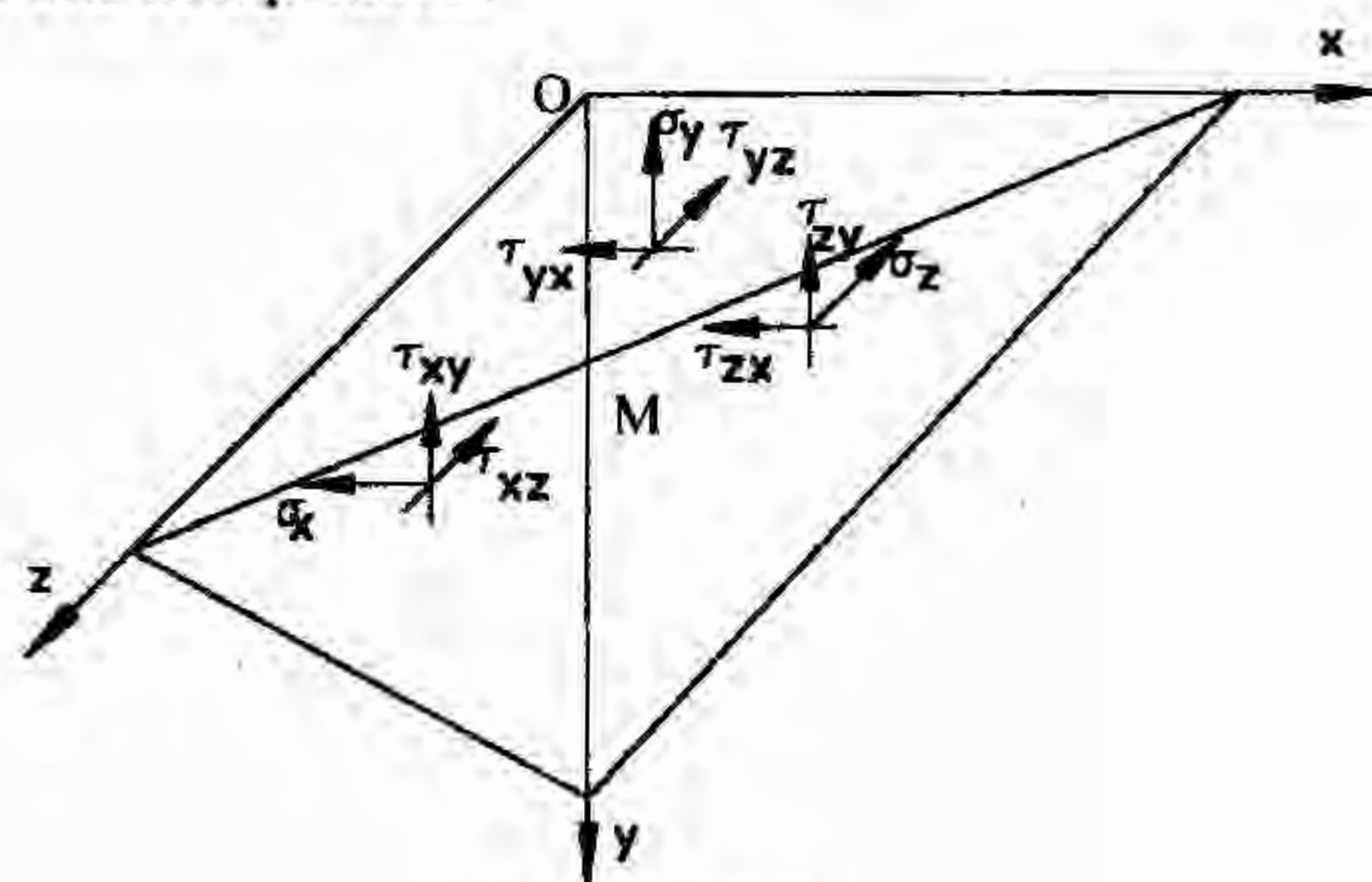


Fig. 3.1

### 3.2. Starea plană de tensiuni

În cazul în care, toate tensiunile din interiorul unui corp sunt paralele cu un plan avem o stare plană de tensiuni.

Se consideră o placă subțire, de grosime constantă, sollicitată în planul său median de un sistem de forțe coplanare, figura 3.2a.

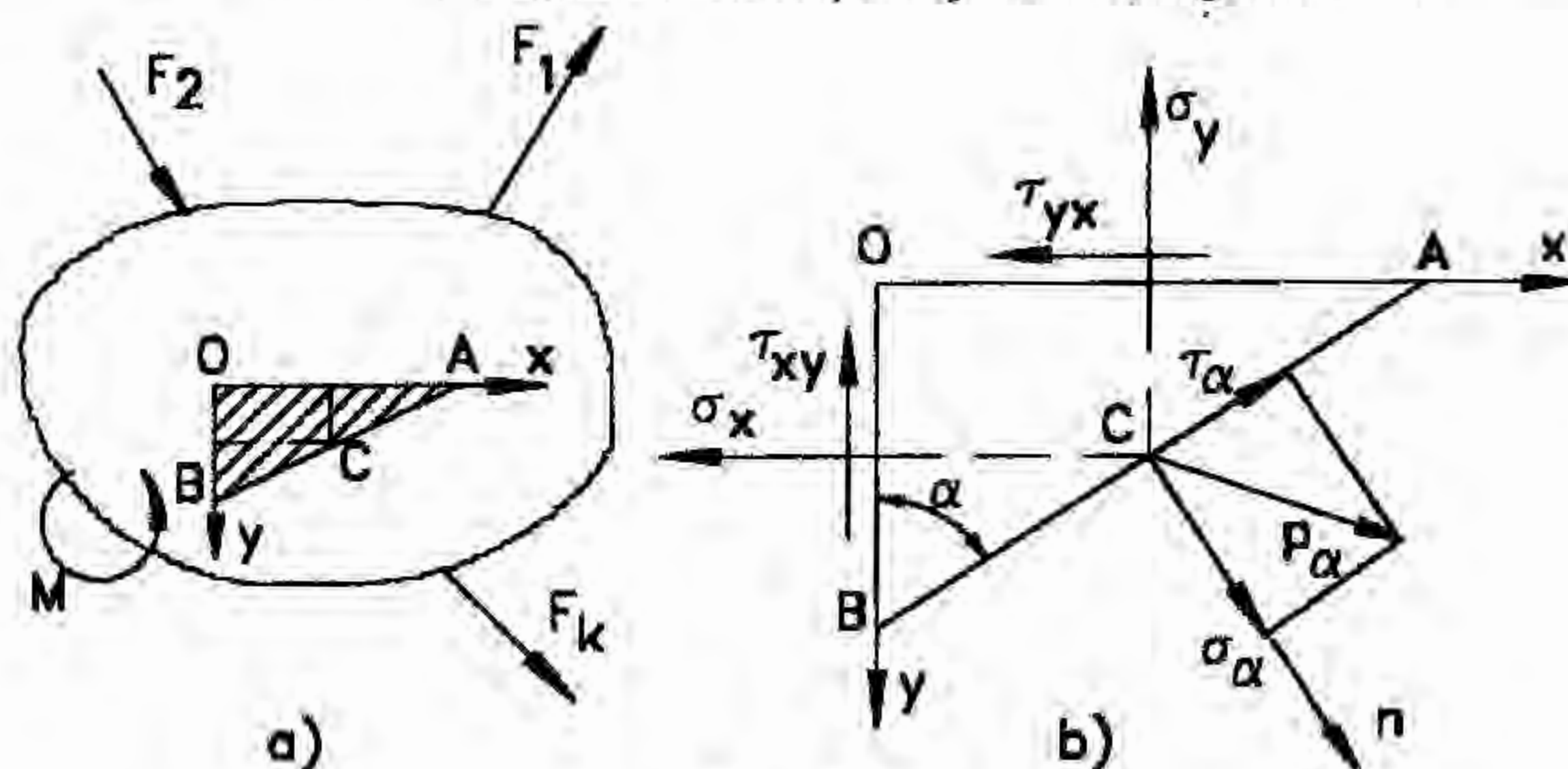


Fig. 3.2

Dacă placa nu este sprijinită pe suprafețele laterale, se creează o stare plană de tensiuni. Dacă acele suprafețe laterale ar fi menținute între



doi pereți rigizi, placa nu s-ar putea deforma pe grosimea ei și atunci ar apărea o stare plană de deformare.

Din jurul unui punct oarecare se izolează un element de forma unei prisme cu baza un triunghi dreptunghic OAB și înălțimea egală cu grosimea plăcii, figura 3.2b. Fața AB a elementului este înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de axa oy, aria acestei fețe fiind ds. În cazul general al stării plane de tensiuni, pe fiecare față a elementului există tensiuni normale și tangențiale. Placa fiind în repaus, forțele de pe fețele elementului își fac echilibrul. Se pot scrie, în acest caz, trei ecuații de echilibru: suma forțelor după direcțiile tensiunilor  $\sigma_\alpha$  și  $\tau_\alpha$  să fie zero și suma momentelor față de punctul C să fie zero. Aceste ecuații sunt prezentate în sistemul (3.1).

$$\begin{cases} \sigma_u \cdot dA - \sigma_x \cdot dA \cos \alpha \cos \alpha - \sigma_y \cdot dA \sin \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} \cdot dA \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot dA \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ \tau_u \cdot dA - \sigma_x \cdot dA \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \cdot dA \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot dA \cos \alpha \cos \alpha - \tau_{yx} \cdot dA \sin \alpha \sin \alpha = 0 \\ \tau_{xy} \cdot dA \cos \alpha \cdot \frac{AB}{2} \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot dA \sin \alpha \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Din ultima ecuație va rezulta:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , relație ce exprimă *legea dualității tensiunilor tangențiale* și care se enunță astfel: tensiunile tangențiale, situate pe două plane perpendiculare între ele, sunt egale și dispuse simetric față de muchia comună celor două plane și perpendiculare pe această muchie. Astfel, dacă solicitările exterioare introduc într-un plan al unui corp o tensiune tangențială, într-un plan perpendicular acționează o tensiune tangențială de aceeași valoare, orientată simetric cu prima și perpendiculară pe linia de intersecție a celor două plane. Presupunând cunoscute tensiunile orientate paralel cu axele sistemului de referință, se determină, după unele transformări simple, tensiunile  $\sigma_\alpha$  și  $\tau_\alpha$  prezentate în sistemul de ecuații (3.2):

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (3.2)$$

Din aceste relații rezultă că tensiunile depind și de înclinarea feței pe care acționează. După anumite direcții, tensiunile normale și tangențiale au valori maxime sau minime. Tensiunile normale care ating valorile maxime sau minime se numesc *tensiuni principale* iar direcțiile



după care acționează se numesc *direcții principale*. Pentru determinarea direcțiilor principale se derivează, funcție de  $(2\alpha)$ , cele două ecuații din sistemul (3.2):

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \neq 0 \\ \frac{d\tau}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

și va rezulta:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ \operatorname{tg} 2\alpha_{3,4} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \end{cases} \quad (3.4)$$

Pentru  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , prima relație din (3.4) are două soluții:  $2\alpha_\sigma$  și  $2\alpha_\sigma + \pi$ . În consecință, există două direcții principale pentru tensiunile normale, perpendiculare între ele și care fac cu axa  $ox$  unghiurile  $\alpha_\sigma$  și  $\alpha_\sigma + \pi/2$ . Înlocuind aceste valori ale unghiului  $\alpha$  în prima relație a sistemului (3.2) se vor determina tensiunile normale maxime și minime. Ținându-se seama de relațiile:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{cases} \quad (3.5)$$

va rezulta:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.6)$$

Semnului (+) îi corespunde tensiunea maximă  $\sigma_1$  iar semnului (-) îi corespunde tensiunea minimă  $\sigma_2$ .

A doua relație din (3.4) prezintă, de asemenea, două soluții pentru direcțiile după care avem tensiuni tangențiale maxime și minime:  $\alpha_\tau$  și  $\alpha_\tau + \pi/2$ . Direcțiile tensiunilor tangențiale maxime se numesc *linii de alunecare*. Cu ajutorul unor relații asemănătoare cu (3.5) provenite din a doua relație (3.4), înlocuite în (3.2), se obțin tensiunile tangențiale extreme:



$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.7)$$

Se constată că, tensiunile tangențiale maxime și minime au aceeași valoare aflându-se în plane perpendiculare. Așadar, este respectată legea dualității tensiunilor tangențiale.

Din a doua relație a sistemului (3.2) și prima relație din (3.3) se constată că  $\frac{d\sigma}{d(2\alpha)} = -\tau$ . De aici se desprinde concluzia că, în planele în

care tensiunea  $\sigma_\alpha$  este maximă sau minimă, tensiunile tangențiale sunt egale cu zero. Aceste plane se numesc *plane principale de tensiune*.

Din relațiile (3.4) se observă că  $\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_{3,4} + 1 = 0$  de unde rezultă:

$$2\alpha_{3,4} = 2\alpha_{1,2} + 90^\circ \quad \text{sau} \quad \alpha_{3,4} = \alpha_{1,2} + 45^\circ$$

În consecință, tensiunile tangențiale iau valori maxime sau minime, pe direcții înclinate cu  $45^\circ$  față de direcțiile principale.

Din relația (3.6) rezultă că  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$  ceea ce arată că suma tensiunilor normale aflate pe două plane ortogonale este un invariant deci nu depinde de unghiul  $\alpha$ . Din relațiile (3.6) și (3.7) rezultă că:

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

deci, tensiunea tangențială maximă este egală cu semidiferența tensiunilor normale principale.

### 3.3 Forma matriceală pentru calculul tensiunilor și direcțiilor principale

Se consideră că, fața înclinată AB a elementului infinitezimal, extras dintr-o placă subțire de grosime constantă, este un plan principal, figura 3.3.

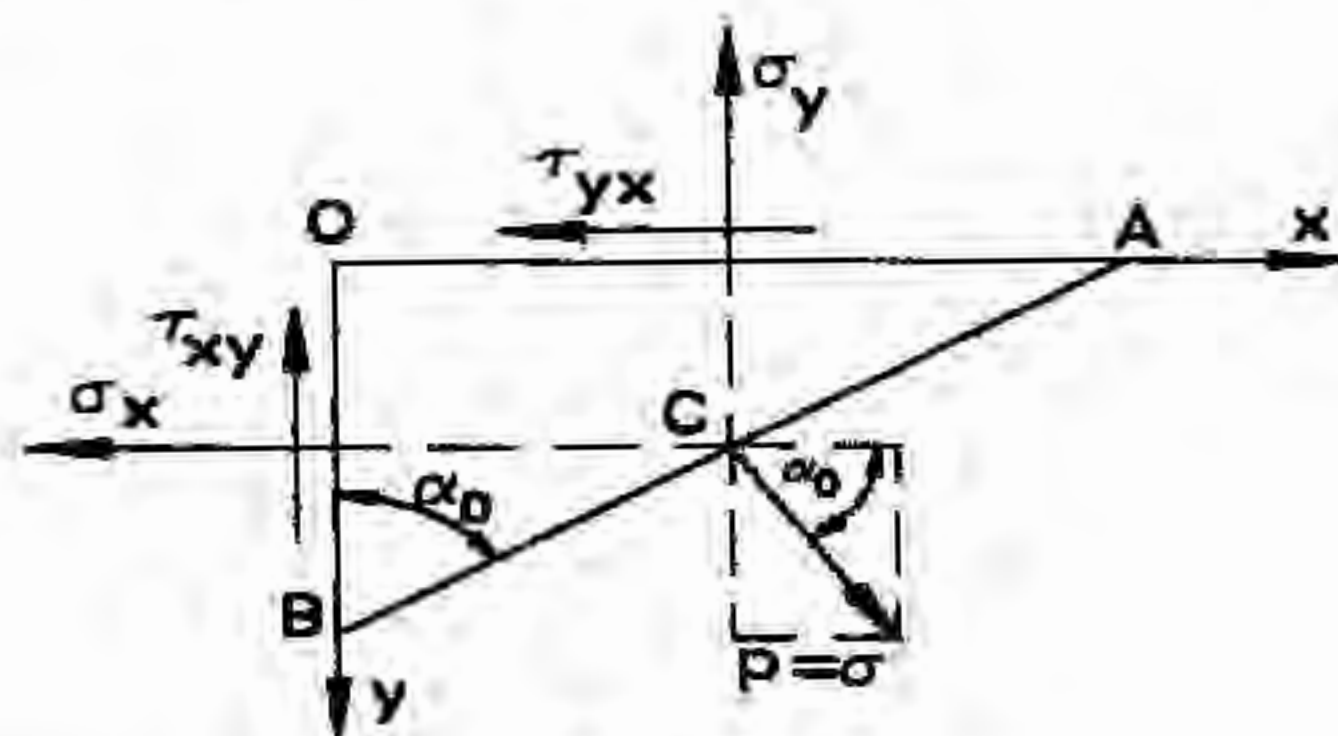


Fig. 3.3



Ecuatiile de echilibru de forțe după axele  $x$  și  $y$  vor fi:

$$\begin{cases} \sigma \cos \alpha_0 dA - \sigma_x dA \cos \alpha_0 - \tau_{xy} dA \sin \alpha_0 = 0 \\ \sigma \sin \alpha_0 dA - \sigma_y dA \sin \alpha_0 - \tau_{xy} dA \cos \alpha_0 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha_0 + \tau_{xy} \sin \alpha_0 = 0 \\ \tau_{xy} \cos \alpha_0 + (\sigma_y - \sigma) \sin \alpha_0 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

sau:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

care poate fi privită ca un sistem de ecuații omogen în necunoscutele  $\cos \alpha_0$  și  $\sin \alpha_0$ . Ținând seama de faptul că  $\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 = 1$ , sistemul are soluții atunci când:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă:

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.11)$$

Soluțiile acestei ecuații sunt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

ce reprezintă tocmai tensiunile normale principale. În aceste condiții, matricea tensiunilor pentru starea plană de tensiuni se scrie astfel:

$$\tilde{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Matricea tensiunilor principale va fi:

$$\tilde{T}_{\sigma_{1,2}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



### 3.4. Cercul lui Mohr pentru variația tensiunilor în starea plană

Dacă se cunosc tensiunile  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  și  $\tau_{xy}$  se pot determina, cu ajutorul relațiilor (3.2), tensiunile ce apar pe o secțiune oarecare, înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de direcția  $y$ , de exemplu. Același lucru se poate face cu ajutorul unei construcții grafice numită *ceroul lui Mohr* pentru variația tensiunilor. Pentru obținerea respectivului cerc, se elimină unghiul  $\alpha$  din relațiile (3.2) și se obține:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.12)$$

Intr-un sistem de axe  $\sigma^*\tau^*$  ale cărui direcții coincid cu cele ale tensiunilor  $\sigma_\alpha$  și  $\tau_\alpha$ , relația 3.12 reprezintă un cerc cu centrul pe axa  $\sigma^*$  la distanța  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  de originea sistemului de axe și având raza

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \text{ Acest cerc poartă numele de cercul lui Mohr,}$$

figura 3.4.

Construcția acestui cerc se realizează în felul următor:

- se reprezintă pe axa  $\sigma^*$  segmentele  $OA=\sigma_x$ ,  $OB=\sigma_y$  și  $OC=(\sigma_x+\sigma_y)/2$ , în sensul pozitiv dacă  $\sigma_x>0$  și  $\sigma_y>0$ . Punctul C va reprezenta centrul cercului;

- se reprezintă segmentul  $AA_1=\tau_{xy}$  în sensul pozitiv al axei  $\sigma^*$  dacă  $\tau_{xy}>0$ . Distanța  $CA_1$  reprezintă raza cercului lui Mohr:

$$CA_1 = r = \sqrt{CA^2 + AA_1^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Astfel, se poate trasa un cerc cu centrul în C, de rază  $CA_1$ , care taie axa  $O\sigma^*$  în punctele D și E, ale căror abscise reprezintă tensiunile normale principale  $\sigma_2$  și  $\sigma_1$ :

$$\sigma_2 = OD = OC - DC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = OE = OC + CE = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



În figura 3.4 se observă că:  $\operatorname{tg} \angle (ECA_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \operatorname{tg}(2\alpha_1)$

Deoarece  $\operatorname{tg}(2\alpha_1)$  are semnul lui  $\tau_{xy}$ , rezultă că direcția  $DA_1$  (cu  $\angle EDA_1 = \alpha_1$ ) este direcția tensiunii principale  $\sigma_1$ . Perpendicular pe aceasta, din punctul D se regăsește direcția lui  $\sigma_2$ . Valorile tensiunilor tangențiale maxime sunt date de punctele  $C_1$  și  $C_2$ , fiind egale cu raza cercului:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Dacă se face o rotație a direcțiilor tensiunilor principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  astfel încât  $\sigma_1$  să coincidă cu DE, atunci tensiunile pe direcția  $DC_1$ , care face un unghi de  $45^\circ$  cu DE, sunt tensiunile  $\tau_1$  și  $\tau_2$  aflate pe un plan bisector al direcțiilor principale.

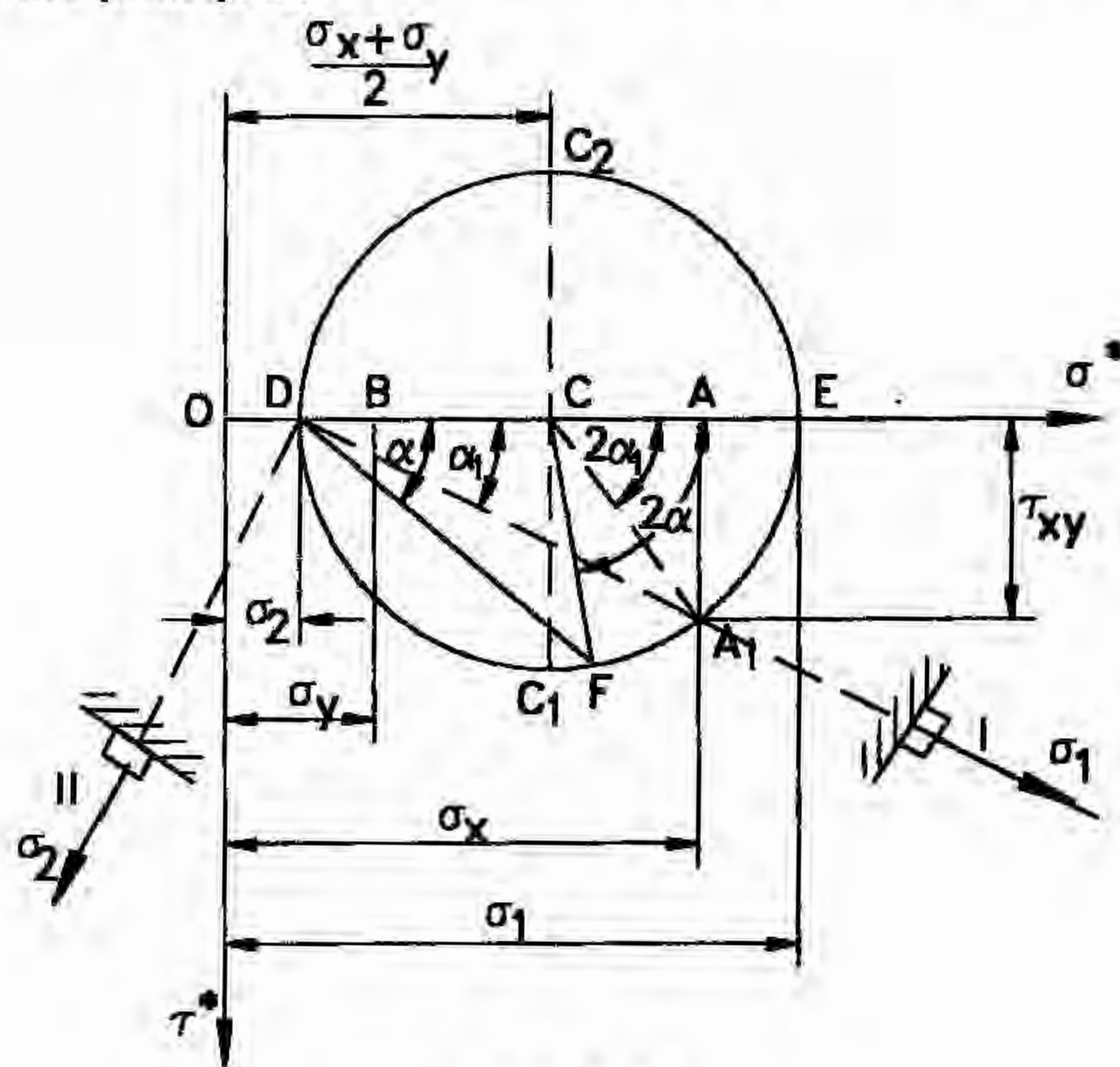


Fig. 3.4

Cercul lui Mohr se poate construi și dacă se cunosc valorile tensiunilor principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ .



Starea plană de tensiune are mai multe cazuri particulare și anume:

- stare liniară de tensiune. Aceasta se produce atunci când  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  și are loc în barele drepte solicitate la întindere sau compresiune uniaxială și în cazul încovoierii pure, figura 3.5a;

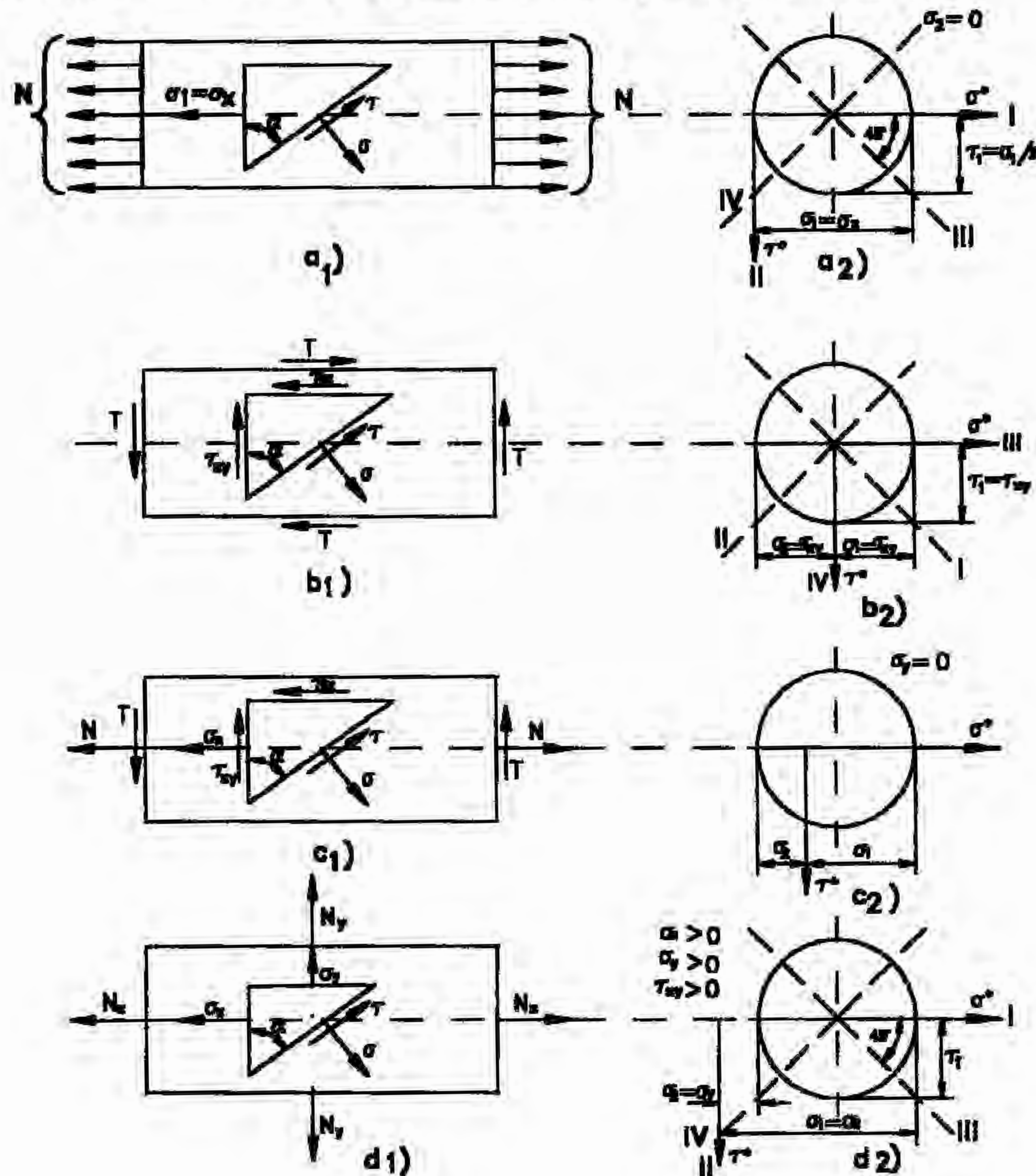


Fig. 3.5



- stare de forfecare pură care se produce atunci când  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  și se realizează în cazul solicitării de forfecare și în cazul torsiunii, figura 3.5b;

- starea de tensiune cu  $\tau_{xy} = 0$  care se realizează în cazul solicitării de încovoiere sau în cazul unor solicitări compuse, figura 3.5c;

- starea de tensiune cu  $\tau_{xy} = 0$ , figura 3.5d. În acest caz tensiunile  $\sigma_x$  și  $\sigma_y$  sunt dirijate după direcțiile principale de solicitare. Această stare de tensiuni se realizează în cazul tracțiunii biaxiale.

### 3.5. Starea spațială de tensiune

#### 3.5.1. Variația tensiunilor în jurul unui punct

Se consideră un punct oarecare M, situat în interiorul unui corp deformabil aflat sub acțiunea unui sistem de sarcini exterioare în echilibru. În jurul acestui punct se consideră un element de volum. În cazul general de solicitare, pe fețele acestui element de volum se vor regăsi toate componentele stării de tensiuni:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  și  $\tau_{zx}$ , figura 3.6.

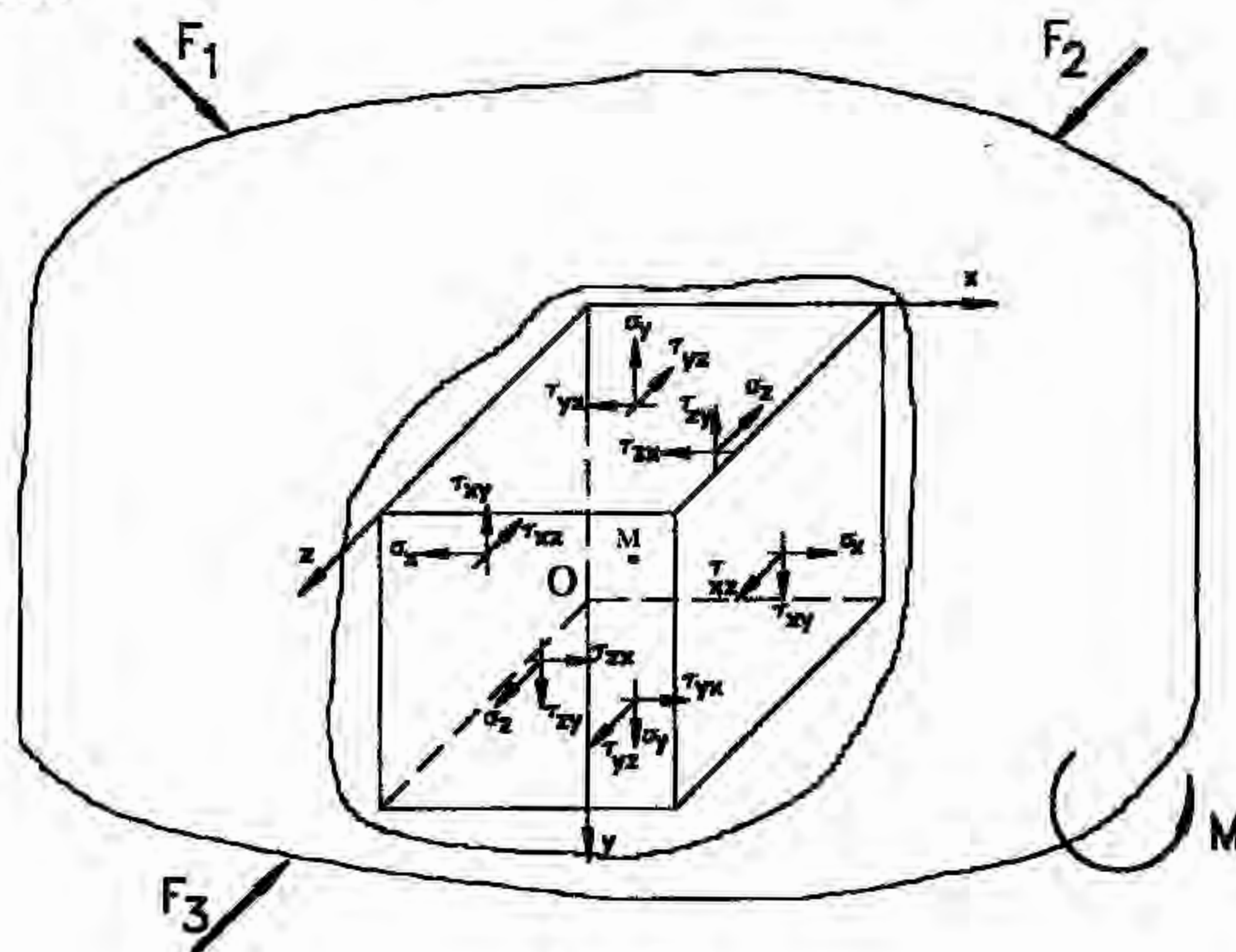


Fig. 3.6



Prin punctul considerat pot fi duse o infinitate de plane orientate oarecum față de sistemul de coordonate ales. Pe un astfel de plan regăsim tensiunea totală  $p$  corespunzătoare planului respectiv. Mărimea și direcția tensiunii totale  $p$  se poate determina pe baza celor 9 componente ale tensiunii din jurul punctului considerat. În cazul stării spațiale de tensiune se poate scrie matricea tensiunilor ca fiind:

$$\tilde{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Având în vedere dualitatea tensiunilor tangențiale:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ , rezultă că matricea tensiunilor devine simetrică față de prima diagonală.

Vom considera că, prin punctul  $M$  în care vrem să determinăm tensiunea totală  $p$ , trece un plan înclinat care, la intersecția cu axele de coordonate generează punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$ , figura 3.7. Orientarea acestui plan este dată de cosinuzii directori  $l$ ,  $m$  și  $n$ , ai normalei  $v$  la planul  $ABC$  față de axele de coordonate. Tensiunea totală  $p$  are o direcție oarecare dar poate fi descompusă în componentele:

- $\sigma_v$  orientată după normala  $v$  la planul  $ABC$ ;
- $\tau_v$  situată în planul considerat.

Mărimea tensiunii totale  $p$ , în funcție de mărimea componentelor sale va fi:

$$p = \sqrt{\sigma_v^2 + \tau_v^2}$$

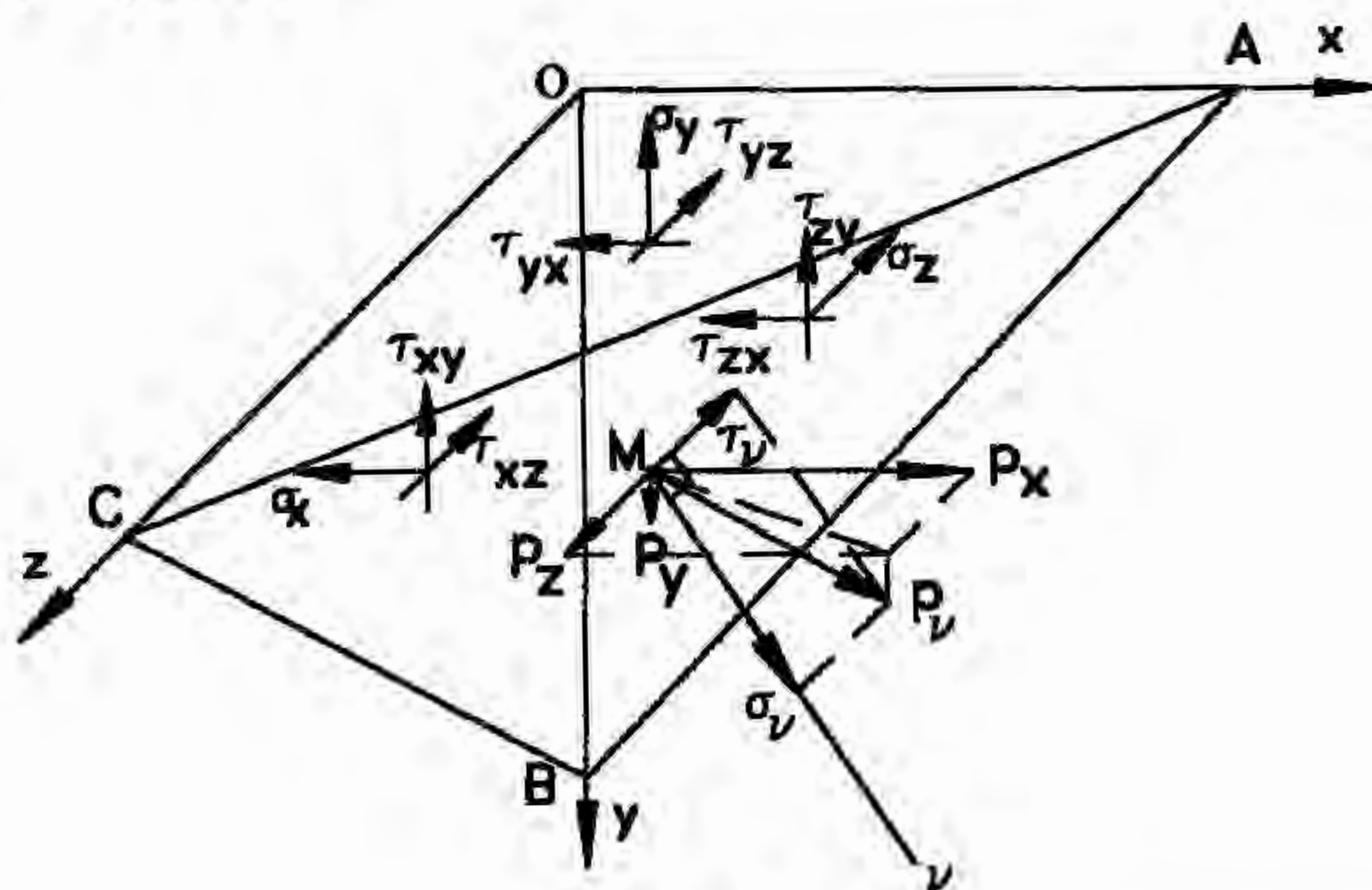


Fig. 3.7



Dacă se au în vedere componentele tensiunii totale  $p$  după axele de coordonate:  $(p_x, p_y, p_z)$ , vom avea:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Din ecuațiile de echilibru ale proiecțiilor forțelor pe cele trei axe de coordonate și ținând cont că  $\text{aria}(\text{OAB})=ndA$ ,  $\text{aria}(\text{OAC})=mdA$  și  $\text{aria}(\text{OBC})=ldA$ , va rezulta:

$$p_x dA - \sigma_x ldA - \tau_{xy} mdA - \tau_{xz} ndA = 0$$

$$p_y dA - \tau_{xy} ldA - \sigma_y mdA - \tau_{yz} ndA = 0$$

$$p_z dA - \tau_{zx} ldA - \tau_{zy} mdA - \sigma_z ndA = 0$$

După simplificări se obține:

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$p_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n$$

(3.13)

care sub formă matriceală se poate scrie astfel:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

sau scris condensat:

$$\tilde{p} = \tilde{T}_\sigma \cdot \tilde{v}$$

în care  $\tilde{v}$  este vectorul coloană format din cosinuzii directori ai normalei la planul ABC:

$$\tilde{v} = \{l, m, n\}$$

Din relația (3.13) se poate observa că, valoarea tensiunii totale  $p$  depinde de înclinarea suprafeței ABC.

Componenta  $\sigma_v$  având direcția normalei  $v$ , se determină proiectând componentele  $p_x, p_y$ , și  $p_z$  pe direcția respectivei normale:

$$\sigma_v = lp_x + mp_y + np_z = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2ln\tau_{xz} + 2mn\tau_{yz} \quad (3.14)$$

În relația (3.14) s-a ținut seama și de dualitatea tensiunilor tangențiale. Cunoșcând valoarea lui  $\sigma_v$  se poate determina și  $\tau_v$  cu ajutorul relației:

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}$$



Si în cadrul stării spațiale de tensiune există direcții după care tensiunea normală și tangențială au valori extreme. Se consideră un plan principal având normala  $v_0 (l_0, m_0, n_0)$  în care tensiunea totală  $p_{v0}=p'=\sigma$  și  $\tau=0$ . Componentele tensiunii totale după axele de coordonate sunt:

$$p_x'=\sigma l_0, p_y'=\sigma m_0, p_z'=\sigma n_0 \quad (3.15)$$

Considerând relațiile (3.15) și relațiile (3.13) în care cosinuşii directori devin  $l_0, m_0$  și  $n_0$ , vom avea:

$$\begin{aligned} l_0(\sigma_x - \sigma) + m_0\tau_{xy} + n_0\tau_{xz} &= 0 \\ l_0\tau_{yx} + m_0(\sigma_y - \sigma) + n_0\tau_{yz} &= 0 \\ l_0\tau_{zx} + m_0\tau_{zy} + n_0(\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

care sub formă matriceală devine:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

sau scris condensat:  $(\tilde{T}_\sigma - \sigma \cdot \tilde{I})\tilde{v} = 0$

Tinând cont de relația fundamentală între cosinuşii directori:  $l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1$  sistemul omogen (3.17) nu poate admite soluția banală și ca urmare trebuie îndeplinită condiția:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

ce reprezintă o ecuație de gradul 3 cu necunoscuta  $\sigma$  și care devine:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \quad (3.18)$$

Rădăcinile acestei ecuații reprezintă valorile tensiunilor principale  $\sigma_1, \sigma_2$  și  $\sigma_3$ . Indicii tensiunilor principale se stabilesc astfel încât să satisfacă relațiile:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Tensorul tensiunilor principale are forma:

$$\tilde{T}_{\sigma^*} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Intrucât tensiunile principale nu depind de sistemul de axe folosit, coeficienții ecuației sunt invariante. Aceștia au expresiile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= |\tilde{T}_\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

În funcție de tensiunile principale acești invariante au expresiile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

Pentru a calcula cosinuzii directori  $l_0$ ,  $m_0$  și  $n_0$  care dau direcția tensiunii principale  $\sigma_1$ , se înlocuiește în sistemul de ecuații (3.16) rădăcina  $\sigma_1$  și se obține:

$$\begin{aligned} l_0(\sigma_x - \sigma_1) + m_0 \tau_{xy} + n_0 \tau_{xz} &= 0 \\ l_0 \tau_{yx} + m_0(\sigma_y - \sigma_1) + n_0 \tau_{yz} &= 0 \\ l_0 \tau_{zx} + m_0 \tau_{zy} + n_0(\sigma_z - \sigma_1) &= 0 \end{aligned}$$

Se consideră primele două din cele trei ecuații care se împart prin  $n_0$ . Făcând notațiile:  $a = l_0/n_0$  și  $b = m_0/n_0$  se obține:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)a + \tau_{xy}b + \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yx}a + (\sigma_y - \sigma_1)b + \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

din care rezultă:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -\tau_{xz} & \tau_{xy} \\ -\tau_{yz} & \sigma_y - \sigma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_1 \end{vmatrix}} \text{ și } b = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & -\tau_{zx} \\ \tau_{yz} & -\tau_{yz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{xy} \\ \tau_{zy} & \sigma_y - \sigma_1 \end{vmatrix}}$$

Tinând seama de faptul că:  $l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1$ , se obține:  $a^2 + b^2 + 1 = 1/(n_0^2)$  de unde va rezulta:

$$n_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2 + 1}}$$

Ceilalți cosinuzi directori ai tensiunii principale  $\sigma_1$  sunt dați de relațiile:

$$l_0 = a \cdot n_0 \text{ și } m_0 = b \cdot n_0.$$



- materiale *elastice*, care au capacitatea de a reveni la forma și dimensiunile inițiale după îndepărtarea sarcinilor exterioare;

- materiale *plastice* sau cu deformare permanentă, care își păstrează deformația câpătată în timpul solicitării;

- materiale *elasto - plastice*, la care numai o parte din deformație dispare iar cealaltă este permanentă.

b). În funcție de *mărimea deformațiilor* produse până în momentul ruperii, distingem:

- materiale la care ruperea este precedată de o deformare plastică (remanentă) considerabilă. Aceste materiale se numesc *ductile* sau *tenace*;

- materiale care se deformează foarte puțin înainte de rupere numite materiale *fragile*.

c) În funcție de *omogenitatea structurală* materialele pot fi clasificate astfel:

- materiale *omogene* care au aceeași structură și compoziție chimică în oricare punct al volumului lor;

- materiale *neomogene* la care structura sau (și) compoziția chimică diferă în diverse puncte.

d) În funcție de *valoarea constantelor elastice* și a *caracteristicilor mecanice* măsurate pe direcții diferite, avem:

- materiale *izotrope* care au aceleași proprietăți elastice și aceleași proprietăți mecanice pe oricare direcție din jurul oricărui punct;

- materiale *anizotrope* care prezintă stratificații, fibre sau inele și au proprietăți elastice și mecanice diferite după aceste direcții.

În Rezistența materialelor calculele se fac, de obicei, pentru materiale solicitate în domeniul elastic, care sunt omogene și izotrope.

## 2.2. Noțiuni despre încercarea materialelor

Pentru a rezolva problemele de rezistență a materialelor este necesar să cunoaștem modul de comportare a acestora, utilizate pentru diferite solicitări la care vor fi supuse în exploatare. Acest mod de comportare poate fi determinat pe baza unor constante de material numite *caracteristici mecanice și elastice*. Aceste caracteristici se determină supunând *probele (epruvetele)* prelevate din semifabricate la diferite solicitări. *Încercările mecanice de rezistență, pe baza cărora*



epruvetele sunt solicitate în diferite moduri, se clasifică în funcție de mai multe criterii. În funcție de *viteza de încărcare* avem încercări *statice* și *dinamice*. Incercările sunt statice atunci când valoarea forței crește lent în timp, de la zero la valoarea maximă, de obicei după o lege liniară, figura 1.20a. Incercările sunt dinamice atunci când forța se aplică fie cu viteză mare și avem solicitare cu *șoc*, figura 1.20b, fie variază ciclic în timp și avem solicitare prin *oboseală*, figura 1.20c. Incercările statice și dinamice se realizează cu ajutorul mașinilor de încercat universale sau specializate.

*Incercările tehnologice* se efectuează în vederea determinării caracteristicilor de prelucrabilitate prin diferite tehnologii.

Metodele de încercare pot fi *distructive* și *nedistructive*. În cadrul încercărilor distructive are loc încercarea până la distrugerea (ruperea) probei ce este supusă încercării. Se urmărește comportamentul probei pe tot parcursul încercării. Pentru unele încercări, se urmărește și se înregistrează modul de comportare a materialului în timp, obținându-se *curba caracteristică* materialului respectiv. Incercările mecanice de rezistență sunt prezentate schematic în tabelul 2.1.

### 2.3 Epruvete utilizate pentru încercări mecanice

Incercările mecanice de rezistență se efectuează pe piese având forme și dimensiuni bine determinate. Aceste piese se numesc *epruvete*. Din materialul care urmează a fi supus încercărilor se vor preleva *probe*. Din probe se pot obține mai multe epruvete sau pot constitui ele însele epruvetele respective. Locul din material de unde se prelevează proba sau locul din probă de unde se prelevează epruveta trebuie ales astfel încât caracteristicile mecanice ce se vor obține să fie reprezentative ca valori medii și să nu exprime particularitățile unei anumite zone în ceea ce privește caracteristicile mecanice și elastice. Forma și dimensiunile epruvetelor utilizate în cadrul încercărilor mecanice de rezistență, sunt în general standardizate.

Pentru încercarea de tracțiune se folosesc epruvete cu secțiune circulară plină (cilindrice), sau dreptunghiulară (plate) atunci când sunt prelevate din table, figura 2.1, a și b.

Secțiunea centrală a epruvetelor este calibrată iar capetele au secțiunea mărită în vederea prinderii în bacurile mașinii de încercat.



Direcțiile tensiunilor principale  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  se determină în mod analog.

Pentru studiul variației tensiunilor tangențiale în jurul unui punct se consideră a fi cunoscute tensiunile principale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  în acel punct. Tensiunea totală pe suprafața ABC, a cărei normală are cosinușii directori  $l$ ,  $m$  și  $n$ , va fi dată de:

$$p = \sqrt{l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2} \quad (3.19)$$

Prin descompunerea tensiunii totale în componentele sale după direcția normală și tangențială la planul ABC, va rezulta tensiunea normală ca fiind:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (3.20)$$

iar cea tangențială:

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = l^2 m^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - l^2 (1 - l^2 - m^2) (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + m^2 n^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (3.21)$$

Pentru determinarea tensiunilor tangențiale extreme trebuie ca derivata parțială a expresiei (3.21) în raport cu  $l$  și  $m$  să fie nulă. În condițiile stării generale de tensiune, după unele transformări se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot l^2 - (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot m^2 \right] \cdot l &= 0 \\ \left[ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} - (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot l^2 - (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot m^2 \right] \cdot m &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Soluția  $l=m=0$  și  $n=1$  se elimină deoarece corespunde direcției oz. Dacă  $l \neq 0$  și  $m \neq 0$ , simplificând ecuațiile de mai sus prin  $l$ , respectiv  $m$  și scăzând una din alta se obține  $\sigma_1 = \sigma_2$  ce contravine condițiilor impuse de a avea o stare generală de tensiuni. Soluțiile viabile ale acestui sistem sunt:

-  $l \neq 0$  și  $m = 0$ . În acest caz din prima relație (3.22) rezultă:

$$l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m = 0; \quad n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

-  $l = 0$  și  $m \neq 0$ . În acest caz din a doua relație (3.22) rezultă:

$$l = 0; \quad m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Prin derivarea relației (3.21) în raport cu  $n$ , în mod asemănător se obține:

$$l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n = 0$$

Se constată așadar că, valorile extreme ale tensiunilor tangențiale apar în plane ale căror normale fac unghiuri egale ( $\pi/4$ ) cu câte două din direcțiile principale și sunt paralele cu cea de-a treia, figura 3.8.

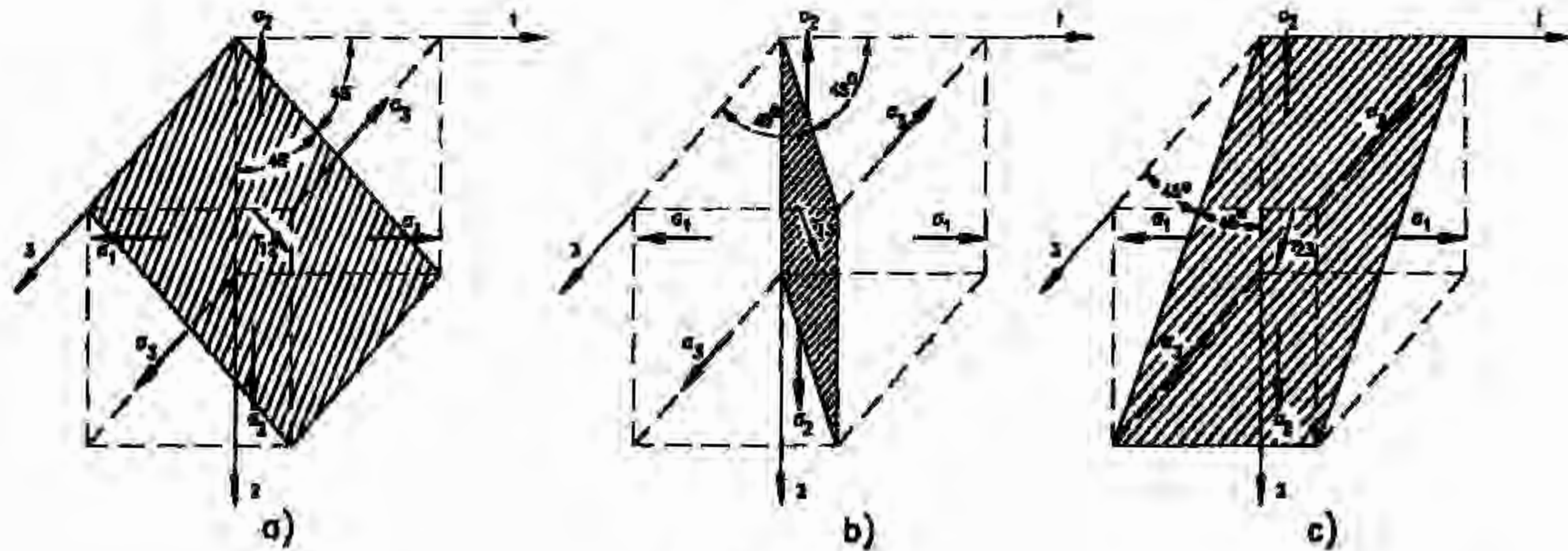


Fig. 3.8

Înlocuind valorile cosinurilor directori în relația (3.21) se obțin valorile extreme ale tensiunilor tangențiale:

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Tensiunea tangențială maximă corespunde semidiferenței celei mai mari dintre tensiunile principale. Dacă  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  atunci:

$$\tau_{\max} = \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

### 3.5.2. Cercul lui Mohr în cazul stării spațiale de tensiune

Ca și în cazul stării plane de tensiune, și în starea spațială tensiunile pot fi reprezentate pe cale grafică prin trei cercuri trasate într-un sistem de axe  $\sigma^* \tau^*$ . Modul de construcție a acestor cercuri se prezintă în cele ce urmează, figura 3.9.



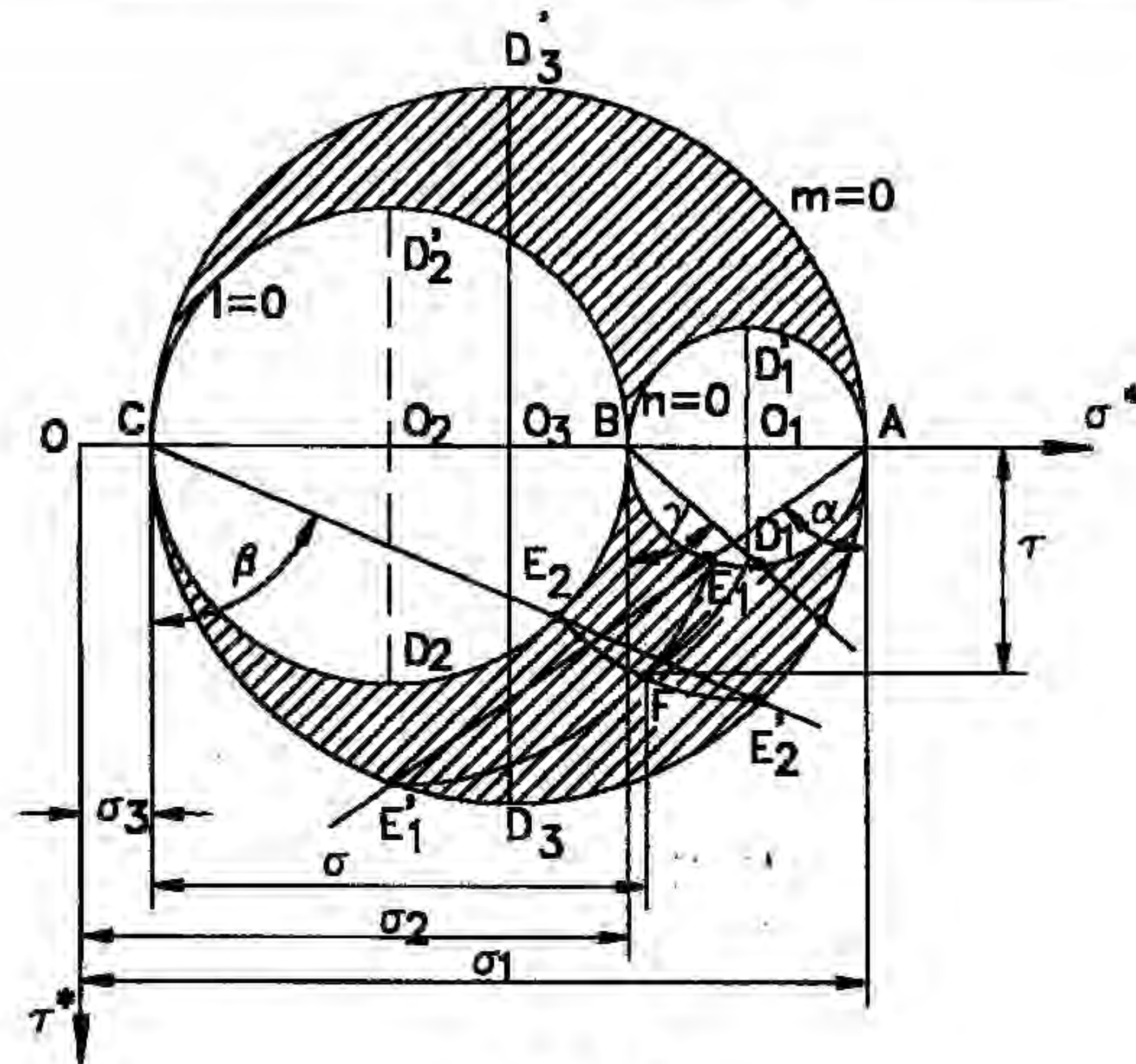


Fig. 3.9

Pe axa  $o\sigma^*$  se determină punctele A și B la distanțele  $\sigma_1$  respectiv  $\sigma_2$  de originea axelor. Se trasează un cerc cu centrul  $O_1$  pe axa  $o\sigma^*$  și care trece prin punctele A și B. Raza acestui cerc este, evident,  $R_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Se determină, tot pe axa  $O\sigma^*$ , punctul C aflat la distanța  $\sigma_3$  de originea axelor. Se trasează un nou cerc care taie axa  $O\sigma^*$  în punctele B și C, ce are centrul în  $O_2$  aflat tot pe axa  $O\sigma^*$  și raza  $R_2 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ . Se trasează apoi un cerc care taie axa  $O\sigma^*$  în punctele A și C determinate anterior, ce are centrul în  $O_3$  aflat pe axa  $O\sigma^*$  și raza  $R_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ . Punctele de pe cercul cu centrul în  $O_1$  reprezintă stări de tensiune pe plane care conțin axa principală 3 sau sunt paralele cu aceasta, figura 3.8a. Pe planele care au  $n = 0$  și  $l = m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  acționează tensiunile tangențiale corespunzătoare punctelor  $D_1$  și  $D_1'$ , respectiv:  $\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Punctele de pe cercul cu centrul în  $O_2$  reprezintă stări de



tensiune pe plane ce conțin axa principală 1 sau sunt paralele cu aceasta, figura 3.8c. Pe planele care au  $l=0$  și  $m=n=\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  acționează tensiunile tangențiale corespunzătoare punctelor  $D_2$  și  $D_2'$ , respectiv:  $\tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ . Punctele de pe cercul cu centrul în  $O_3$  reprezintă stări de tensiune pe plane ce conțin axa principală 2 sau sunt paralele cu aceasta, figura 3.8b. Pe planele care au  $m=0$  și  $l=n=\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  acționează tensiunile tangențiale corespunzătoare punctelor  $D_3$  și  $D_3'$ , respectiv:  $\tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ . Orice punct cuprins pe suprafața dintre cele trei cercuri, (suprafața hașurată din figura 3.9), reprezintă o stare spațială de tensiune. Tensiunile de pe o suprafață înclinată ABC, având normala  $v$  înclinată față de sistemul de coordonate cu unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , pot fi determinate pe baza construcției grafice din figura 3.9. Astfel, din punctul A se duce o dreaptă înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de verticală. Această dreaptă intersectează cercul cu centrul în  $O_1$  în punctul  $E_1$  iar cercul cu centrul în  $O_3$  în punctul  $E_1'$ . Se construiește un arc de cerc cu centrul în  $O_2$  având raza  $O_2E_1=O_2E_1'$ . Din punctul C se duce o dreaptă care face cu verticala unghiul  $\beta$  și care va intersecta în punctele  $E_2$  și  $E_2'$  cercurile cu centrele în  $O_2$  și  $O_3$ . Se construiește un arc de cerc cu centrul în  $O_1$  având raza  $O_1E_2=O_1E_2'$ . La intersecția celor două arce de cerc se regăsește punctul F de coordonate  $\sigma$  și  $\tau$  care sunt tocmai tensiunile de pe fața înclinată ABC. Pentru verificare se face o construcție asemănătoare pornind din punctul B cu unghiul  $\gamma$ . Intersecția arcelor trebuie să se producă tot în punctul F.

### 3.5.3. Tensiuni octaedrice

În plane egal înclinate față de cele trei direcții principale de sollicitare pentru care  $|l|=|m|=|n|=\frac{1}{\sqrt{3}}$  se dezvoltă așa-numitele tensiuni octaedrice:  $\sigma_{oct}$  și  $\tau_{oct}$ , figura 3.10.



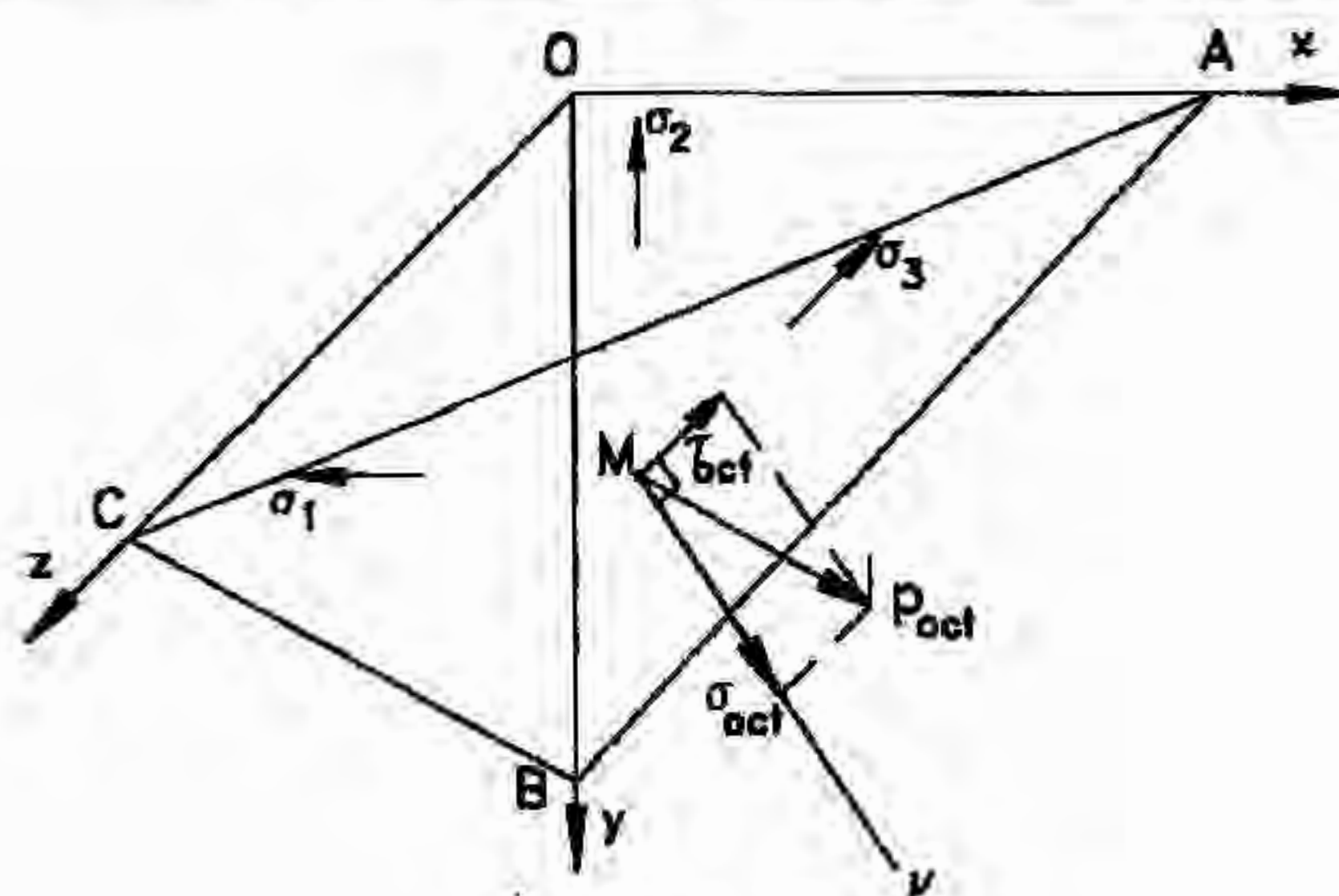


Fig. 3.10

Normala  $\bar{v}$  la planul ABC poartă numele de trisectoare. Introducând în relația (3.19) valorile cosinuşilor directori arătate anterior, se obține:

$$p_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

iar din relația (3.20) se deduce:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Tensiunea tangențială octaedrică va fi dată de relația:

$$\tau_{oct} = \sqrt{p_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2}$$

După înlocuire rezultă:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

sau în funcție de tensiunile tangențiale:

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{1,2}^2 + \tau_{2,3}^2 + \tau_{1,3}^2}$$

În funcție de invariantii stării de tensiuni vom avea:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{I_1^2 + 3I_2^2}$$

Această din urmă expresie prezintă avantajul că poate fi calculată fără determinarea tensiunilor principale deoarece, invariantii  $I_1$  și  $I_2$  se determină în raport de tensorul tensiunilor față de un sistem oarecare de axe.



### 3.5.4. Elipsoidul tensiunilor

Tensiunea totală ce apare pe un plan ABC înclinat față de sistemul de coordonate ales și având cosinușii directori ai normalei notați cu  $l$ ,  $m$  și  $n$ , se poate descompune în componentele:

$$p_x = l\sigma_1; p_y = m\sigma_2; p_z = n\sigma_3$$

Considerând și relația  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  vom determina relația:

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$

Această expresie reprezintă ecuația unui elipsoid numit elipsoidul lui Lamé și reprezintă locul geometric al vârfului tensorului  $\mathbf{p}$  când elementul de suprafață se rotește în jurul punctului  $O$ , figura 3.11.

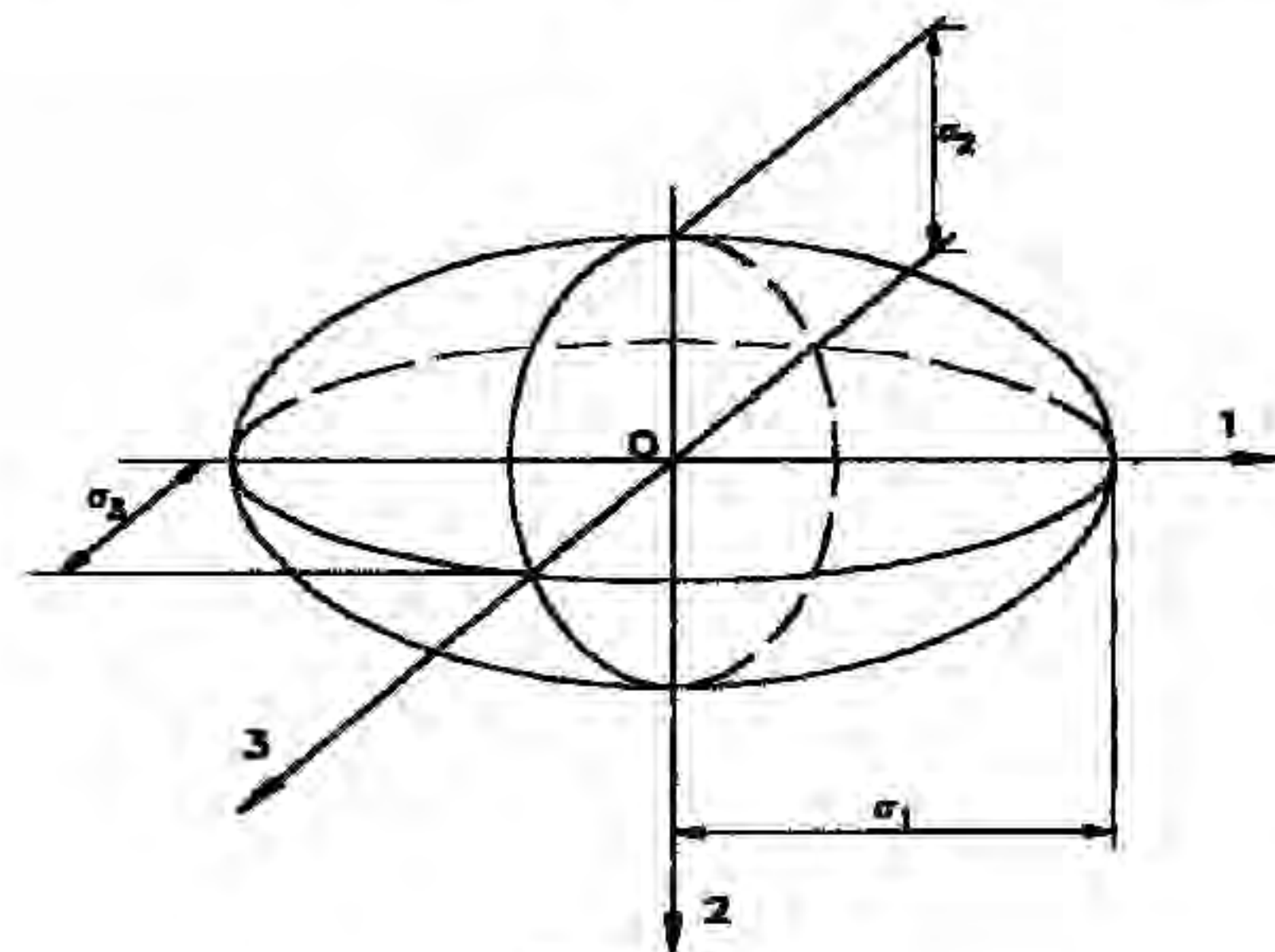


Fig. 3.11

În cazul stării plane de tensiune, când  $\sigma_3=0$ , se obține elipsa tensiunilor. Pentru o stare liniară de tensiune ( $\sigma_2=\sigma_3=0$ ) elipsa se transformă într-o dreaptă.



### 3.6. Deformații și deplasări

Se consideră un corp deformabil sollicitat din exterior cu un sistem de sarcini aflat în echilibru, figura 3.12a. Tensiunile introduse datorită sollicitării, au valori inferioare limitei de elasticitate.

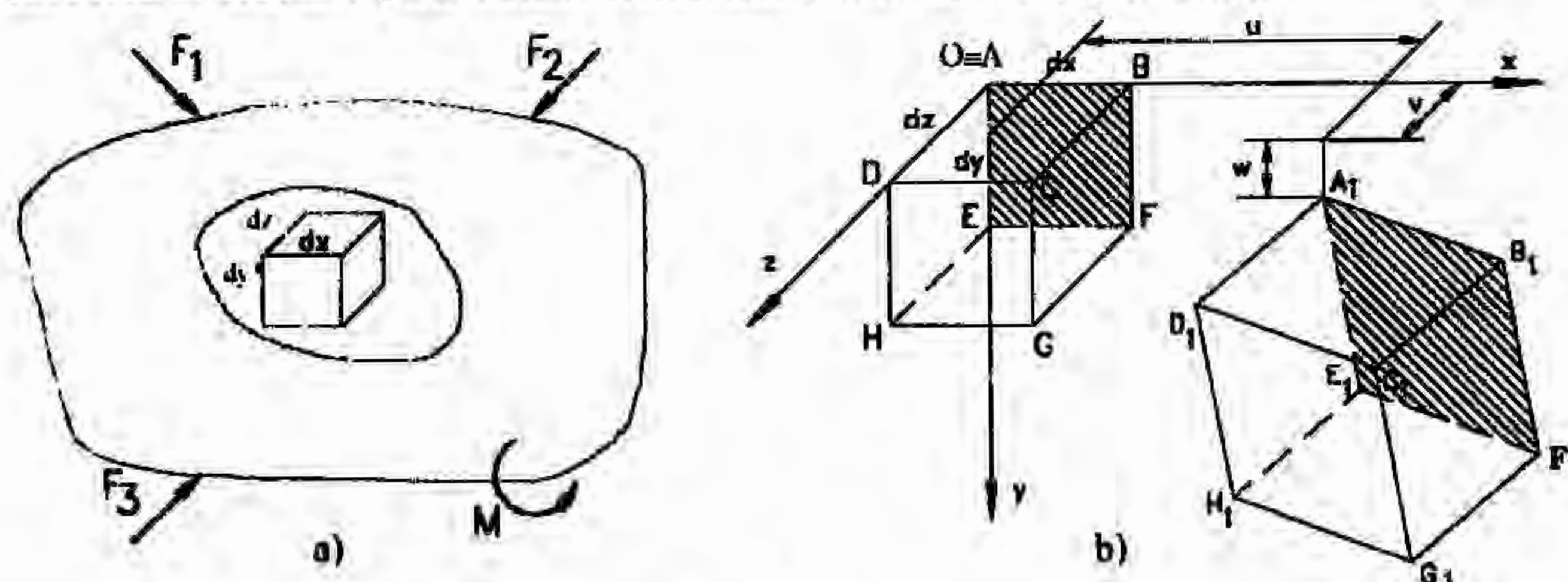


Fig. 3.12

Deformațiile căpătate de elementul de volum ca urmare a sollicitării exterioare vor fi reversibile. Diferitele puncte ale elementului de volum se vor *deplasa* și se vor găsi în alte poziții. Componentele deplasărilor pe direcțiile  $ox$ ,  $oy$  și  $oz$  se notează cu  $u$ ,  $v$ , respectiv  $w$ . Se consideră că aceste deplasări variază în mod continuu în interiorul corpului, deci sunt funcții continue de  $x$ ,  $y$  și  $z$ , figura 3.12b. Noua poziție ocupată de elementul de volum, datorită deplasării și deformării elementului  $ABCDHEFG$ , va fi  $A_1B_1C_1D_1H_1E_1F_1G_1$ . Prin proiecția feței  $A_1B_1F_1E_1$  pe planul  $xoy$  rezultă patrulaterul  $A_2B_2F_2E_2$ , figura 3.13.

Se consideră că punctul  $A$  se deplasează pe direcție orizontală cu cantitatea  $u$  și ca urmare, punctul  $B$  se va deplasa pe aceeași direcție cu cantitatea  $u$  la care se adaugă proiecția pe axa  $x$  a deplasării produsă prin deformația segmentului  $AB=dx$  și anume:  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Deplasarea pe direcție

orizontală a punctului  $F$  este dată de deplasarea pe aceeași direcție a punctului  $B$  la care se adaugă proiecția pe axa  $ox$  a deplasării produsă prin deformația segmentului  $BF = dy$  și anume:  $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ . În mod

asemănător se pot determina deplasările celorlalte puncte, atât pe



orizontală cât și pe verticală. Aceste deplasări sunt reprezentate în figura 3.13.

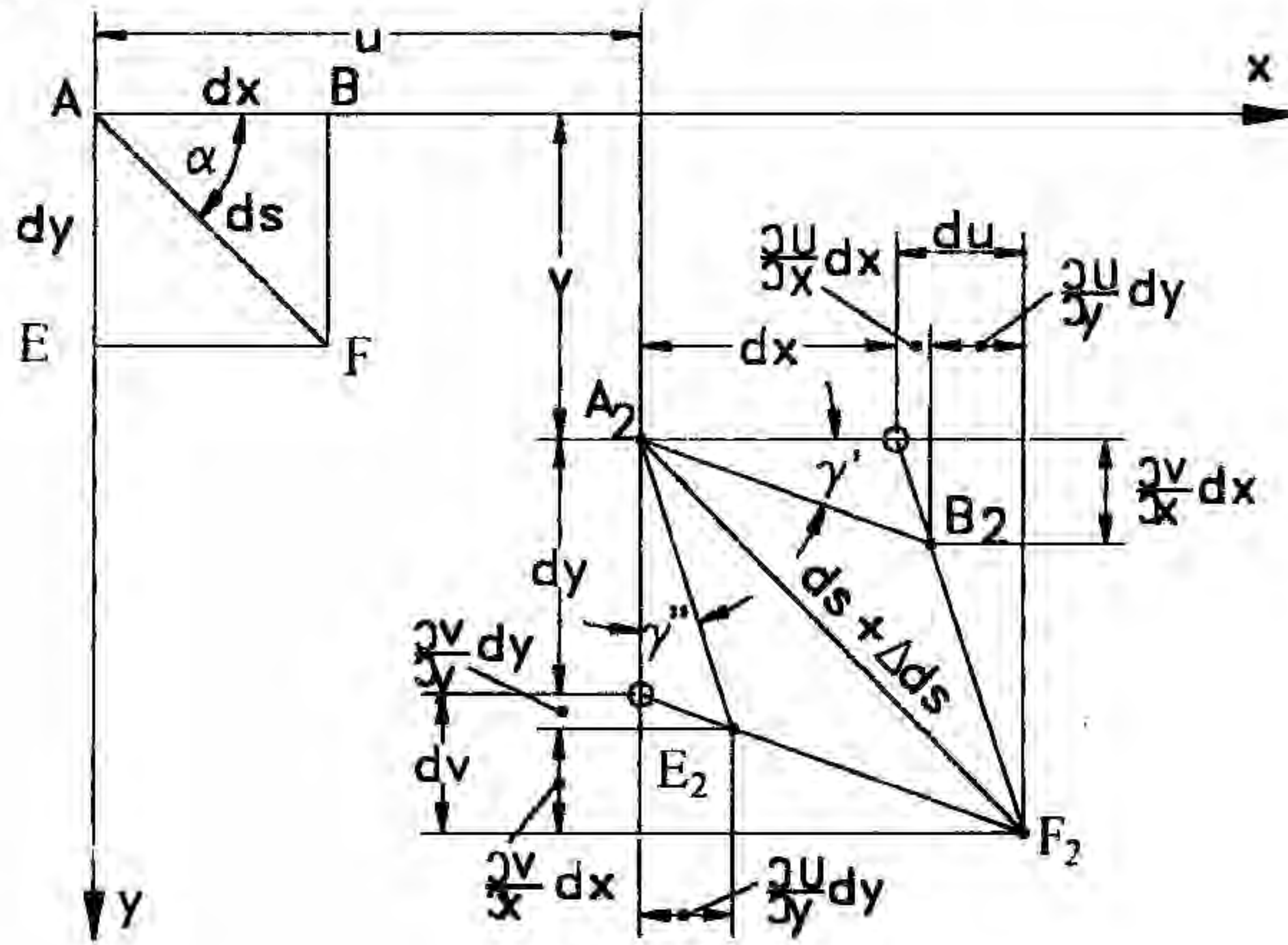


Fig. 3.13

Înainte de deformare lungimea diagonalei AF era  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Proiecția acestei diagonale pe planul xoy, după deformare este  $A_2F_2 = ds + \Delta ds$  și ca urmare va fi:

$$\begin{aligned} (ds + \Delta ds)^2 &= (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 = \\ &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)^2 \end{aligned}$$

După efectuarea calculelor și neglijând infiniții mici de ordinul 2, se obține, după împărțirea cu  $ds^2$ :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy^2}{ds^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{dx dy}{ds^2}$$

Tinând cont că:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$ ,  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ , și  $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$ , va rezulta:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.23)$$



în care s-a notat cu  $\gamma_{xy}$  suma unghiurilor:  $\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x}$  și  $\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Din relația (3.23) se obține expresia alungirii specifice a diagonalei sub forma:

$$\epsilon_\alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.24)$$

Relația (3.24) este de aceeași formă cu prima relație (3.2) care dă tensiunea normală pe o suprafață înclinată. Corespondența între cele două relații este următoarea:  $\sigma_x \Rightarrow \epsilon_x$ ,  $\sigma_y \Rightarrow \epsilon_y$  și  $\tau_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy}/2$ . Pe baza acestei corespondențe, toate rezultatele obținute pentru variația tensiunilor în jurul unui punct pot fi aplicate și la variația deformațiilor. Astfel:

- direcțiile alungirilor specifice principale se pot determina cu

relația: 
$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y};$$

- valorile alungirilor specifice principale sunt date de relația:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.25)$$

- valoarea lunecării maxime:  $\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$

Dacă lunecarea specifică este dificil de măsurat, se pot determina alungirile specifice după o a treia direcție. Astfel, în afară de  $\epsilon_x$  și  $\epsilon_y$  se poate măsura și  $\epsilon_{45^\circ}$ . Pe această bază se determină  $\gamma_{xy}$  din relația (3.24), se înlocuiește în relația (3.25) și se obține:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_x)^2 + (\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_y)^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{2\epsilon_{45^\circ} - \epsilon_x - \epsilon_y}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

Relațiile dintre deplasări și deformații se pot extinde și la starea spațială de deformație. În funcție de deplasările  $u$ ,  $v$  și  $w$  luate pe direcțiile axelor de coordonate, alungirile specifice vor fi:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{și} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

iar lunecările specifice vor fi de forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Tensorul deformațiilor specifice pentru starea spațială de deformații este:



$$\tilde{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

În cadrul acestui tensor avem următoarele egalități:  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ , și  $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ . Ca urmare, dacă se cunosc cele șase componente ale tensorului deformațiilor, se pot determina valorile alungirilor specifice principale și direcțiile acestora. Cele trei alungiri specifice principale sunt valorile proprii ale tensorului  $\tilde{T}_\varepsilon$  și se determină din ecuația:  $\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 - J_2\varepsilon - J_3 = 0$  în care  $J_1$ ,  $J_2$  și  $J_3$  sunt invariantii stării de deformare, asemănători cu  $I_1$ ,  $I_2$  și  $I_3$  - invariantii stării de tensiune. Pentru determinarea direcțiilor principale din cadrul stării de deformare, se procedează analog ca pentru starea de tensiune. În fapt, direcțiile deformațiilor principale coincid cu direcțiile tensiunilor principale. Se poate demonstra că, lunecările specifice au valori extreme în plane înclinate cu  $45^\circ$  față de direcțiile alungirilor specifice principale și sunt egale cu:

$$\gamma_{1,2} = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \gamma_{2,3} = \pm (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \text{ și } \gamma_{3,1} = \pm (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$$

Lunecările specifice se obțin în radiani iar atunci când semnul rezultă pozitiv reprezintă o micșorare a unghiului drept.

Pentru determinarea deformațiilor după o direcție oarecare dată, de cosinuși directori  $l$ ,  $m$  și  $n$  relativi la axele de coordonate  $ox$ ,  $oy$  și  $oz$ , se folosește relația:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2$$

### 3.7. Legea generalizată a lui Hooke

Comportarea elastică a unui material presupune o corespondență biunivocă între tensorul tensiunilor și cel al deformațiilor, de forma:

$$T_\varepsilon = f(T_\sigma)$$

În cazul în care funcția  $f$  este liniară, această legătură poartă numele de *legea generalizată a lui Hooke*. Pentru stabilirea relațiilor dintre tensiunile și deformațiile specifice în cazul stării spațiale de tensiune, se consideră un element de volum sollicitat sub limita de proporționalitate a



materialului, figura 3.14a. Materialul corpului se consideră a fi omogen și izotrop.

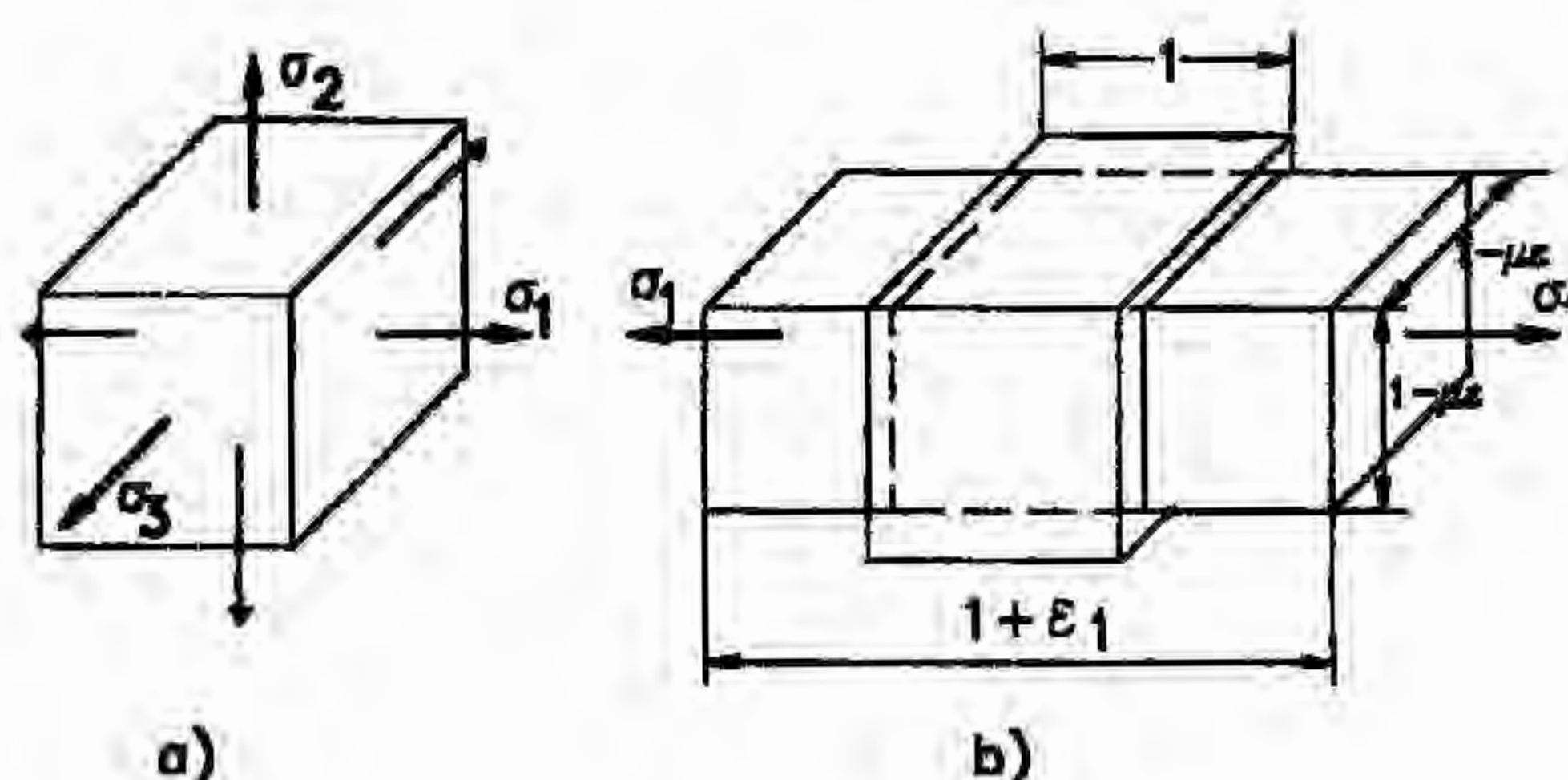


Fig. 3.14

Elementul de volum se direcționează cu laturile în așa fel încât, pe fețele lui să acționeze tensiunile principale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$ . Întrucât ne aflăm în domeniul linear-elastic, se poate utiliza metoda suprapunerii efectelor. Astfel, tracțiunea independentă a tensiunii principale  $\sigma_1$  produce o întindere pe direcția solicitării și contracții pe celelalte două direcții, figura 3.14b. Astfel, vom avea:

$$\epsilon_1^1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \epsilon_2^1 = \epsilon_3^1 = -\mu\epsilon_1^1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}$$

Ca urmare a acțiunii independente a tensiunilor  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  se obțin alungirile specifice sub forma:

$$\epsilon_2^2 = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \epsilon_1^2 = \epsilon_3^2 = -\mu\epsilon_2^2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E} \text{ și}$$

$$\epsilon_3^3 = \frac{\sigma_3}{E}; \quad \epsilon_1^3 = \epsilon_2^3 = -\mu\epsilon_3^3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$

Suprapunând efectele celor trei solicitări date de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  se obțin alungirile specifice:



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\
 \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^3 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\
 \varepsilon_3 &= \varepsilon_3^1 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \\
 \text{sau } \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \text{ si } \\
 \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Aceste relații sunt cunoscute sub numele de *legea generalizată a lui Hooke* și exprimă legătura dintre tensiunile normale principale și alungirile specifice principale. Legea generalizată a lui Hooke păstrează aceeași formă în orice sistem de axe ortogonale. Prin multiplicarea relațiilor (3.26), în ordine, cu  $l^2$ ,  $m^2$  și  $n^2$  și adunarea acestora se obține:

$$\varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 = \frac{1}{E} [(1 + \mu)(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$$

în care s-a ținut cont și că  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Stiind că:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_v &= \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \\
 \sigma_v &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\
 \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z
 \end{aligned}$$

și alegând  $l$ ,  $m$  și  $n$  în mod succesiv drept cosinusi directori ai axelor  $x$ ,  $y$  respectiv  $z$ , va rezulta:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]
 \end{aligned}$$



sau

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(+\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(+\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(+\sigma_y + \sigma_x)]$$

Dacă pe fețele elementului acționează și tensiunile tangențiale, alunecările specifice rezultate sunt date de relațiile:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G};$$

### 3.8. Calculul energiei de deformare

Solicitarea corpului solid deformabil, cu un sistem de sarcini exterioare, produce în interiorul acestuia eforturi. În starea deformată și solicitată, în corpul solid se înmagazinează o cantitate de energie potențială numită *energie de deformare*. Aceasta este energia ce readuce corpul la forma și dimensiunile inițiale atunci când solicitarea a avut loc sub limita de elasticitate.

Se consideră un element de volum cu latura egală cu unitatea pe care se aplică în mod progresiv cele șase componente distincte ale stării de tensiuni:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  și  $\gamma_{zx}$ . Se consideră de asemenea că deformările produse se păstrează în domeniul elastic. Lucrul mecanic produs de forța care acționează numai pe direcția x este:

$$dL = \frac{\sigma_x \cdot 1 \cdot 1 \cdot \varepsilon_x \cdot 1}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} = dU$$

ce reprezintă lucrul mecanic aferent unității de volum sau lucrul mecanic specific sau energia specifică de deformare. Dacă se iau în calcul și efectele produse de celelalte tensiuni, vom avea:

$$dL = 1/2(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

În cazul unui material omogen și izotrop, dacă se ține seama de legea generalizată a lui Hooke se obține:

$$dL = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (3.27)$$



sau în funcție de tensiunile principale:

$$dL = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

Energia totală acumulată ca urmare a sollicitării într-un corp omogen și elastic va fi:

$$U = L = \int_V dL$$

Sub acțiunea unei sollicitări exterioare, un element de volum din interiorul acestui corp își modifică atât volumul cât și forma. Se presupune că o parte din energia elastică acumulată în elementul de volum produce modificarea formei iar cealaltă parte produce modificarea volumului. Partea din energia elastică acumulată în elementul de volum care produce modificarea formei poartă numele de *energie specifică modificatoare de formă*. Partea din energia elastică acumulată în elementul de volum care produce modificarea volumului poartă numele de *energie specifică modificatoare de volum*.

Atunci când pe fețele elementului acționează numai tensiuni normale egale cu cea octaedrică -  $\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  - elementul de volum se deformează uniform după toate direcțiile, tensiunile tangențiale fiind nule. În acest caz, energia specifică modificatoare de volum este:

$$dL_v = \frac{(1-2\mu)}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

care s-a obținut prin înlocuirea în relația (3.27) a valorilor tensiunilor date de:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{oct} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\end{aligned}$$

Atunci când pe fețele elementului de volum acționează numai diferența de tensiuni, acestea produc numai modificarea formei elementului. Ca urmare, energia specifică modificatoare de formă este:

$$dL_r = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$



### 3.9. Relația dintre modulele de elasticitate E și G

Se consideră o placă cu laturile egale cu unitatea, de grosime constantă și confecționată dintr-un material omogen și izotrop, figura 3.15.

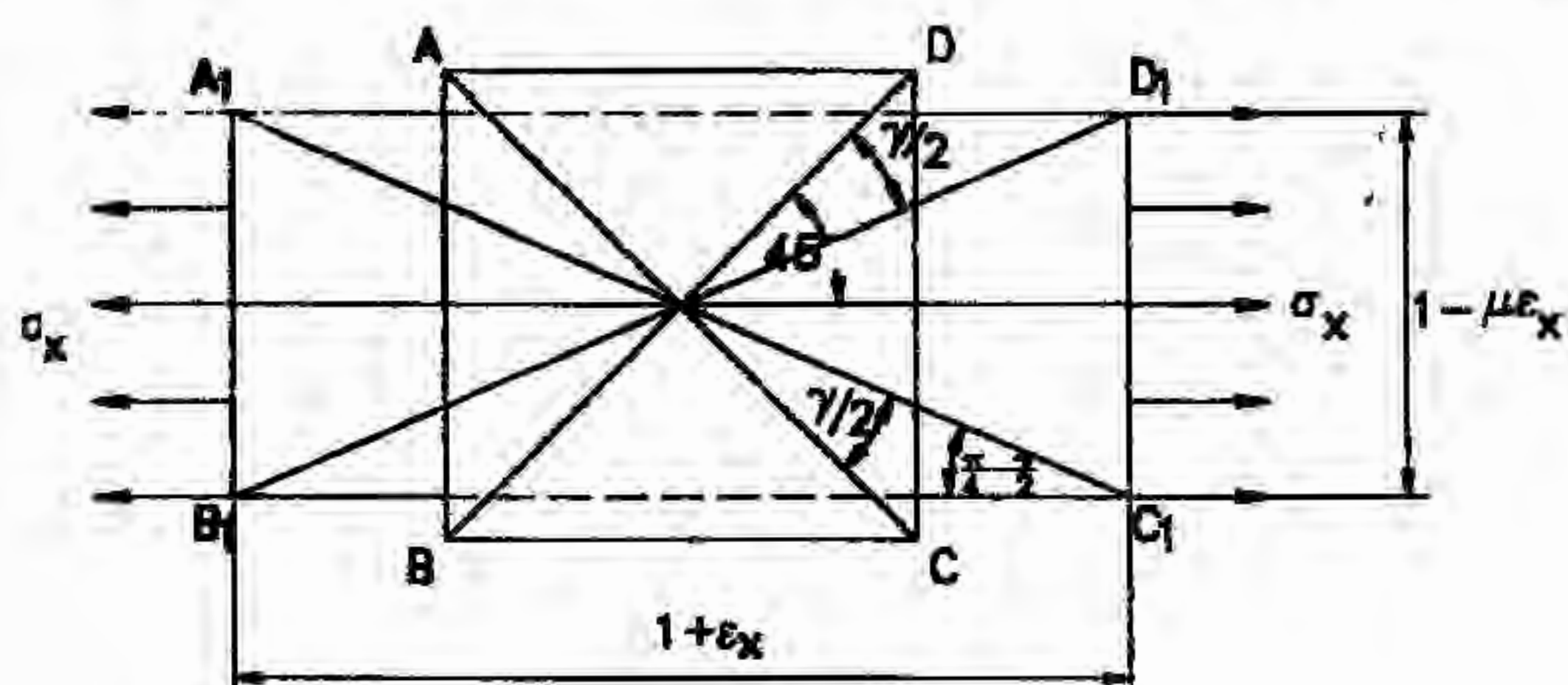


Fig. 3.15

Sub acțiunea tensiunii monoaxiale  $\sigma$ , placa se deformează elastic, atât după direcția de sollicitare cât și perpendicular pe aceasta. Liniile diagonale care formau inițial unghiul  $\pi/4$  cu direcția de sollicitare, formează după deformare unghiul  $\pi/4 - \gamma/2$ , în care  $\gamma$  reprezintă alunecarea specifică produsă de tensiunile tangențiale maxime dispuse sub unghiul  $\pi/4$  față de direcția de sollicitare care este și una din direcțiile principale. Din triunghiul  $A_1B_1C_1$  se obține:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \mu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \quad \text{sau} \quad \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \mu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x}$$

Dacă se ia în considerare ipoteza deformațiilor mici se poate scrie că  $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ . Efectuând calculele și neglijând infiniții mici de ordinul doi va rezulta:

$$\gamma = \epsilon_x (1 + \mu) \quad (3.28)$$

Materialul fiind sollicitat sub limita de proporționalitate este valabilă legea lui Hooke:

$$\epsilon_x = \sigma/E \text{ și } \gamma = \tau/G$$



Înlocuind expresiile pentru  $\varepsilon_x$  și  $\gamma$  date de ultimele relații în egalitatea (3.28) și având în vedere faptul că  $\tau = \frac{\sigma}{2}$ , va rezulta:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.29)$$

Expresia (3.29) reprezintă legătura dintre modulul de elasticitate longitudinal  $E$ , modulul de elasticitate transversal  $G$  și coeficientul lui Poisson  $\mu$ , care sunt caracteristici ce depind de material.

### 3.10. Teorii privind stările limită ale materialelor

În interiorul unui corp solicitat cu un sistem de sarcini, se introduce o stare de tensiuni și deformații oarecare, dacă solicitarea și (sau) configurația corpului sunt oarecare. Această stare trebuie comparată cu *starea limită de rezistență sau deformație* a materialului respectiv. Prin stare limită a unui material se înțelege atingerea valorilor limită ale caracteristicilor mecanice de la care materialul își pierde capacitatea de rezistență sau depășește anumite limite ale deformațiilor. Ca urmare, se pune problema găsirii unui criteriu prin care să se poată compara starea de tensiune sau deformație oarecare cu starea limită de rezistență sau deformație, determinate experimental pentru materialul respectiv. Starea limită se poate considera ca fiind starea de curgere ( $\sigma_c$ ,  $\varepsilon_c$ ) sau starea de rupere ( $\sigma_r$ ,  $\varepsilon_r$ ).

Teoriile de rezistență sau ipotezele de rupere sunt determinate de faptul că, un anumit factor se consideră a fi determinant în atingerea stării limită și că valoarea limită a acestuia este cea de la solicitarea de întindere monoaxială. În aceste condiții, oricare ar fi o stare de tensiuni sau deformații, pe baza factorului presupus a fi determinant, se stabilește o stare echivalentă de întindere monoaxială care se compară cu starea limită, figura 3.16.

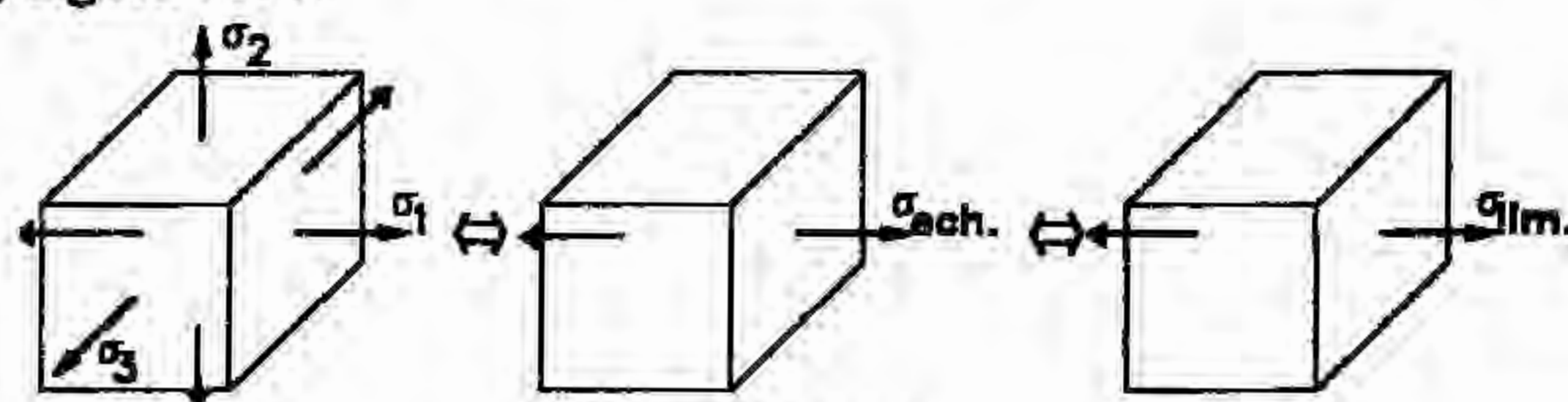


Fig. 3.16



Deoarece se poate stabili o relație de tipul  $\sigma_{ech} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , rezultă că starea limită se poate exprima printr-o funcție de forma:  $s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  care în sistemul triortogonal de axe  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  reprezintă o suprafață. Dacă starea de tensiuni oarecare definește un punct ale cărui coordonate îl plasează în interiorul suprafeței, atunci nu este atinsă starea limită de întindere monoaxială.

Teoriile de rezistență au la bază un anumit factor sau criteriu considerat ca fiind preponderent în atingerea stării limită. În funcție de acest criteriu se cunosc mai multe teorii de rezistență care se vor enunța în cele ce urmează. Trebuie precizat că, nici una dintre aceste teorii nu oferă o siguranță totală. De cele mai multe ori aceste teorii trebuiesc verificate experimental pentru a avea certitudinea corectitudinii valorilor obținute.

3.9.1 *Teoria tensiunii normale maxime* precizează că, se atinge starea periculoasă într-un anumit punct din corpul solicitat dacă, în acel punct, tensiunea normală maximă devine egală cu tensiunea normală din cadrul stării limită  $\sigma_{lim}$ . Așa cum se știe, orice stare de tensiuni este perfect determinată dacă se cunosc tensiunile principale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$ . Intrucât se presupune că se fac notațiile tensiunilor principale astfel încât  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , rezultă că, relația de verificare a acestei ipoteze este:

$$\sigma_{ech} = |\sigma_1| \leq \sigma_{lim} = \sigma_a$$

în care  $\sigma_a$  este tensiunea admisibilă obținută prin încercarea de tracțiune cu luarea în considerație a unui coeficient de siguranță. Limitele acestei teorii sunt următoarele:

- la solicitarea de compresiune triaxială se constată experimental că, ruperea are loc la tensiuni mult mai mari decât cele admisibile stabilite prin încercarea de tracțiune (întindere sau compresiune) monoaxială;

- la solicitarea de forfecare pură  $\sigma_{max} = \sigma_1 = \tau_{lim} = \sigma_{lim}$ .

Experiența arată însă că, ruperea are loc pentru tensiuni  $\tau_{lim} = \frac{\sigma_{lim}}{2}$ ;

- nu se ține cont de rezistența la rupere a materialelor, diferită la solicitarea de întindere față de solicitarea de compresiune.

Această teorie poate fi folosită cu rezultate bune pentru stări cu tensiuni de întindere la care ruperea se produce prin smulgere.



3.9.2. *Teoria alungirii specifice maxime* consideră că într-un punct din corpul solicitat se atinge starea periculoasă atunci când în acel punct alungirea specifică maximă atinge alungirea corespunzătoare stării limită. Astfel:

$$\varepsilon_{ech} = |\varepsilon_{max}| \leq \varepsilon_{lim} = \varepsilon_a$$

în care  $\varepsilon_a$  este alungirea specifică admisibilă corespunzătoare tensiunii admisibile. Pentru starea spațială de tensiuni și deformație, ținând seama de legea lui Hooke generalizată, se obține:

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} \text{ sau}$$

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_a$$

Limitele acestei teorii sunt următoarele:

- pentru materialele care au un modul de elasticitate ridicat este destul de dificil de stabilit o alungire specifică admisibilă;
- materialele ce conțin încă din procesul de fabricație o anumită porozitate au posibilitați de deformare diferite la solicitarea de tracțiune față de solicitarea de compresiune.

3.9.3. *Teoria tensiunii tangențiale maxime.* Această teorie presupune că, se atinge starea periculoasă atunci când tensiunea tangențială maximă, ce se atinge într-un anumit punct al corpului solicitat, devine egală cu valoarea tensiunii tangențiale limită stabilită pentru o epruvetă încercată la solicitarea de tracțiune monoaxială. Pentru starea spațială de tensiuni avem:

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{3,1} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2};$$

și atunci:  $\tau_{max} = \max(|\tau_{1,2}|, |\tau_{2,3}|, |\tau_{3,1}|) \leq \tau_a$ . De aici rezultă:

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \leq \sigma_a$$

Această teorie nu precizează o stare limită pentru planele în care  $\tau_{max} = 0$  deci în zona compresiunilor uniforme triaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_0$ ) sau în zona tracțiunilor uniforme triaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ ). Se presupune că distrugerea corpurilor nu poate avea loc pe baza stărilor de tensiuni de acest fel. Acest lucru este parțial adevărat pentru compresiune dar total fals pentru tracțiune. În afară de aceste două cazuri însă, teoria tensiunilor tangențiale maxime dă rezultate destul de



apropiate de cele experimentale. O corecție asupra acestei ipoteze a fost făcută cu ajutorul interpretării grafice a condițiilor limită dată de Mohr, prin intermediul *teoriei tensiunilor limită*. Această teorie admite de asemenea că starea periculoasă se atinge în planele de alunecare. Pentru o stare spațială de tensiune, în care  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , pe o fațetă oarecare tensiunea tangențială este dependentă de tensiunea normală:  $\tau = f(\sigma)$ . Într-un sistem de axe de coordonate  $\sigma\tau$ , se pot trasa cercurile lui Mohr pentru diferite stări limită ale tensiunii tangențiale maxime:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

Înfășurătoarea curbelor rezultate poartă numele de curbă intrinsecă, figura 3.17.

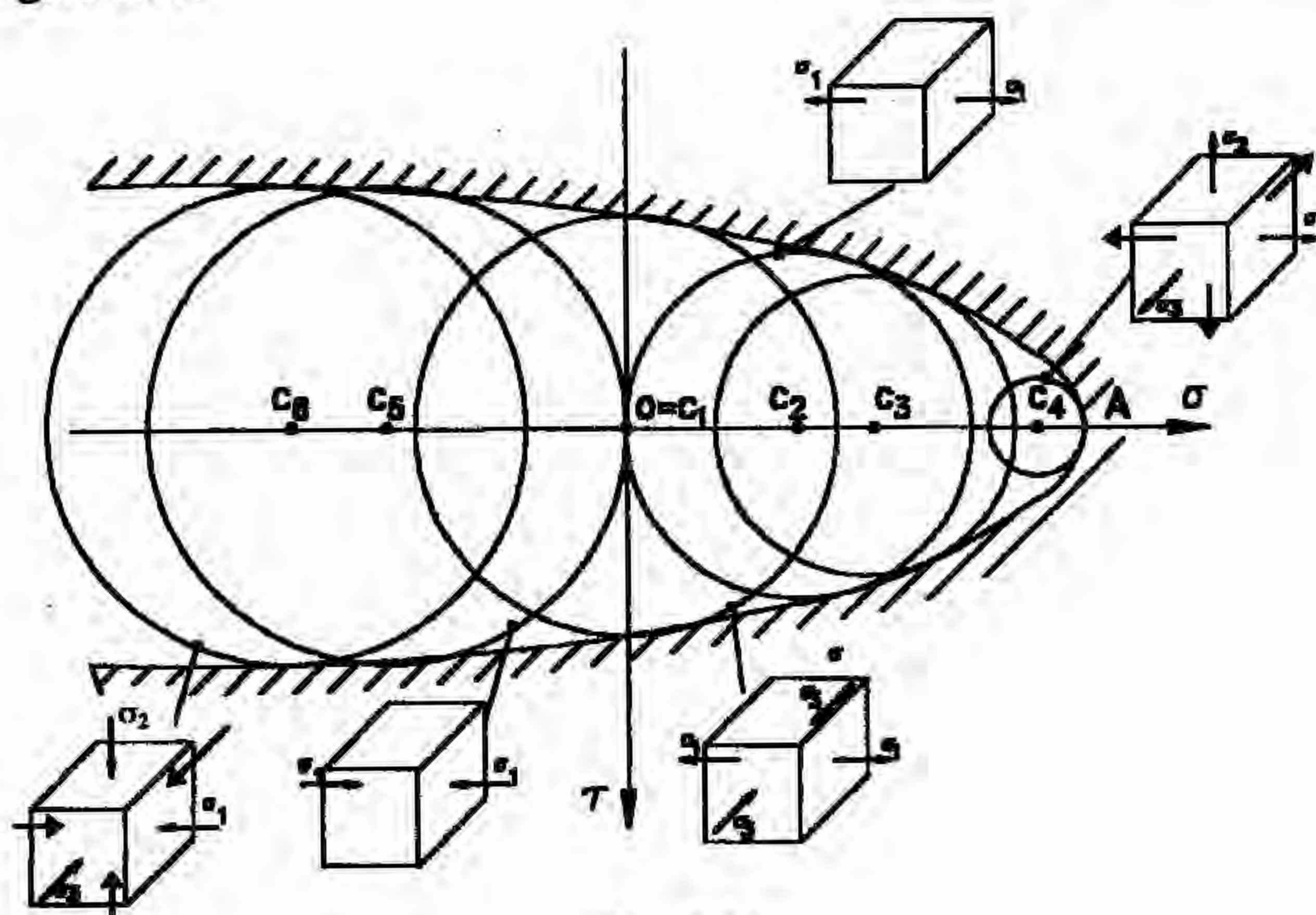


Fig. 3.17

Cercul mare al lui Mohr are raza  $\tau_{\max}$ . Pentru a nu se depăși starea limită trebuie ca acest cerc, pentru oricare din solicitările posibile, să nu intersecteze curba intrinsecă. Se pot ivi trei situații:

- stare de tensiuni posibilă, în cazul în care cercul se găsește în interiorul suprafeței delimitate de acesta;



- stare limită, atunci când cercul este tangent la curba intrinsecă;
- stare imposibilă, dacă cercul taie curba intrinsecă.

În zona în care se produc întinderi, raza cercurilor se micșorează iar punctul A corespunde întinderii triaxiale uniforme în care  $\tau = 0$ . Aici ruperea nu se poate produce prin alunecare dar se produce prin smulgere. Curba intrinsecă este foarte deschisă pentru materialele fragile a căror rezistență la întindere este mult mai mică decât rezistența la compresiune, figura 3.18a. Dacă materialul rezistă la fel la compresiune ca la tracțiune, cercurile  $C_1$  și  $C_2$  au diametre egale, figura 3.18b.

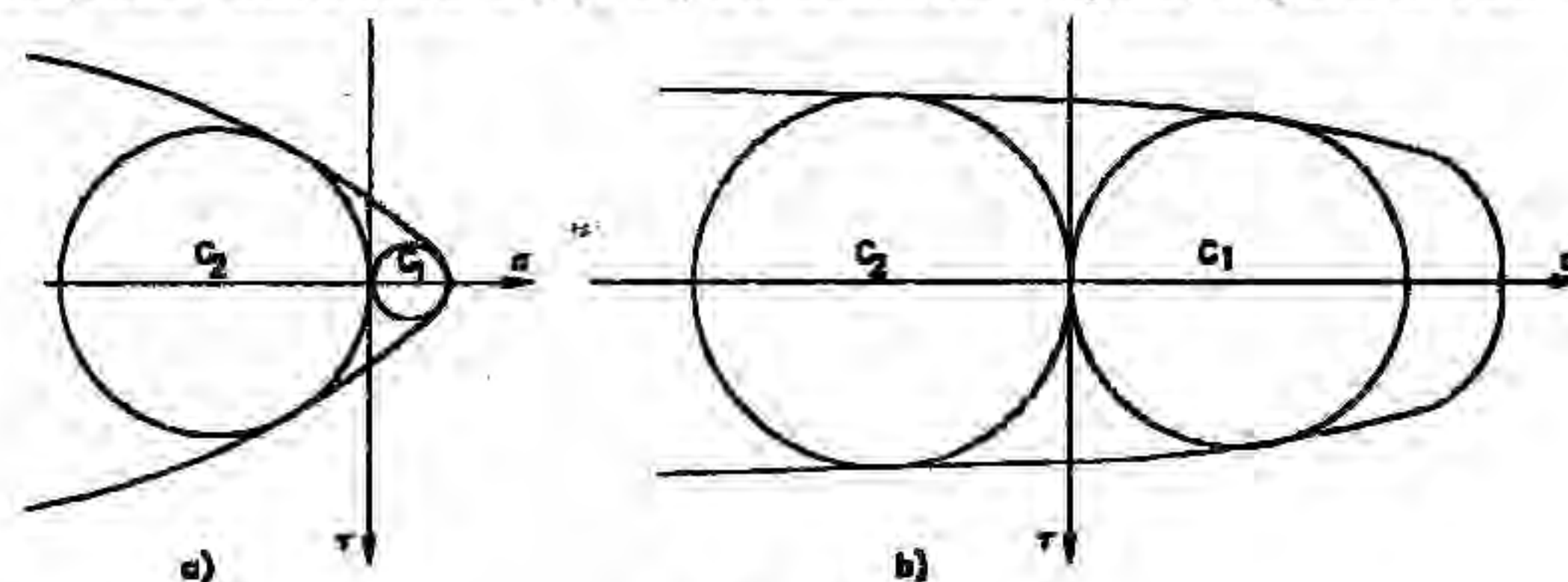


Fig. 3.18

Aplicarea teoriei lui Mohr întâmpină dificultăți datorită necunoașterii curbelor intrinseci pentru materialele utilizate. Astfel, în cazul materialelor cu comportare diferită la întindere față de tracțiune, curba intrinsecă se rezumă la două drepte tangente fiecare la cercurile limită, figura 3.19.

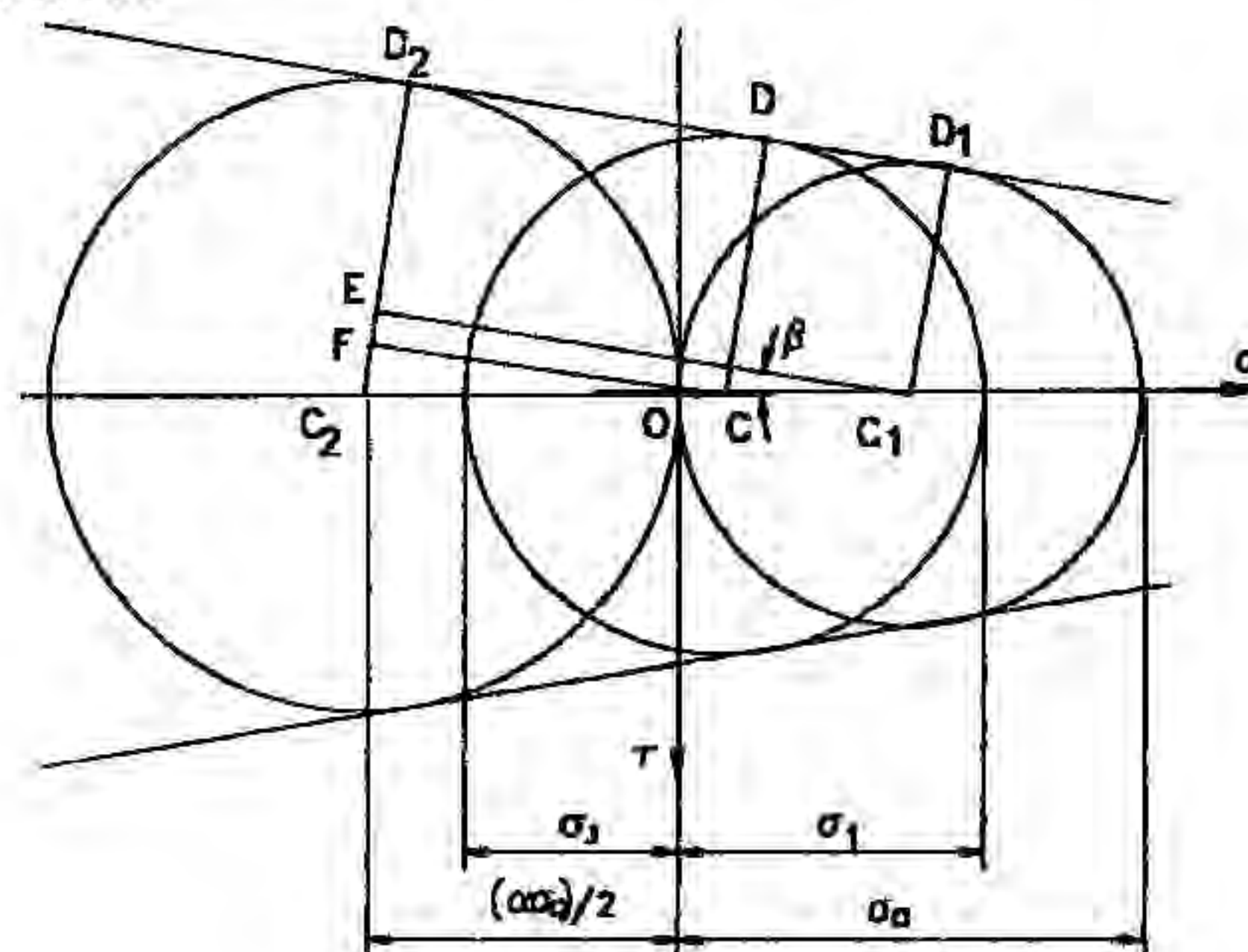


Fig. 3.19



Pentru cercul cu centrul în C situația limită rezultă din exprimarea segmentului CD (raza cercului) în funcție de rezistențele admisibile la tracțiune,  $\sigma_a$ , și la compresiune  $\alpha\sigma_a$  în care  $\alpha > 1$ . Astfel:

$$CD = C_1D_1 + CC_1 \operatorname{tg} \beta \quad \text{iar} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{C_2E}{C_1C_2} = \frac{C_2D_2 - ED_2}{OC_2 + OC_1}$$

deci:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_a}{2} + \left( \frac{\sigma_a}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \frac{\frac{\alpha\sigma_a}{2} - \frac{\sigma_a}{2}}{\frac{\alpha\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2}}$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{ech} = \sigma_a = \sigma_1 - \frac{1}{\alpha} \sigma_3 \quad \text{relație}$$

valabilă pentru stări de solicitare cuprinse între întinderea și compresiunea monoaxiale. Într-un sistem de coordonate  $\sigma_1, \sigma_3$ , această relație reprezintă dreapta AB din figura 3.20.

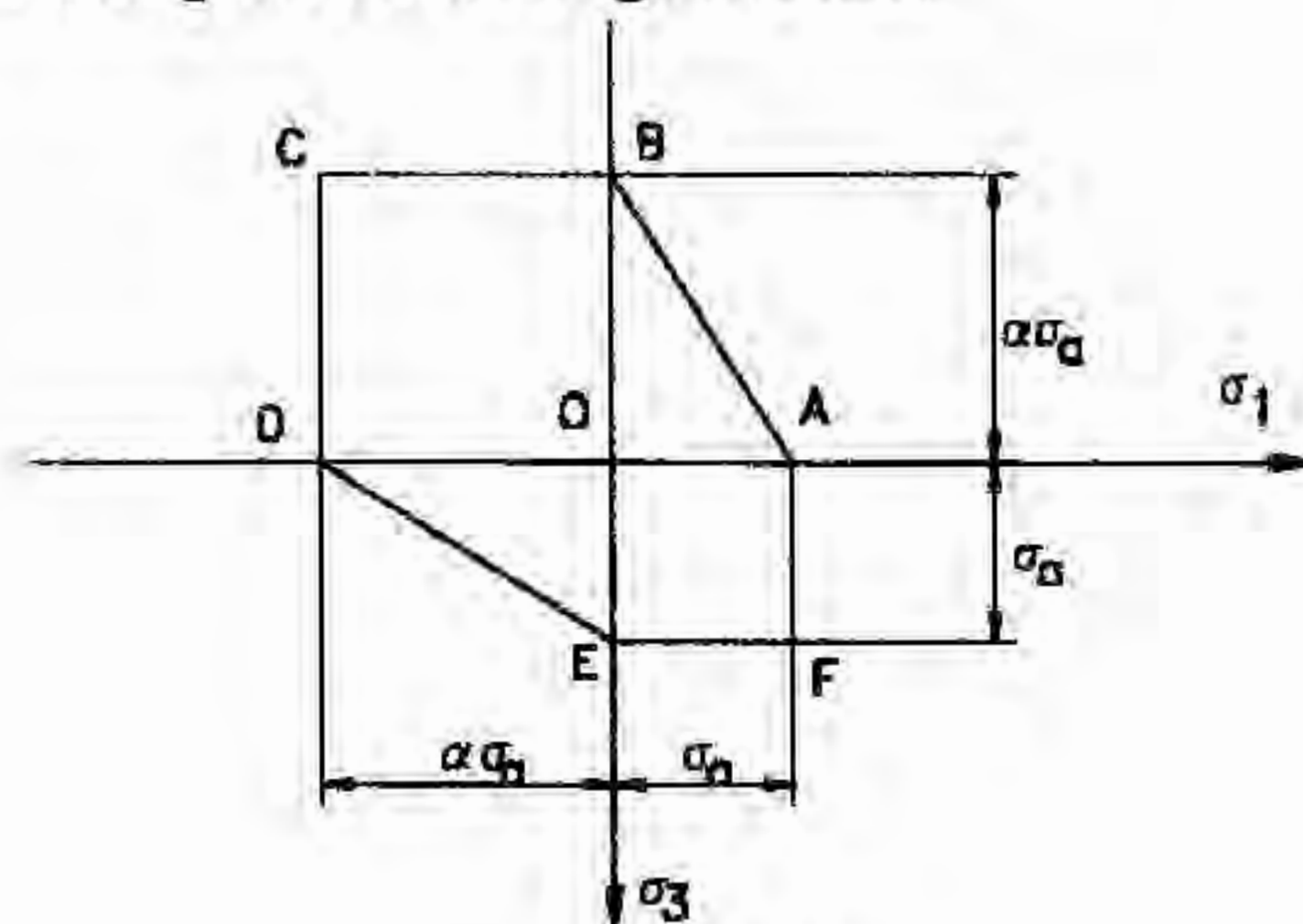


Fig. 3.20

Pentru  $\sigma_3 > 0$  și  $\sigma_1 < 0$ , reprezentarea este dată de dreapta DE. În acest fel se întregeste poligonul care constituie reprezentarea curbei limită a teoriei lui Mohr pentru stările de tensiune plană. Această teorie neglijează importanța tensiunii normale intermediare,  $\sigma_2$ , care poate avea efect asupra condiției de plasticitate a materialelor.

**3.9.4. Teoria energiei specifice de deformare** presupune că, se atinge starea periculoasă atunci când într-un punct al corpului energia specifică de deformare  $dL$  atinge valoarea energiei specifice limită pentru încercarea de tracțiune monoaxială. În acest caz:



$$dL < dL_u = \frac{\sigma_u^2}{2E}$$

în care  $dL_u$  este energia specifică de deformare corespunzătoare tensiunii limită determinate pentru încercarea de tracțiune monoaxială. Astfel va rezulta:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} < \sigma_u$$

3.9.5. *Teoria energiei specifice modificatoare de formă.* Conform acestei teorii, trebuie considerată drept principală cauză a distrugerii numai energia specifică modificatoare de formă. Pentru o stare de tensiuni oarecare, energia specifică modificatoare de formă se determină cu expresia:

$$dL_m = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

iar valoarea limită pentru solicitarea de tracțiune monoaxială este:

$$dL_u = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_u^2$$

Astfel, starea limită se exprimă prin relația:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_u$$

Pentru că la  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$  se obține  $0 = \sigma_u$  rezultă că, atât pentru tracțiune cât și pentru compresiune uniformă triaxială, starea limită nu se atinge. Afirmația este valabilă doar pentru compresiunea uniformă triaxială.



## **CAPITOLUL 4**

### **SOLICITAREA AXIALA**

- 
- 4.1. Introducere
  - 4.2. Calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi
  - 4.3. Calculul tensiunilor și al deformațiilor
  - 4.4. Relații de dimensionare și verificare
  - 4.5. Calculul energiei totale de deformație
  - 4.6. Calculul deplasărilor secțiunilor transversale  
ale barelor drepte nerezemate
  - 4.7. Solicitarea sub acțiunea greutății proprii
  - 4.8. Bară de egală rezistență
  - 4.9. Sisteme static nedeterminate
  - 4.10. Sisteme de bare
  - 4.11. Bare supuse variațiilor de temperatură
  - 4.12. Calculul firelor și cablurilor
- 

#### **4.1. Introducere**

O bară dreaptă este supusă la solicitare axială (tracțiune simplă) atunci când, sub acțiunea unui anumit sistem de sarcini exterioare, în orice secțiune transversală a barei se dezvoltă numai eforturi dirijate după axa geometrică a barei respective. În lungul barei efortul axial poate fi constant sau variabil. Într-o secțiune transversală a barei efortul axial este dat de suma proiecțiilor după axa barei a tuturor tensiunilor care se dezvoltă în acea secțiune. În acest capitol nu se va studia fenomenul de flambaj care reprezintă pierderea stabilității barelor lungi sub acțiunea eforturilor axiale de compresiune.

---



În practică există puține cazuri în care să avem solicitare axială pură fie și numai pentru faptul că, eforturile introduse nu sunt dirijate întotdeauna chiar după axa geometrică a barei. Se poate considera totuși că, o bară este solicitată numai la întindere sau compresiune dacă, în afară de efortul axial celelalte eforturi, introduse în oricare secțiune transversală a barei, sunt neglijabile.

#### 4.2. Calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi

Se consideră o bară dreaptă, încastrată la un capăt și liberă la celălalt, solicitată la capătul liber de o forță concentrată a cărei direcție coincide cu direcția axei geometrice a barei, figura 4.1a.

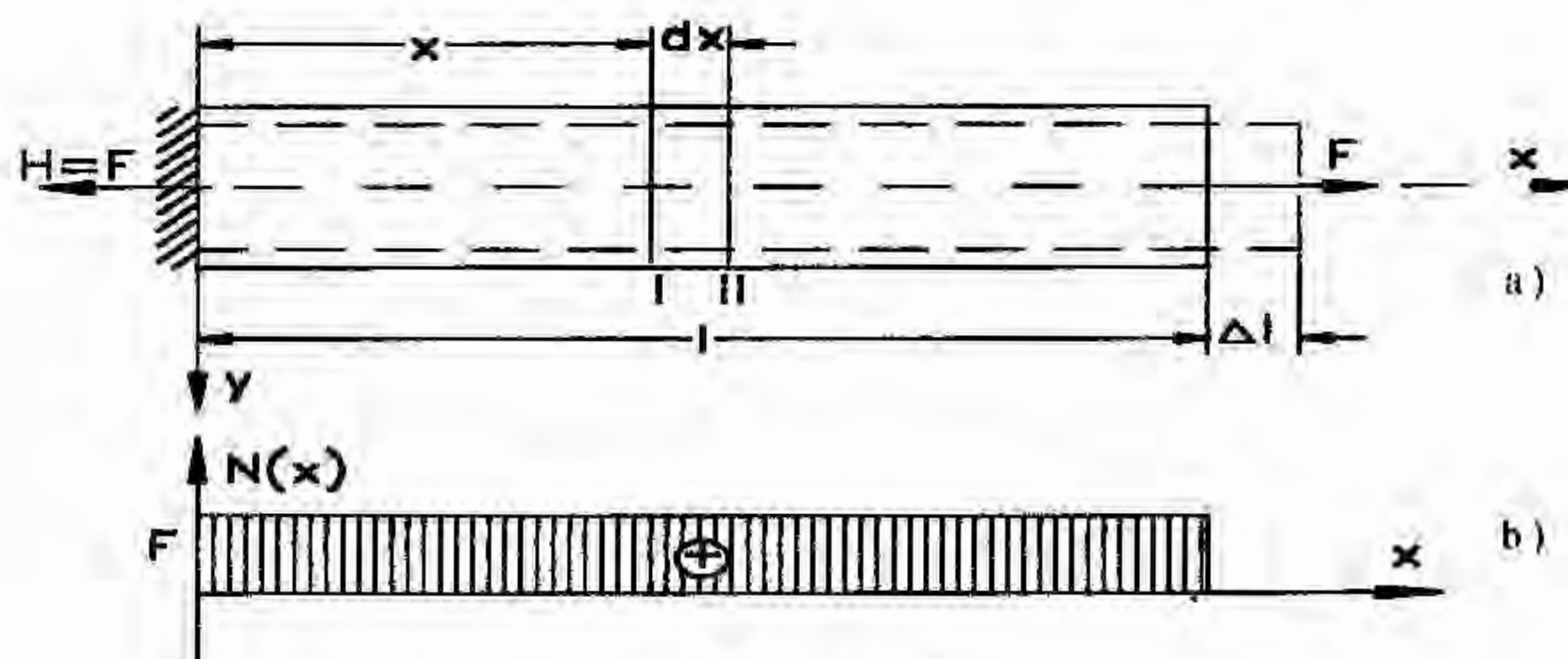


Fig. 4.1

Calculul reacțiunilor din încastrare se face pe baza condițiilor de echilibru static al barei. În cazul unei solicitări exterioare oarecare, în încastrare ar apărea mai multe reacțiuni. În acest caz în care solicitarea se produce doar pe direcție axială, în încastrare va apărea o singură reacțiune dirijată de asemenea pe direcția axei barei. Considerându-se valabilă ipoteza deformațiilor mici, ecuațiile de echilibru se scriu pentru bara aflată în stare nedeformată de sarcinile la care este supusă. Din singura ecuație de echilibru static care se poate scrie în acest caz și anume, ca suma forțelor după axa  $x$  (axa geometrică a barei) să fie egală cu zero, va rezulta:

$$H = F$$



Fie secțiunea I, normală pe axa barei aflată la distanța  $x$  de încastrare. Ca urmare a solicitării exterioare, în această secțiune se introduce un efort ce are direcția tot după axa barei. *Efortul axial din secțiunea considerată este egal cu suma proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor situate la stânga sau la dreapta acelei secțiuni.* Pentru determinarea mărimii efortului axial din secțiunea I se procedează în felul următor:

- se îndepărtează (imaginar) partea de bară din stânga secțiunii I (de exemplu);
- se înlocuiește în secțiunea rezultată a părții din dreapta, acțiunea inițială a părții îndepărtate asupra părții rămase;
- această acțiune reprezintă tocmai efortul axial  $N(x)$  în secțiunea considerată și ca urmare se poate scrie ca fiind:

$$N(x) = H = F = \text{ct.}$$

Pentru determinarea *semnului* efortului axial  $N(x)$  se consideră (prin convenție) următoarele: forța axială ce intră în componența efortului axial este *pozitivă* dacă, prin deplasarea ei în secțiunea barei rămase produce *întinderea* acesteia și *negativă* dacă produce *compresiunea* barei rămase. În cazul nostru, forța exterioară  $H = F$  produce întinderea părții din dreapta (rămase) barei și ca urmare este pozitivă. Întrucât nu există vreo altă forță axială de-a lungul barei, diagrama de variație a efortului axial arată ca în figura 4.1b.

#### 4.3. Calculul tensiunilor și al deformațiilor

Se consideră o bară dreaptă confecționată dintr-un material omogen și izotrop. Bara are lungimea  $l$ , secțiunea constantă, încastrată la un capăt și liberă la celălalt unde este solicitată cu o forță concentrată  $F$ , figura 4.1a. Se consideră valabilă ipoteza lui Bernoulli conform căreia, o secțiune plană și perpendiculară pe axa barei înainte de solicitare rămâne plană și perpendiculară pe axa barei și în timpul solicitării. Această ipoteză nu este pe deplin verificată în zonele din imediata vecinătate a încastrării și a punctului de aplicație al forței, figura 1.32. Dacă efortul axial, respectiv tensiunile, se calculează la o anumită distanță de zonele menționate se consideră valabil principiul lui Saint-Venant după care



starea de tensiuni la o anumită distanță de aceste zone nu este influențată de modul efectiv de aplicare a sarcinilor.

Sub acțiunea forței  $F$  bara se deformează: pe direcția axei barei se produce o alungire a acesteia, iar secțiunile transversale își micșorează aria. Pentru ca secțiunea I să rămână plană și perpendiculară pe axa barei (Ipoteza lui Bernoulli) trebuie ca toate punctele acesteia să se deplaseze în timpul solicitării cu aceeași cantitate  $\Delta x = ct.$  Efortul axial  $N(x)$  este dat de rezultanta tuturor tensiunilor normale care se dezvoltă în secțiunea considerată, figura 4.2.

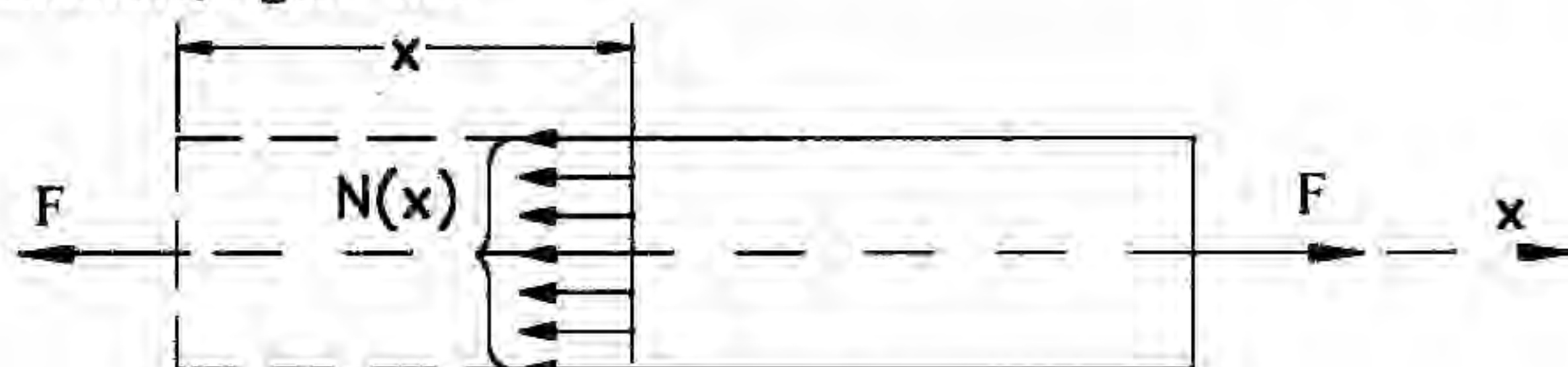


Fig. 4.2

Dacă deplasările fiecărui punct al secțiunii I sunt aceleași rezultă că și tensiunile din punctele respective sunt aceleași. Ca urmare vom avea:  $\sigma(x) = \epsilon_x E = \text{const.}$ . Din prima relație de echivalență (1.9) între eforturile secționale și tensiuni rezultă că:

$$N(x) = \int_A \sigma(x) dA = \sigma(x) \int_A dA = \sigma(x) \cdot A(x)$$

de unde se obține expresia care dă tensiunea normală introdusă în secțiunea transversală a unei bare drepte solicitate la întindere sau

compresiune: 
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

Alungirea specifică sau alungirea unității de lungime este dată de relația:

$$\epsilon(x) = \frac{\Delta x}{x}$$

sau ținând seama de legea lui Hooke: 
$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

Alungirea totală a barei va fi: 
$$\Delta l = \int_l \epsilon(x) dx = \int_l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

În cazul concret din figura 4.1 în care  $N(x) = ct.$  și  $A(x) = ct.$ , vom avea:



$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx = \frac{Nl}{EA}$$

Se constată că alungirea  $\Delta l$  este cu atât mai mică cu cât produsul dintre modulul de elasticitate longitudinal și aria secțiunii transversale este mai mare. Acest produs poartă numele de *modul de rigiditate* la întindere-compresiune al secțiunii transversale.

#### 4.4. Relații de dimensionare și verificare

Relația  $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$  se poate utiliza pentru calculul

componențelor ce lucrează sub acțiunea eforturilor axiale. Variantele în care poate apărea această relație sunt descrise mai jos.

##### 1. Calculul de dimensionare

Cunoscând variația eforturilor axiale introduse în bară ca urmare a solicitării exterioare și rezistența admisibilă a materialului, se poate determina *secțiunea minimă necesară* pe care trebuie să o aibe bara. Dimensionarea se poate face din două condiții:

- din condiția de rezistență când se impune ca tensiunea efectivă maximă introdusă în bară ca urmare a solicitării exterioare să nu depășească tensiunea admisibilă a materialului din care este confecționată bara. Relația utilizată în acest scop este:

$$\sigma_{ef \max} \leq \sigma_a \text{ sau } \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq \sigma_a$$

relație din care va rezulta aria minimă necesară;

- din condiția de rigiditate când se impune ca deformația efectivă maximă să nu depășească o anumită deformație impusă și considerată ca

limită,  $\epsilon_a$ :

$$\epsilon_{ef \max} \leq \epsilon_a \text{ sau } \left( \frac{N}{EA} \right)_{\max} \leq \epsilon_a$$

relație din care va rezulta aria minimă necesară.

2. *Calculul de verificare* se face pentru piesele la care se cunosc: dimensiunile secțiunilor transversale, eforturile la care sunt supuse acestea și materialul din care sunt confecționate. În aceste condiții se



verifică dacă se depășește sau nu tensiunea admisibilă, stabilită pentru materialul respectiv, de către tensiunea maximă introdusă în bară:

$$\sigma_{cf \max} \leq \sigma_a$$

Dacă inegalitatea se verifică, piesa proiectată, confecționată din materialul cu tensiunea admisibilă respectivă, rezistă la sarcinile propuse.

3. *Calculul sarcinii capabile.* Cunoscând tensiunea admisibilă  $\sigma_a$  și secțiunea barei  $A$ , se calculează sarcina capabilă de a fi preluată de bara supusă la solicitarea axială astfel încât tensiunea maximă introdusă în bară să nu depășească tensiunea admisibilă:

$$N_{cap} \leq A\sigma_a$$

Relațiile de calcul prezentate în cele trei cazuri sunt valabile atât pentru întindere cât și pentru compresiune. Trebuie avute în vedere totuși câteva precauții și anume:

- pentru solicitarea la compresiune a barelor lungi trebuie să se țină seama de posibilitatea apariției fenomenului de flambaj;
- sunt materiale care au o comportare diferită la întindere față de compresiune și ca urmare au și tensiuni admisibile diferite notate de obicei cu  $\sigma_{at}$  și  $\sigma_{ac}$ .

#### 4.5. Calculul energiei totale de deformare

Expresia generală dată de relația (3.27) pentru energia potențială specifică de deformare se particularizează pentru solicitarea axială. Astfel, vom avea:

$$dL = dU = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

Energia potențială totală acumulată în bară ca urmare a solicitării exterioare va fi:

$$L = U_{tot} = \int_V dL = \int_V \frac{\sigma^2(x)}{2E} dV = \sum_i \int_0^l \frac{N^2(x_i)}{2EA^2(x_i)} A(x_i) dx_i = \sum_i \int_0^l \frac{N^2(x_i)}{2EA(x_i)} dx_i$$

Dacă pe fiecare regiune în parte, atât efortul axial cât și aria secțiunii transversale sunt constante, energia totală de deformare se poate calcula

cu relația:

$$U_{tot} = \sum_i \frac{N^2(x_i) l_i}{2EA(x_i)} \quad (4.1)$$



Din această relație se constată că, indiferent dacă unele din regiunile barei sunt supuse la tracțiune și altele la compresiune, energiile se cumulează astfel încât, energia totală dezvoltată în bară va reprezenta tot timpul o valoare pozitivă.

#### 4.6. Calculul deplasărilor secțiunilor transversale ale barelor drepte nerezemate

Secțiunile transversale ale barelor drepte solicitate axial se deplasează față de poziția inițială de dinaintea solicitării. Pentru o bară rezemată, pozițiile finale ale secțiunilor transversale, atunci când bara rămâne solicitată, se pot determina dacă se consideră ca reper o secțiune aflată în unul din reazemele respective pentru care se cunoaște faptul că deplasarea este nulă.

În mod curent, pentru barele nerezemate solicitate axial, se consideră unul din capetele barei ca fiind fix și se trasează o diagramă convențională a deplasărilor ce are rolul de a stabili deplasările relative între diferitele secțiuni ale barei.

Fie o bară dreaptă, nerezemată, aflată în echilibru static sub acțiunea unui sistem de exterior de sarcini axiale, figura 4.4a.

Se trasează două diagrame convenționale (notate cu 1 și n) considerând, succesiv, punctul 1, respectiv punctul n ca fiind fixe ( $\delta_1=0$  și  $\delta_n=0$ ), figura 4.4.b. Pentru trasarea acestor diagrame se folosește relația:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \int_i \frac{N(x_i)}{EA(x_i)} dx_i$$

în care:

- $\delta_i$  și  $\delta_{i+1}$  reprezintă deplasările secțiunilor din dreptul punctelor i, respectiv i+1;
- $N(x_i)$  și  $A(x_i)$  reprezintă expresiile variației efortului axial respectiv a ariei secțiunii transversale pe regiunea i - i+1;
- E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal.

Se precizează faptul că, relativ la capătul unei regiuni, semnul deplasării unei secțiuni de pe acea regiune corespunde cu semnul efortului axial corespunzător, figura 4.4d. Pentru diagrama convențională trasată față de punctul 1 de exemplu, semnul "+" arată o depărtare a



secțiunilor respective față de punctul 1 în sensul efortului  $N(x)$  iar semnul "-" arată o depărtare a secțiunilor respective față de punctul 1.

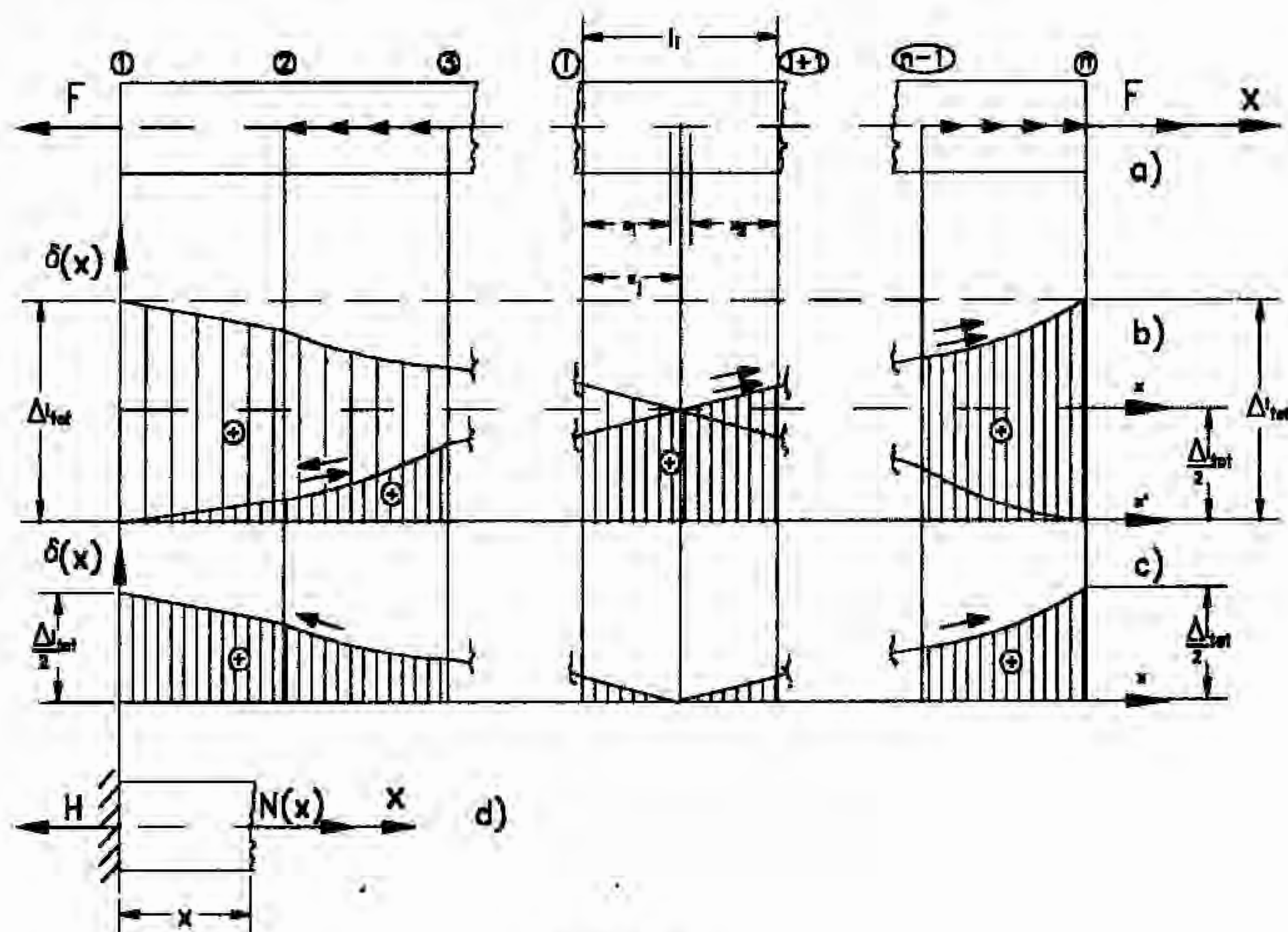


Fig. 4.4

Se poate constata cu ușurință că, diagramele convenționale 1 și n din figura 4.4b se vor intersecta în cel puțin un punct. Această afirmație este adevărată deoarece:

- pentru fiecare din cele două diagrame se pornește din zero (luat în capătul din stânga respectiv capătul din dreapta al barei);
- alungirea totală a barei sau deplasarea relativă a capetelor acesteia rezultă în orice condiții cu aceeași valoare și același semn:

$$\Delta_{tot}^I = \Delta_{tot}^n;$$

- orice traseu ar urma cele două diagrame convenționale, între 0 și  $\Delta_{tot}^I$  respectiv între 0 și  $\Delta_{tot}^n$ , va exista cel puțin un punct de intersecție.



Presupunem că punctul de intersecție al celor două diagrame convenționale se găsește în regiunea  $i - i+1$  a barei. Deplasarea secțiunii  $x_i$  corespunzătoare punctului respectiv, în cazul în care se consideră punctul  $i$  ca fiind fix, este dată de relația:

$$\delta^I(x_i) = 0 + \Delta l_{1,2} + \dots + \Delta l_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1$$

În cazul în care se consideră punctul  $n$  ca fiind fix, deplasarea aceleiași secțiuni va fi:

$$\delta^n(x_i) = 0 + \Delta l_{n,n-1} + \dots + \int_0^{l-x_i} \frac{N(x_2)}{EA(x_2)} dx_2$$

Dacă, așa cum s-a presupus, cele două diagrame convenționale se intersectează în punctul din dreptul secțiunii  $x_i$ , va rezulta:

$$\delta^I(x_i) = \delta^n(x_i) \Rightarrow \Delta l_{1,2} + \dots + \Delta l_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 = \Delta l_{n,n-1} + \dots + \int_0^{l-x_i} \frac{N(x_2)}{EA(x_2)} dx_2 \quad (4.2)$$

În cazul real în care bara nu este rezemată, capetele acesteia se vor deplasa cu  $\delta_1$  respectiv  $\delta_n$ . Expresia deplasării aceleiași secțiuni  $x_i$  în cazul real se va putea scrie astfel:

$$\begin{aligned} \delta^{REAL}(x_i) &= \delta_1 - \left( \Delta l_{1,2} + \dots + \Delta l_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 \right) = \\ &= \delta_n - \left( \Delta l_{n,n-1} + \dots + \int_0^{l-x_i} \frac{N(x_2)}{EA(x_2)} dx_2 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Deplasarea  $\delta^{REAL}(x_i)$  a fost calculată începând din capătul din stânga (prima egalitate) și din capătul din dreapta (a doua egalitate).

Din relația (4.2) se observă că termenii care apar în parantezele din relația (4.3) sunt egali și ca urmare va rezulta:

$$\delta_1 = \delta_n$$

Se constată așadar că, deplasările capetelor barei nerezemate supusă solicitării axiale sunt egale.

În orice condiții avem satisfăcută relația:  $\delta_1 + \delta_n = \Delta l_{tot}$  și ca urmare vom avea:

$$\delta_1 = \delta_n = \Delta l_{tot}/2$$



Deplasarea reală a secțiunii  $x_i$ , acolo unde se intersectează diagramele convenționale, va fi:

$$\begin{aligned}\delta^{\text{REAL}}(x_i) &= \frac{\Delta_{\text{tot}}}{2} - \left( \Delta_{1,2} + \dots + \Delta_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \Delta_{1,2} + \dots + \Delta_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 + \int_{x_i}^{l_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 + \dots + \Delta_{n-1,n} \right) - \\ &\quad - \left( \Delta_{1,2} + \dots + \Delta_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \Delta_{n-1,n} + \dots + \int_{x_i}^{l_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 \right) - \frac{1}{2} \left( \Delta_{1,2} + \dots + \Delta_{i-1,i} + \int_0^{x_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 \right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Este evidentă egalitatea:

$$\int_{x_i}^{l_i} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 = \int_0^{l_i-x_i} \frac{N(x_2)}{EA(x_2)} dx_2$$

întrucât exprimă alungirea aceleiași porțiuni de bară cuprinsă între secțiunile  $x_i$  și  $l_i$  figura 4.4b.

În aceste condiții, ținând seama și de relația (4.2), din relația (4.4) se deduce:

$$\delta^{\text{REAL}}(x_i) = 0$$

Se constată așadar că, în dreptul punctului de intersecție al celor două diagrame convenționale, secțiunea barei nu se deplasează în raport cu poziția sa inițială.

Din relațiile (4.2) și (4.3), va rezulta că:

$$\delta_1 = \delta^1(x_i) = \delta_n = \delta^n(x_i) = \Delta l_{\text{tot}} / 2$$

Din aceste relații se desprind următoarele concluzii:

- deplasările reale ale capetelor barei nerezemate solicitate axial, sunt egale între ele și egale cu deplasarea secțiunii  $x_i$  calculată din diagramele convenționale la intersecția acestora;
- deplasările reale ale capetelor barei nerezemate sunt egale cu jumătatea alungirii totale a barei.

În aceste condiții, pentru trasarea diagramei reale a deplasărilor secțiunilor transversale ale barei nerezemate, se procedează în felul următor:



- se trasează o singură diagramă convențională considerând, de exemplu, punctul 1 ca fiind fix;

- se va duce o nouă abscisă la distanța  $\Delta l_{tot}/2$  și în sensul alungirii totale, figura 1b;

- punctul (punctele) de intersecție al noii abscise cu diagrama convențională respectivă va reprezenta secțiunea (secțiunile) care nu se deplasează în raport cu poziția lor inițială. Din construcția grafică respectivă vor rezulta în mod automat egalitățile:

$$\delta_1 = \delta_n = \delta(x_i) = \Delta l_{tot}/2$$

Semnele rezultate pentru noua diagramă reprezintă depărtarea (+) sau apropierea (-) față de punctul 1 considerat ca referință. Pentru o reprezentare a diagramei deplasărilor care să reprezinte depărtarea (+) sau apropierea (-) față de una din secțiunile reieșite ca fiind fixe în mod real, se procedează în felul următor:

- se marchează sensul de parcurgere al diagramei convenționale plecând de la punctul considerat ca reper (punctul 1);

- se marchează și sensul de parcurgere al aceleiași diagrame convenționale plecând de la punctul considerat și determinat ca fiind fix în realitate;

- pe porțiunea pe care cele două sensuri nu coincid, semnul diagramei se schimbă și evident că aceasta va trece automat în cealaltă parte a adevăratei abscise, figura 4.4c.

Așadar, în urma trasării unei singure diagrame convenționale, a reprezentării unei noi abscise la  $\Delta l_{tot}/2$  și a schimbării semnului diagramei și deci a rabatării acesteia în partea corespunzătoare noului semn, se obține diagrama reală a deplasărilor secțiunilor transversale. Această diagramă semnifică o raportare a deplasărilor tuturor secțiunilor transversale atât față de poziția lor statică inițială cât și față de una din secțiunile care nu se deplasează față de poziția sa inițială.

Un exemplu de trasare a diagramei deplasărilor reale în cazul barelor drepte, nerezemate și solicitate axial, va fi prezentat în aplicația A.4.2.

#### Aplicații

A 4.1. Pentru bara din figura 4.5a ce cere:

- să se traseze diagrama de eforturi axiale;
- să se traseze diagrama de tensiuni;



- să se traseze diagrama deplasărilor;
- să se dimensioneze, să se calculeze alungirea totală și energia totală de deformare dacă:

$$F=100\text{kN}, \sigma_a = 150\text{N/mm}^2 \text{ și } E = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2.$$

Pentru rezolvarea problemei este necesară parcurgerea mai multor etape ce sunt descrise în cele ce urmează.

#### *1. Impărțirea în regiuni și secționarea barei*

O regiune a unei bare se caracterizează prin aceea că are o aceeași lege de variație a încărcării exterioare și o aceeași lege de variație a secțiunii transversale. Având în vedere aceste observații, bara figurată are patru regiuni deoarece:

- în cadrul porțiunii 1-2 nu se schimbă nici încărcarea, nici secțiunea transversală;
- punctul 2 face trecerea la o nouă regiune deoarece aici se schimbă atât secțiunea transversală cât și încărcarea;
- punctul 3 face trecerea la o nouă regiune pentru că, deși nu se schimbă încărcarea, secțiunea se modifică;
- punctul 4 face de asemenea trecerea la o nouă regiune pentru că aici este introdusă o forță exterioară deci se schimbă încărcarea.

Pentru determinarea eforturilor secționale, pe fiecare regiune delimitată a barei se face câte o secțiune. Originea fiecărei secțiuni în parte se poate lua oriunde pe axa barei cu condiția ca punctul respectiv să fie fixat și cunoscut.

#### *2. Figurarea și calculul reacțiunilor*

Reacțiunile care apar în rezeme pot fi forțe sau momente. Acestea se figurează având direcția după axele de coordonate alese. Sensul figurat al acestor reacțiuni este unul oarecare. Dacă semnul reacțiunii rezultă pozitiv din calcule înseamnă că, sensul figurat inițial a fost bine ales. În caz contrar, în realitate, reacțiunea are sens invers celui figurat. În calculele ulterioare însă, se va considera sensul reacțiunii figurat inițial și semnul reieșit din calcule. Deoarece bara este solicitată numai de forțe axiale, în încastrare va apărea o singură reacțiune  $H$  dirijată de asemenea după axa barei. Dacă se figurează totuși și celelalte reacțiuni posibil să apară, din ecuațiile de echilibru se constată că acestea sunt identic nule. Ca urmare, pe viitor acestea nu se vor mai figura în cadrul solicitării axiale.



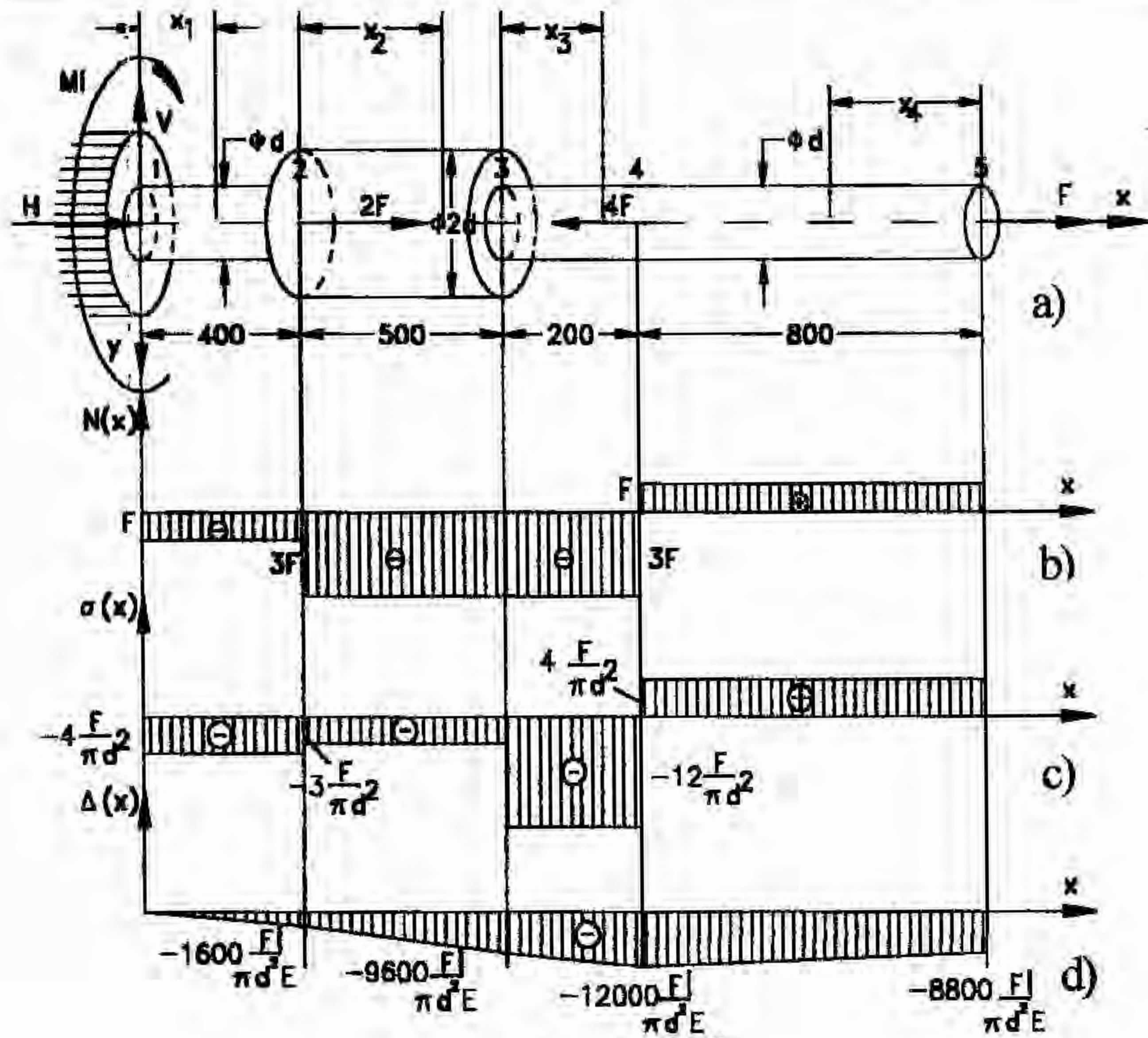


Fig. 4.5

Ecuatiile de echilibru static pentru bara figurată se scriu în felul următor:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow H + 2F - 4F + F = 0 \Rightarrow H = F \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 0 \\ \sum M_z = 0 \Rightarrow M_i = 0 \end{cases}$$

Se constată că semnul reacțiunii  $H$  este pozitiv, ca urmare, sensul ales pentru aceasta coincide cu sensul real.

### 3. Trasarea diagramei de eforturi $N(x)$

Pentru determinarea efortului axial din regiunea 1-2, se îndepărtează porțiunea  $x_1$  a barei și se înlocuiește în secțiunea barei rămase acțiunea părții îndepărtate. Astfel:

$$N(x_1) = -H = -F = \text{ct.}$$



Semnul "-" provine din faptul că reacțiunea H comprimă bara rămasă (din dreapta). Pentru regiunea 2-3 se îndepărtează *toată* porțiunea de bara din stânga secțiunii  $x_2$ . Astfel:  $N(x_2) = -H - 2F = -3F$

Pentru regiunea 3-4:  $N(x_3) = -H - 2F = -3F$

Pentru regiunea 4-5 se îndepărtează porțiunea din bară aflată în *dreapta* secțiunii  $x_4$ . Va rezulta:  $N(x_4) = F$ .

Diagrama de eforturi axiale este trasată în figura 4.5b.

#### 4. Verificarea diagramei de eforturi

Pentru verificarea diagramei de eforturi axiale se aplică următoarea regulă: acolo unde pe bară există o forță axială concentrată, în diagrama de eforturi axiale trebuie să existe un salt, egal în valoare absolută cu valoarea forței concentrate respective. De exemplu:

- în punctul 1, pe bară se află forța concentrată  $H=F$  iar în diagramă, în dreptul aceluiași punct, există saltul  $F-0=F$ ;

- în punctul 2, pe bară se află forța concentrată  $2F$  iar în diagramă există saltul  $3F-F=F$ ;

- etc.

#### 5. Trasarea diagramei de tensiuni, $\sigma(x)$

Trasarea diagramei de tensiuni se bazează pe relația:  $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$

Astfel, pe fiecare regiune în parte vom avea relațiile:

$$\text{- regiunea 1-2: } \sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} = -\frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\text{- regiunea 2-3: } \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A(x_2)} = -\frac{3F}{\frac{\pi (2d)^2}{4}} = -\frac{3F}{\pi d^2}$$

$$\text{- regiunea 3-4: } \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A(x_3)} = -\frac{3F}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{12F}{\pi d^2}$$

$$\text{- regiunea 4-5: } \sigma(x_4) = \frac{N(x_4)}{A(x_4)} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

Diagrama de tensiuni este trasată, pe baza acestor relații, în figura 4.5c. Se constată că, deși în secțiunea 3 nu există salt în diagrama de eforturi, în diagrama de tensiuni există un salt semnificativ. Trecerea de



la o valoare a tensiunii la altă, în acest caz, se datorează numai modificării secțiunii. Aceste modificări bruște ale secțiunii transversale conduc la salturi de tensiune și se numesc *concentratori de tensiune*.

#### t. Dimensionarea barei.

Pentru dimensionare se pune condiția ca tensiunea efectivă maximă introdusă în bară ca urmare a solicitării exterioare să fie mai mică, cel mult egală cu tensiunea admisibilă determinată experimental pentru materialul din care este confecționată bara:  $\sigma_{ef \max} \leq \sigma_a$ . De aici

$$\text{rezultă că: } 12F/(\pi d^2) \leq \sigma_a \text{ sau } d \geq \sqrt{\frac{12F}{\pi \sigma_a}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150}} = 50,46 \text{ mm}.$$

Valoarea diametrului  $d$  se rotunjește la valoarea întreagă imediat superioară:  $d = 51 \text{ mm}$ .

#### 7. Calculul alungirii totale a barei

Se constată că, secțiunea din încastrare nu se deplasează. În aceste condiții punctul 1 aflat în încastrare se va considera ca punct de reper în vederea calculului alungirii totale.

Plecând din punctul 1, alungirea totală a barei se calculează cu relația:

$$\Delta l_{\text{tot}} = \sum_i \Delta l_{kj} = \sum_i \int_{l_i} \frac{N(x_i)}{E_i A_i} dx_i \text{ în care:}$$

- $\Delta l_{kj}$  reprezintă alungirea regiunii  $i$  aflată între punctele  $k$  și  $j$ ;
- $N(x_i)$  reprezintă expresia efortului axial în regiunea  $i$  în care a fost făcută secțiunea  $x_i$ ;
- $E_i$  reprezintă modulul de elasticitate longitudinal al materialului de pe regiunea  $i$ ;
- $A(x_i)$  reprezintă expresia variației ariei secțiunii transversale a regiunii  $i$ .

Integrarea se face pe fiecare regiune de lungime  $l_i$  iar sumarea se face pentru toate regiunile.

În cazul nostru, pe fiecare regiune în parte, sunt constante efortul axial și aria secțiunii transversale iar modulul de elasticitate longitudinal este același pentru toată bara. În aceste condiții, alungirea totală a barei

va fi dată de expresia:  $\Delta l_{\text{tot}} = \sum_i \frac{N(x_i) l_i}{EA(x_i)}$  și va fi:



$$\Delta l = -\frac{F \cdot 400}{E \frac{\pi d^2}{4}} - \frac{3F \cdot 500}{E \frac{\pi (2d)^2}{4}} - \frac{3F \cdot 200}{E \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{F \cdot 800}{E \frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{2300F}{E \pi d^2} = -\frac{2300 \cdot 100 \cdot 10^3}{21 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 51^2} = -0,13 \text{ mm}$$

Semnul "-" semnifică apropierea capătului liber de punctul fix 1, considerat ca reper. Ca urmare, capătul liber se deplasează spre stânga adică spre punctul 1.

#### 8. Trasarea diagramei deplasărilor.

Deplasarea relativă a două secțiuni considerate pe bară, aflate pe aceeași regiune la distanța  $l$  una de alta este dată de relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx. \text{ Dacă efortul axial este constant și aria secțiunii}$$

transversale este constantă atunci:  $\delta = \frac{Nl}{EA}$ . Dacă secțiunile considerate

se află chiar la capetele regiunii,  $\delta$  reprezintă tocmai alungirea respectivei regiuni. Dacă un capăt al regiunii este fix,  $\delta$  reprezintă deplasarea absolută a capătului opus al regiunii respective. Deplasarea unei secțiuni oarecare, aflată la o distanță oarecare  $x$  de un capăt

considerat ca referință, este dată de relația:  $\delta = \frac{Nx}{EA}$ . Se constată că

deplasările sunt funcții liniare de distanța  $x$  atunci când  $N(x)=\text{const.}$  și  $A(x)=\text{const.}$  Ca urmare, se va considera pentru fiecare regiune în parte o origine (un punct de referință) și se vor calcula deplasările față de aceasta numai în secțiunile de capăt ale regiunilor.

*Observație.* Pentru o secțiune făcută pe o anumită regiune, deplasarea respectivei secțiuni în raport cu unul din capetele regiunii este în sensul efortului axial din secțiunea respectivă. Astfel, dacă efortul axial este pozitiv, secțiunea considerată se va depărta față de capătul regiunii considerat ca referință.

Pentru început se alege punctul 1, din încastrare, drept punct de referință pentru deplasarea secțiunii 2. O expresie generală pentru deplasarea secțiunii 2 este:  $\delta_2 = \delta_1 + \Delta l_{12}$  de unde rezultă:

$$\delta_2 = 0 + \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} = -\frac{F \cdot 400}{E \frac{\pi d^2}{4}} = -1600 \frac{F}{E \pi d^2}$$

Se marchează rezultatul printr-un punct pe diagrama din figura 4.5d și se unește printr-o dreaptă cu punctul zero din origine reprezentând deplasarea punctului 1.



Deplasarea punctului 3 va fi egală cu deplasarea punctului 2 la care se adaugă alungirea regiunii 2-3. Ca urmare vom avea:

$$\delta_3 = \delta_2 + \Delta l_{32} = -\frac{F400}{E \frac{\pi d^2}{4}} - \frac{3F500}{E \pi d^2} = -3100 \frac{F}{E \pi d^2}$$

Trasarea diagramei se face în mod asemănător ca pentru regiunea precedentă. În continuare vom avea:

$$\delta_4 = \delta_3 + \Delta l_{34} = -\frac{3100F}{E \pi d^2} - \frac{3F200}{E \frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{5500F}{E \pi d^2}$$

$$\delta_5 = \delta_4 + \Delta l_{45} = -\frac{5500F}{E \pi d^2} + \frac{F800}{E \frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{2300F}{E \pi d^2}$$

Se observă că, deplasarea punctului 5,  $\delta_5$ , coincide cu alungirea totală a barei, ceea ce este evident de altfel. Semnele din diagramă sunt convenționale și având în vedere faptul că drept referință s-a considerat secțiunea 1, aceste semne exprimă:

- semnul "+" arată o depărtare a secțiunilor respective față de secțiunea de referință;
- semnul "-" arată o apropiere a secțiunilor respective față de secțiunea de referință.

#### 9. Calculul energiei totale de deformare

Energia totală de deformare se calculează cu ajutorul relației:

$$U_{\text{tot}} = \sum_i \frac{N^2(x_i) l_i}{2EA(x_i)}$$

În cazul nostru va rezulta:

$$U_{\text{tot}} = \frac{F^2 400}{2E \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{9F^2 500}{2E \pi d^2} + \frac{9F^2 200}{2E \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{F^2 800}{2E \frac{\pi d^2}{4}} = 16500 \frac{F^2}{2E \pi d^2} = 48077 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

A.4.2. Pentru bara din figura 4.6 se cere: - să se traseze diagrama de eforturi; - să se traseze diagrama de tensiuni; - să se dimensioneze; - să se traseze diagrama deplasărilor. Se cunosc:  $F = 20 \text{ kN}$ ,  $\sigma_a = 140 \text{ MPa}$ ,  $l = 1,2 \text{ m}$ ,  $E = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ .



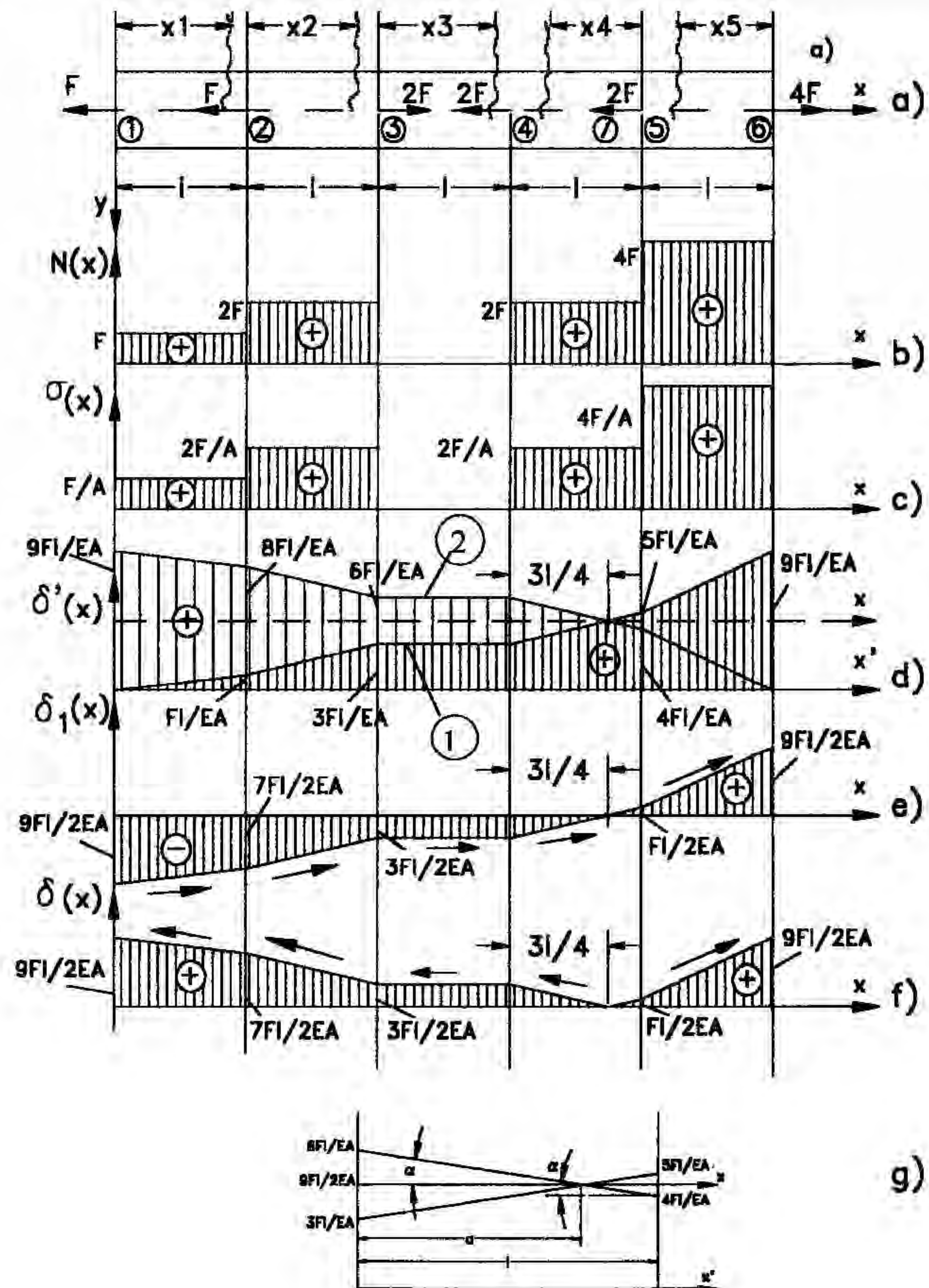


Fig. 4.6



Pașele de rezolvare sunt descrise în cele ce urmează.

Impărțirea barei în regiuni. Se observă că bara poate fi împărțită în cinci regiuni delimitate de existența forțelor axiale. Secțiunea barei fiind constantă nu produce regiuni în plus.

2. Ecuația de echilibru. Singura ecuație de echilibru care se poate scrie este  $\sum F_x = 0$  din care rezultă:

$$4F - 2F - 2F + 2F - F - F = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$$

Așadar, sub acțiunea sistemului de sarcini exterior, bara se află în echilibru static.

3. Trasarea diagramei de eforturi. Pe fiecare regiune în parte se face câte o secțiune, ca în reprezentarea din figura 4.6a, de exemplu. Eforturile în fiecare din secțiunile respective vor fi:

$$N(x_1) = F$$

$$N(x_2) = F + F = 2F$$

$$N(x_3) = F + F - 2F = 0$$

$$N(x_4) = 4F - 2F = 2F$$

$$N(x_5) = 4F$$

Cu ajutorul acestor expresii se reprezintă grafic variația eforturilor axiale pe toată lungimea barei, figura 4.6b. Se constată că sunt respectate salturile corespunzătoare în diagramă relative la forțele concentrate de pe bară.

4. Trasarea diagramei de tensiuni se bazează pe relația:

$$\sigma(x) = N(x)/A(x)$$

Pe fiecare regiune în parte vom avea:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} = \frac{F}{A}; \quad \sigma(x_2) = \frac{2F}{A}; \quad \sigma(x_3) = 0; \quad \sigma(x_4) = \frac{2F}{A}; \quad \sigma(x_5) = \frac{4F}{A}$$

5. Dimensionare. Tensiunea maximă reieșită din diagramă se obține pe regiunea 5-6 și este:

$$\sigma(x_5) = \frac{4F}{A}$$

Din condiția de rezistență rezultă:

$$\frac{4F}{A} \leq \sigma_a \Rightarrow A \geq \frac{4F}{\sigma_a} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{120} = 333,3 \text{ mm}^2$$

6. Trasarea diagramei deplasărilor. Deplasarea relativă a capetelor unei regiuni aflate la distanța  $l$  este dată de relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$



în care  $N(x)$  și  $A(x)$  reprezintă efortul, respectiv aria secțiunii transversale pe regiunea considerată. Dacă pe acea regiune, efortul este constant și de asemenea aria secțiunii transversale este constantă, vom

$$\text{avea: } \delta = \frac{Nl}{EA}.$$

Pentru bara considerată în figura 4.6a nu se poate observa de la început o secțiune fixă care să poată fi luată ca referință în vederea trasării diagramei deplasărilor. Se are în vedere trasarea unei diagrame din care să rezulte:

- secțiunea (secțiunile) care nu se deplasează față de poziția inițială a barei nedeformate;
- deplasarea secțiunilor față de poziția lor inițială;
- depărtarea sau apropierea (exprimată valoric și prin semne) a secțiunilor față de secțiunea (sau una din secțiunile) care nu se deplasează relativ la poziția inițială. În acest scop se apelează la *metoda intersecției diagramelor convenționale* prezentată în paragraful 4.7.

Pentru început vom considera secțiunea 1 ca fiind fixă ( $\delta_1 = 0$ ) și vom trasa o diagramă a deplasărilor relative la această secțiune. În aceste condiții vom avea:

$$\begin{aligned}\delta'_2 &= \delta'_1 + \Delta l'_{12} = 0 + \frac{Fl}{EA}; & \delta'_3 &= \delta'_2 + \Delta l'_{23} = \frac{Fl}{EA} + \frac{2Fl}{EA} = \frac{3Fl}{EA} \\ \delta'_4 &= \delta'_3 + \Delta l'_{34} = \frac{3Fl}{EA} + 0 = \frac{3Fl}{EA}; & \delta'_5 &= \delta'_4 + \Delta l'_{45} = \frac{3Fl}{EA} + \frac{2Fl}{EA} = \frac{5Fl}{EA} \\ \delta'_6 &= \delta'_5 + \Delta l'_{56} = \frac{5Fl}{EA} + \frac{4Fl}{EA} = \frac{9Fl}{EA}\end{aligned}$$

Așa cum s-a arătat, între punctele determinate anterior, deplasările au o variație liniară iar diagrama este trasată în figura 4.6d față de o abscisă convențională  $x'$  și este notată cu 1.

Dacă se consideră secțiunea 6 ca fiind fixă ( $\delta_6 = 0$ ), diagrama deplasărilor se va trasa prin punctele determinate în felul următor:

$$\begin{aligned}\delta''_5 &= \delta''_6 + \Delta l''_{65} = 0 + \frac{4Fl}{EA} = \frac{4Fl}{EA}; & \delta''_4 &= \delta''_5 + \Delta l''_{54} = \frac{4Fl}{EA} + \frac{2Fl}{EA} = \frac{6Fl}{EA} \\ \delta''_3 &= \delta''_4 + \Delta l''_{43} = \frac{6Fl}{EA} + 0 = \frac{6Fl}{EA}; & \delta''_2 &= \delta''_3 + \Delta l''_{32} = \frac{6Fl}{EA} + \frac{2Fl}{EA} = \frac{8Fl}{EA}\end{aligned}$$



$$\delta''_1 = \delta''_2 + \Delta l''_{21} = \frac{8Fl}{EA} + \frac{Fl}{EA} = \frac{9Fl}{EA}$$

Diagrama deplasărilor în acest caz este notată în figura 4.6d cu 2.

La intersecția celor două diagrame se va găsi secțiunea care nu se va deplasa relativ la poziția de dinaintea solicitării și deci a deformării barei. În figura 4.6g este arătată diagrama deplasărilor în cele două cazuri: secțiunea 1 fixă și secțiunea 6 fixă, luată numai între secțiunile 4 și 5 între care are loc intersecția celor două diagrame. Din această figură rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2Fl}{l} = \frac{\frac{3Fl}{a}}{a} \Rightarrow a = \frac{3l}{4}$$

Ca urmare, axa x trebuie dusă prin punctul de intersecție a celor două diagrame care se află la distanța  $a=3l/4$  față de secțiunea 4. Secțiunea din dreptul intersecției diagramelor convenționale, care nu se deplasează față de poziția inițială, a fost notată cu 7. De altfel, se observă că, axa x se află la  $\Delta l_{\text{tot}}/2$  de axa convențională x'. În aceste condiții, diagrama deplasărilor este cea prezentată în figura 4.6e, cu observația că sensul deplasării exprimat prin semne trebuie raportat la punctul 1 considerat fix pentru această diagramă. Semnul "-" din această diagramă arată o apropiere față de punctul 1 iar semnul "+" arată o depărtare față de punctul 1. Dacă se dorește o raportare a deplasărilor, exprimată prin semne, relativă la secțiunea fixă în mod real (7), semnul diagramei trebuie schimbat astfel:

- dacă sensul de parcurgere al diagramei cu punctul fix inițial (1) este același cu sensul de parcurgere al diagramei cu punctul fix real (7) semnul rămâne neschimbat;

- dacă sensul de parcurgere al diagramei cu punctul fix inițial este invers cu sensul de parcurgere al diagramei cu punctul fix real semnul se schimbă. Aplicând această regulă, oricare din cele două diagrame ar fi considerate, 1 sau 2, diagrama finală va arăta identic cu cea prezentată în figura 4.6f. Deplasările fiind pozitive rezultă că, toate secțiunile se depărtează de secțiunea fixă 7 cu cantitățile reieșite din diagramă.

În cazul în care sunt mai multe puncte de intersecție a celor două diagrame, deci sunt mai multe secțiuni fixe în mod real, calculele sunt corecte dacă printre aceste puncte trece o singură abscisă x. În acest din



urmă caz, trebuie considerat *un singur punct* față de care se consideră parcurgerea diagramei, din care rezultă semnul, deci apropierea sau depărtarea celorlalte secțiuni față de secțiunea fixă în realitate și stabilită ca punct de reper.

Deplasarea maximă față de poziția inițială (bara nedeformată) este realizată de capetele barei:

$$\delta_{\max} = \delta_1 = \delta_6 = \frac{\Delta l_{\text{tot}}}{2} = \frac{9Fl}{2EA} = \frac{9 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 120}{21 \cdot 10^4 \cdot 333,3} = 0,15 \text{ mm.}$$

Așa cum s-a văzut anterior, intersecția celor două diagrame (1) și (2) se produce la o valoare a deplasării egală cu  $\Delta l_{\text{tot}}/2$  în care  $\Delta l_{\text{tot}}$  este determinată pentru una din diagramele convenționale trasate luând în considerare un capăt al barei ca fiind fix. Având în vedere această observație, se poate trasa diagrama deplasărilor față de poziția inițială, *doar cu ajutorul unei singure diagrame convenționale* (1, de exemplu) iar abscisa  $x$  se duce la  $\Delta l_{\text{tot}}/2$ . Punctul (punctele) în care această abscisă intersectează diagrama respectivă sunt cele corespunzătoare secțiunilor care sunt fixe față de poziția inițială. Semnele se vor schimba în mod corespunzător dacă se dorește o raportare în funcție de punctul (unul din punctele) fix în mod real.

A.5.3. Să se dimensioneze bara din figura 4.7a și să se traseze diagrama de variație a deplasărilor. Se cunosc:  $F = 10 \text{ kN}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $E = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ .

Etapa 1. Impărțirea barei în regiuni.

Bara are două regiuni delimitate atât de trecerea la o nouă secțiune în punctul 2 cât și de schimbarea solicitării în același punct.

Etapa 2. Figurarea și calculul reacțiunilor

În încăstrare apare o singură reacțiune având direcția axei barei. Din ecuația de echilibru de forțe după axa barei va rezulta:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H - ql + 2F = 0 \Rightarrow H = F$$

Etapa 3. Trasarea diagramei de eforturi

Pe fiecare din cele două regiuni se consideră câte o secțiune,  $x_1$  respectiv  $x_2$ . Astfel, vom avea:



$$N(x_1) = H = F$$

$$N(x_2) = F + qx_2 = F + \frac{F}{l}x_2 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow N(0) = F \\ x_2 = l \Rightarrow N(l) = 2F \end{cases}$$

Diagrama de variație a eforturilor este prezentată în figura 4.7b

#### Etapa 4. Verificarea diagramei de eforturi

Pe bară există două forțe concentrate: în punctul 1 forța  $H=F$  și în punctul 3 forța  $2F$ . Se constată că în diagrama de eforturi axiale există salturile corespunzătoare.

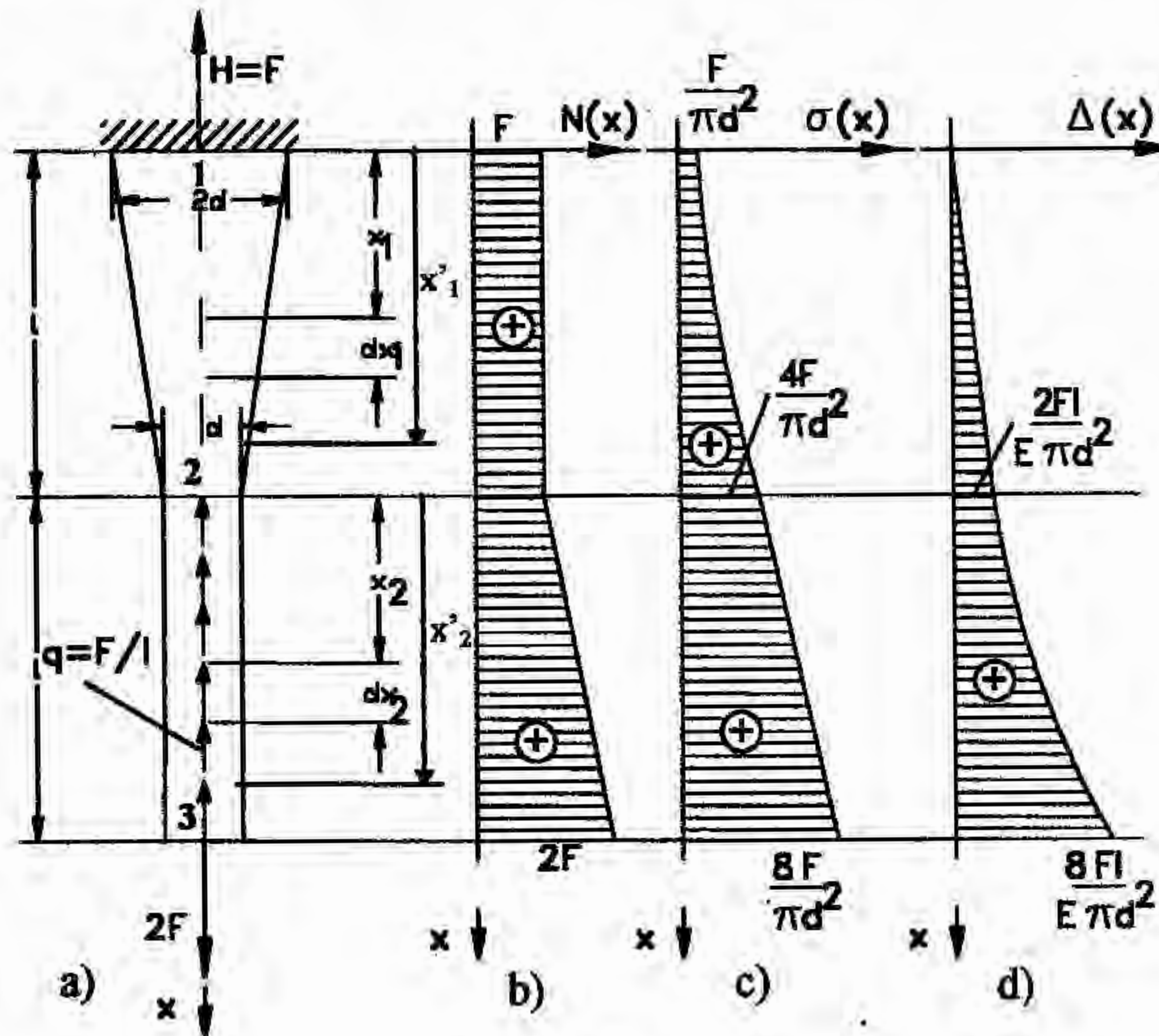


Fig. 4.7

#### Etapa 5. Trasarea diagramei de tensiuni

Pentru fiecare din regiunile 3-2 și 2-1 vom avea următoarele expresii pentru tensiuni:



$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} = \frac{4Fl^2}{\pi d^2 (2l - x)^2}$$

întrucât

$$A(x_1) = \frac{\pi d^2}{4l^2} (2l - x_1)^2 \quad \begin{cases} \sigma(0) = \frac{F}{\pi d^2} \\ \sigma(l) = \frac{4F}{\pi d^2} \end{cases}$$

$$\sigma'(x_1) = \frac{8Fl^2}{\pi d^2} \cdot \frac{1}{(2l - x_1)^3} \neq 0 \quad \forall x_1 \in [0, l]; \quad \sigma''(x_1) > 0$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A(x_2)} = \frac{4F(1 + x_2)}{\pi d^2 l} \quad \begin{cases} \sigma(0) = \frac{4F}{\pi d^2} \\ \sigma(l) = \frac{8F}{\pi d^2} \end{cases}$$

Diagrama de variație a tensiunilor a fost trasată, pe baza acestor ecuații, în figura 4.7c.

#### Etapa 6. Dimensionarea barei

Pentru aflarea dimensiunilor barei se folosește condiția:  $\sigma_{ef \max} \leq \sigma_a$  de unde rezultă:

$$\sigma_{\max} = \frac{8F}{\pi d^2} \leq \sigma_a \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{8F}{\pi \sigma_a}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^4}{\pi \cdot 150}} \Rightarrow d \geq 21,7 \text{ mm} \Rightarrow d = 22 \text{ mm}$$

#### Etapa 7. Trasarea diagramei deplasărilor

Se observă că punctul 1 este fix, ca urmare  $\delta_1 = 0$ . Deplasarea punctului 2 se poate calcula cu relația:  $\delta_2 = \delta_1 + \Delta l_{12}$ . De aici va rezulta că:

$$\delta(x_1) = 0 + \int_0^{x_1} \frac{N(x_1)}{EA(x_1)} dx_1 = \int_0^{x_1} \frac{F4l^2}{E\pi d^2 (2l - x_1)^2} dx_1 = \frac{2Flx_1}{E\pi d^2 (2l - x_1)}; \quad \begin{cases} \delta(0) = 0 \\ \delta(l) = \frac{2Fl}{E\pi d^2} \end{cases}$$



$$\delta(x_2) = \delta_2 + \int_0^{x_2} \frac{N(x_2)}{EA(x_2)} dx_2 = \frac{2Fl}{E\pi d^2} + \int_0^{x_2} \left[ \frac{F4(1+x_2)}{E\pi d^2 l} \right] dx_2 =$$

$$= \frac{2Fl}{E\pi d^2} + \frac{2Fx_2(2l+x_2)}{E\pi d^2 l}, \quad \begin{cases} \delta(0) = \frac{2Fl}{E\pi d^2} \\ \delta(l) = \frac{8Fl}{E\pi d^2} \end{cases}$$

$$\delta'(x_2) = \frac{4F(1+x_2)}{E\pi d^2} \neq 0 \quad \forall x_2 \in [0, l]; \quad \delta''(x_2) > 0$$

în care  $x_1 \in [0, x'_1]$  și  $x_2 \in [0, x'_2]$ .

Diagrama de variație a deplasărilor este prezentată în figura 4.7.d. Alungirea totală a barei este egală, de fapt, cu deplasarea punctului 3 și

$$\text{anume: } \Delta l_{\text{tot.}} = \frac{8Fl}{E\pi d^2}.$$



#### 4.7. Solicitarea sub acțiunea greutateii proprii

În mod obișnuit, sarcinile exterioare ce acționează asupra corpurilor au un aport mult mai mare asupra tensiunilor din bare decât greutatea proprie a acestora. Sunt însă cazuri în care greutatea proprie nu mai poate fi neglijată.

Bara din figura 4.8a, cu secțiunea transversală de arie  $A$ , constantă, este solicitată în punctul 2 de forța  $F$ . Greutatea specifică a materialului din care este confecționată bara este  $\gamma$  a cărei unitate de măsură este  $[N/mm^3]$ .

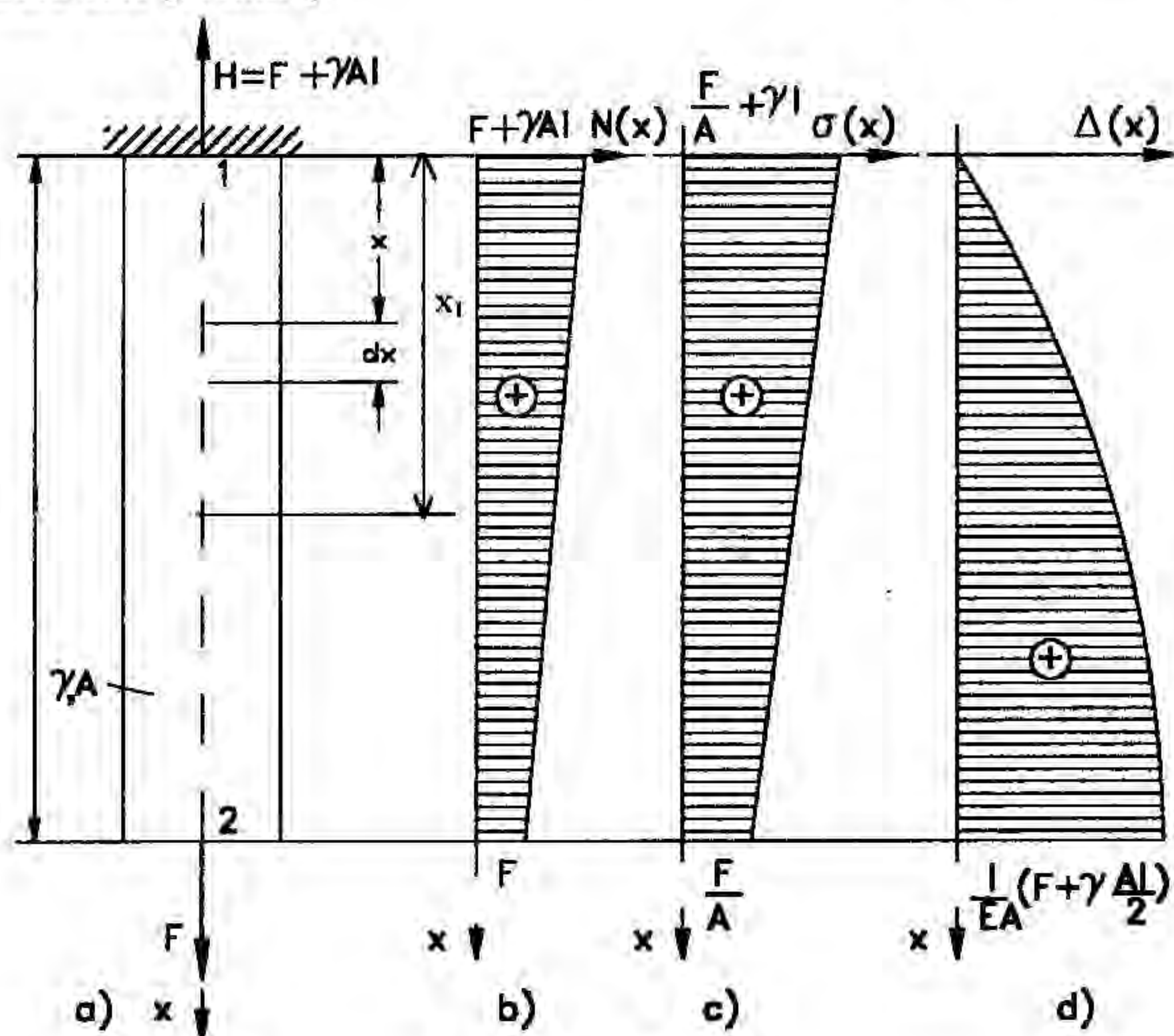


Fig. 4.8

Reacțiunea  $H$  care apare în încastrare se determină din ecuația de echilibru:

$$-H + F + \gamma A l = 0 \Rightarrow H = F + \gamma A l$$

Efortul axial din secțiunea  $x$  este:



$$N(x) = H - G(x) = F + \gamma A l - \gamma \text{Vol}(x) = F + \gamma A(l-x)$$

$$N(0) = F + \gamma A l; \quad N(l) = F$$

Variația eforturilor este prezentată în figura 4.8b.

Variația tensiunii  $\sigma(x)$  va fi:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{F}{A} + \gamma(l-x) \begin{cases} \sigma(0) = \frac{F}{A} + \gamma l \\ \sigma(l) = \frac{F}{A} \end{cases}$$

și este prezentată în figura 4.8c.

Dimensionarea se va face din condiția ca tensiunea maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq \sigma_a \Rightarrow A_{\text{nec.}} \geq \frac{F}{\sigma_a} + \gamma l$$

Deplasarea secțiunii  $x_1$  a barei în raport cu punctul 1 va fi:

$$\delta(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \frac{1}{E} \int_0^{x_1} \left[ \frac{F}{A} + \gamma(l-x) \right] dx = \frac{1}{E} \left( \frac{F}{A} x_1 + \gamma l x_1 - \frac{\gamma x_1^2}{2} \right)$$

de unde rezultă:

$$\delta(0) = 0; \quad \delta(l) = \frac{1}{EA} \left( F + \frac{\gamma A l}{2} \right)$$

$$\delta'(x_1) = \frac{1}{E} \left( \frac{F}{A} + \gamma l - \gamma x_1 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{\gamma A} + l \notin [0, l]; \quad \delta''(x_1) < 0$$

Reprezentarea grafică a variației lungirii este una parabolică și este prezentată în figura 4.8d.

**Observație.** Atunci când bara este solicitată numai de greutatea proprie, nu se mai poate face un calcul al ariei minime necesare pentru secțiunea transversală a barei. În acest caz vom avea:

$$\sigma_{\max} = \gamma l \leq \sigma_a \Rightarrow l_{\text{nec}} \leq \sigma_a / \gamma$$

în care  $l_{\text{nec}}$  este lungimea maximă pe care o poate avea bara astfel încât în aceasta să nu se depășească tensiunea admisibilă sub greutate proprie. Dacă se ia în calcul tensiunea de rupere în locul celei admisibile se obține:

$$l_r \leq \sigma_r / \gamma$$

în care  $l_r$  reprezintă lungimea de rupere a barei sub greutatea proprie și constituie o caracteristică de material.



#### 4.8. Bara de egală rezistență

La problema precedentă se constată că, aria minimă necesară pentru secțiunea transversală este rațională doar pentru cea din încastrare unde se înregistrează tensiunea maximă. Celelalte secțiuni sunt supradimensionate întrucât tensiunile sunt mai mici decât cele din încastrare.

Bara cu secțiune variabilă, pentru care tensiunea efectiv introdusă în bară, ca urmare a acțiunii greutății proprii, este egală cu  $\sigma_a$  în toate secțiunile transversale, este denumită *bară de egală rezistență* sau solid de egală rezistență pentru solicitarea de tracțiune, figura 4.9.a

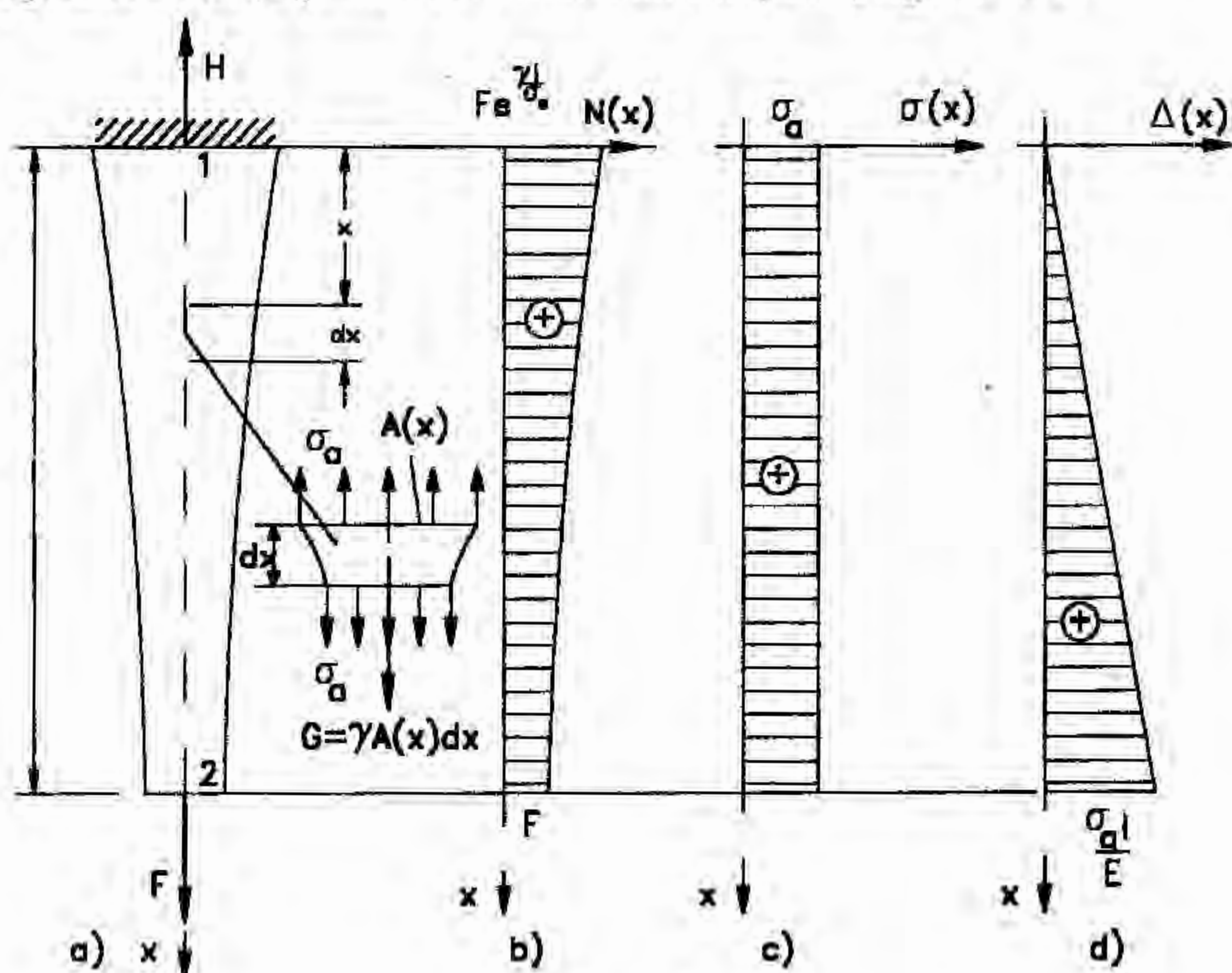


Fig. 4.9

În dreptul punctului de aplicație al forței aria secțiunii transversale trebuie să fie:  $A_1 = F/\sigma_a$ . La o distanță  $x$  de încastrare se detașează un element de volum având lungimea  $dx$ . Din condiția de echilibru al forțelor ce acționează pe unitatea de volum respectivă vom avea:



$$\sigma_a A(x) - \sigma_a [A(x) + dA(x)] - \gamma A(x) dx = 0$$

în care greutatea elementului de volum s-a aproximat cu:  $dG = \gamma dV \approx \gamma A(x) dx$ . Din relația precedentă rezultă:

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = -\frac{\gamma}{\sigma_a} dx \quad (4.5)$$

Integrând această relație se va obține:

$$\ln A(x) = -\frac{\gamma}{\sigma_a} x + C \quad (4.6)$$

Constanta de integrare C se obține din condiția ca aria secțiunii 2 ( $x=l$ ) să fie  $A_2 = A_1$ . Astfel va rezulta:

$$\ln A_1 = -\frac{\gamma}{\sigma_a} l + C \Rightarrow C = \ln A_1 + \frac{\gamma}{\sigma_a} l \quad (4.7)$$

Înlocuind relația (4.7) în relația (4.6) se obține:

$$A(x) = A_1 \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_a} (l-x)} = \frac{F}{\sigma_a} e^{\frac{\gamma}{\sigma_a} (l-x)} \quad (4.8)$$

relație ce constituie expresia variației ariei secțiunii transversale pentru bara de egală rezistență.

Volumul și deci, greutatea barei de egală rezistență sunt minime.

$$G = \gamma \text{Vol} = \gamma \int_V dV = \gamma \int_0^l A(x) dx \Rightarrow G = \sigma_a A_1 (e^{\frac{\gamma l}{\sigma_a}} - 1)$$

Reacțiunea H din încastrare va fi:

$$H = F + G = F \cdot e^{\frac{\gamma l}{\sigma_a}}$$

iar efortul axial  $N(x)$ :

$$N(x) = H - G(x) = F \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_a} (l-x)}$$

Diagrama eforturilor este prezentată în figura 4.9b.

Pentru verificare se observă că:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{F}{A_1} = \sigma_a$$

Diagrama tensiunilor este prezentată în figura 4.9c.

Alungirea totală  $\Delta l_{\text{tot}}$  a barei va rezulta:



$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \frac{\sigma_a l}{E}$$

Alungirea barei de egală rezistență este maximă în comparație cu oricare altă bară de lungime  $l$ , încărcată cu forța  $F$  și greutatea proprie. Diagrama de variație a deplasărilor este prezentată în figura 4.9d.

*Realizarea practică a barei de egală rezistență*

Intrucât realizarea barei cu variația secțiunii transversale după o lege dată de ecuația (4.8) se face cu dificultate, în special pentru barele lungi, se adoptă o tronsonare a acesteia. Realizarea barei din tronsoane este o soluție intermediară între bara de egală rezistență și bara de secțiune constantă. În figura 4.10 se prezintă câteva posibilități de realizare practică a tronsonării. Se observă că, pentru fiecare caz în parte, bara de egală rezistență rămâne în interiorul formei rezultate în urma tronsonării. De asemenea se observă că, cu cât numărul de tronsoane este mai mare, cu atât se face o economie de material mai substanțială. În mod practic, ținând seama și de tehnologia de fabricație, se recomandă o confecționare din patru tronsoane.

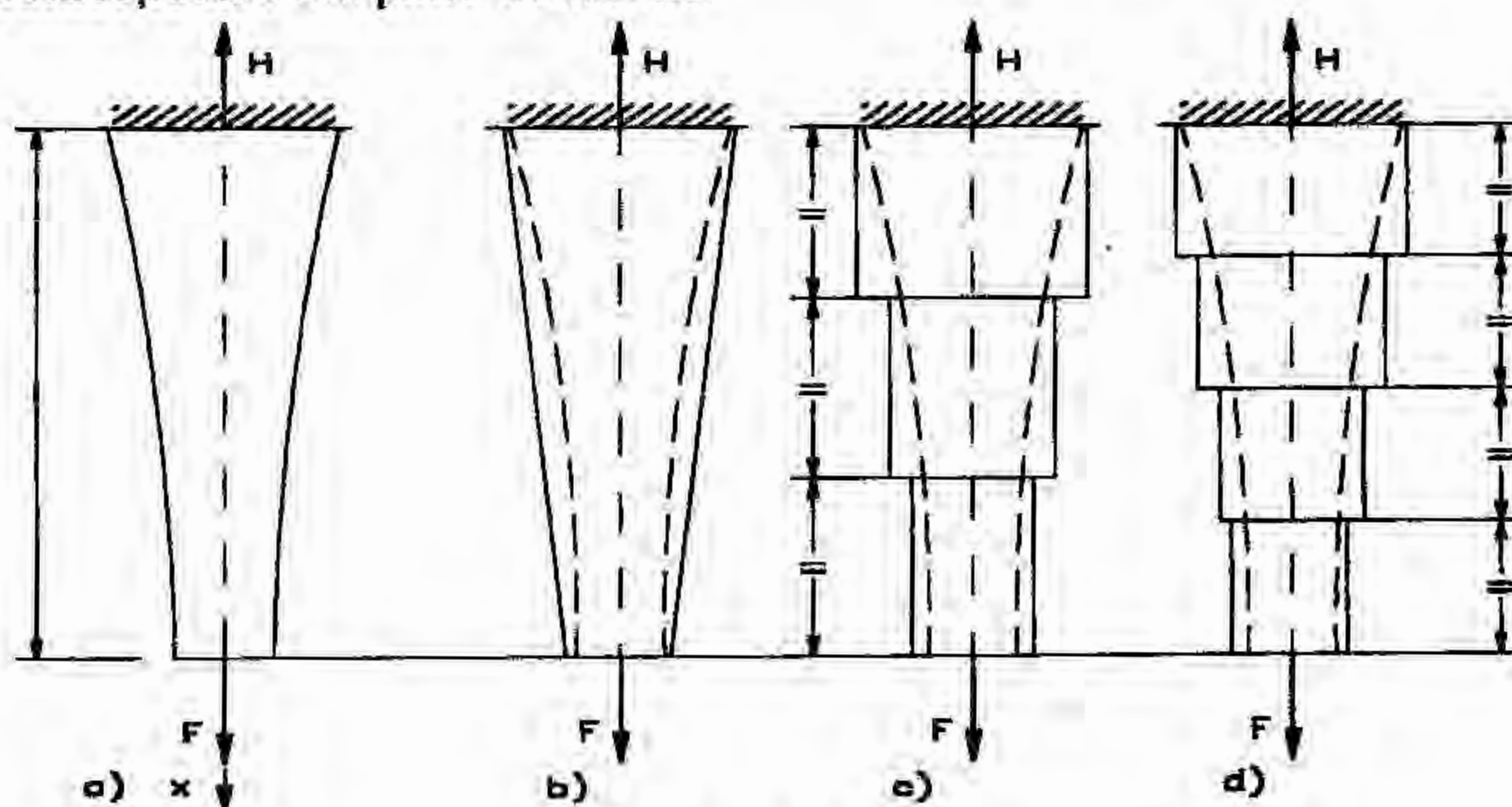


Fig. 4.10

Se consideră bara formată din tronsoane din figura 4.11a.

Efortul axial în secțiunea  $x_1$  va fi:  $N(x_1) = F + \gamma A_1 x_1$  iar tensiunea:  $\sigma(x_1) = \frac{F}{A_1} + \gamma x_1$ .



Pe acest tronson, tensiunea maximă se va înregistra în partea lui superioară, la  $x_1 = l_1$ . Astfel, va trebui ca:

$$\sigma_{\max 1} = \frac{F}{A_1} + \gamma l_1 \leq \sigma_a$$

de unde rezultă:

$$A_{1, \text{nec}} \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma l_1}$$

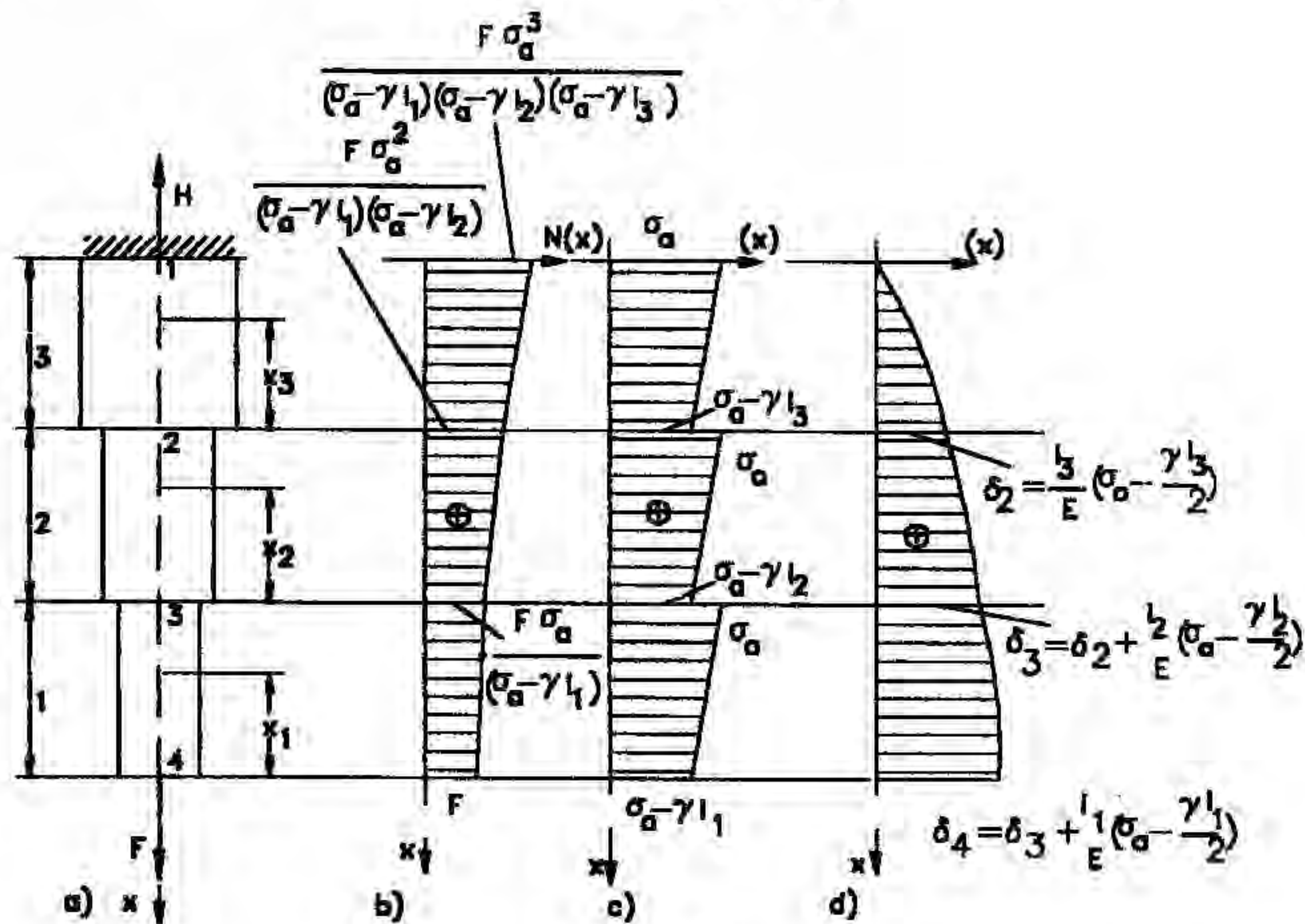


Fig.4.11

Efortul axial în secțiunea  $x_2$  va fi:  $N(x_2) = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2$  iar tensiunea:

$$\sigma(x_2) = \frac{F}{A_2} + \frac{\gamma A_1}{A_2} l_1 + \gamma x_2$$

Tensiunea maximă de pe acest tronson trebuie, de asemenea, să satisfacă următoarea condiție:

$$\sigma_{\max 2} = \frac{F}{A_2} + \frac{\gamma A_1}{A_2} l_1 + \gamma l_2 \leq \sigma_a$$

de unde rezultă:



$$A_{2,nec} \geq \frac{F + \gamma A_1 l_1}{\sigma_a - \gamma l_2} = A_1 \frac{\sigma_a}{\sigma_a - \gamma l_2} \text{ sau}$$

$$A_{2,nec} \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma l_1} \frac{\sigma_a}{\sigma_a - \gamma l_2}$$

Dacă bara este formată din  $n$  tronsoane, pentru tronsonul  $n$  vom avea:

$$A_{n,nec} \geq \frac{F \sigma_a^{n-1}}{(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2) \dots (\sigma_a - \gamma l_n)} \quad (4.9)$$

Dacă cele  $n$  tronsoane au lungimi egale:  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l/n$  va rezulta:

$$A_{n,nec} \geq \frac{F \sigma_a^{n-1}}{(\sigma_a - \gamma \frac{l}{n})^n} = \frac{F}{\sigma_a} \left(1 - \frac{\gamma l}{n \sigma_a}\right)^{-n}$$

Prin particularizări ale relațiilor precedente se pot trasa diagramele de eforturi, figura 4.11b și de tensiuni, figura 4.11c.

Pentru trasarea diagramei deplasărilor se pornește din încastrare unde  $\delta_1 = 0$ .

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta l_{12} = 0 + \int_0^{l_3} \frac{N(x_3)}{EA(x_3)} dx_3 = \frac{l_3}{E} \left(\sigma_a - \frac{\gamma l_3}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \delta_2 + \Delta l_{23} = \delta_2 + \frac{l_2}{E} \left(\sigma_a - \frac{\gamma l_2}{2}\right)$$

$$\Delta l_{tot.} = \delta_4 = \delta_3 + \Delta l_{34} = \delta_2 + \frac{l_1}{E} \left(\sigma_a - \frac{\gamma l_1}{2}\right)$$

Diagrama deplasărilor este prezentată în figura 4.11d.

Adoptarea, pentru aria secțiunii transversale, a expresiilor date de relația (4.9), face ca la partea superioară a fiecărui tronson, tensiunea efectivă să fie egală cu cea admisibilă. Astfel, această soluție este mult mai economică decât cea la care bara este de secțiune constantă și mult mai ușor de realizat decât bara de egală rezistență.

#### 4.9. Sisteme static nedeterminate

Un sistem se consideră a fi static nedeterminat atunci când eforturile nu pot fi determinate în mod unic numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru. Diferența dintre numărul necunoscutelor (reacțiuni sau - și -



eforturi) și numărul ecuațiilor de echilibru, posibil a fi scrise pentru respectivul sistem, reprezintă gradul de nedeterminare al problemei.

Pentru rezolvarea unui sistem static nedeterminat, în afară de ecuațiile de echilibru, trebuie introduse relațiile de compatibilitate geometrică a deplasărilor. Numărul acestora trebuie să fie egal cu gradul de nedeterminare statică. Rezolvarea problemelor static nedeterminate necesită cunoașterea dimensiunilor și a rigidităților tuturor componentelor sistemului. Trebuie remarcat faptul că, atât ecuațiile de echilibru cât și forma ecuațiilor de compatibilitate în deplasări depind de sistemul care se analizează. În continuare se vor da câteva exemple care cuprind modalitățile de rezolvare pentru câteva categorii de probleme.

### Aplicații

A.4.4. Pentru bara din figura 4.12a se cere să se calculeze reacțiunile  $\lambda$ , să se traseze diagramele de eforturi, de tensiuni și diagrama deplasărilor și să se dimensioneze. Se cunosc:  $F=100$  kN,  $l=0,2$  m,  $\sigma_a=140$  N/mm<sup>2</sup>,  $E=21 \cdot 10^4$  N/mm<sup>2</sup>.

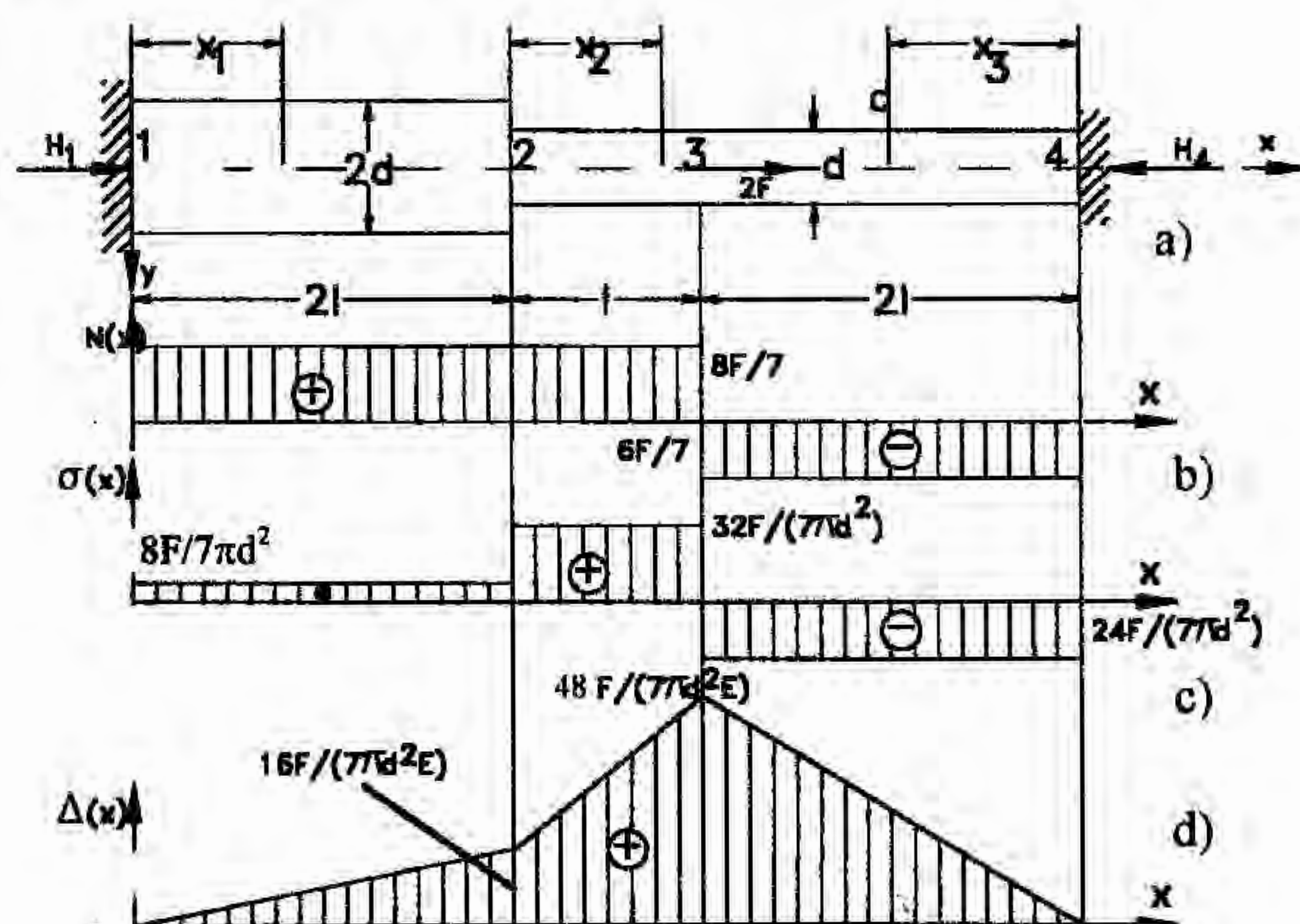


Fig. 4.12



Bara este solicitată de forța axială  $2F$  și de reacțiunile din reazeme. Nefiind precizată greutatea proprie a barei se consideră aceasta ca fiind neglijabilă în raport cu sarcina de încărcare. Ca urmare, așa cum s-a precizat, în încastrări vor apărea ca reacțiuni numai câte o forță,  $H_1$  și  $H_2$ , direcționate după axa barei. Ecuația de echilibru de forțe după axa  $x$  va fi:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2F + H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_2 - H_1 = 2F \quad (4.10)$$

Avem o singură ecuație de echilibru cu două necunoscute. Ca urmare, problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării trebuie observat modul în care se deformează bara ca urmare a solicitării exterioare. Bara fiind încastrată la ambele capete rezultă că, alungirea totală a acesteia este egală cu zero. Pe de altă parte, expresia alungirii totale se poate scrie ca fiind:

$$\Delta l_{\text{tot}} = \sum_i \Delta l_{ki} = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} + \Delta l_{34} = 0$$

în care  $\Delta l_{ki}$  reprezintă alungirile fiecărei regiuni în parte.

Eforturile, pentru fiecare regiune, au expresiile:

$$N(x_1) = -H_1; \quad N(x_2) = -H_1; \quad N(x_3) = -H_2 \quad (4.11)$$

Având în vedere faptul că toate aceste eforturi sunt constante și că aria secțiunii transversale este de asemenea constantă pe fiecare regiune în parte, expresia alungirii unei regiuni se poate scrie astfel:

$$\Delta l_{ki} = \frac{N(x_i) l_i}{EA(x_i)}$$

Ca urmare vom avea:

$$-\frac{H_1 2l}{E\pi d^2} - \frac{H_1 l}{E \frac{\pi d^2}{4}} - \frac{H_2 2l}{E \frac{\pi d^2}{4}} = 0 \Rightarrow H_1 = -\frac{4}{3} H_2$$

S-a obținut astfel, a doua ecuație necesară în vederea determinării reacțiunilor. Folosind această din urmă ecuație și cu ajutorul ecuației (4.10) se obține:  $H_1 = (-8/7)F$  și  $H_2 = (6/7)F$ ; Înlocuind aceste valori în ecuațiile date de (4.11) se obține pentru eforturile secționale:

$$N(x_1) = \frac{8}{7} F; \quad N(x_2) = \frac{8}{7} F; \quad N(x_3) = -\frac{6}{7} F;$$



Cu ajutorul acestor expresii se trasează diagrama de eforturi, figura 4.12b. Se constată că, salturile din diagramă sunt corespunzătoare forțelor concentrate de pe bară. Diagrama de tensiuni, figura 4.12c, se trasează având în vedere relațiile:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} = \frac{8}{7} \frac{F}{\pi d^2}; \quad \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A(x_2)} = \frac{32}{7} \frac{F}{\pi d^2};$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A(x_3)} = -\frac{24}{7} \frac{F}{\pi d^2};$$

Se observă că tensiunea maximă o regăsim în regiunea 2-3. Pentru dimensionare se impune condiția ca  $\sigma_{ef\max} \leq \sigma_a$  de unde rezultă:

$$d \geq \sqrt{\frac{32F}{7\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 100 \cdot 10^3}{7\pi \cdot 140}} = 32,23 \text{ mm}$$

Valoarea găsită se rotunjește la  $d=33 \text{ mm}$

Pentru trasarea diagramei deplasărilor se pornește din încastrarea 1 pentru care avem  $\delta_1 = 0$ .

Deplasarea secțiunii 2 va fi dată de relația:

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta l_{12} = 0 + \frac{\frac{8}{7} F \cdot 2l}{E\pi d^2} = \frac{16}{7} \frac{Fl}{E\pi d^2}$$

Deplasarea secțiunii 3 va fi:

$$\delta_3 = \delta_2 + \Delta l_{23} = \frac{48}{7} \frac{Fl}{E\pi d^2}$$

Pentru verificare se calculează deplasarea secțiunii 4 care trebuie să fie egală cu zero:

$$\delta_4 = \delta_3 + \Delta l_{34} = \frac{48}{7} \frac{Fl}{E\pi d^2} - \frac{\frac{6}{7} F \cdot 2l}{E \frac{\pi d^2}{4}} = 0$$



Având în vedere faptul că, punctul 1 a fost considerat ca reper, semnul "+" din diagramă arată că toate secțiunile se depărtează de acest punct și deci se apropie de punctul 4. De altfel, dacă s-ar fi trasat diagrama considerând punctul 4 ca reper, semnul din diagramă ar fi ieșit "-" ceea ce ar fi reprezentat, de asemenea, o apropiere a secțiunilor față de punctul 4.

A.4.5. Pentru bara din figura 4.13a se cere să se calculeze reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi și tensiuni, să se dimensioneze și să se traseze diagrama deplasărilor. Se cunosc:  $F=60\text{kN}$ ,  $l=0,15\text{ m}$ ,  $\sigma_a = 140\text{ N/mm}^2$ ,  $E=21 \cdot 10^4\text{ N/mm}^2$ .

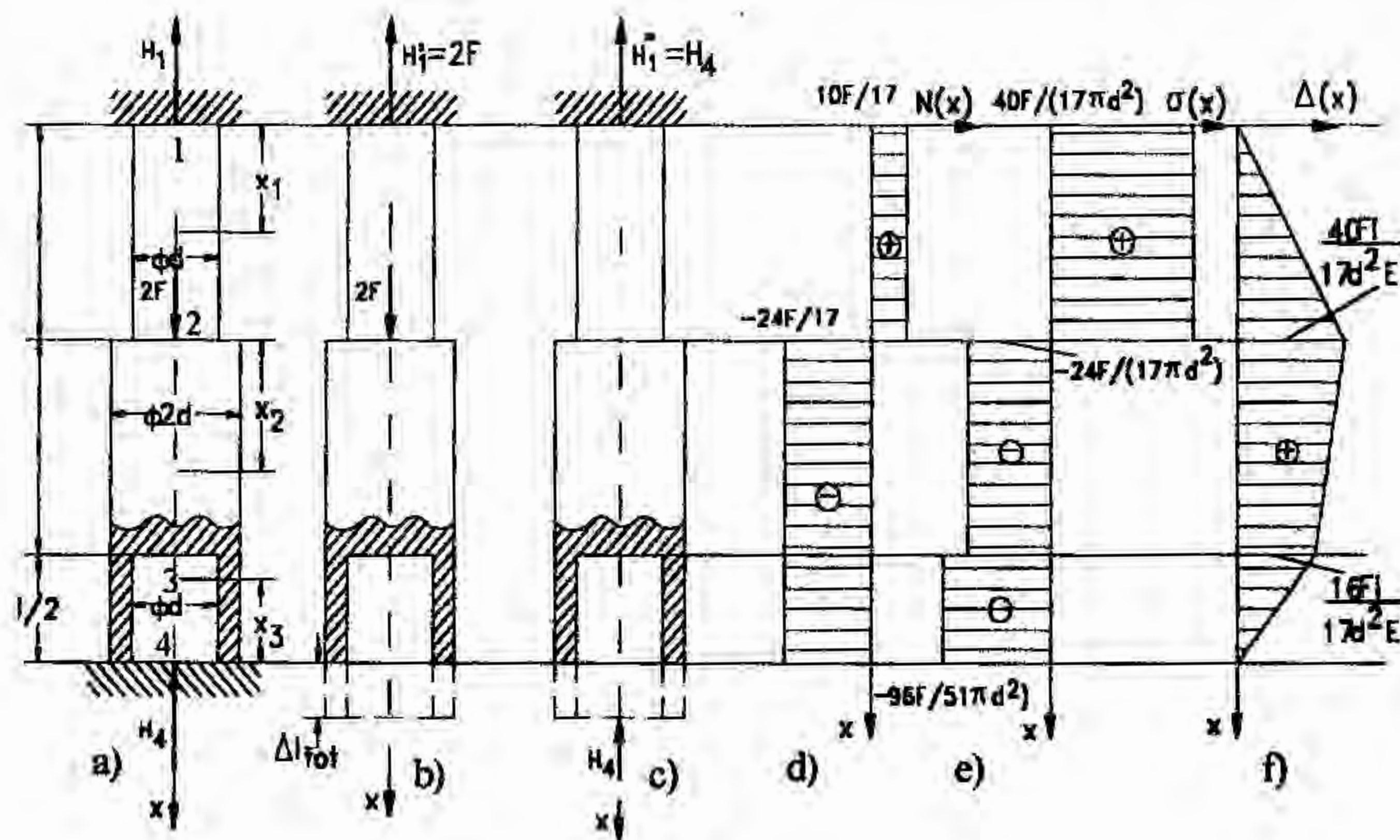


Fig. 4.13

Ca urmare a solicitării exterioare, în încastrări apar reacțiunile  $H_1$  și  $H_2$ . Din ecuația de echilibru va rezulta:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2F - H_1 - H_4 = 0 \Rightarrow H_1 + H_4 = 2F$$



Avem o singură ecuație și două necunoscute, deci problema este simplu static nedeterminată. Având în vedere faptul că se lucrează în ipoteza deformațiilor mici care nu trec de domeniul elastic, pentru ridicarea nedeterminării vom folosi metoda *suprapunerii efectelor*. Pentru aceasta, se îndepărtează (imaginar) încastrarea din punctul 4 (de exemplu). În aceste condiții bara se poate deforma liber și se poate calcula alungirea totală care s-ar produce. Singura reacțiune ce apare în acest caz este cea din încastrarea 1:  $H'_1 = 2F$ . Eforturile de pe cele trei regiuni ale barei fiind:  $N'(x_1) = H'_1 = 2F$ ,  $N'(x_2) = H'_1 - F = 0$ ,  $N'(x_3) = 0$  alungirea totală a barei va fi:

$$\delta'_4 = \Delta l'_{12} + \Delta l'_{23} + \Delta l'_{34} = \frac{8Fl}{E\pi d^2} + 0 + 0$$

Totuși, faptul că bara nu depășește punctul 4 se datorează reacțiunii  $H_4$ . Astfel, lungirea  $\delta'_4$  se egalează cu deformația care ar fi produsă de reacțiunea  $H_4$  dacă aceasta ar acționa singură asupra barei:

$$\delta''_4 = \Delta l''_{12} + \Delta l''_{23} + \Delta l''_{34} = -\frac{H_4 l}{E \frac{\pi d^2}{4}} - \frac{H_4 l}{E\pi d^2} - \frac{H_4 \frac{l}{2}}{E(\pi d^2 - \frac{\pi d^2}{4})}$$

Din  $|\delta'_4| = |\delta''_4|$  va rezulta  $H_4 = (24/17)F$ . Din ecuația de echilibru se obține  $H_1 = (10/17)F$ .

Diagrama de eforturi se va trasa având în vedere relațiile:

$$N(x_1) = \frac{10}{17}F; \quad N(x_2) = -\frac{24}{17}F; \quad N(x_3) = -\frac{24}{17}F;$$

Se constată că sunt verificate, în diagrama din figura 4.13d, salturile din dreptul forțelor concentrate de pe bară. Diagrama de tensiuni se trasează cu ajutorul relațiilor:

$$\sigma(x_1) = \frac{40}{17} \frac{F}{\pi d^2}; \quad \sigma(x_2) = -\frac{24}{17} \frac{F}{\pi d^2}; \quad \sigma(x_3) = -\frac{96}{51} \frac{F}{\pi d^2}$$



Diagrama tensiunilor este trasată în figura 4.13e.

Pentru dimensionare se pune condiția ca:

$$\sigma_{el\max} = \sigma(x_1) \leq \sigma_a$$

de unde rezultă:  $d \geq \sqrt{\frac{40F}{17\pi\sigma_a}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 60 \cdot 10^3}{17\pi \cdot 140}} = 17,9\text{mm}$ . Valoarea obținută se rotunjește la  $d = 18\text{ mm}$ .

Pentru trasarea diagramei deplasărilor se pornește din încastrarea 1. Deplasarea secțiunii 2 va fi:

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta l_{12} = 0 + \frac{40}{17} \frac{Fl}{E\pi d^2}$$

Deplasarea secțiunii 3 va fi:

$$\delta_3 = \delta_2 + \Delta l_{23} = \frac{40}{17} \frac{Fl}{E\pi d^2} - \frac{24}{17} \frac{Fl}{E\pi d^2} = \frac{16}{17} \frac{Fl}{E\pi d^2}$$

Pentru verificare se calculează deplasarea secțiunii 4 care trebuie să fie egală cu zero:

$$\delta_4 = \delta_3 + \Delta l_{34} = \frac{16}{17} \frac{Fl}{E\pi d^2} - \frac{\frac{24}{17} F \frac{1}{2}}{E \frac{3\pi d^2}{4}} = 0$$

Diagrama deplasărilor este trasată în figura 4.13f. Semnul "+" din diagramă arată o depărtare a secțiunilor barei față de punctul 1 considerat ca reper și ca urmare o apropiere față de punctul 4. Dacă s-ar considera punctul 4 ca reper, semnul din diagramă ar fi "-" ceea ce ar reprezenta, de asemenea, o apropiere a secțiunilor barei față de punctul 4.



## 4.10. Sisteme de bare

4.4.6. Se consideră bara dreaptă, rigidă, ABC în poziție orizontală, figura 4.14. Bara este susținută de trei tije verticale articulate cilindric la ambele capete. Modulele de rigiditate la solicitarea axială ale tijelor sunt  $A_1E_1$ ,  $A_2E_2$  și  $A_3E_3$ . Bara orizontală este încărcată cu forța  $F$ . Se cere să se determine valoarea celor trei eforturi  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$  din tije și să se calculeze deplasarea punctului de aplicație al forței.

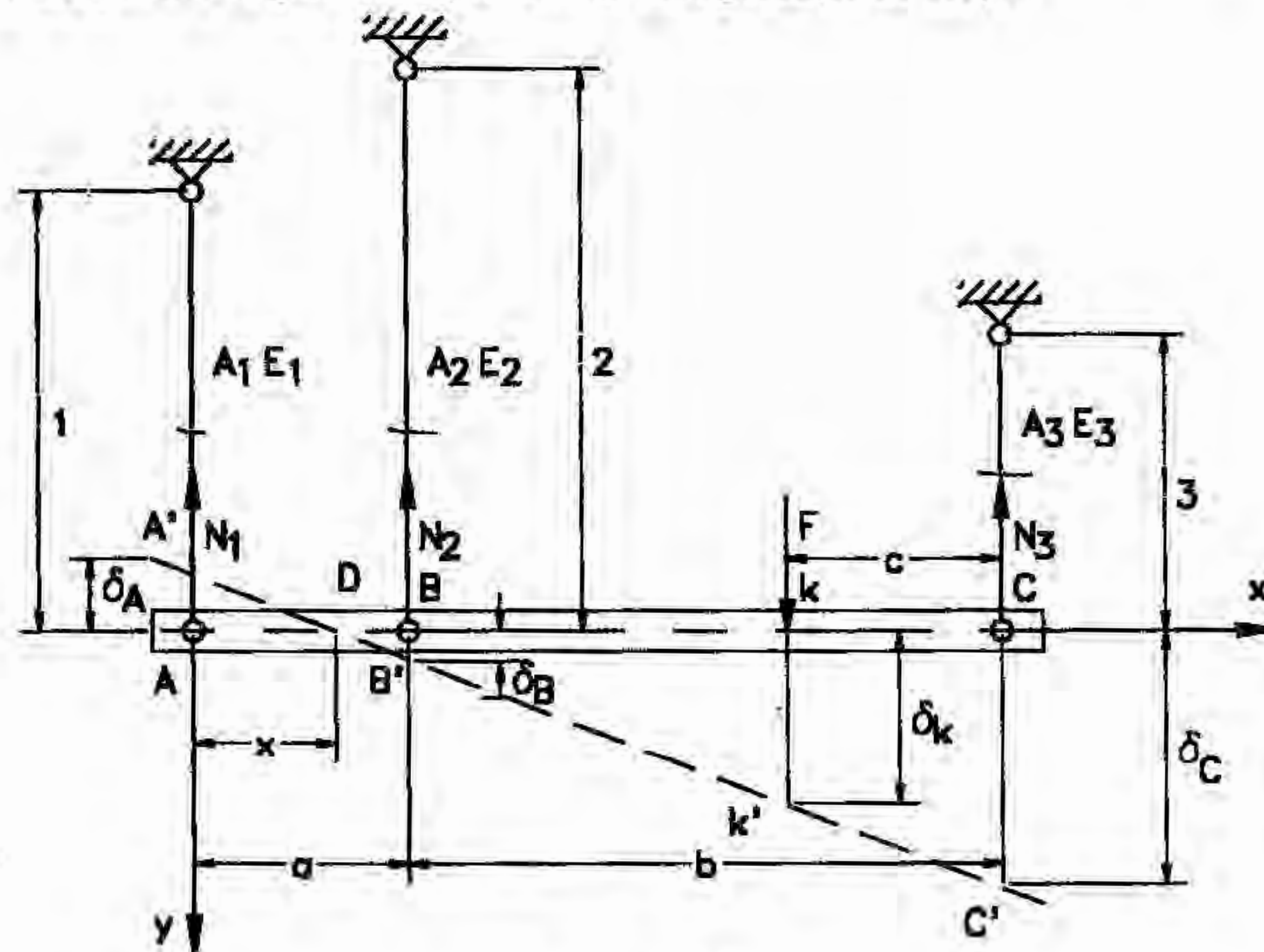


Fig. 4.14

Deoarece articulațiile cilindrice nu pot prelua momente în planul xoy în care se încadrează și sistemul de bare, tije vor fi supuse doar la solicitări axiale. Considerându-se valabilă ipoteza *deformațiilor mici* și ca urmare a *deplasărilor mici*, ecuațiile de echilibru se vor scrie pentru poziția inițială a sistemului. Ecuațiile de echilibru se scriu pentru bara orizontală. Susținerea datorată tijelor este înlocuită de forțele cu care aceste tije acționează asupra barei orizontale și care sunt de altfel chiar eforturile ce apar în tijele respective. Ca urmare vom avea:



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F - N_1 - N_2 - N_3 = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow N_3(a+b) - F(a+b-c) + N_2a = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Se constată că avem două ecuații cu trei necunoscute deci problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se va considera poziția deformată a sistemului. Intrucât s-a presupus că bara orizontală este rigidă, rezultă că, ea va rămâne dreaptă și după deformarea celorlalte bare din sistem. Tijele verticale se lungesc sau se scurtează astfel că s-a imaginat o nouă posibilă poziție a barei orizontale  $A'B'C'$ . Poziția finală exactă va reieși din calculele ulterioare. Deplasările punctelor de articulație a barei aflată inițial în poziție orizontală, se notează cu  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  și  $\delta_C$ . Tinându-se cont de asemănările:  $\triangle AA'D \sim \triangle CC'D$  și  $\triangle AA'D \sim \triangle BB'D$ , între deplasările menționate se pot scrie relațiile:

$$\frac{\delta_A}{\delta_C} = \frac{x}{a+b-x}; \quad \frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{x}{a-x} \quad (4.13)$$

Eliminând pe  $x$  din cele două relații se obține o relație între deplasările  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  și  $\delta_C$  de forma:

$$\delta_B = \frac{\delta_C a - \delta_A b}{a+b} \quad (4.14)$$

Se observă că, deplasările  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  și  $\delta_C$  corespund tocmai cu lungirile sau scurtările tijelor. Ca urmare:

$$\delta_A = \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \delta_B = \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}; \quad \delta_C = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} \quad (4.15)$$

Înlocuind relațiile (4.15) în relația (4.14) se obține o relație între eforturile din tije,  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$ :

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \left( \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} a - \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} b \right) \frac{1}{a+b}$$

care împreună cu relațiile (4.12) formează un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute:  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$ . Rezolvând sistemul se vor determina eforturile din tije. Valorile eforturilor astfel obținute se introduc în relațiile (4.15) și se determină deplasările punctelor A, B și C, respectiv



$\delta_A$ ,  $\delta_B$  și  $\delta_C$ . Folosind, de exemplu, a doua relație (4.13) se va determina expresia lui  $x$  ca fiind dată de:

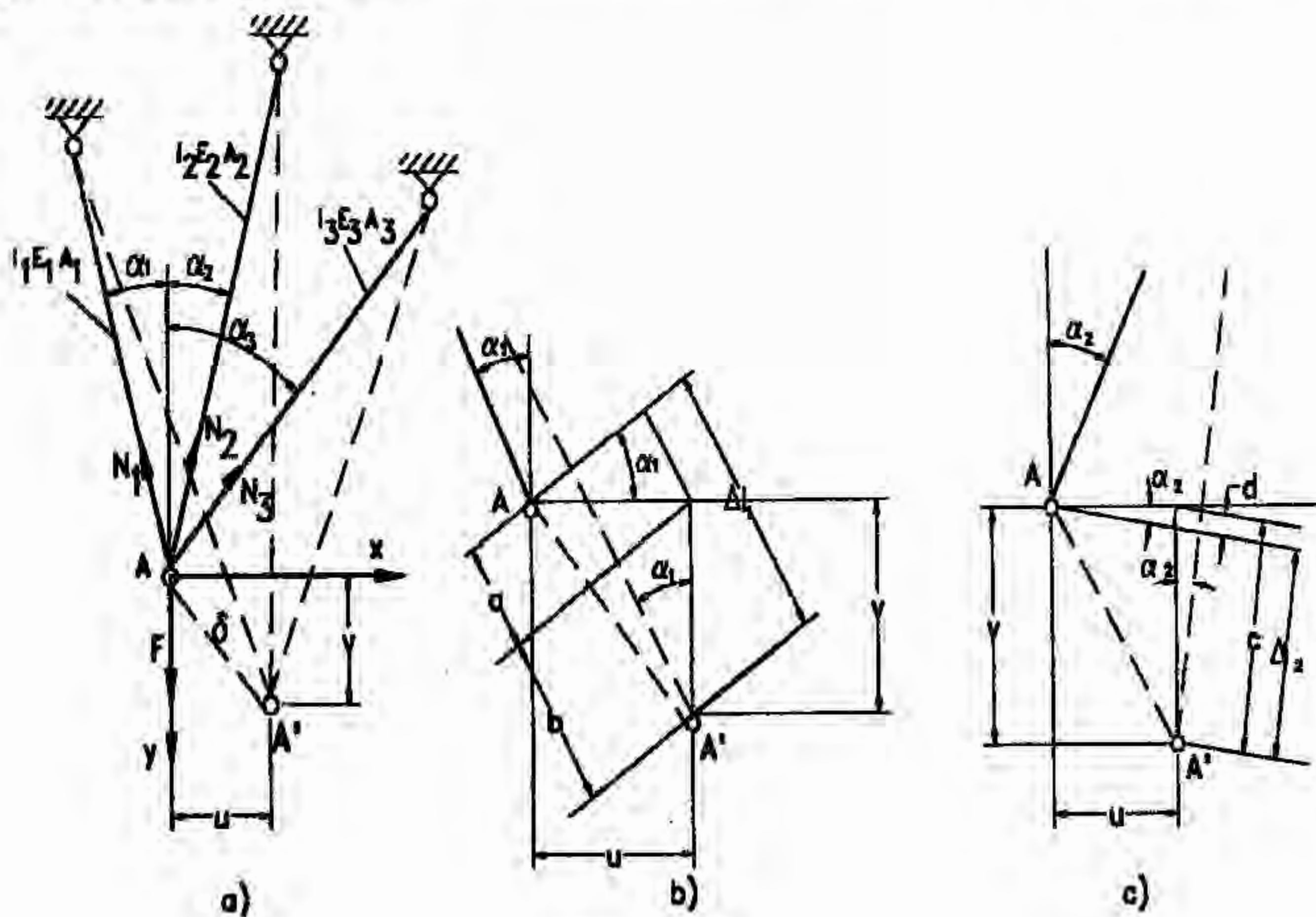
$$x = \frac{\delta_A a}{\delta_A + \delta_B}$$

În funcție de valoarea obținută pentru  $x$ , se poate trasa cu exactitate poziția deplasată a barei ABC.

Deplasarea punctului de aplicație al forței se poate determina din asemănarea  $\Delta K'KD \sim \Delta AA'D$ . Va rezulta:

$$\delta_x = \frac{1}{x} \delta_A (a + b - c - x)$$

**A.4.7.** Se consideră sistemul format din trei tije articulate și prinse ca în figura. 4.15.



**Fig. 4.15**

Pentru poziția nedeformată a barelor se pot scrie doar două ecuații de echilibru ale punctului A:



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + N_3 \sin \alpha_3 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F - N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 - N_3 \sin \alpha_3 = 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

Se constată că avem o problemă simplu static nedeterminată. Ca urmare, vom considera poziția deformată a sistemului. Punctul A va ajunge în A' și va suferi deplasarea totală:

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4.17)$$

Capătul fiecărei tije va parcurge același drum AA'. În figura 4.15b se prezintă modul de deformare și deplasarea barei 1. Între lungimea  $\Delta l_1$  a acestei bare și deplasările  $u$  și  $v$  ale punctului A se poate scrie relația:

$$\Delta l_1 = a + b = v \cos \alpha_1 + u \sin \alpha_1 \quad (4.18)$$

Din figura 4.15c rezultă că:

$$\Delta l_2 = c - d = v \cos \alpha_2 - u \sin \alpha_2 \quad (4.19)$$

În mod asemănător pentru tija 3:

$$\Delta l_3 = v \cos \alpha_3 - u \sin \alpha_3 \quad (4.20)$$

Relațiile de mai sus s-au determinat făcându-se următoarele considerații:

- deformațiile barelor sunt mici și ca urmare deplasarea punctului A este și ea mică în raport cu lungimile barelor. În consecință, unghiul făcut de tije cu verticala înainte de deformare, diferă foarte puțin cu cel de după deformare iar aici s-a considerat a avea aceeași valoare;

- alungirea unei bare se determină ducând din punctul A (inițial) o perpendiculară pe bara deformată și măsurând față de punctul A' (final).

Din relațiile (4.18), (4.19) și (4.20) se elimină mărimile  $u$  și  $v$  și va rezulta o relație între  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  și  $\Delta l_3$ . Evident că, aceste alungiri sunt de forma celor date de relațiile (4.15). În aceste condiții va rezulta o relație între eforturile  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$  care alături de relațiile (4.16) vor forma un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute ce va permite determinarea eforturilor din tije.

Deplasarea punctului de aplicație al forței se determină cu ajutorul relației (4.17) în care  $u$  și  $v$  se determină cu ajutorul relațiilor (4.18) și (4.19) de exemplu.



4.4.8. Se consideră sistemul de bare din figura 4.16. Se constată că lungimea barei 2 este mai mică cu  $a \ll 1$  decât lungimea necesară montajului în punctul  $A_1$ . Se cere să se determine eforturile din bare după efectuarea forțată a montajului și să se precizeze noua poziție a punctului de montaj  $A$ .

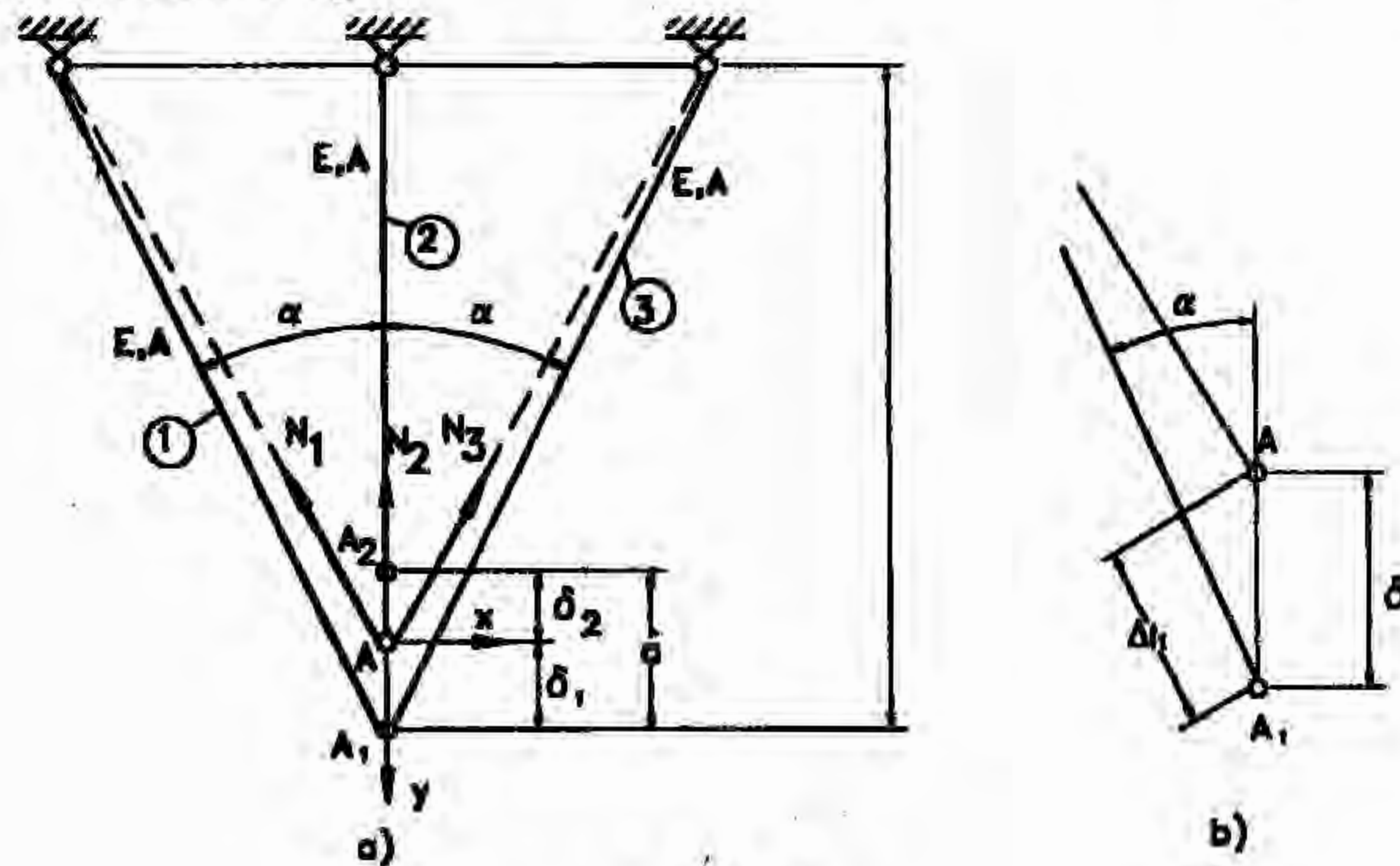


Fig. 4.16

După efectuarea forțată a montajului capetele tuturor barelor ajung în punctul  $A$ . Pentru a se putea realiza montajul în acest punct, barele 1 și 3 vor trebui supuse la compresiune iar bara 2 la întindere. Ca urmare a acestor solicitări în bare vor apărea eforturile  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$ . Ecuațiile de echilibru pentru punctul  $A$  vor fi:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_1 \sin \alpha = N_3 \sin \alpha \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha + N_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Se constată că avem doar două ecuații și trei necunoscute, deci, problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se consideră poziția deformată a sistemului ca urmare a montajului forțat. Între deplasările punctelor  $A_1$  și  $A_2$  și abaterea de montaj se stabilește următoarea relație:

$$a = \delta_1 + \delta_2 \quad (4.23)$$

$\delta_1$  reprezintă tocmai lungimea barei 2, deci vom avea:



$$\delta_2 = \Delta l_2 \quad (4.23)$$

Din figura 4.16b se observă că:

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} \quad (4.24)$$

cu  $\Delta l_1$  măsurându-se în același mod ca la problema precedentă. Cu ajutorul relațiilor (4.22), (4.23) și (4.24) și ținând seama de faptul că  $\Delta l_1 = (N_1 l_1) / (EA)$  rezultă:

$$a = \frac{N_2 l}{EA} + \frac{N_1 l}{EA \cos^2 \alpha}$$

Din relațiile (4.21) rezultă:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 \\ N_2 &= -2N_1 \cos \alpha \end{aligned}$$

Ca urmare vom avea:

$$N_1 = \frac{aEA}{1 - 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = N_3; \quad N_2 = 2 \cos \alpha \frac{aEA}{1 - 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

ce reprezintă eforturile din barele supuse montajului forțat. Noua poziție a punctului de montaj se află față de  $A_1$  la distanța:

$$\delta_1 = \frac{N_2 l}{EA} = a \frac{1}{1 - \frac{2 \cos^3 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

#### 4.11. Bare supuse variațiilor de temperatură

Se consideră bara de lungime  $l$  și secțiune constantă din figura 4.17a.

Sub acțiunea unei variații uniforme  $\Delta t$  a temperaturii, bara, care se poate dilata liber, va căpăta alungirea:  $\Delta l = \alpha l \Delta t$  în care  $\alpha$  reprezintă coeficientul de dilatare termică liniară și este o constantă ce depinde de material. Este important de subliniat faptul că, atât timp cât dilatarea nu este împiedicată în bară nu apar tensiuni, figura 4.17b. În cazul în care dilatarea nu se poate produce liber, în bară apar tensiuni determinate de solicitarea exterioară constituită din reacțiunile ce apar în reazemele care împiedică respectiva dilatare figura 4.17c. Aceste tensiuni produse de solicitarea termică se suprapun peste cele introduse de solicitarea mecanică propriu-zisă care poate acționa pe bară.



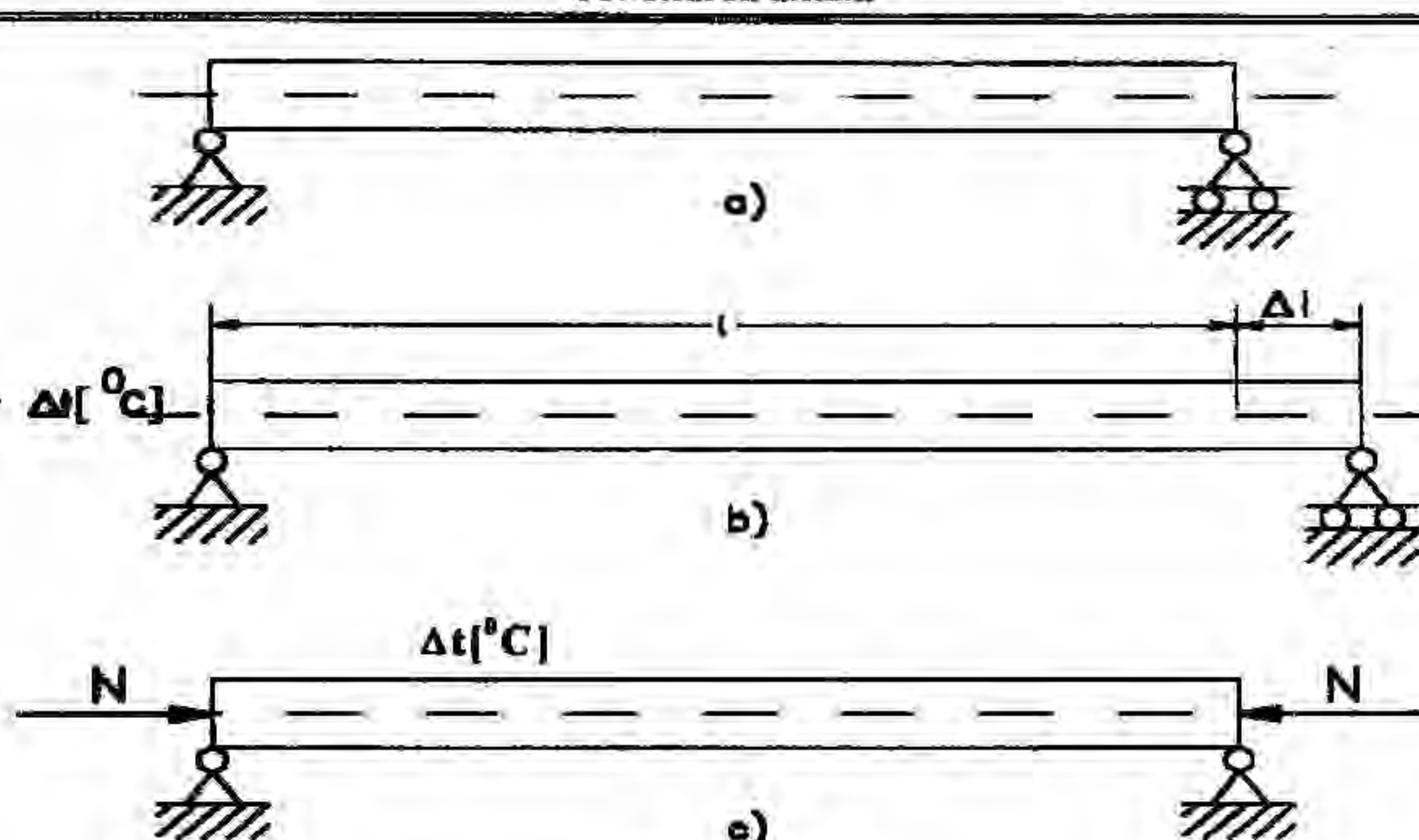


Fig. 4.17

Pentru determinarea efortului axial care apare în bară se aplică metoda suprapunerii efectelor. Astfel, avem aceleași efecte dacă:

- bară aflată între reazeme fixe se încălzește cu  $\Delta t [^{\circ}\text{C}]$  și este solicitată cu reacțiunea  $N$  ce apare în reazeme;
- bară, liberă la un capăt, se încălzește cu  $\Delta t [^{\circ}\text{C}]$  și se comprimă cu aceeași sarcină  $N$  care apare ca reacțiune în primul caz.

Evident că, sarcina  $N$  trebuie să fie atât de mare încât să comprime bară pe distanța  $\Delta l$ , aceeași care apare în cazul în care bară s-ar dilata liber. În aceste condiții se poate scrie egalitatea:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t = \frac{Nl}{EA}$$

de unde rezultă:

$$N = \alpha AE \Delta t$$

sau:

$$\sigma = \alpha E \Delta t$$

Pentru calculul eforturilor din bare aflate în diferite configurații și supuse variațiilor de temperatură se recomandă:

- să se elimine restricțiile care ar împiedica dilatarea termică liberă a sistemului;
- să se considere o anumită poziție a sistemului liber deformat sub acțiunea variației de temperatură;



- să se aducă sistemul liber deformat în poziția finală reală (cu restricții) cu ajutorul unor forțe ce constituie chiar reacțiunile din legături;

- să se scrie relații între deplasările datorate dilatării termice libere și cele datorate aplicării forțelor în vederea aducerii sistemului deformat în poziția reală. Aceste relații vor permite determinarea reacțiunilor și ca urmare a eforturilor din bare.

#### Aplicații

A 4.8. Pentru barele din figura 4.18 se cere să se determine tensiunile apărute ca urmare a încălzirii acestora cu  $\Delta t$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]. Se menționează că variația de temperatură este mai mare decât cea care poate produce închiderea rostului  $\delta$ . Se cunosc:  $\alpha_1, E_1, A_1, l_1, \alpha_2, E_2, A_2, l_2, \Delta t$  și  $\delta$ .

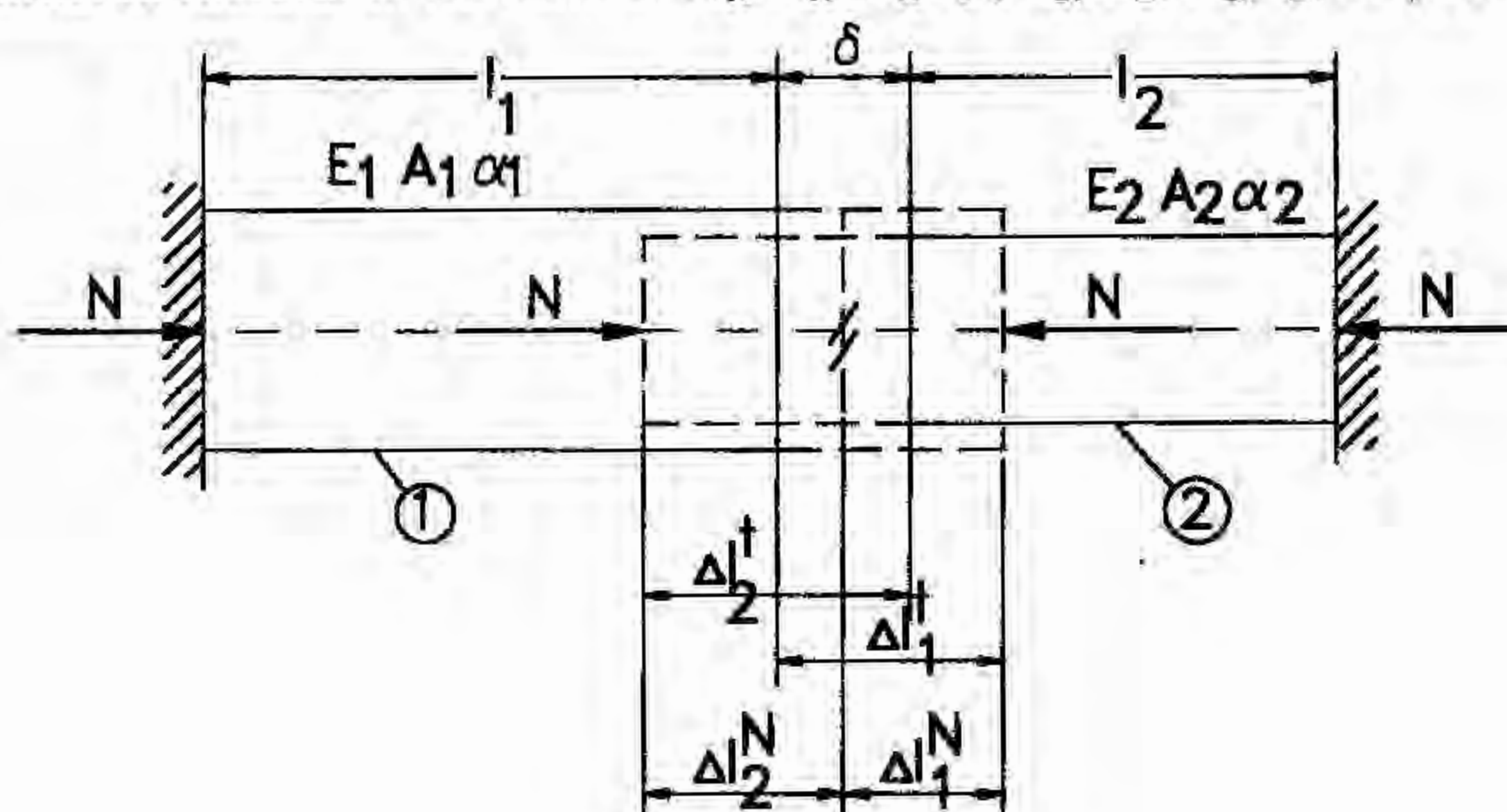


Fig. 4.18

Pentru rezolvarea acestei probleme se aplică metoda eliminării restricțiilor și a suprapunerii efectelor. Dacă nu ar exista restricții la dilatare, bara 1 s-ar dilata liber cu  $\Delta l_1^t = \alpha_1 l_1 \Delta t$  iar bara 2 cu  $\Delta l_2^t = \alpha_2 l_2 \Delta t$ . Considerându-se poziția finală, reală a sistemului, cea notată cu //, se aduc barele în această poziție din poziția în care au fost liber deformat termic. Acest lucru se poate face cu forțe având aceeași valoare  $N$ , și pentru bara 1 și pentru bara 2, deoarece, în cazul real, fără restricții, reacțiunile care apar la contactul dintre cele două bare, sunt egale. Comprimarea celor două bare cu forțele  $N$  se face pe distanțele:



$$\Delta l_1^N = \frac{Nl_1}{E_1 A_1} \text{ si } \Delta l_2^N = \frac{Nl_2}{E_2 A_2}$$

Se observă că între deplasările termice libere și cele datorate forțelor  $N$  există relația:

$$\Delta l_1^t - \Delta l_1^N + \Delta l_2^t - \Delta l_2^N = \delta$$

Înlocuind aceste deplasări cu expresiile formulate anterior se obține în

final:

$$N = \frac{\Delta t(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) - \delta}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}}$$

Este evident faptul că, forțele de reacțiune  $N$  care apar la contactul dintre cele două bare se regăsesc și în încastrări. Tensiunile din cele două bare vor fi:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{\Delta t(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) - \delta}{\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2 A_1}{E_2 A_2}} \text{ si } \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{\Delta t(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) - \delta}{\frac{l_2}{A_2} + \frac{l_1 A_2}{E_1 A_2}}$$

**A.4.10.** Se consideră ansamblul șurub-piuliță din figura 4.19. Să se calculeze tensiunile din cele două piese în condițiile în care întregul ansamblu suferă o variație de temperatură  $\Delta t$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]. Piulița este din cupru iar șurubul este din oțel. Se cunosc:  $\alpha_{\text{cu}}$ ,  $E_{\text{cu}}$ ,  $A_{\text{cu}}$ ,  $l_1$ ,  $\alpha_{\text{ol}}$ ,  $E_{\text{ol}}$ ,  $A_{\text{ol}}$ ,  $l_2$ , și  $\Delta t$ .

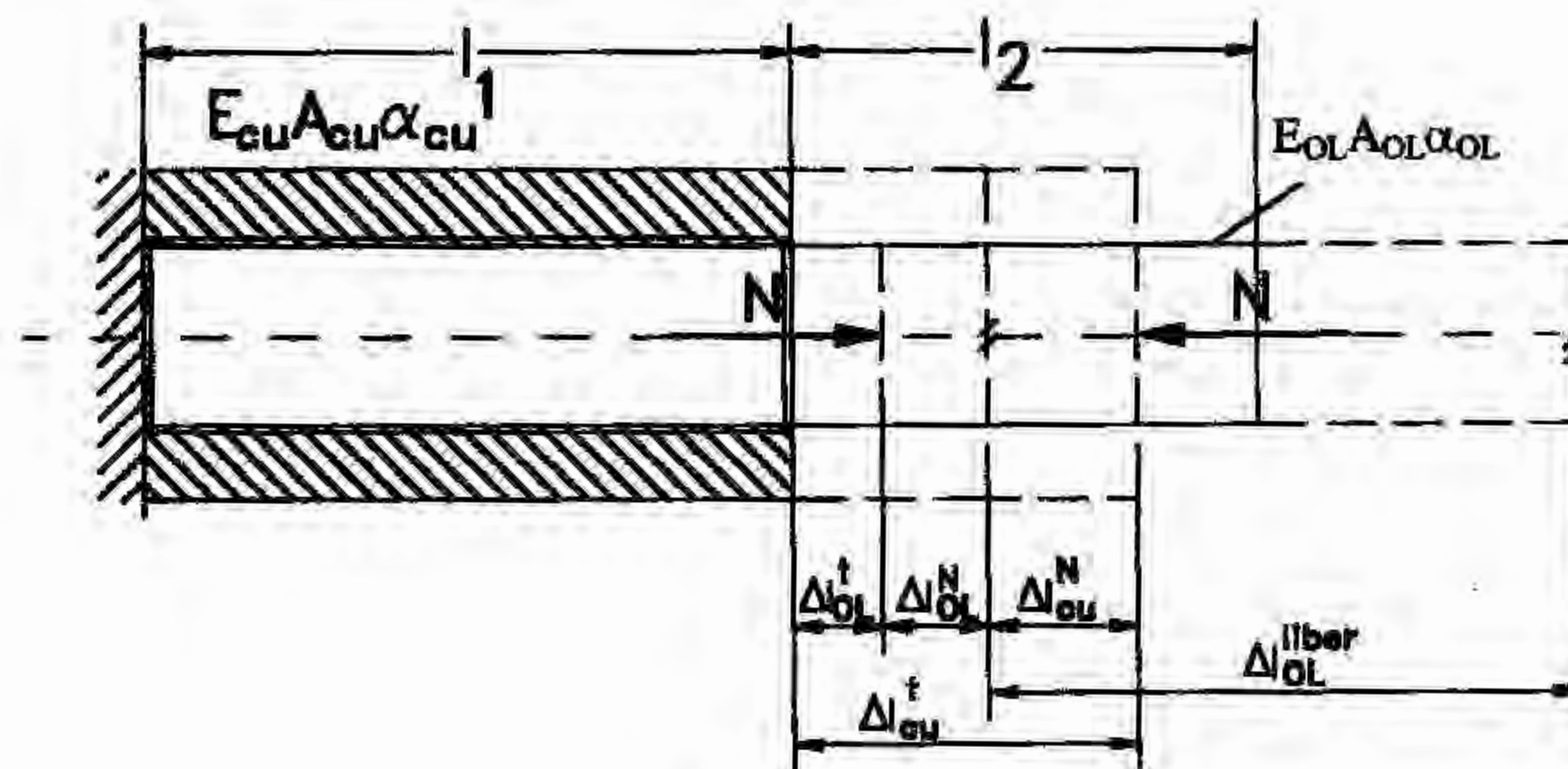


Fig. 4.19



Presupunem că poziția ansamblului după încălzire este cea figurată cu //. Restricția la dilatare există numai pe porțiunea  $l_1$  și este reprezentată de filet. Dacă acesta nu ar exista, piulița din cupru s-ar dilata cu cantitatea  $\Delta l_{cu}^t = \alpha_{cu} l_1 \Delta t$  iar porțiunea din șurub în contact cu piulița s-ar dilata cu cantitatea  $\Delta l_{ol}^t = \alpha_{ol} l_1 \Delta t$ . Pentru aducerea în poziția considerată ca finală a celor două piese, se acționează cu forțele  $N$  care sunt de altfel și reacțiunile care apar în filet. Cele două deplasări vor fi:

$$\Delta l_{cu}^N = \frac{N l_1}{E_{cu} A_{cu}} \quad \text{și} \quad \Delta l_{ol}^N = \frac{N l_1}{E_{ol} A_{ol}}$$

Între aceste deplasări și cele datorate solicitării termice se poate stabili următoarea relație:

$$\Delta l_{cu}^t - \Delta l_{cu}^N = \Delta l_{ol}^t + \Delta l_{ol}^N$$

Facându-se înlocuirile și câteva calcule simple se obține:

$$N = \frac{\Delta t (\alpha_{cu} - \alpha_{ol})}{\frac{1}{E_{cu} A_{cu}} + \frac{1}{E_{ol} A_{ol}}}$$

Tensiunile din cele două piese (care se stabilesc doar pe porțiunea filetată) sunt date de relațiile:

$$\sigma_{cu} = \frac{N}{A_{cu}} = \frac{\Delta t (\alpha_{cu} - \alpha_{ol})}{\frac{1}{E_{cu}} + \frac{A_{cu}}{E_{ol} A_{ol}}} \quad \text{și} \quad \sigma_{ol} = \frac{N}{A_{ol}} = \frac{\Delta t (\alpha_{cu} - \alpha_{ol})}{\frac{1}{E_{ol}} + \frac{A_{ol}}{E_{cu} A_{cu}}}$$

Dilatarea totală a piuliței este:

$$\Delta l_{cu} = \Delta l_{cu}^t - \Delta l_{cu}^N = \frac{l_1 \Delta t (\alpha_{cu} E_{cu} A_{cu} + \alpha_{ol} E_{ol} A_{ol})}{E_{cu} A_{cu} + E_{ol} A_{ol}}$$

iar dilatarea totală a șurubului este:

$$\Delta l_{ol} = \Delta l_{cu} + \Delta l_{ol}^{liber} = \Delta l_{cu} + \alpha_{ol} l_2 \Delta t$$

#### 4.12. Calculul firelor și cablurilor

Firele și cablurile se deosebesc de bare întrucât nu prezintă rigiditate la încovoiere, torsiune și compresiune. Ele pot prelua numai eforturi de întindere și sunt considerate, de regulă, perfect flexibile. Pentru calculul eforturilor din fire trebuie să se determine mai întâi



poziția de echilibru a acestora. Atunci când sarcinile sunt distribuite, poziția de echilibru se numește curbă funiculară.

Se consideră un fir încărcat cu o sarcină distribuită ca în figura 4.20a.

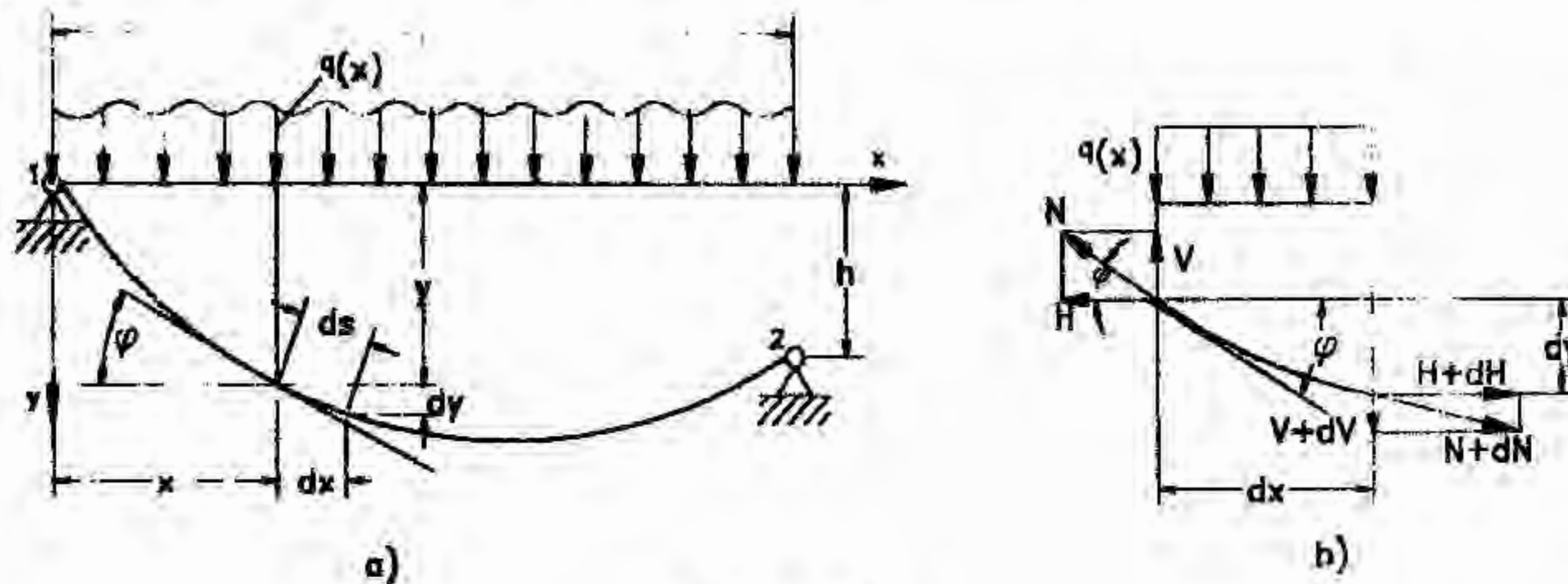


Fig. 4.20

Firul este susținut în punctele 1 și 2 de două reazeme articulate. Ca urmare a solicitării exterioare, elementul de lungime  $ds$  este solicitat de sarcinile prezentate în figura 4.20b. Sarcinile axiale din cele două secțiuni ale elementului de lungime  $ds$  se pot descompune pe direcțiile  $x$  și  $y$ . Din ecuațiile de echilibru va rezulta:

$$\begin{cases} dH = 0 \\ dV + qdx = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Din prima ecuație se deduce că  $H = \text{constant}$ , deci că, proiecția pe orizontală a efortului axial are aceeași valoare în cazul încărcării verticale, indiferent de secțiunea transversală. Se știe că:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d}{dx} \left( \frac{V}{H} \right) \quad (4.26)$$

Cum  $H = \text{const.}$  și  $dV = -qdx$ , va rezulta:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{qdx}{Hdx} = -\frac{q}{H} \quad \text{deci} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q}{H} \quad (4.27)$$

Relația (4.27) reprezintă ecuația diferențială a formei deformate a firului. Pentru determinarea componentei verticale  $V$  se integrează a doua ecuație din relațiile (4.25):

$$V = -\int qdx + C$$



în care  $C$  este o constantă de integrare care se determină în funcție de valorile reacțiunilor din punctele 1 ( $x=0$ ) și 2 ( $x=l$ ).

Se consideră un fir încărcat cu o forță verticală uniform distribuită a cărei intensitate este  $q$ , figura 4.21.

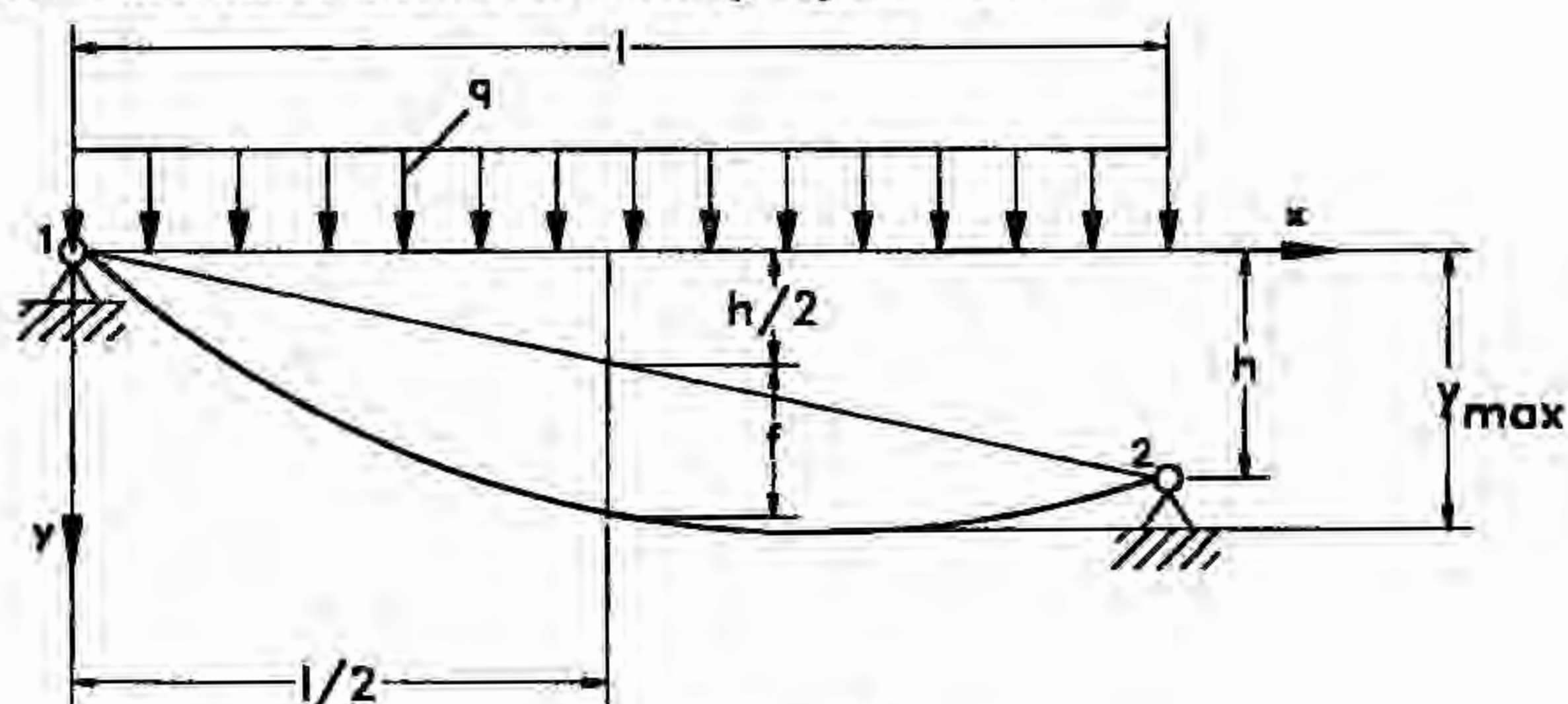


Fig. 4.21

În această figură,  $l$  reprezintă deschiderea,  $h$  diferența de nivel iar  $f$  săgeata firului măsurată față de linia punctelor de suspensie.

Forma de echilibru a firului este o parabolă a cărei ecuație se deduce prin integrarea expresiei dată de (4.27). Va rezulta:

$$y = -\frac{qx^2}{2H} + C_1x + C_2$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare ce se determină din condițiile la limită. În situația din figura 4.21, aceste condiții sunt:

- pentru  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;
- pentru  $x = l$ ,  $y = h$ .

Astfel poziția de echilibru a firului devine:

$$y = \left( \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} \right)x - \frac{qx^2}{2H} \quad (4.28)$$

Se știe că lungimea elementului  $ds$  este dată de relația:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

Prin integrarea acestei ecuații și dezvoltând radicalul în serii, din care se păstrează doar primii doi termeni, se obține lungimea totală a firului sub forma:



$$L = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{q^2 l^3}{24H^2} \quad (4.29)$$

La mijlocul deschiderii ( $x=l/2$ ) avem  $y = h/2 + f$ . Înlocuind în (4.28) va rezulta:

$$f = \frac{ql^2}{8H} \text{ sau } H = \frac{ql^2}{8f} \quad (4.30)$$

Tinând cont de relațiile (4.29) și (4.30) va rezulta, pentru lungimea totală a firului, următoarea relație de calcul:

$$L = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{8f^2}{3l} \quad (4.31)$$

Dacă punctele de suspensie s-ar afla la același nivel ( $h=0$ ), lungimea firului ar fi:

$$L = l + \frac{8f^2}{3l}$$

Poziția cea mai de jos a firului se obține pentru  $y' = 0$ :

$$y' = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} = 0$$

de unde rezultă coordonata pe orizontală a acestui punct:

$$x = a = \frac{l}{2} + \frac{hH}{ql} \quad (4.32)$$

sau:

$$x = \frac{l}{2} + \frac{hl}{8f} \quad (4.33)$$

respectiv coordonata aceluiași punct pe verticală:

$$y_{\max} = \frac{h}{2} + \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql} \text{ sau } y_{\max} = \frac{h}{2} + f + \frac{h^2}{16f}$$

În funcție de modul de așezare și întindere a firului, pentru sarcina  $H$  putem avea următoarele situații:

a). Dacă firul este întins astfel încât poziția cea mai de jos a acestuia să se afle între reazeme ( $a < l$ ), figura 4.22a, din relația (4.32) va rezulta:

$$l > \frac{l}{2} + \frac{hH}{ql} \text{ de unde } H < \frac{ql^2}{2H}$$



b). Dacă poziția cea mai de jos a firului se află chiar în reazemul 2 ( $a = l$ ), figura 4.22b, și reprezintă un punct de maxim (axa  $y$  este îndreptată în jos), se obține:

$$H = \frac{ql^2}{2H}$$

c). Dacă poziția de maxim nu se obține între reazeme ( $a < l$ ), figura 4.22c, atunci:

$$H > \frac{ql^2}{2H}$$

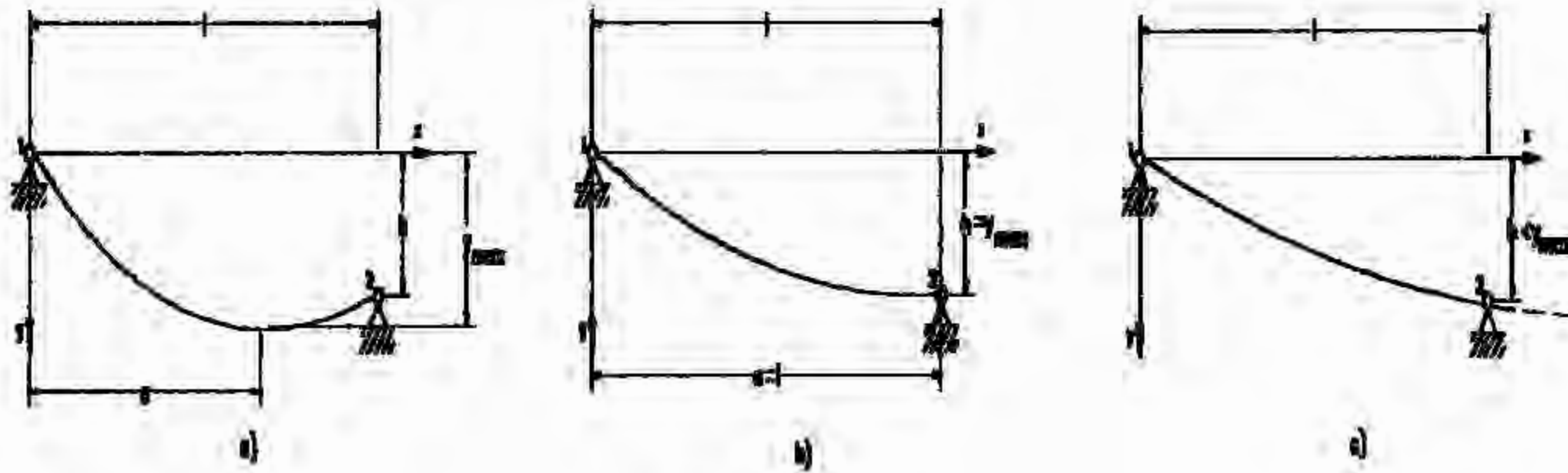


Fig. 4.22

După determinarea lui  $H$  se poate obține efortul axial în orice secțiune a firului din relația:

$$N = \frac{H}{\cos \varphi} = H\sqrt{1 + y'^2} \quad (4.34)$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$N = H \left( 1 + \frac{q^2 l^2}{8H^2} + \frac{h^2}{2l^2} + \frac{q^2 x^2}{2H^2} + \frac{qh}{2H} - \frac{q^2 lx}{2H^2} - \frac{qhx}{lH} \right) \quad (4.35)$$

Pentru  $x = 0$  se obține:

$$N = H \left( 1 + \frac{q^2 l^2}{8H^2} + \frac{h^2}{2l^2} + \frac{qh}{2H} \right)$$

sau în funcție de săgeata  $f$ :

$$N = H \left( 1 + \frac{l^2}{8f} + f + \frac{h^2}{16f} + \frac{h}{2} \right)$$

În punctul de maxim ( $x = a$ ) efortul axial este  $N = H$  iar pentru  $x = l$  se obține:

$$N = H \left( 1 + \frac{q^2 l^2}{8H^2} + \frac{h^2}{2l^2} - \frac{qh}{2H} \right)$$

sau în funcție de săgeata  $f$ :



$$N = H \left( 1 + \frac{l^2}{8f} + f + \frac{h^2}{16f} - \frac{h}{2} \right)$$

Condiția de rezistență a firului poate fi exprimată astfel:

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{ql^2}{8fA} \leq \sigma_a$$

Lungimea totală a firului aflat sub acțiunea unei forțe uniform distribuite este dată de relația:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N ds}{EA} = \frac{H}{EA} \int_0^l (1 + y'^2) dx$$

Atunci când săgeata  $f$  este mică în raport cu deschiderea ( $f/l < 1/20$ ), se poate neglija termenul  $y'^2$  în raport cu 1 și atunci vom avea:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EA}$$

În cazul firelor care sunt supuse unor variații de temperatură, lungimea totală a firului va trebui să cuprindă și lungirea dată de respectivele variații care este:

$$\Delta l_t = \alpha l (t - t_0)$$

în care:

-  $\alpha$  este coeficientul de dilatare termică liniară a materialului din care este confecționat firul;

-  $t_0$  este temperatura la montaj;

-  $t$  este temperatura de lucru.

În aceste condiții, lungimea totală a firului va fi dată de relația:

$$L = L_0 + \frac{Hl}{EA} + \alpha l (t - t_0) = l + \frac{h^2}{2l} + \frac{8f^2}{3l}$$

Notând  $\delta = L_0 - l$  și înlocuind pe  $H$  în funcție de  $f$ , relația anterioară devine:

$$f^3 - \frac{3}{8} l \left[ \delta + \alpha l (t - t_0) - \frac{h^2}{2l} \right] f - \frac{3}{64} \frac{ql^2}{EA} = 0$$

Cu această relație se poate determina săgeata în condiții de exploatare a firului care ține seama și de variațiile de temperatură.



## CAPITOLUL 5

### CALCULUL CONVENTIONAL LA FORFECARE

---

- 5.1. Introducere
  - 5.2. Modul de realizare a solicitării la forfecare
  - 5.3. Relații de calcul și verificare
  - 5.4. Calculul convențional al îmbinărilor
- 

#### 5.1. Introducere

Secțiunea transversală a unui corp este solicitată la *forfecare pură* atunci când aici apar numai tensiuni tangențiale dezvoltate de forțe tăietoare, paralele cu secțiunea respectivă. În realitate, este destul de dificil de realizat o astfel de solicitare. De obicei, în secțiunea transversală respectivă apar și tensiuni datorate încovoierii. De asemenea, în zona din imediata vecinătate a punctului de aplicație al sarcinilor, apar tensiuni datorate solicitării de contact realizată în vederea aplicării respectivelor sarcini. În cele ce urmează se vor neglija aspectele secundare ale solicitării la forfecare.

#### 5.2. Modul de realizare a solicitării la forfecare

Putem spune că, o bară este solicitată la *forfecare pură* atunci când asupra acesteia acționează două forțe egale, de sens contrar și având direcția normală pe axa barei respective, figura 5.1a. Aceste forțe poartă numele de *forțe tăietoare*.

În mod practic, cele două forțe se pot aplica prin intermediul fălcilor unei foarfeci sau a unei ghilotine. Ca urmare, condiția ca cele



două forțe să fie perfect coliniare este mai greu de realizat. Astfel, chiar de la început între aceste două forțe există o anumită distanță a care duce la apariția unui moment încovoietor, figura 5.1b. Această distanță se mărește pe măsură ce fețele tăietoare pătrund în material întrucât solicitarea se transmite prin intermediul forțelor, distribuite acum, pe tăișul falcilor, figura 5.1c. Brațul acestor forțe este însă destul de mic astfel încât tensiunile produse prin încovoiere pot fi neglijate.

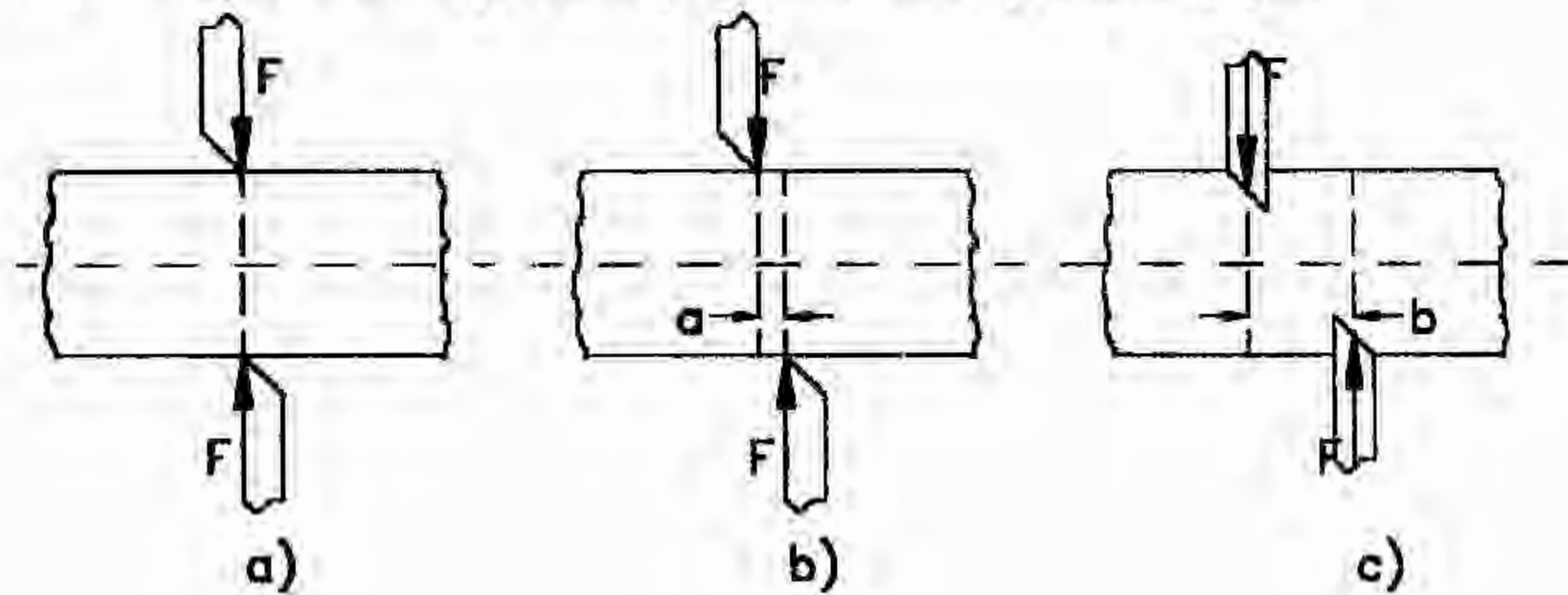


Fig. 5.1

Solicitarea la care, pe lângă tensiunile tangențiale datorate forțelor tăietoare apar și tensiuni normale de valoare mică, poartă numele de forfecare tehnică. Acest tip de forfecare se întâlnește în majoritatea covârșitoare a cazurilor întâlnite în practică. În figura 5.2 se prezintă astfel de situații.

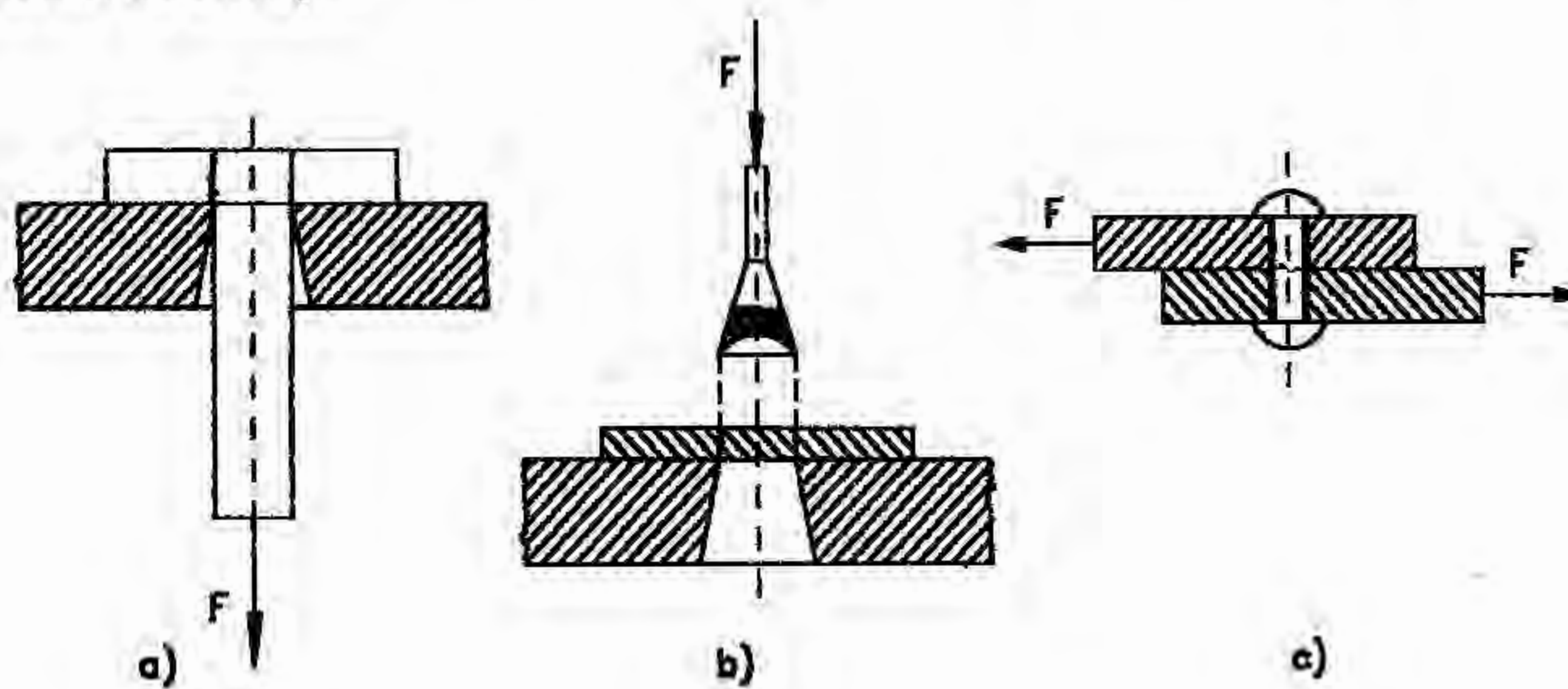


Fig. 5.2



### 5.3. Relații de calcul și verificare

Se consideră bara dreaptă din figura 5.3a. Pe suprafața acesteia se trasează o rețea de ochiuri pătrate. Sub acțiunea forțelor tăietoare, volumul de material cuprins între aceste forțe se deformează iar rețeaua de pătrate va fi acum o rețea de romburi, figura 5.3b.

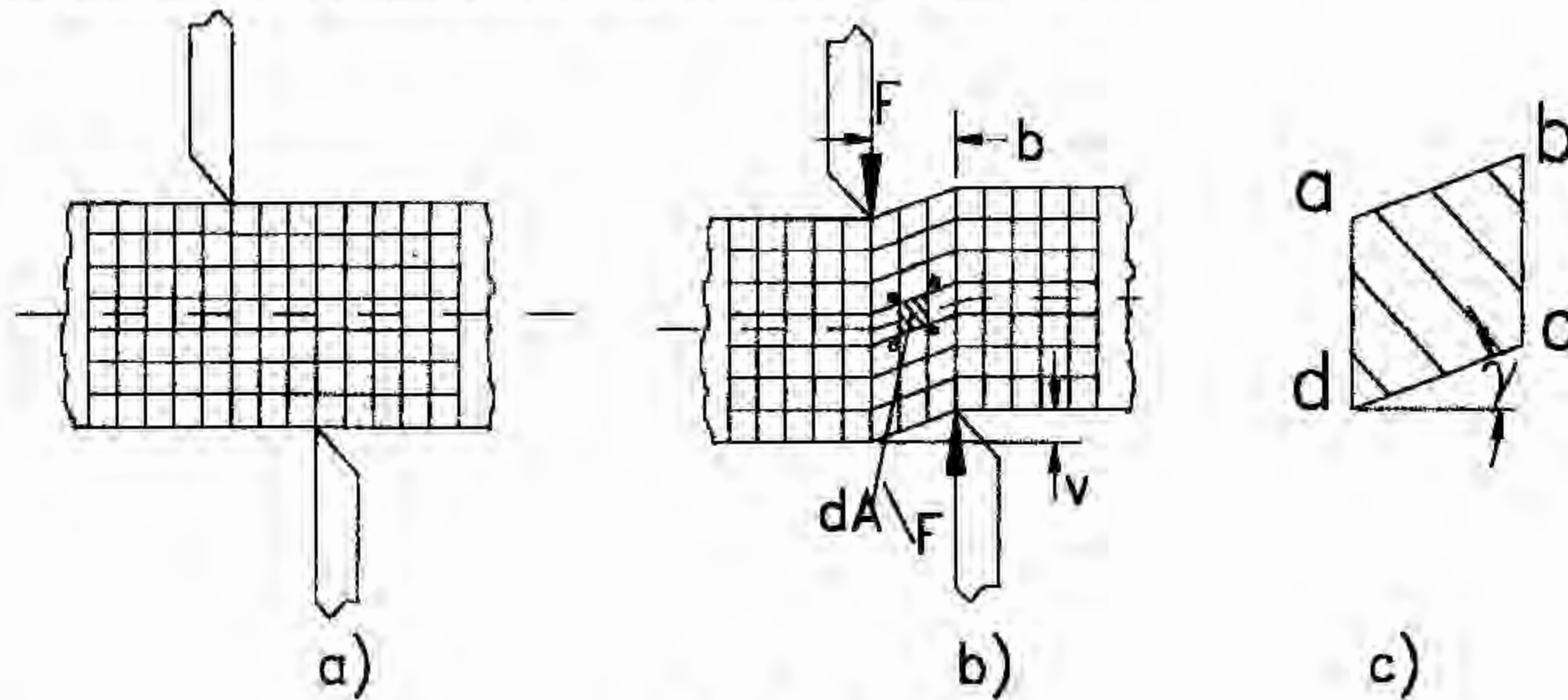


Fig. 5.3

Modificarea unghiului de  $90^\circ$  al rețelei arată că solicitarea a produs alunecări ale suprafețelor puse în evidență de unghiul  $\gamma$ , figura 5.3c. Ca urmare, în secțiunile transversale se dezvoltă tensiuni tangențiale  $\tau$ , figura 5.4.

Calculul convențional la forfecare, aplicat în special barelor cu secțiune mică, presupune că:

- tensiunile tangențiale sunt paralele cu sarcina exterioară care le-a produs;
- tensiunile tangențiale sunt uniform repartizate pe suprafața secțiunii transversale a barei.

În aceste condiții, folosind a doua ecuație de echivalență (1.9), se obține:

$$T = \int_A \tau dA = \tau A \quad \text{sau} \quad \tau = \frac{T}{A} \quad (5.1)$$

Relația obținută este una aproximativă dar are avantajul simplității și al abaterilor mici introduse în raport cu realitatea.



În figura 5.4 se constată că, sub acțiunea tensiunilor tangențiale, elementul de volum capătă deformații unghiulare (ținând seama și de dualitatea tensiunilor tangențiale).

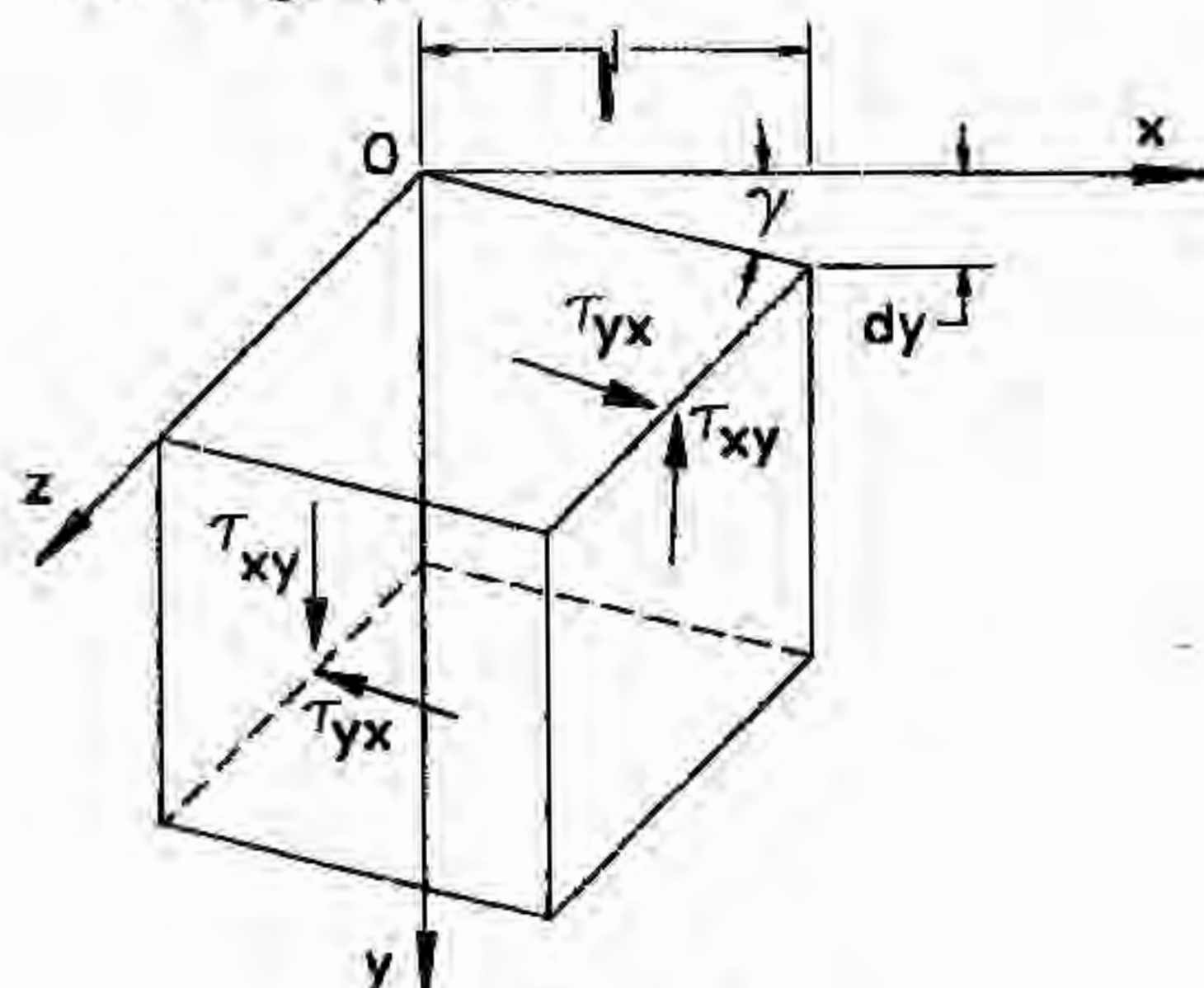


Fig. 5.4

Considerând valabilă ipoteza deformațiilor mici, se poate considera că:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta y}{l} \approx \gamma$$

Folosind legea lui Hooke de proporționalitate între tensiuni și deformații

$$(\tau = G \gamma), \text{ va rezulta: } \Delta y = \frac{\tau}{G} l \text{ sau } \Delta y = \frac{Tl}{GA}$$

Deplasarea relativă  $v$ , a unei secțiuni față de alta aflate la distanța  $b$ , figura 5.3b, este dată de relația:  $v = \frac{Tb}{GA}$

în care produsul  $GA$  se numește *modul de rigiditate la forfecare* al secțiunii transversale de arie  $A$ .

Cu ajutorul relației (5.1), folosită în cazul pieselor cu secțiune mică sollicitate la forfecare, pot fi rezolvate următoarele probleme:

- *probleme de dimensionare*, prin care se calculează aria necesară secțiunii transversale a unei piese sollicitată la forfecare de forțele  $F$  și confecționată dintr-un material care are rezistența admisibilă la forfecare  $\tau_a$ :

$$A_{\text{nec}} \geq \frac{F}{\tau_a}$$



Tensiunea admisibilă  $\tau_a$  se poate determina cu ajutorul uneia din relațiile:

$$\tau_a = \frac{\tau_r}{c} \quad \text{sau} \quad \tau_a = \frac{\tau_c}{c_1}$$

în care  $c$  și  $c_1$  sunt coeficienți de siguranță iar  $\tau_r$  și  $\tau_c$  reprezintă rezistența la rupere, respectiv limita de curgere la solicitarea de forfecare pură.

Determinarea rezistenței la rupere sau a limitei de curgere pe baza solicitării de forfecare pură este destul de dificil de realizat, în special pentru materialele neomogene sau anizotrope. De foarte multe ori, pentru tensiunea tangențială admisibilă se folosește relația:

$$\tau_a = (0,5 \div 0,8)\sigma_u$$

în care  $\sigma_u$  este tensiunea admisibilă obținută pe baza încercării de tracțiune;

- *probleme de verificare* pe baza cărora se determină tensiunea efectiv introdusă în secțiune ca urmare a solicitării exterioare de forfecare. În cadrul acestor probleme se verifică dacă această tensiune depășește sau nu tensiunea tangențială admisibilă:

$$\tau_{cf \max} = \left( \frac{F}{A} \right)_{\max} \leq \tau_a$$

- *probleme de calcul al forței tăietoare capabile de a fi preluată* de o secțiune transversală supusă la forfecare sau al forței necesare forfecării unei anumite secțiuni transversale:

$$T_{cap} \leq A\tau_a \quad \text{sau} \quad T_{forf} \geq A\tau_r$$

#### 5.4. Calculul convențional al îmbinărilor

Imbinarea elementelor componente în cadrul unei structuri se face cu ajutorul unor piese de legătură. Imbinările dintre elementele componente sunt de două feluri:

- îmbinări demontabile cum sunt îmbinările cu șuruburi, buloane, pene, etc.;
- îmbinări nedemontabile cum sunt cele realizate prin nituire, sudură, adezivi, contact termic, contact mecanic, etc..



5.4.1. Îmbinări cu buloane sau cu nituri, figura 5.5.

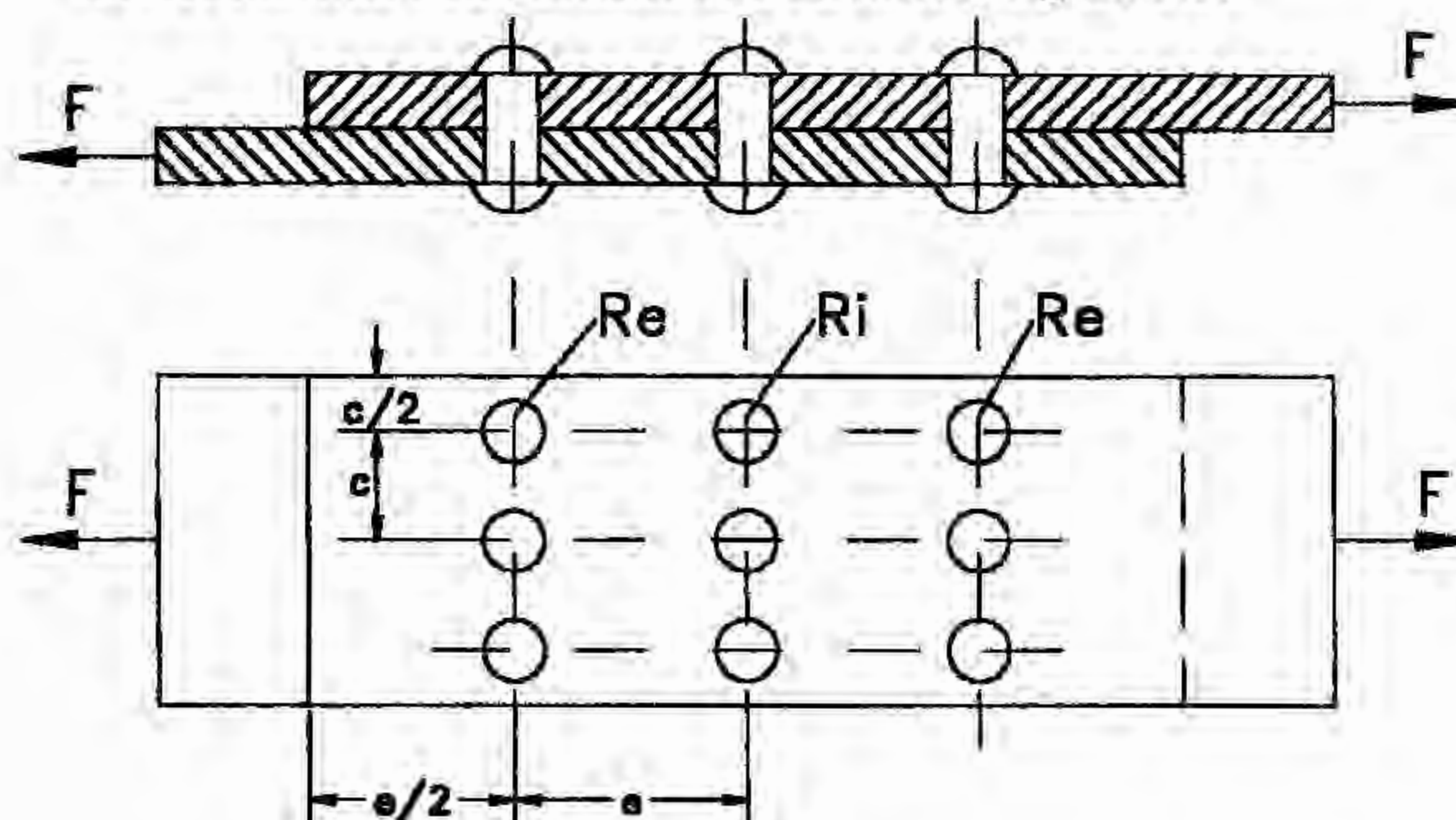


Fig.5.5

Calculul convențional al acestor îmbinări are la bază următoarele ipoteze:

1. Diametrul tijei bulonului (nitului - după realizarea nituirii) este egal cu cel al găurii în care sunt introduse pentru realizarea îmbinării;
2. Sarcina ce acționează asupra îmbinării se împarte în mod egal asupra celor  $z$  buloane (nituri). În realitate, buloanele (niturile) aflate pe rândurile exterioare  $R_e$  (spre punctul de aplicație al sarcinii), sunt mult mai sollicitate;
3. Se neglijează frecarea dintre table;
4. Se consideră că tija bulonului (nitului) este sollicitată numai la forfecare și presiune de contact;
5. Încărcarea este statică neglijându-se efectul concentrării tensiunilor.

În continuare se vor prezenta câteva aplicații pentru calculul de rezistență a îmbinărilor cu buloane sau nituri.

**A.5.1.** Să se dimensioneze îmbinarea cu bulon sollicitat la forfecare, figura 5.6. Se cunosc: forța de lucru  $F$ , grosimea  $t$  și  $t_1$  a tablelor, tensiunea admisibilă la forfecare a materialului din care este confecționat bulonul  $\tau_a^b$ , tensiunea admisibilă la forfecare a materialului din care sunt confecționate tablele  $\tau_a^t$ , tensiunea admisibilă la tracțiune



pentru materialul din care sunt confecționate tablele  $\sigma_u$  și tensiunea admisibilă la strivire între bulon și table  $\sigma_{astr}$ .

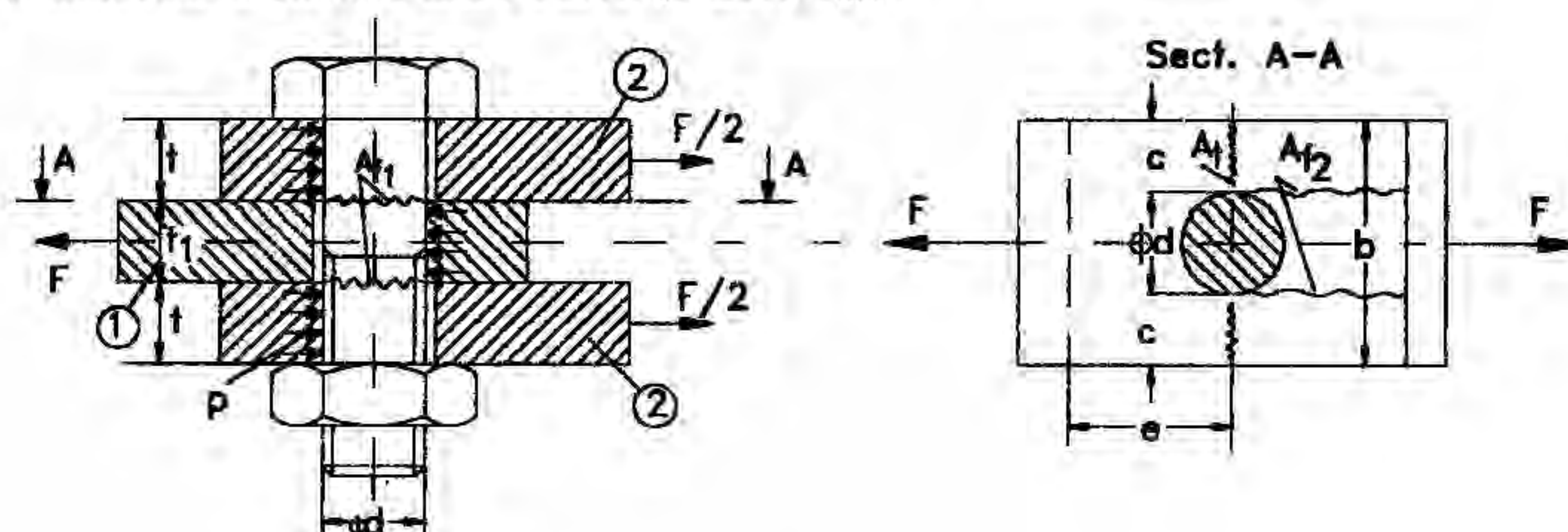


Fig. 5.6

Sarcina de tracțiune  $F$  se transmite de la tabla 1 la tablele 2 prin intermediul bulonului. Astfel, acesta devine solicitat la forfecare în secțiunile planelor de separație dintre table și la strivire care are loc pe suprafețele de contact între bulon și table. Tablele sunt solicitate la tracțiune și forfecare. Pentru ușurința observării solicitărilor se poate constata că:

- o suprafață solicitată și care este paralelă cu forța va fi supusă la forfecare;
- o suprafață solicitată care este perpendiculară pe direcția forței este supusă la tracțiune;
- la contactul suprafețelor supuse acțiunii forțelor exterioare apare fenomenul de strivire.

Ca urmare, bulonul rezistă la forfecare dacă:

$$\tau_{ef1} = \frac{F}{A_{r1}} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} i} \leq \tau_a^b$$

în care  $i$  este numărul total al secțiunilor de forfecare ( $i=2$ ) care se regăsesc în planele de separație dintre table iar  $\tau_a^b$  este tensiunea tangențială admisibilă pentru materialul din care este confecționat bulonul. Din relația precedentă se deduce diametrul  $d$  necesar al bulonului astfel încât acesta să reziste la forfecare.



Între tija bulonului și table apar tensiuni datorate contactului. Dacă valoarea acestor tensiuni depășește limita de curgere la compresiune atunci există posibilitatea apariției de deformări permanente care apar în corpul cu o rezistență la contact mai mică. În aceste condiții, pot apărea jocuri în îmbinare iar la o nouă încărcare forța se poate transmite cu șocuri. Presiunea care se exercită la nivelul suprafețelor de contact este distribuită după o anumită lege, figura 5.7.

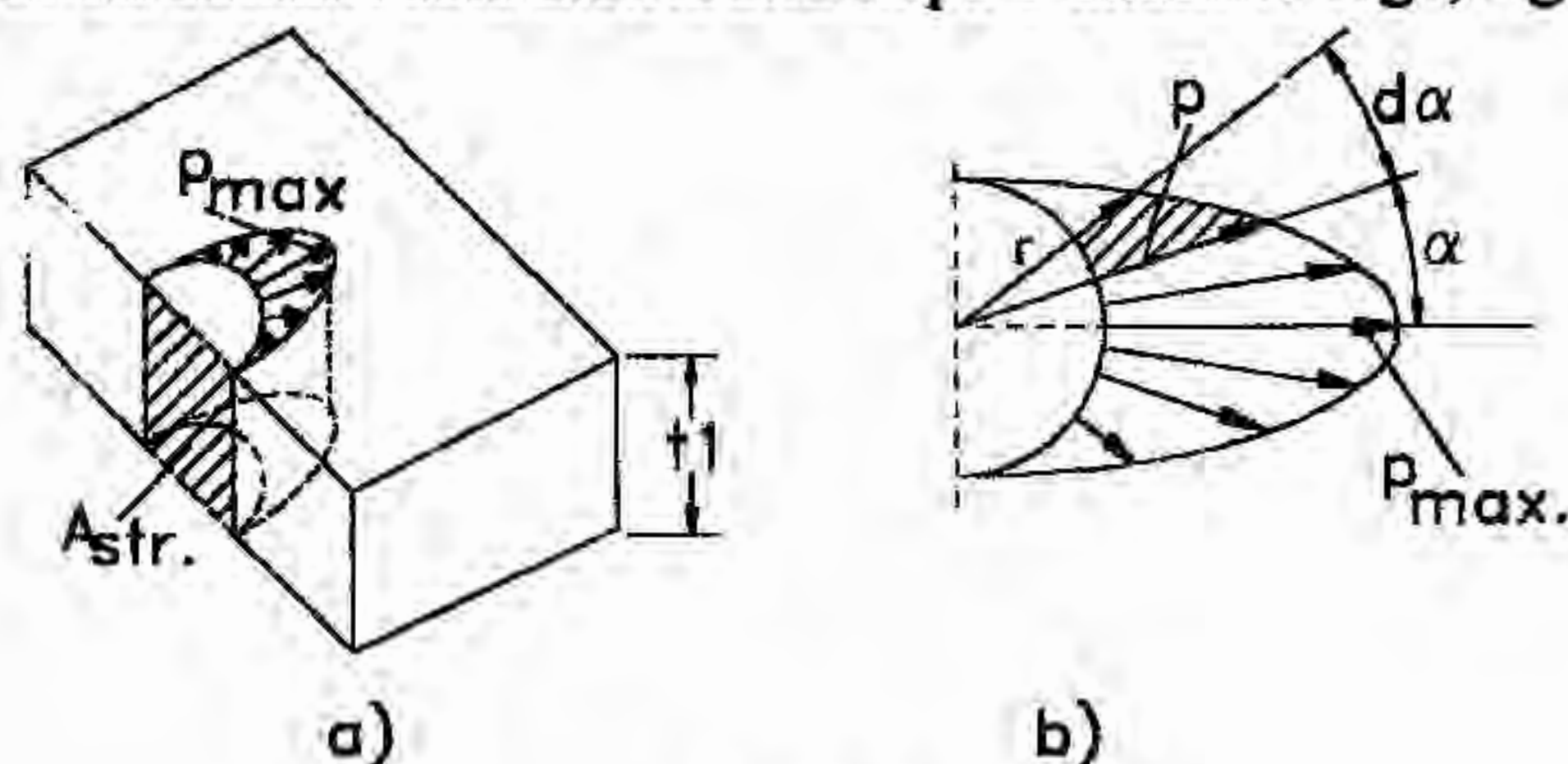


Fig. 5.7

Se consideră pentru distribuția presiunilor de contact următoarea lege:

$$p_{\alpha} = p_{\max} \cos \alpha$$

Forța totală care acționează asupra tablei din mijloc este  $F$  și trebuie să se regăsească din relația:

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} p \cdot r \cdot d\alpha \cdot t_1 = 2r \cdot t_1 \int_0^{\pi/2} p_{\max} \cos \alpha \, d\alpha$$

$$\text{sau } F = p_{\max} \cdot t_1 \cdot d$$

Se poate considera că aria de strivire să fie una convențională și anume  $A_{\text{str.}} = t_1 d$ , în figura 5.7a este suprafața hașurată, iar  $p_{\max} = \sigma_{\text{str.}}$  să fie o valoare limită. În aceste condiții vom avea:

$$\sigma_{\text{str.}} = \frac{F}{A_{\text{str.}}}$$

Această tensiune va fi comparată cu tensiunea admisibilă la strivire dată pentru contactul între materialele din care sunt confecționate bulonul, respectiv tablele:

$$\sigma_{\text{str.}} \leq \sigma_{a, \text{str.}}$$

Dacă nu sunt indicații precise privind valoarea pentru tensiunea admisibilă la strivire, aceasta se va determina din relația:

$$\sigma_{a, \text{str.}} = (2 \div 2,5) \sigma_a$$

În cazul nostru, nu va apărea strivire dacă:



$$\sigma_{str.} = \frac{F}{A_{str.}} = \frac{F}{dt_1} \leq \sigma_a$$

$$\text{sau } \sigma_{str.} = \frac{F}{2dt} \leq \sigma_a$$

Din aceste relații va rezulta grosimea minimă necesară pentru table.

Lățimea  $b$  a tablelor se determină din condiția de rezistență a acestora la tracțiune. Evident că, secțiunea ce se va lua în considerație va fi cea transversală, slăbită cu gaura pentru bulon, figura 5.8a.

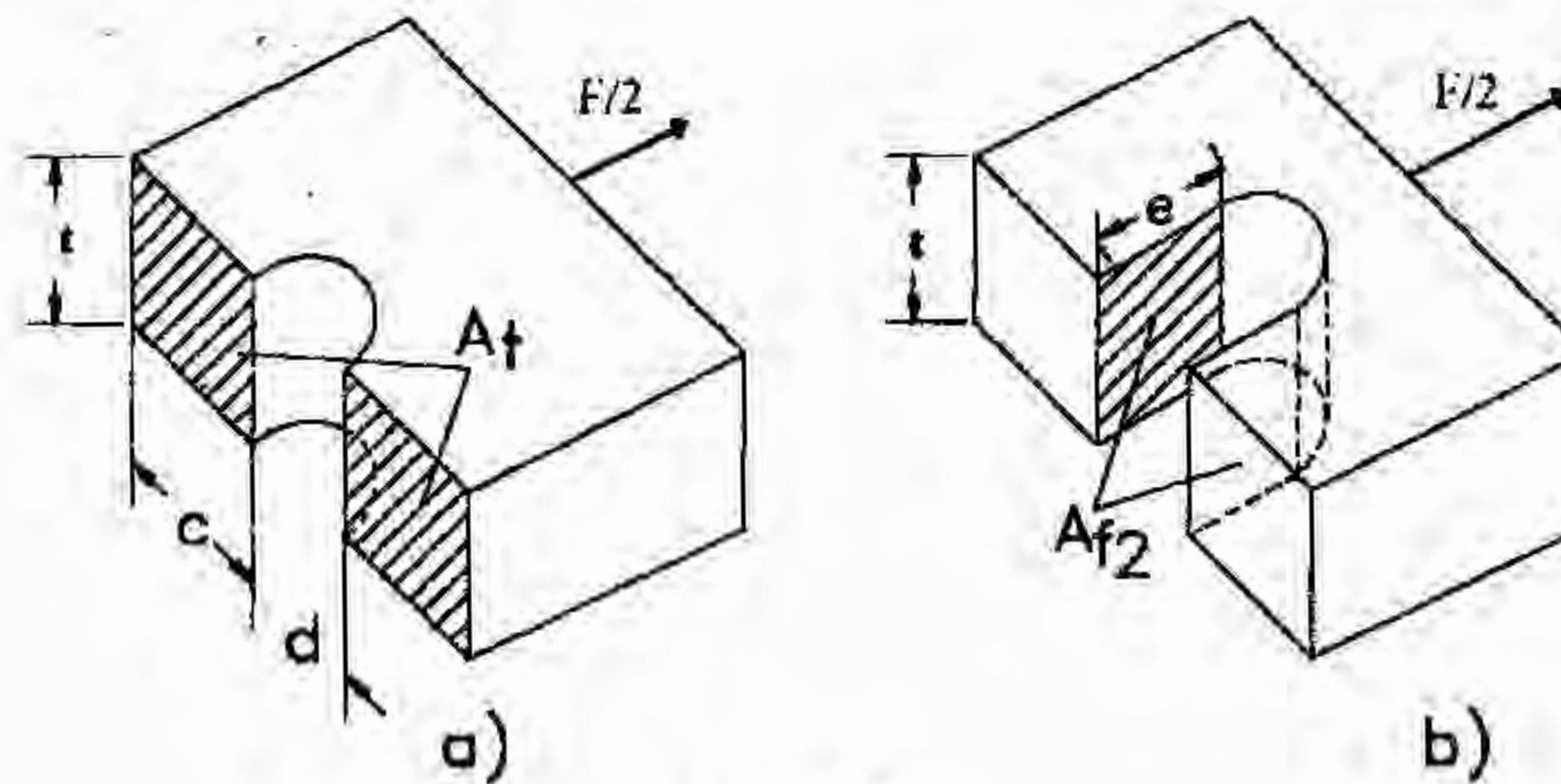


Fig. 5.8

Relațiile de calcul sunt:

$$\sigma_{cf1} = \frac{F}{A_{t1}} = \frac{F}{2(b_1 - d)t} \leq \sigma_a \text{ și } \sigma_{cf2} = \frac{F}{A_{t2}} = \frac{F}{(b_2 - d)t_1} \leq \sigma_a$$

Din această relație se deduce lățimea  $b = \max(b_1, b_2)$  a tablelor astfel încât acestea să reziste la tracțiune.

Distrugerea tablelor se poate produce și dacă acestea se vor forfeca pe direcție longitudinală, figura 5.8b. Condiția ca acest lucru să nu se întâmple este:

$$\tau_{cf} = \frac{F}{A_{f2}} = \frac{F}{2 \cdot 2e_1 \cdot t} \leq \tau_a^t \text{ și } \frac{F}{A_{f3}} = \frac{F}{2e_2 \cdot t_1} \leq \tau_a^t$$

Din aceste relații va rezulta distanța  $e = \max(e_1, e_2)$  de la mijlocul găurii la marginea tablei.

În acest fel s-a dimensionat îmbinarea cu bulon din figura 5.6 astfel încât aceasta să reziste la forța de încărcare  $F$ .



#### 4.5.2. Dimensionarea unei îmbinări cu nituri

Dacă îmbinările cu buloane sunt folosite pentru structurile de rezistență, îmbinările cu nituri pot avea un rol de etanșare și rezistență în același timp sau numai rol de rezistență. Atunci când îmbinarea cu nituri are rol de rezistență, dimensionarea se face ca la îmbinarea cu buloane. Când se folosesc mai multe nituri problema principală care se pune este de a determina numărul necesar de nituri. Gaura prevăzută pentru nit se alege având diametrul cu aproximativ 1 mm mai mare decât diametrul tijei nitului. În vederea realizării îmbinării capătul tijei nitului se bate, aceasta crescând în diametru până când umple golul respectiv.

În figura 5.9 este prezentată o îmbinare cu nituri a două table.

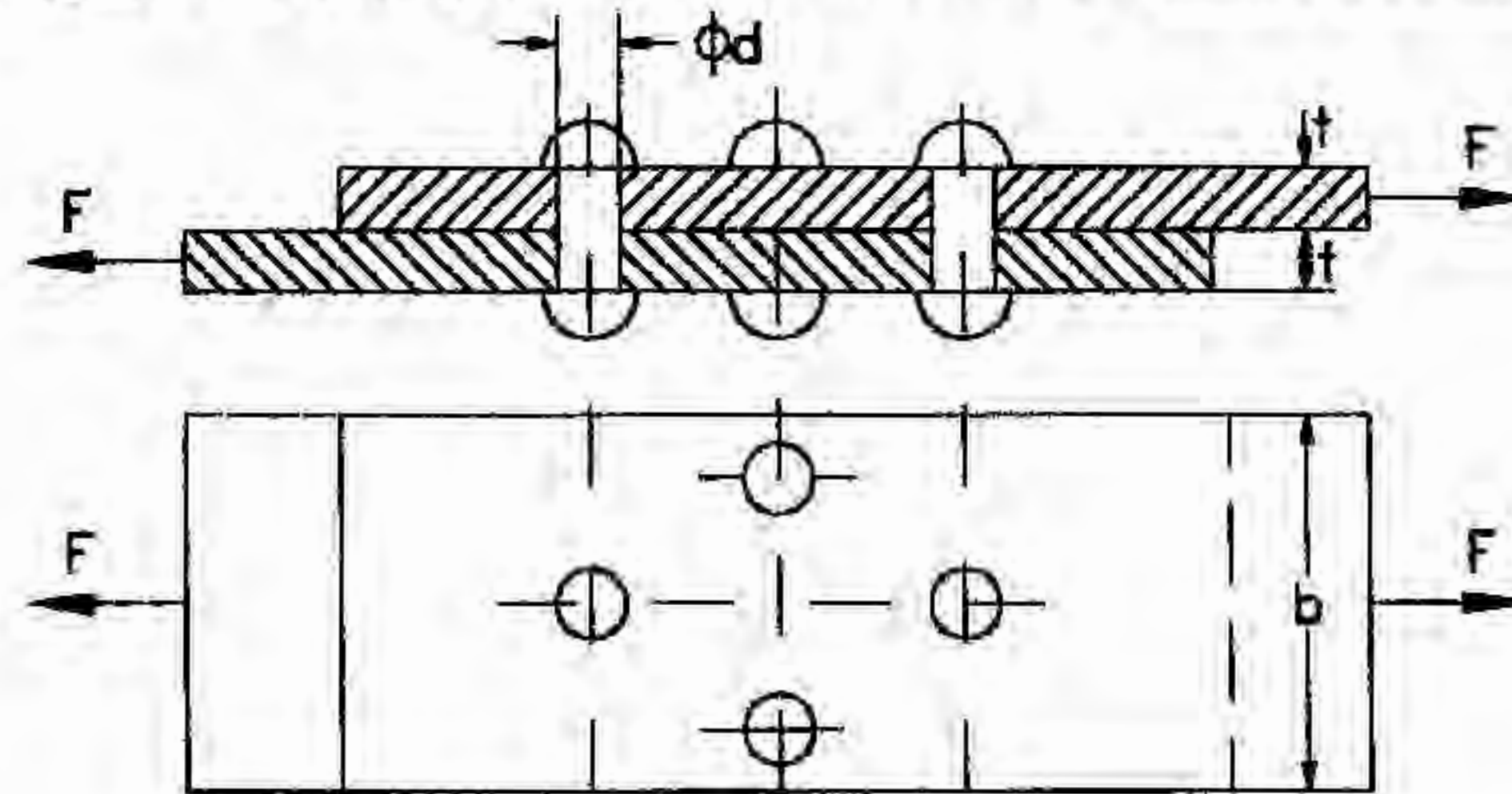


Fig. 5.9

Diametru  $d$  al tijei nitului se alege în funcție de grosimea  $t$  a tablelor cu ajutorul relației empirice:

$$d = \sqrt{5t_{\min} - a}$$

în care :

- $t_{\min}$  este grosimea tablei celei mai subțiri din îmbinare;
- $a$  este un parametru care poate fi:
  - 20 mm pentru îmbinări de rezistență;
  - 40 mm pentru îmbinările de rezistență și etanșare realizate prin suprapunere;
  - 60 mm pentru îmbinările de rezistență și etanșare realizate cu eclise.

Imbinările nituite se calculează la forfecarea tijei și la strivire.

Schematizarea celor trei probleme de rezistență este prezentată în tabelul 5.1. în care s-au notat:



- $A_f = i \frac{\pi d^2}{4}$  - secțiunea totală de forfecare pentru un singur nit care strânge  $(i+1)$  piese din pachet și care lucrează alternant în cele două direcții;
- $A_{str.} = d \sum t_i$  - aria convențională la strivire în care  $\sum t_i$  reprezintă suma minimă a grosimilor tablelor care lucrează în aceeași direcție;
- $F$  este forța totală la care este supusă îmbinarea;
- $F_{nit, f}$  și  $F_{nit, str.}$  este forța ce revine din sarcina totală pentru un singur nit pentru forfecare, respectiv strivire;
- $n$  este numărul de nituri necesar îmbinării.

Tabelul 5.1

| Nr. crt. | Problema                                 | Forfecare                                | Strivire                                                    | Observații                                                         |
|----------|------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 1a       | Calculul forței capabile pentru un nit   | $F_{nit, f} \leq A_f \tau_a$             | $F_{nit, str.} \leq A_{str.} \sigma_{a, str.}$              | -                                                                  |
| 1b       | Dimensionare - numărul de nituri necesar | $n = \frac{F}{F_{nit, f}}$               | $n = \frac{F}{F_{nit, str.}}$                               | Valoarea obținută se rotunjește la o valoare întreagă superioară   |
| 2        | Verificare                               | $\tau_{ef} = \frac{F}{nA_f} \leq \tau_a$ | $\sigma_{str.} = \frac{F}{nA_{str.}} \leq \sigma_{a, str.}$ | -                                                                  |
| 3        | Calculul forței capabile pentru îmbinare | $F_{cap, f} = nF_{nit, f}$               | $F_{cap, str.} = nF_{nit, str.}$                            | Se ia valoarea cea mai mică dintre $F_{cap, f}$ și $F_{cap, str.}$ |

#### A.5.3. Calculul convențional al îmbinărilor sudate

Îmbinările realizate prin sudură prezintă, în raport cu cele nituite, o serie de avantaje: economie de material, preț de cost redus, ușurința execuției, etc.. În schimb, sunt și unele dezavantaje: apariția de tensiuni remanente atât în cordonul de sudură cât și în materialul de bază, controlul calității sudurii se efectuează la sfârșitul operației, emanația de gaze toxice, posibilitatea deformării structurii datorită câmpului termic, etc.. Îmbinările sudate pot fi realizate în diferite variante. Acestea sunt funcție



de grosimea pieselor de asamblat și de posibilitatea de poziționare a acestora

În general, cordonanele de sudură sunt supuse la solicitarea compusă de forfecare cu tracțiune, figura 5.10.

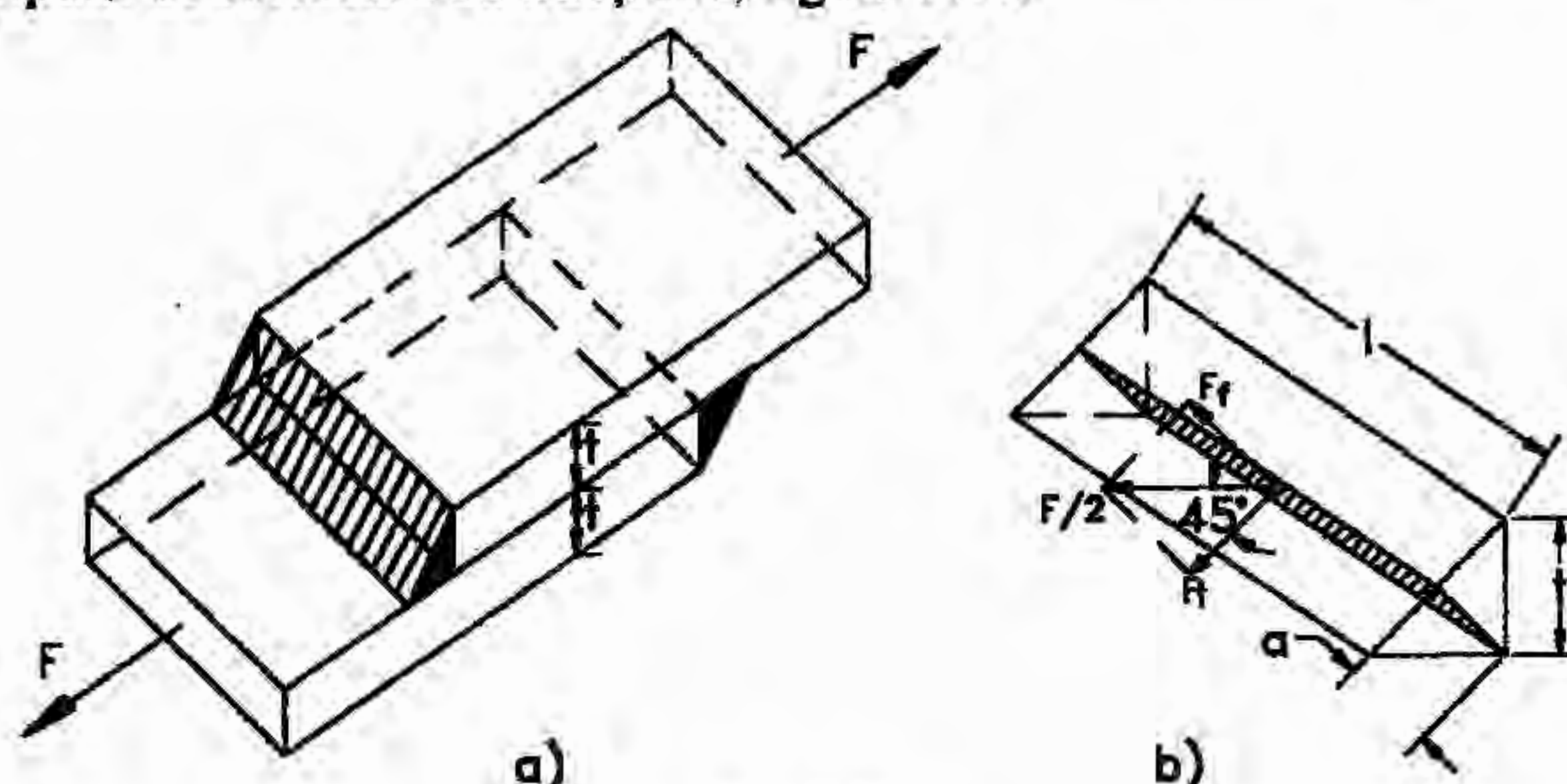


Fig. 5.10

În mod convențional, cordonul de sudură se calculează numai la forfecare asociindu-i-se însă acestei solicitări întreaga forță  $F/2$  ce revine cordonului.

Calculul îmbinărilor sudate ține seama și de următoarele considerente:

- tensiunile admisibile ale cordonului de sudură se determină cu relațiile:  $\sigma_{as} = 0,8 \sigma_a$  pentru tracțiune și  $\sigma_{as} = 0,65 \sigma_a$  pentru compresiune, în care  $\sigma_a$  este tensiunea admisibilă pentru materialul din care sunt confecționate tablele din îmbinare. Aceste relații au la bază observații experimentale având în vedere faptul că materialul electrodului de sudură se alege în funcție de materialul pieselor ce urmează a fi sudate;

- chiar dacă sudura depășește marginile tablei, nu se va ține seama de surplusul de material;

- se admite că tensiunile se repartizează în mod uniform pe toată lungimea cordonului de sudură;

- se consideră că, la capetele cordonului de sudură nu se poate obține o legare a tablelor după o aceeași geometrie a cordonului de sudură pe care acesta o are în rest. Ca urmare, pentru lungimea



cordonului de sudură se folosește relația convențională  $l_s = l - 2a$  în care  $a$  este înălțimea secțiunii transversale a cordonului, figura 5.11b.

Dacă grosimea tablelor este  $t$  atunci, mărimea  $a$  este dată de relația  $a = \frac{t}{\sqrt{2}} \approx 0,7t$ . Din figura 5.10b se observă că aria de forfecare este:

$$A_f = a l_s = 0,7t(l - 1,4t)$$

Condiția de rezistență se scrie în felul următor:

$$\tau_s = \frac{\frac{F}{2}}{A_f} = \frac{F}{1,4t(l - 1,4t)} \leq \tau_{as} = 0,65\sigma_a$$

Din această relație se determină lungimea necesară pentru cordonul de sudură ca fiind:

$$l = \frac{F}{1,4t \cdot 0,65\sigma_a} + 1,4t$$

La calculul lungimii cordonului de sudură nu s-au avut în vedere eventualele defecte apărute ca urmare a procesului tehnologic de sudare.



## CAPITOLUL 6

### RĂSUCIREA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

- 6.1. Introducere
- 6.2. Calculul deformațiilor și al tensiunilor
- 6.3. Modalități de calcul
- 6.4. Relații de calcul pentru momentul de răsucire
- 6.5. Calculul energiei totale de deformare

#### 6.1. Introducere

O bară dreaptă este solicitată la răsucire atunci când torsorul eforturilor, în orice secțiune a barei, se reduce la un moment dirijat după axa barei, figura 6.1.

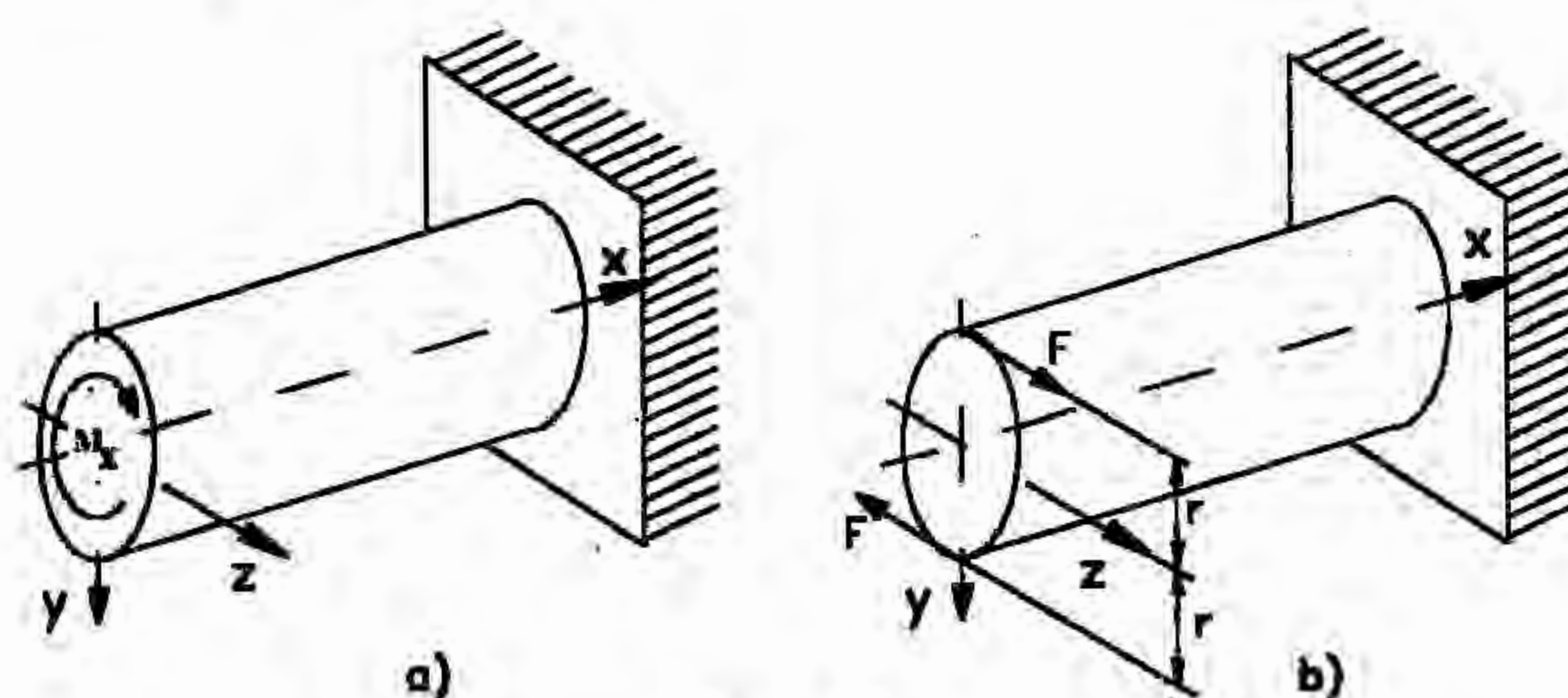


Fig. 6.1



Se poate constata experimental că, pentru barele care au secțiunea transversală circulară plină, este verificată ipoteza lui Bernoulli deci, secțiunile transversale rămân plane și perpendiculare pe axa barei și după deformarea cauzată de solicitarea exterioară. La barele care au altfel de secțiuni decât cea menționată, se produc deplanări ale acestor secțiuni. Pot apărea, de asemenea, deformări chiar în planul secțiunii transversale. Deformațiile respective se produc pentru diferite configurații ale secțiunilor transversale și pentru diferite materiale.

Relațiile de calcul în aceste cazuri sunt mai complicate și nu vor face obiectul acestui capitol.

## 6.2. Calculul deformațiilor și al tensiunilor

Se consideră o bară dreaptă, de secțiune circulară plină. Pe suprafața acesteia se trasează o rețea de generatoare și cercuri, fiecare la distanțe egale, figura 6.2a.

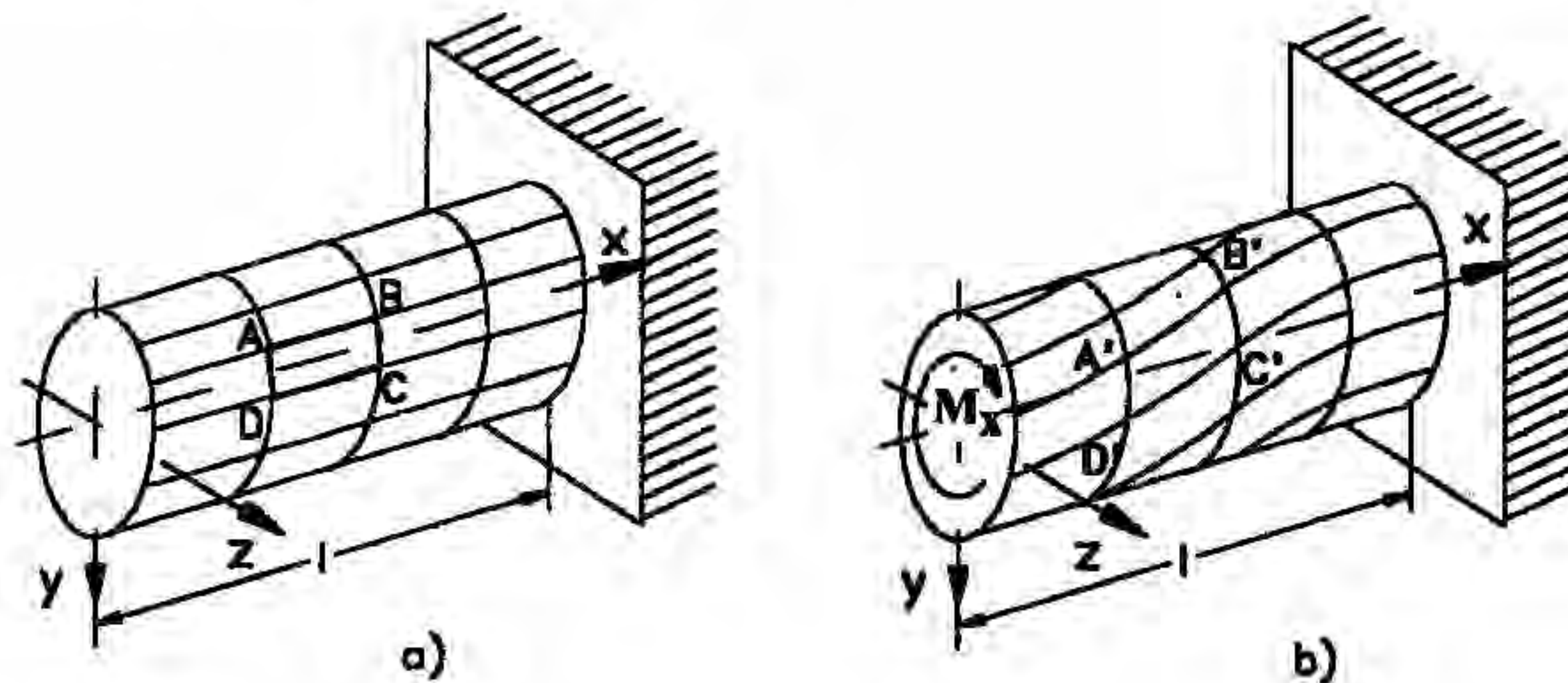


Fig. 6.2

Prin aplicarea unui moment de răsucire se constată că, cercurile, după deformarea datorită solicitării exterioare, rămân tot cercuri care se află la aceeași distanță față de poziția inițială ceea ce dovedește că, secțiunea transversală rămâne plană. În schimb, generatoarele, inițial drepte, iau o formă elicoidală. Astfel, unghiurile elementului de rețea ABCD, care inițial sunt de  $90^\circ$ , se modifică cu  $\gamma$ , figura 6.3.



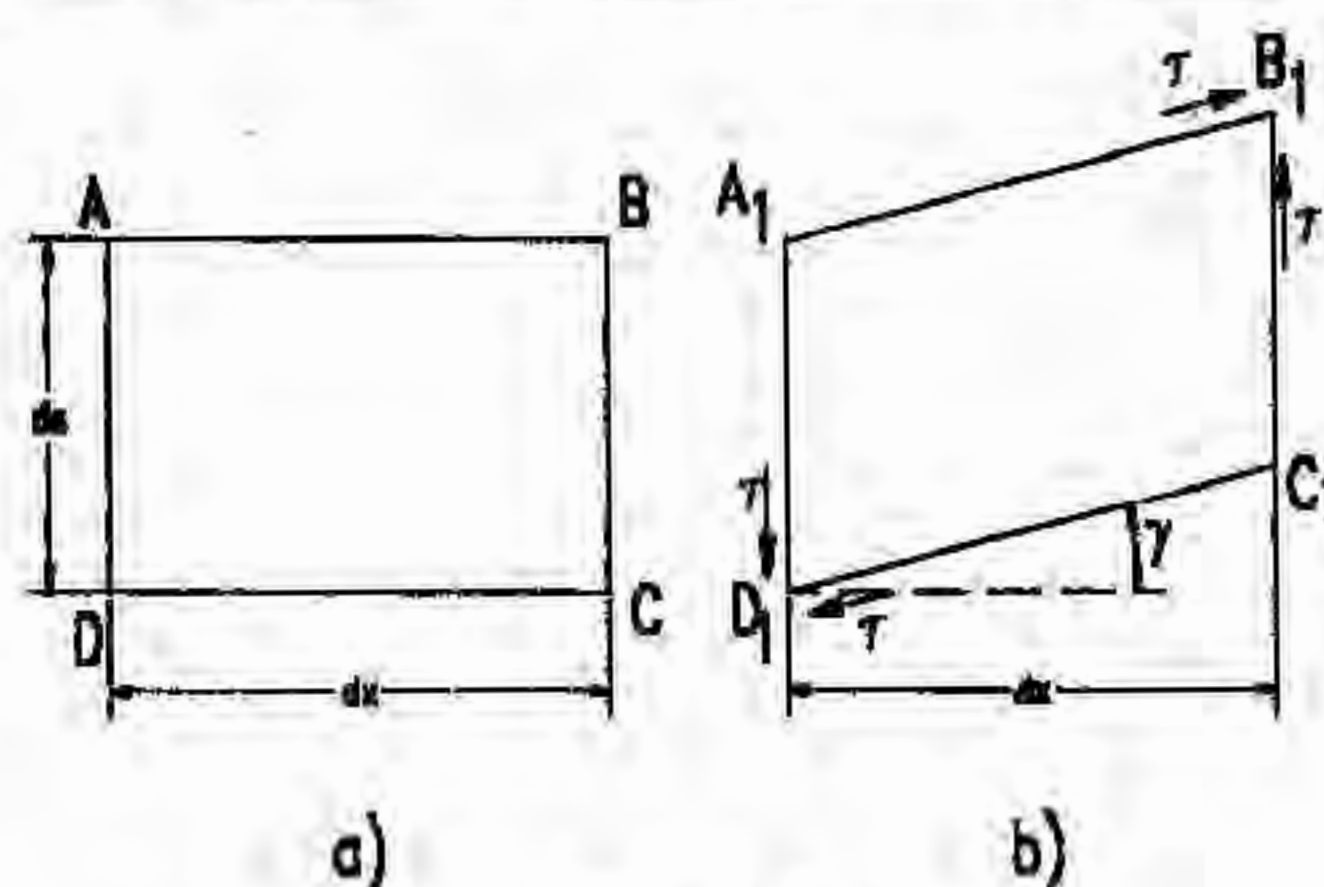


Fig. 6.3

Deplasarea secțiunii transversale ce conține latura AD a elementului de suprafață în raport cu secțiunea transversală ce conține latura BC a elementului de suprafață, dovedește prezența tensiunilor tangențiale  $\tau$  pe cele două suprafețe, figura 6.3b. Astfel, orice element de rețea este supus unei stări de lunecare pură cu valoarea  $\gamma$ . Se constată de asemenea că lungimea  $l$  a barei nu se modifică.

Fie bara dreaptă, de secțiune circulară plină din figura 6.4a, supusă la răsucire de momentul  $M_t$ .

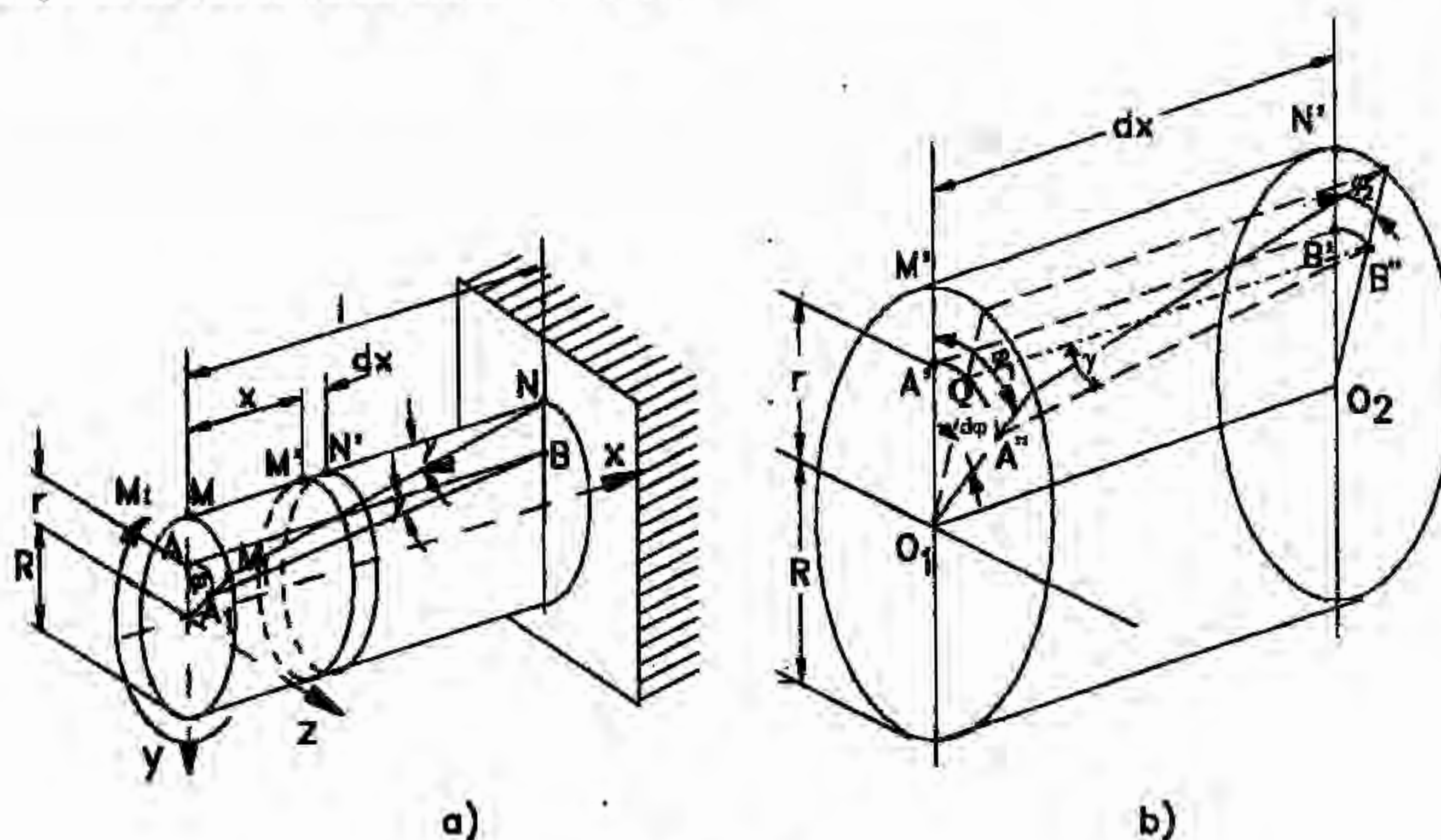


Fig. 6.4

Ca urmare a solicitării exterioare cu momentul de răsucire  $M_t$ , în orice secțiune transversală a barei se introduce efortul:  $M_t(x) = M_t = ct$ .



Se admit următoarele ipoteze:

- secțiunile transversale rămân plane și perpendiculare pe axa barei și după deformare;
- nu se produc deformări ale secțiunilor transversale în planul lor;
- deformările produse ca urmare a solicitării sunt mici și se păstrează în domeniul elastic;
- materialul este omogen, izotrop și satisface legea lui Hooke.

Datorită solicitării, generatoarea MN de pe bara considerată, se rotește cu unghiul  $\gamma_{ext.}$ , figura 6.4a. O dreaptă AB, din interiorul barei, aflată la distanța  $r$  de axa longitudinală, se va roti cu unghiul  $\gamma$ . Din bară se detașează o porțiune de lungime elementară  $dx$ . Rotirea secțiunilor transversale de pe cele două fețe ale elementului  $dx$  în raport cu secțiunea din încastrare care este fixă, se realizează cu unghiuri diferite  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ , figura 6.4b. Astfel, va apare o diferență de rotire între cele două secțiuni notată cu  $d\varphi$ . În aceste condiții vom avea pentru lungimea arcului QA'':

$$\text{arc}(QA'') = r d\varphi$$

iar pentru lunecarea specifică  $\gamma$ :

$$\text{tg} \gamma = \frac{\text{arc}(QA'')}{dx}$$

În cazul deformărilor elastice mici se poate considera că  $\text{tg} \gamma \approx \gamma$  și ținând seama de relația anterioară va rezulta:

$$\gamma = \frac{r d\varphi}{dx} \quad (6.1)$$

Raportul  $\frac{d\varphi}{dx}$  poartă numele de rotire specifică, se notează cu  $\theta$  și se măsoară în [rad/m]:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.2)$$

Din (6.1) și (6.2) rezultă că  $\gamma = r\theta$ . Evident că la suprafața barei vom avea:  $\gamma_{ext.} = R \theta$ .

Lunecării specifice  $\gamma$  îi corespunde o tensiune tangențială dată de legea lui Hooke:

$$\tau = G \gamma = G \theta r \quad (6.3)$$



în care  $G$  este modulul de elasticitate transversal al materialului din care este confecționată bara. Se observă că tensiunea tangențială este o funcție liniară de  $r$  și are valoarea maximă la suprafața barei:

$$\tau_{\max} = G \theta R \quad (6.4)$$

Legea de variație a tensiunii tangențiale pe secțiunea transversală este prezentată în figura 6.5a. Se observă că, tensiunea tangențială este tot timpul perpendiculară pe rază și tangentă la conturul exterior. Dacă nu ar fi așa, prin descompunere s-ar obține o componentă radială  $\tau_r$ , figura 6.5b. Conform dualității tensiunilor tangențiale ar trebui să existe de asemenea și o tensiune tangențială de aceeași mărime cu  $\tau_r$  pe suprafața exterioară a barei. Cum suprafața cilindrică nu este încărcată cu forțe care să fie paralele cu axa barei rezultă că  $\tau_r = 0$  și ca urmare  $\tau \equiv \tau_t$ .

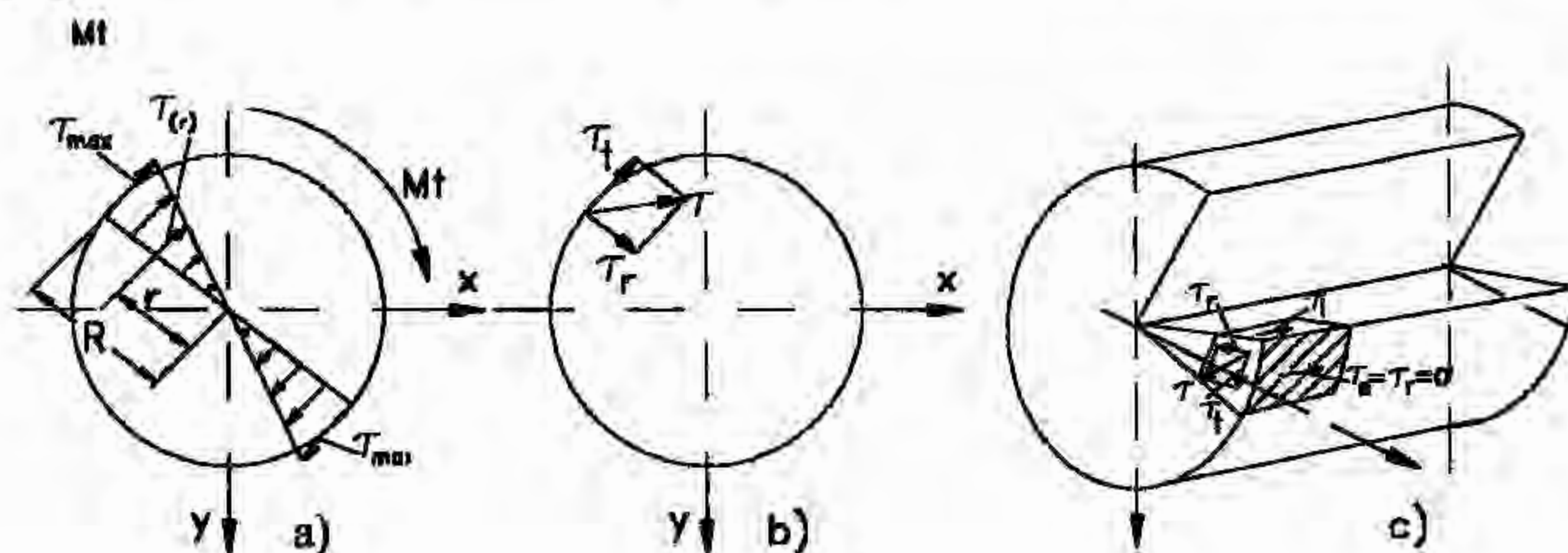


Fig. 6.5

Între momentul de răsucire aplicat și tensiunile tangențiale aflate pe secțiunea transversală a barei se poate scrie, pe baza celei de-a patra ecuații de echivalență (1.9):  $Mt = \int_A \tau \cdot r \cdot dA$  (6.5)

Tinând seama și de relația (6.3) va rezulta:

$$Mt = \int_A G \cdot \theta \cdot r^2 dA = G \cdot \theta \int_A r^2 dA \quad (6.6)$$

în care expresia:  $I_p = \int_A r^2 dA$  poartă numele de moment de inerție polar al secțiunii transversale. Din expresia (6.6) va rezulta relația:

$$\theta = \frac{Mt}{GI_p} \quad (6.7)$$



cu ajutorul căreia se poate determina rotirea specifică  $\theta$  între două suprafețe aflate la o distanță egală cu unitatea.

Se observă că deformăția la răsucire este cu atât mai mică cu cât produsul  $GIp$  este mai mare. Acest produs poartă numele de *modul de rigiditate* la răsucire. Unghiul  $\varphi$ , cu care capătul liber al barei supusă la răsucire se rotește în raport cu secțiunea din încastrare, considerată fixă, se determină cu ajutorul relației:

$$\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{M_t dx}{GIp}$$

Dacă pe lungimea  $l$ , atât momentul de răsucire  $M_t$  cât și modulul de rigiditate sunt constante, va rezulta:  $\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot Ip}$

Prin înlocuirea relației (6.7) în relația (6.3) se obține:

$$\tau(r) = \frac{M_t \cdot r}{Ip} \quad (6.8)$$

ce reprezintă expresia tensiunii tangențiale la distanța  $r$  de centrul secțiunii unei bare supusă la răsucire în care efortul este reprezentat de momentul de răsucire  $M_t$  iar secțiunea respectivă are momentul de inerție polar  $Ip$ .

### 6.3. Modalități de calcul

Având în vedere relația (6.8), tensiunea tangențială maximă va fi dată de relația:  $\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot R}{Ip}$  sau  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{Wp}$  (6.9)

în care  $Wp = \frac{Ip}{R}$  poartă numele de modul de rezistență polar. Pentru secțiunea circulară plină cu diametrul  $D = 2r$ , relațiile de calcul pentru momentul de inerție polar și modulul de rezistență polar sunt:

$$Ip = \frac{\pi D^4}{32}; \quad Wp = \frac{\pi D^3}{16}$$

Pentru secțiunea inelară cu diametrul exterior  $D$  și diametrul interior  $d$ , aceleași mărimi sunt date de relațiile:



$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}; \quad W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

Cu ajutorul relațiilor (6.9) și (6.7) se pot rezolva următoarele categorii de probleme:

- probleme de dimensionare:

- din condiția de rezistență a secțiunii periculoase:

$$\tau_{\max} = \left( \frac{Mt}{W_p} \right)_{\max} \leq \tau_a \Rightarrow W_{p_{\text{nec.}}} \geq \frac{Mt}{\tau_a}$$

- din condiția de rigiditate:

$$\theta_{\max} \leq \theta_a \Rightarrow I_{p_{\text{nec.}}} \geq \frac{Mt}{G \cdot \theta_a}$$

în care  $\tau_a$  este tensiunea tangențială admisibilă pentru solicitarea de forfecare pură iar  $\theta_a$  este rotirea specifică admisibilă pentru materialul din care este confecționată bara respectivă;

- probleme de verificare:

$$\tau_{\text{ef. max.}} = \left( \frac{Mt}{W_p} \right)_{\max} \leq \tau_a$$

$$\text{sau } \theta_{\text{ef. max.}} = \left( \frac{Mt}{GI_p} \right)_{\max} \leq \theta_a$$

- probleme de calcul al sarcinii capabile:

$$Mt_{\text{cap.}} \leq W_p \cdot \tau_a$$

$$\text{sau } Mt_{\text{cap.}} \leq GI_p \cdot \theta_a$$

În cazul unor piese cu sudură longitudinală sau în cazul lemnului trebuie să se ia în considerare și un calcul la desprindere longitudinală datorită tensiunilor  $\tau_l$ , figura 6.6, care au de asemenea o distribuție liniară.

Pe suprafața barei, un element de suprafață este supus numai la eforturi tangențiale (forfecare pură), figura 6.7. Tensiunile principale la suprafață vor fi:  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$  iar direcțiile principale vor fi date de relația:

$$\text{tg} \alpha_0 = \frac{\tau}{\sigma} = 1 \text{ de unde rezultă că } \alpha = 45^\circ. \text{ Ca urmare se constată că}$$

direcțiile principale fac unghiuri de  $45^\circ$  cu axa x.



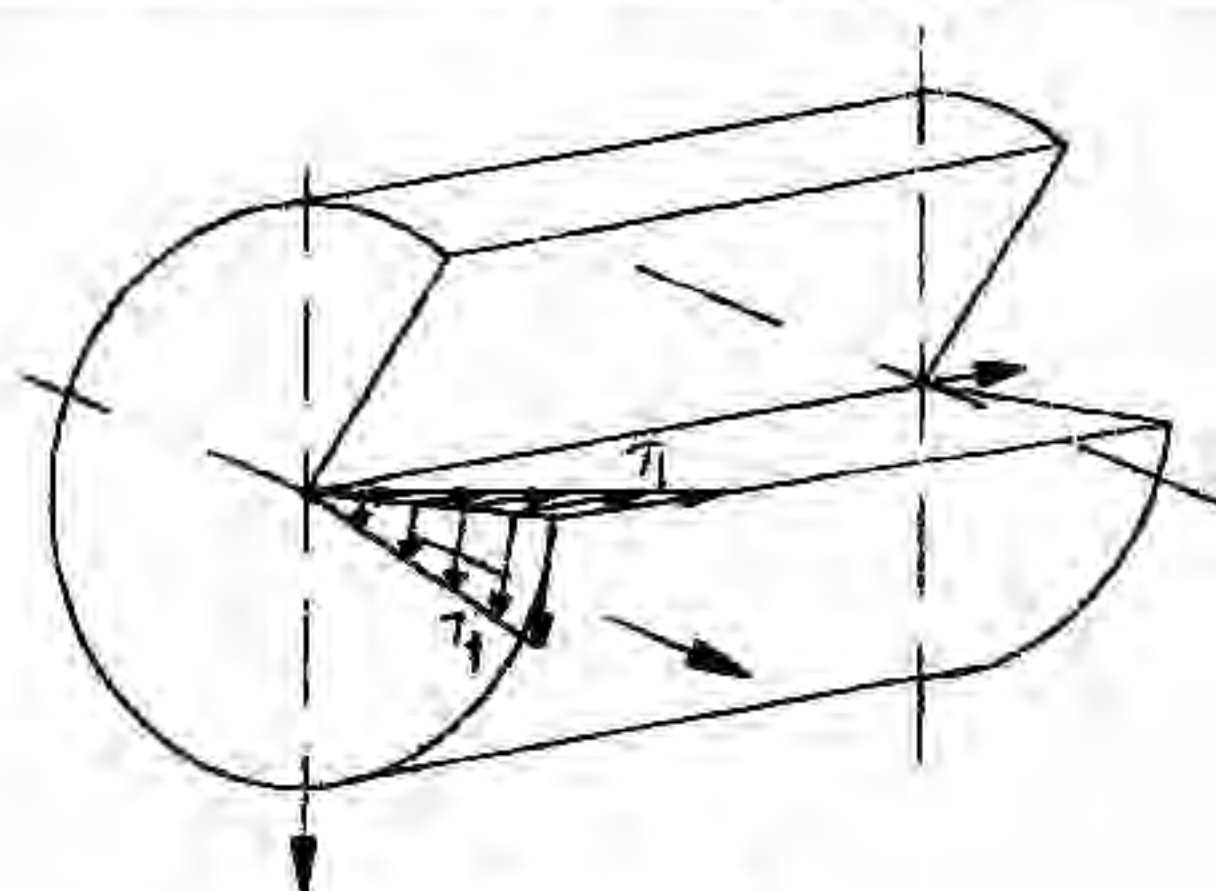


Fig. 6.6

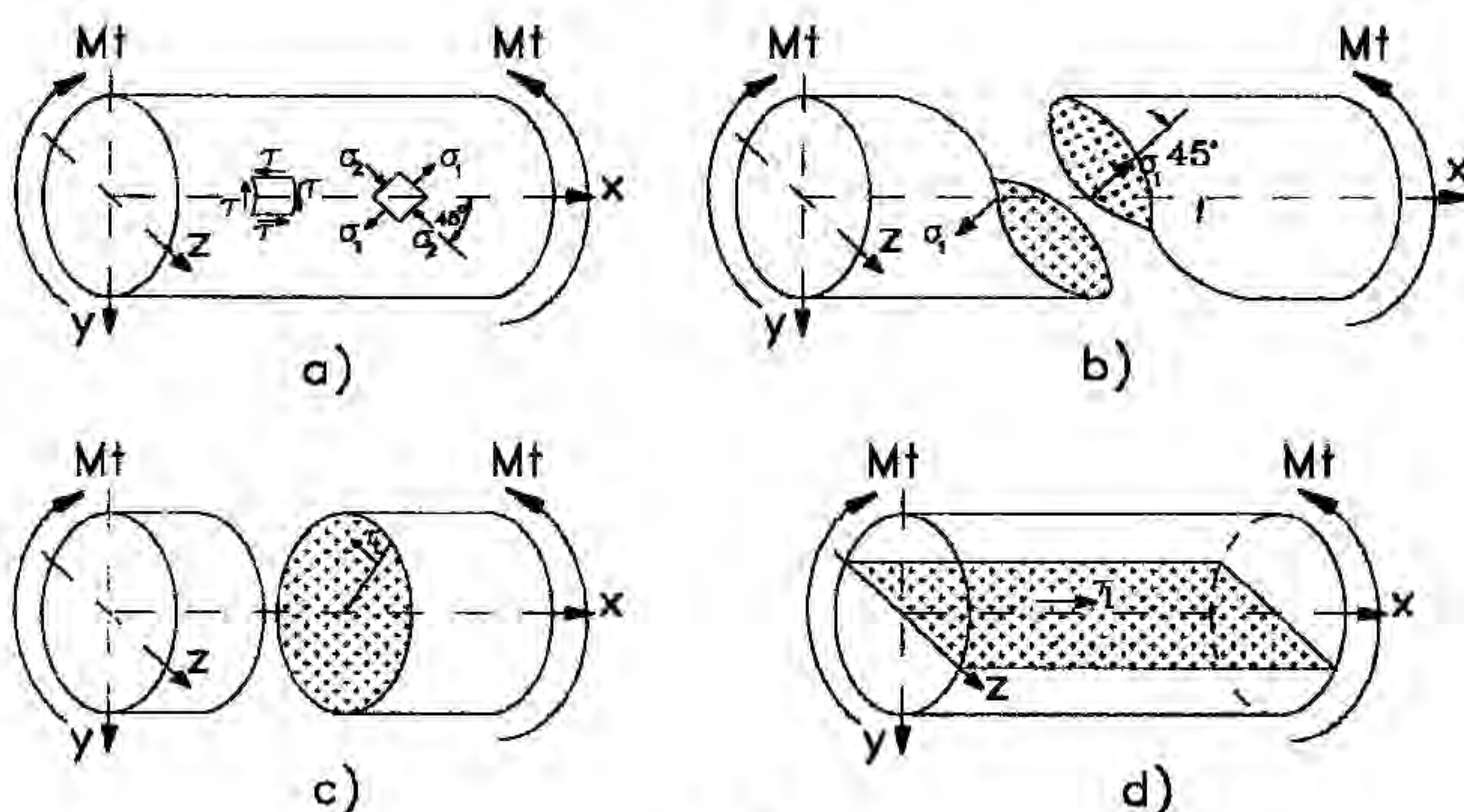


Fig. 6.7

Dacă prin solicitarea de răsucire rezultă ruperea barei, în funcție de natura materialului modul de rupere poate fi următorul:

- o bară confecționată dintr-un material fragil (fontă, ceramice) se va rupe după o suprafață care face un unghi de  $45^\circ$  cu axa  $x$  a barei deci va ceda ca urmare a tensiunilor normale ce acționează asupra suprafeței respective. Ruperea se produce prin *smulgerea* celor două suprafețe, inițial infinit vecine, figura 6.7b;

- o bară confecționată dintr-un oțel tenace se va rupe după o suprafață perpendiculară pe axa barei deci va ceda la acțiunea tensiunilor tangențiale aflate în planul secțiunii respective. Ruperea se produce prin



*alunecarea* treptată a celor două secțiuni, inițial înfinit vecine, figura 6.7c;

ruperea unei bare din lemn se poate produce pe direcția fibrelor longitudinale și va ceda sub acțiunea tensiunilor tangențiale longitudinale  $\tau_l$ . Ruperea se produce prin *desprinderea* suprafețelor în lungul axei barei, figura 6.7d.

#### 6.4. Relații de calcul pentru momentul de răsucire

La solicitarea de răsucire sunt supuși în special arborii care au rolul de a susține piese în mișcare de rotație și de a transmite cupluri de la organele de antrenare la cele antrenate. Dacă momentul se transmite ca un cuplu de forțe, expresia acestuia va fi:

$$M_t = F \cdot d$$

în care  $d$  este distanța dintre direcțiile celor două forțe.

În cazul în care se transmite o putere  $P[W]$ , la o anumită turație  $n[rot/sec]$ , expresia momentului de răsucire va fi:

$$M_t = \frac{P}{2\pi n} [N \cdot m]$$

Atunci când turația se exprimă în  $[rot./min]$  vom avea:

$$M_t = \frac{30P}{\pi n} [N \cdot m]$$

iar dacă puterea se dă în kW față de ultima relație se obține:

$$M_t = 9,55 \cdot 10^3 \frac{P}{n} [N \cdot m].$$

În cazul în care turația este în  $[rot/min]$  iar puterea în  $[CP]$  vom avea:

$$M_t = 7,02 \cdot 10^3 \frac{P}{n} [N \cdot m]$$

#### 6.5. Calculul energiei totale de deformație

Expresia generală dată de relația (3.27) pentru energia potențială specifică de deformație se particularizează pentru solicitarea axială.

Astfel, vom avea: 
$$dL = dU = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$



Energia potențială totală acumulată în bară ca urmare a solicitării exterioare va fi:

$$\begin{aligned} L = U_{\text{tot}} &= \int_V dL = \int_V \frac{\tau_{xy}^2(x)}{2G} dV = \int_V \frac{Mt^2(x_i) \cdot r^2}{2GI_p^2(x_i)} dA dx = \\ &= \sum_i \int_i \left( \frac{Mt^2(x_i)}{2GI_p^2(x_i)} \int_A r^2 dA \right) dx = \sum_i \int_i \frac{Mt^2(x_i)}{2GI_p(x_i)} dx \end{aligned}$$

Dacă pe fiecare regiune în parte, atât momentul de răsucire cât și momentul de inerție polar sunt constante, energia totală de deformare se poate calcula cu relația:

$$U_{\text{tot}} = \sum_i \frac{Mt^2(x_i) l_i}{2GI_p(x_i)}$$

Din această relație se constată că indiferent dacă diferitele regiuni ale barei sunt supuse la răsucire într-un sens sau în celălalt, energiile se cumulează astfel încât energia totală acumulată în bară va reprezenta tot timpul o valoare pozitivă.

#### Aplicații

**A6.1.** Se consideră bara de secțiune circulară din figura 6.8a, formată din două tronsoane și solicitată de momentele de răsucire figurate. Se cere:

- să se traseze diagrama de eforturi;
- să se traseze diagrama de tensiuni;
- să se dimensioneze aria secțiunii transversale;
- să se traseze diagrama rotirilor secțiunilor transversale.

Se cunosc:  $M_0 = 2 \text{ kNm}$ ,  $l = 0,3 \text{ m}$ ,  $\tau_a = 80 \text{ N/mm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

Pentru rezolvarea problemei propuse este necesară parcurgerea mai multor etape ce vor fi descrise în cele ce urmează.

**1. Impărțirea barei în regiuni.** Dacă se au în vedere încărcările exterioare și variațiile de secțiune se constată că bara se împarte în trei regiuni. Pentru determinarea eforturilor pe fiecare din cele trei regiuni, se face câte o secțiune care să aibă originea într-un punct bine determinat.

**2. Ecuația de echilibru.** Momentele de răsucire aplicate pe bară își fac echilibrul static. Direcția acestor momente coincide cu direcția axei barei și ca urmare vom avea:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -3M_0 + M - 2M_0 = 0 \Rightarrow M = 5M_0$$



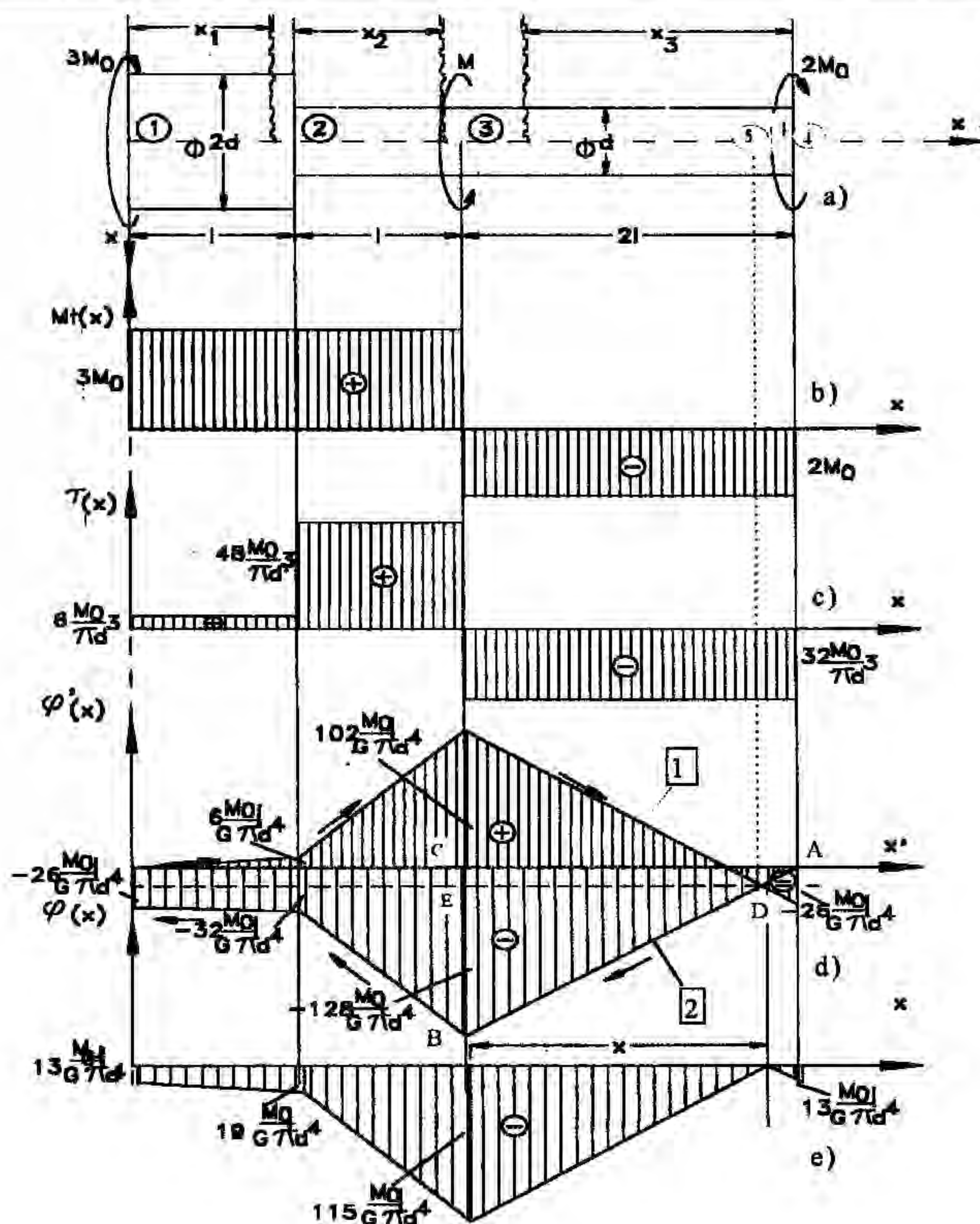


Fig. 6.8

3. *Trasarea diagramei de eforturi.* Intrucât solicitarea exterioară este numai cu momente de răsucire, în fiecare secțiune transversală a barei, ca eforturi interioare se vor introduce numai momente de răsucire:

$$M_x(x_1) = 3M_0, M_x(x_2) = 3M_0, M_x(x_3) = -2M_0.$$



Semnul "-" de la momentul  $M_x(x_3)$  s-a stabilit în concordanță cu sensul momentului  $3M_0$  care s-a considerat ca fiind pozitiv. Dacă se privește bara dinspre originea lui  $x_1$ , momentul  $3M_0$  are sensul trigonometric iar dacă se privește bara dinspre originea lui  $x_3$ , momentul  $2M_0$  are sens orar deci semnul este "-".

Conform relațiilor de mai sus se trasează diagrama de eforturi, figura 6.8b. Se observă că sunt satisfăcute salturile corespunzătoare momentelor de răsucire concentrate aplicate pe bară.

4. *Trasarea diagramei de tensiuni.* Tensiunile introduse de solicitarea de răsucire sunt cele tangențiale. Trasarea diagramei de tensiuni se bazează pe relația:

$$\tau_{\max}(x) = \frac{Mt(x)r_{\max}}{I_p}$$

Ca urmare, pe fiecare regiune în parte vom avea:

$$\text{— regiunea 1 — 2: } \tau(x_1) = \frac{3M_0 d}{\pi(2d)^4} = 6 \frac{M_0}{\pi d^3}$$

$$\text{— regiunea 2 — 3: } \tau(x_2) = \frac{3M_0 d / 2}{\pi d^4} = 48 \frac{M_0}{\pi d^3}$$

$$\text{— regiunea 3 — 4: } \tau(x_1) = \frac{-2M_0 d / 2}{\pi d^4} = -32 \frac{M_0}{\pi d^3}$$

În secțiunea 2, deși nu există pe bară un moment de răsucire, în diagramă există un salt semnificativ al tensiunii tangențiale datorat variației de secțiune. Diagrama de tensiuni este trasată în figura 6.8c.

5. *Dimensionare.* Pentru dimensionarea din condiția de rezistență a barei, trebuie ca tensiunea efectivă maximă introdusă în bară ca urmare a solicitării exterioare să fie mai mică decât cea admisibilă. Ca urmare vom avea:

$$\tau_{\text{ef max}} = \frac{48M_0}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{48M_0}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 72,55 \text{ mm}$$

Valoarea obținută se rotunjește la  $d = 73 \text{ mm}$ .



6. *Trasarea diagramei rotirilor.* Rotirea relativă între două secțiuni aflate la distanța  $l$  pe aceeași regiune a unei bare supuse la răsucire este dată de relația: 
$$\varphi = \int_0^l \frac{Mt(x)}{GI_p} dx$$

Dacă efortul este constant și secțiunea transversală este constantă, aceeași rotire va fi: 
$$\varphi = \frac{Mt \cdot l}{GI_p}$$

Se constată că bara din figura 6.8a nu are o secțiune fixă prin rezemare pentru care să se poate observa de la început faptul că nu se rotește și în raport cu care să determinăm rotirile celorlalte secțiuni. În aceste condiții se procedează ca la aplicația A.4.2. Observațiile făcute în cadrul paragrafului 4.7 sunt valabile și în acest caz. Astfel, se vor trasa două *diagrame convenționale* considerând pe rând capetele 1 și 4 ale barei ca fiind fixe ( $\varphi_1=0$  și  $\varphi_4=0$ ). La intersecția acestora se va găsi secțiunea care nu se va roti în raport cu poziția inițială a barei. Se poate găsi aceeași intersecție dacă se utilizează numai o singură *diagramă convențională*. În acest caz trebuie dusă o abscisă la  $\Delta\varphi_{tot}/2$  față de abscisa diagramei convenționale iar intersecția acestora duce, de asemenea, la secțiunea care nu se rotește. Totuși, rezolvarea în acest caz va fi făcută prin intersecția celor două *diagrame convenționale* pentru o mai bună evaluare a modalității de rezolvare prezentate.

Se consideră, pentru început, secțiunea 1 ca fiind de referință, deci vom presupune că  $\varphi'_1 = 0$ . Astfel, rotirea secțiunii 2 va fi dată de relația:

$$\varphi'_2 = \varphi'_1 + \Delta\varphi'_{12} = 0 + \frac{Mt(x_1) \cdot l}{GI_p(x_1)} = \frac{3M_0 \cdot l}{G \frac{\pi (2d)^4}{32}} = 6 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4}$$

În mod asemănător se determină rotirile secțiunilor 3 și 4 cu specificația că, în cadrul relațiilor care determină aceste rotiri trebuie să se țină seama de rotirea secțiunii anterioare.

$$\varphi'_3 = \varphi'_2 + \Delta\varphi'_{23} = 6 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} + \frac{3M_0 l}{G \frac{\pi d^4}{32}} = 102 \frac{M_0 l}{G \pi d^4}$$



$$\varphi'_4 = \varphi'_3 + \Delta\varphi'_{34} = 102 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} - \frac{2M_0 2l}{G \pi d^4} = -26 \frac{M_0 l}{G \pi d^4}$$

Se presupune acum că secțiunea 4 este fixă (nu se rotește), deci vom avea  $\varphi''_4 = 0$ . Rotirile secțiunilor 3, 2 și 1 vor fi în acest caz:

$$\varphi'_3 = \varphi''_4 + \Delta\varphi''_{43} = 0 - 128 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} = -128 \frac{M_0 l}{G \pi d^4}$$

$$\varphi''_2 = \varphi''_3 + \Delta\varphi''_{32} = -128 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} + \frac{3M_0 l}{G \pi d^4} = -32 \frac{M_0 l}{G \pi d^4}$$

$$\varphi''_1 = \varphi''_2 + \Delta\varphi''_{21} = -32 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} + \frac{3M_0 l}{G \pi (2d)^4} = -26 \frac{M_0 l}{G \pi d^4}$$

*Observație importantă.* Semnele din aceste diagrame sunt date de sensurile de rotire pe care le produc momentele de răsucire ca eforturi interioare. Astfel, în figura 6.9a se observă că, sensul de rotire al secțiunii  $x_1$  relativ la secțiunea 1, considerată fixă, este dat de sensul momentului  $M_x(x_1)$ . Ca urmare, semnul "+" din diagrama 1 corespunde sensului de rotire dat de momentul pozitiv  $M_x(x_1)$ . Semnul "-" din diagrama 2 (secțiunea 4 considerată fixă) corespunde sensului de rotire dat de momentul negativ  $M_x(x_3)$ .

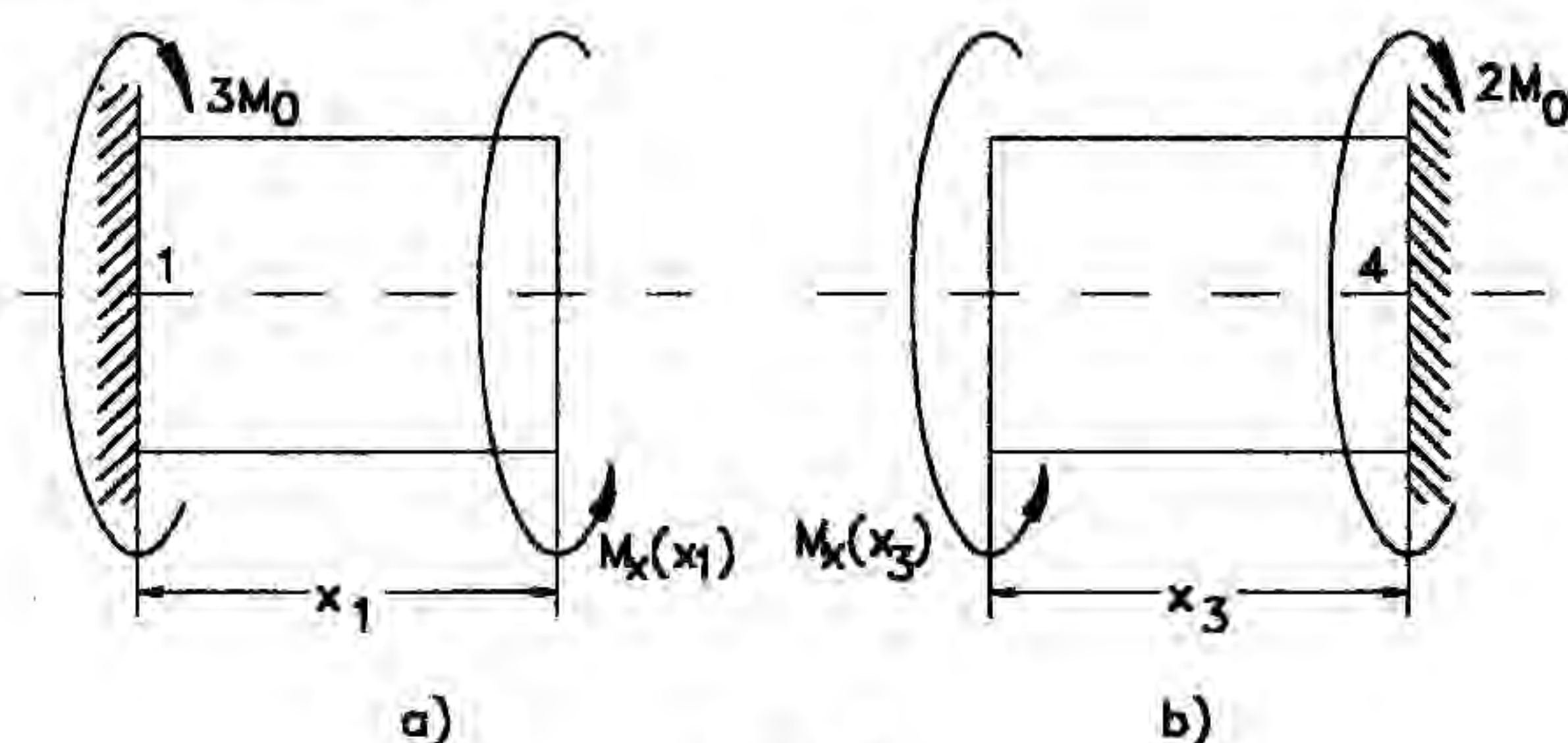


Fig.6.9



Diagramele rotirilor astfel obținute sunt trasate în figura 6.8d și sunt notate cu 1 respectiv 2. Intersecția celor două diagrame are loc la distanța  $x$  față de secțiunea 3 și rezultă din relația:

$$\frac{128}{2 \cdot 1} = \frac{115}{x}$$

care exprimă asemănarea triunghiurilor ABC și DEB. Din relația de mai sus rezultă  $x = 1,79 \text{ l}$ . Ca urmare, secțiunea respectivă, notată cu 5, nu se va roti, abscisa  $x$  trebuind să treacă prin punctul de intersecție al celor două diagrame. Dacă se dorește o raportare a sensului de rotire pentru secțiunile barei în funcție de secțiunea fixă 5, semnele diagramelor obținute trebuiesc schimbate în mod corespunzător.

*Diagrama rotirilor reale*, relative la secțiunea fixă 5 dar și la poziția inițială a barei nesolicitate, este cea prezentată în figura 6.8e rezultată prin transformarea uneia din diagramele 1 sau 2 din figura 6.8d. Transformarea se referă la schimbarea de semne, astfel: atunci când sensul de parcurgere al diagramei trasate inițial (punctul 1 fix), nu coincide cu sensul de parcurgere al aceleiași diagrame raportat la punctul fix real (5), semnul se schimbă. Se constată că oricare din cele două diagrame din figura 6.8d este transformată conform celor enunțate anterior, diagramele rezultate sunt identice.

Semnele din diagrama prezentată în figura 6.8e arată sensul de rotire al secțiunilor barei relativ la secțiunea fixă 5. Astfel, privind dinspre secțiunea fixă 5 spre stânga, semnul fiind negativ și sensul de parcurgere asemănător celui din figura 6.9b, rotirea secțiunilor respective este în sensul momentului  $M_x(x_3)$  care coincide cu sensul momentului  $M$  din punctul 3. Privind dinspre secțiunea fixă 5 spre dreapta, semnul fiind negativ și sensul de parcurgere asemănător celui din figura 6.9a, rotirea secțiunilor respective este în sensul invers momentului  $M_x(x_1)$  deci în sensul momentului  $2M_0$ .

Rotirea maximă se produce în dreptul momentului de răsucire exterior  $M$  și este:

$$\varphi_{\max} = \varphi_3 = 115 \frac{M_0 l}{G \pi d^4} = 115 \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \cdot 73^4} = 9,66 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Așa cum s-a subliniat, se poate observa că, dacă se duce o abscisă la  $\Delta\varphi_{\text{tol}}/2$  față de abscisa diagramei convenționale, intersecția cu aceasta conduce, de asemenea, la secțiunea care nu se rotește.



A.6.2. Se consideră bara de secțiune circulară din figura 6.10, solicitată de momentele de răsucire figurate. Se cere să se traseze diagrama de eforturi, diagrama de tensiuni, să se dimensioneze și să se traseze diagrama rotirilor. Se cunosc:  $M_0 = 3 \text{ kN m}$ ,  $l = 0,2 \text{ m}$ ,  $\tau_a = 100 \text{ N/mm}^2$  și  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

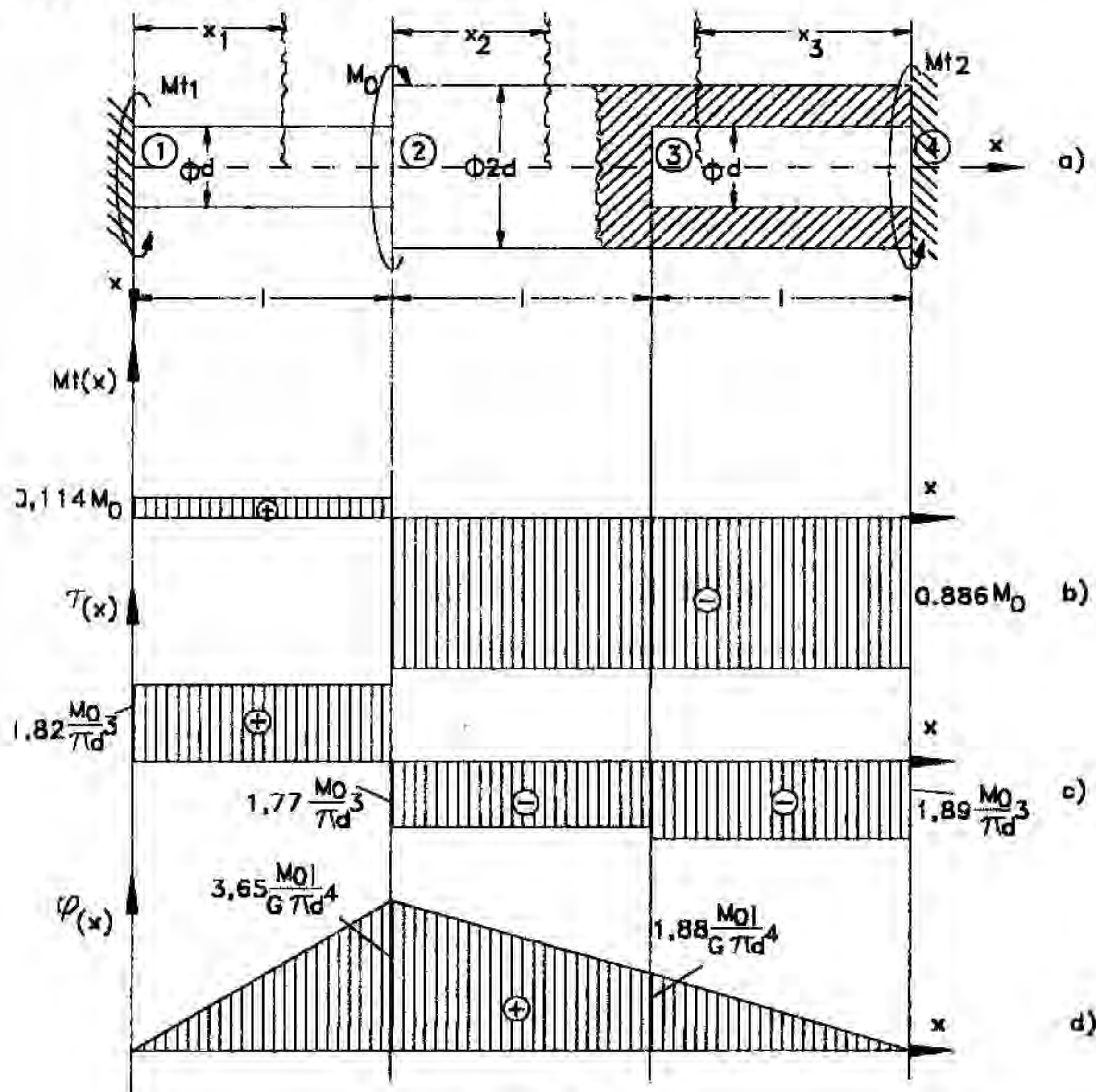


Fig. 6.9

Etapele de rezolvare a cerințelor acestei probleme sunt descrise în cele ce urmează.

1. *Figurarea reacțiunilor și împărțirea barei în regiuni.* Având în vedere faptul că pe bară acționează ca sarcini exterioare doar momente de răsucire, în încastrări, ca reacțiuni, vor apărea doar momentele de răsucire  $M_{t1}$  și  $M_{t2}$ . Sensul acestora se alege în mod arbitrar. Dacă din



calcule semnul reacțiunilor va rezulta pozitiv înseamnă că sensul ales coincide cu cel real.

Așa cum se observă, bara este compusă din trei regiuni, determinate, în acest caz, de variațiile de secțiune întrucât momentul de răsucire se află la trecerea de la un troson de bară la altul.

2. *Determinarea reacțiunilor.* Momentul de răsucire  $M_0$  aplicat din exterior pe bară își face echilibrul cu reacțiunile din reazeme:

$$\sum M_{t_i} = 0 \Rightarrow M_{t_1} - M_0 + M_{t_2} = 0 \Rightarrow M_{t_1} + M_{t_2} = M_0 \quad (6.10)$$

Se constată că, numai cu ajutorul ecuației de echilibru, nu se pot determina reacțiunile. Avem o singură ecuație și două necunoscute, ca urmare, problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării vom folosi condiția de deformăție. Se observă că secțiunile 1 și 4 nu se rotesc și ca urmare:

$$\Delta\varphi_{14} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} + \Delta\varphi_{34} = 0 \quad (6.11)$$

Expresia pentru rotirea relativă a două secțiuni aflate pe aceeași regiune

la distanța  $l$ , este: 
$$\Delta\varphi_{ij} = \int_0^l \frac{M_t(x)}{GIp(x)} dx$$

Pentru determinarea rotirilor relative  $\Delta\varphi_{ij}$  avem nevoie de momentele de răsucire, ca eforturi, pe fiecare regiune în parte:

$$\begin{aligned} M_t(x_1) &= M_{t_1} \\ M_t(x_2) &= M_{t_1} - M_0 \\ M_t(x_3) &= -M_{t_2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ca urmare, relația (6.11) va deveni:

$$\frac{M_{t_1} \cdot l}{G \frac{\pi d^4}{32}} + \frac{(M_{t_1} - M_0) \cdot l}{G \frac{\pi (2d)^4}{32}} - \frac{M_{t_2} \cdot l}{G \frac{\pi [(2d)^4 - d^4]}{32}} = 0 \quad (6.13)$$

Din relațiile (6.10) și (6.13) vor rezulta reacțiunile din încastrări ca fiind:

$$M_{t_1} = 0,114M_0 \quad \text{și} \quad M_{t_2} = 0,886M_0$$

3. *Trasarea diagramei de eforturi* se face pe baza relațiilor (6.12) ținând seama de reacțiunile determinate anterior. Astfel vom avea:

$$\begin{aligned} M_t(x_1) &= 0,114M_0 \\ M_t(x_2) &= -0,886M_0 \\ M_t(x_3) &= -0,886M_0 \end{aligned}$$

Diagrama eforturilor este trasată în figura 6.10b.



4. *Diagrama de tensiuni*,  $\tau(x)$ , se poate trasa pe baza relației:

$$\tau(x) = \frac{Mt(x)}{W_p(x)} \text{ și va rezulta:}$$

$$\tau(x_1) = \frac{0,114M_0}{\pi d^3} = 1,82 \frac{M_0}{\pi d^3}; \quad \tau(x_2) = -\frac{0,886M_0}{\pi (2d)^3} = -1,77 \frac{M_0}{\pi d^3}$$

$$\tau(x_3) = -\frac{0,886M_0}{\pi 15d^4} = -1,89 \frac{M_0}{\pi d^3}$$

Diagrama de tensiuni este trasată în figura 6.10c.

5. *Dimensionarea* se va face din condiția de rezistență. Pentru dimensionare se impune condiția:  $|\tau_{ef \max}| \leq \tau_a$  de unde rezultă:

$$1,89 \frac{M_0}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{1,89M_0}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{1,89 \cdot 3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 100}} = 26,2 \text{ mm}$$

Valoarea obținută se rotunjește la  $d=27 \text{ mm}$ .

6. *Trasarea diagramei rotirilor*. Se observă că nici unul din capetele barei nu se rotește. Vom considera ca reper, de exemplu, secțiunea 1, pentru care avem  $\varphi_1=0$ . Rotirile celorlalte secțiuni vor fi:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{12} = 0 + \frac{0,114M_0 \cdot l}{G \frac{\pi d^4}{32}} = 3,65 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \Delta\varphi_{23} = 3,65 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4} - \frac{0,886M_0 \cdot l}{G \frac{\pi (2d)^4}{32}} = 1,88 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4}$$

iar pentru verificare:

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \Delta\varphi_{34} = 1,88 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4} - \frac{0,886M_0 \cdot l}{G \frac{\pi 15d^4}{32}} = 0$$

Diagrama rotirilor este reprezentată în figura 6.10d. Pentru a stabili sensul de rotire al secțiunilor barei, se au în vedere, figura 6.9a și observațiile referitoare la semnele din diagramă și sensul de rotire al secțiunilor. Astfel, semnul "+" din diagrama rotirilor arată că secțiunile barei se rotesc în sensul *efortului pozitiv*  $Ml(x_l)$  care coincide cu sensul



momentului exterior  $M_t$ . Dacă s-ar trasa diagrama rotirilor plecând din punctul 4 semnul ar rezulta negativ. Momentul  $M_t(x_3)$  este de asemenea negativ și ca urmare secțiunile se rotesc în sensul acestui moment care coincide, de asemenea, cu sensul momentului  $M_0$ .

Rotirea maximă se obține în dreptul secțiunii 2 și este:

$$\varphi_2 = \varphi_{\max} = 3,65 \frac{M_0 \cdot l}{G \pi d^4} = 3,65 \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 200}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 27^4} = 0,016 \text{ rad.}$$

4.5.3. Se propune a se înlocui o bară de secțiune circulară plină având diametrul  $d$ , cu o bară de secțiune inelară având raportul diametrelor  $d_i/D_e=0,8$  fiind solicitate la răsucire de același moment de răsucire  $M_t$ , figura 6.11. Înlocuirea se va face în două cazuri: având în vedere condiția de rezistență și condiția de rigiditate.

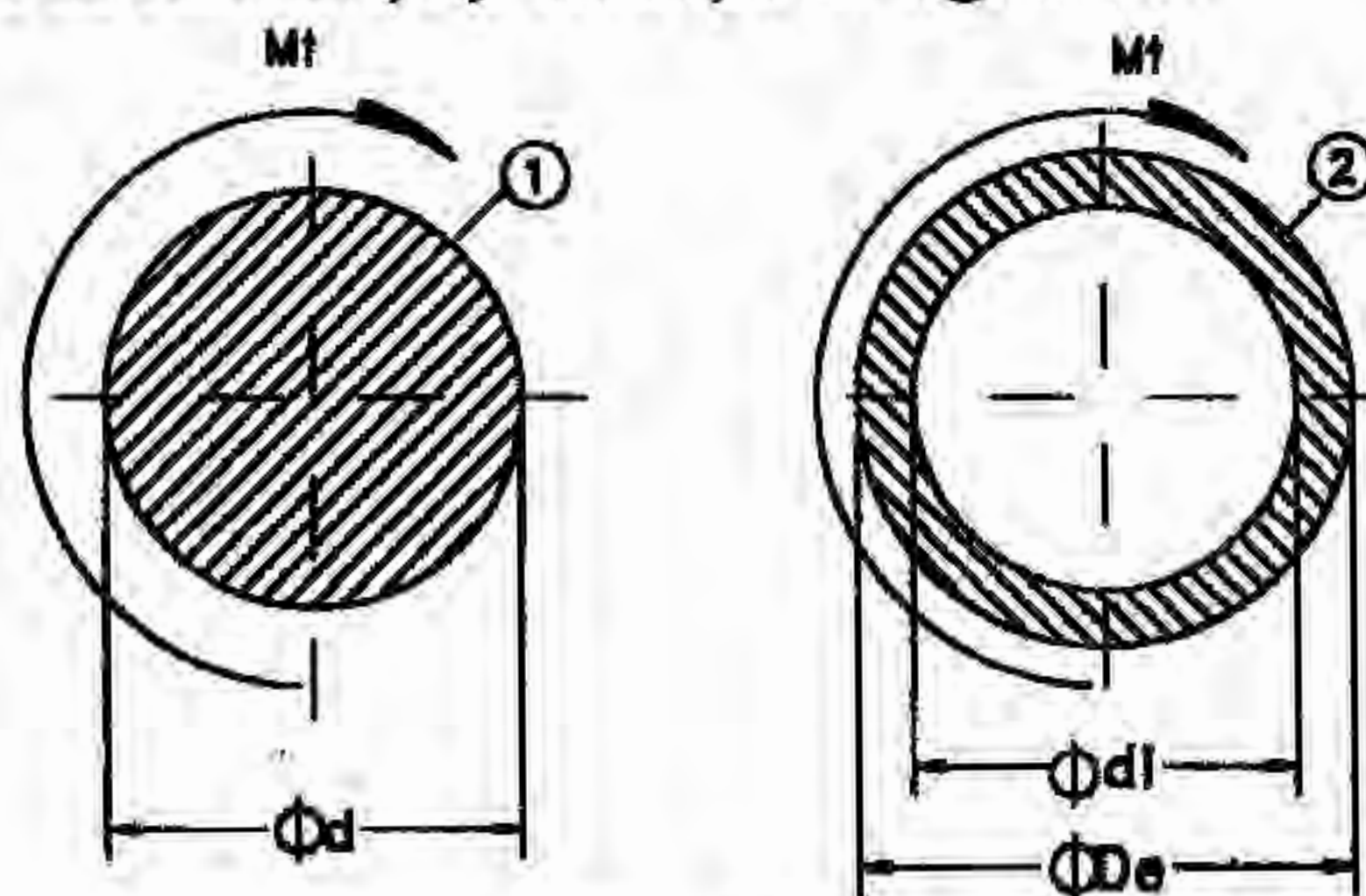


Fig. 6.11

1. Din condiția de rezistență va rezulta:

$$\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \frac{M_t \cdot r_{1\max}}{I_{p1}} = \frac{M_t \cdot r_{2\max}}{I_{p2}} \Rightarrow \frac{\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{\frac{D_e}{2}}{\frac{\pi}{32}(D_e^4 - d_i^4)}$$

Înlocuind în această relație  $d_i = 0,8 D_e$  va rezulta  $D_e = 1,19d$  și ca urmare  $d_i = 0,95d$ . Volumul celor două bare este:

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} l; \quad V_2 = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - d_i^2) l$$



iar raportul volumelor este:  $V_2/V_1 = 0,52$  de unde rezultă că se face o economie de material de 48% în cazul în care se folosește bara de secțiune inelară, în condițiile în care aceasta rezistă la fel de bine cu cea care are secțiunea circulară plină.

2. Din condiția ca cele două bare să aibe o aceeași rotire specifică va rezulta:

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \frac{Mt}{GIp_1} = \frac{Mt}{GIp_2} \Rightarrow Ip_1 = Ip_2 \Rightarrow d^4 = D_e^4 (1 - 0,8^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_e = 1,14d \text{ și } d_i = 0,91d$$

Raportul volumelor va fi:  $V_2/V_1 = 0,47$  de unde rezultă că, din condiția de rigiditate la răsucire, în cazul înlocuirii unei bare cu secțiunea circulară plină cu o bară cu secțiunea inelară, se face o economie de material de 53%.



## CAPITOLUL 7

### SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE

- 
- 7.1. Definirea solicitării
  - 7.2. Studiul deformațiilor barelor drepte solicitate la încovoiere pură
  - 7.3. Calculul deformațiilor și tensiunilor
  - 7.4. Secțiuni raționale la încovoiere
  - 7.5. Încovoierea barelor cu secțiuni nesimetrice
  - 7.6. Calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă
  - 7.7. Trasarea diagramelor de eforturi
  - 7.8. Tensiuni principale la grinzile drepte solicitate la încovoiere
  - 7.9. Deplanarea secțiunii transversale sub acțiunea forței tăietoare
  - 7.10. Calculul grinzilor compuse
- 

#### 7.1. Definirea solicitării de încovoiere

Se consideră o bară dreaptă de secțiune constantă care se raportează la un sistem de axe centrale  $oxyz$  astfel încât axa  $x$  să aibă direcția axei geometrice a barei iar axele  $y$  și  $z$  să fie axele centrale principale de inerție ale secțiunii transversale, figura 7.1a.

Se poate spune că, *o bară este supusă la încovoiere* dacă sarcinile exterioare acționează astfel încât introduc în fiecare secțiune transversală a barei un moment care are direcția perpendiculară pe axa barei.

---



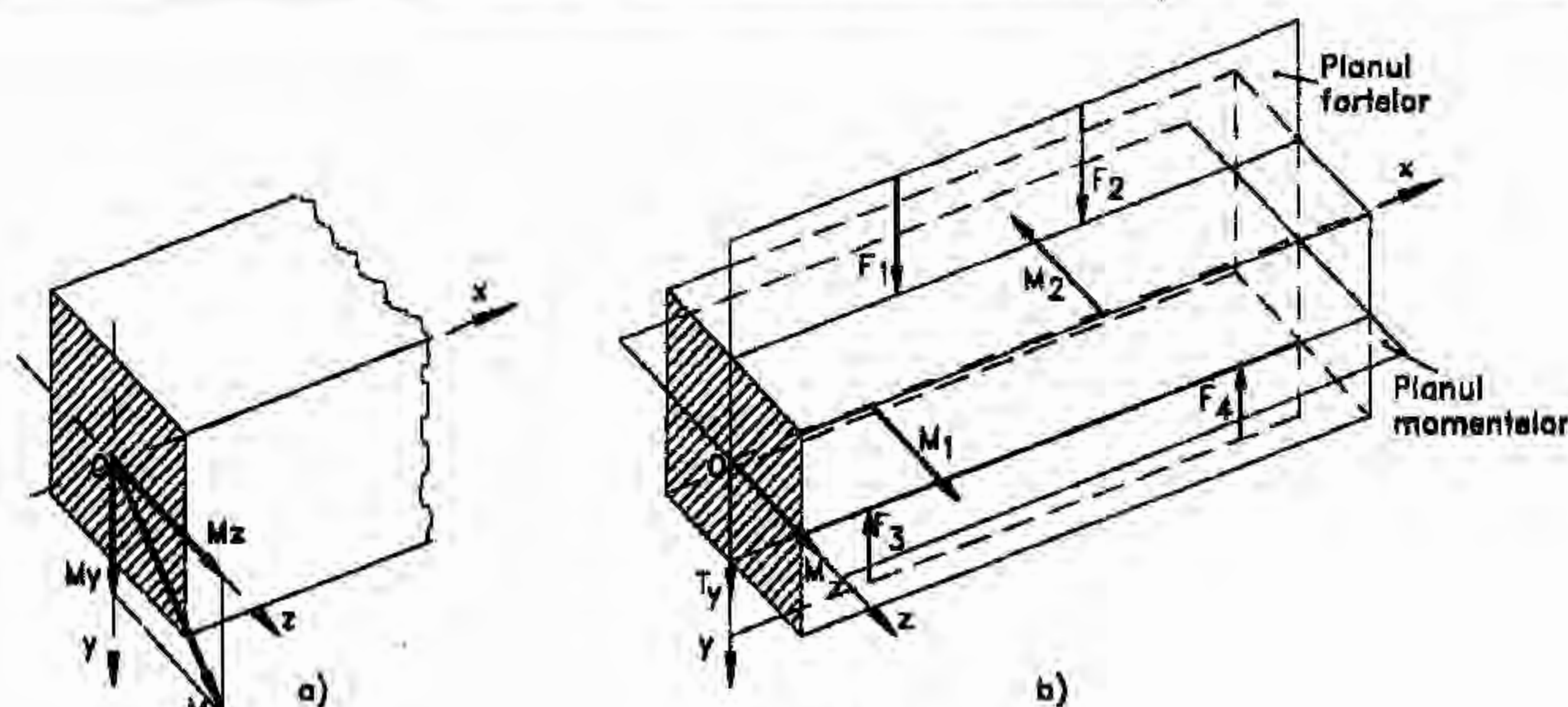


Fig. 7.1

*In funcție de natura solicitării exterioare, încovoierea poate fi:*

- *încovoiere plană* atunci când momentul, ca efort, este determinat de forțe care acționează toate într-un singur plan direcționat după una din axele centrale principale de inerție ( $y$ ) și eventual de momente ale căror direcții se află într-un plan direcționat după cealaltă axă principală de inerție ( $z$ ). Pentru o asemenea solicitare, momentul încovoiitor, ca efort, este direcționat după axa principală de inerție aflată în planul perpendicular acțiunii forțelor exterioare, figura 7.1b.

Se constată că, în secțiunea transversală a barei, pe lângă momentul încovoiitor  $M_z$  se introduce și o forță tăietoare  $T_y$ ;

- *încovoiere oblică* atunci când momentul din secțiunea transversală a barei nu este orientat după nici una din axele principale de inerție iar forțele exterioare se află într-un plan care de asemenea nu conține nici una din axele centrale principale de inerție, figura 7.1a;

- *încovoiere strâmbă* când forțele exterioare acționează după direcții diferite producându-se o deformare spațială a axei geometrice a barei.

*In funcție de numărul eforturilor care apar într-o secțiune a unei bare drepte, încovoierea plană poate fi:*

- *încovoiere pură* când în secțiunea transversală apare numai un moment încovoiitor dirijat după una din axele centrale principale de inerție;



- *încovoiere simplă* când în secțiunea transversală există simultan și forță tăietoare și moment încovoiător, fiecare dirijate după câte una din axele centrale principale de inerție, figura 7.1b.

## 7.2. Studiul deformațiilor barelor drepte la încovoierea pură

Se consideră o bară dreaptă, cu secțiunea transversală constantă, pe suprafața căreia s-a trasat o rețea de ochiuri pătrate, figura 7.2a. În vederea studiului deformațiilor la încovoiere se fac următoarele ipoteze:

- încovoierea reprezintă solicitarea ce are loc în domeniul elastic al deformațiilor mici. Trecerea spre deformarea plastică sub acțiunea momentelor încovoiătoare poate fi denumită *îndoire* care este un proces tehnologic și care nu face obiectul studiului nostru;
- materialul din care este confecționată bara este omogen și izotrop;
- se consideră valabilă ipoteza lui Bernoulli.

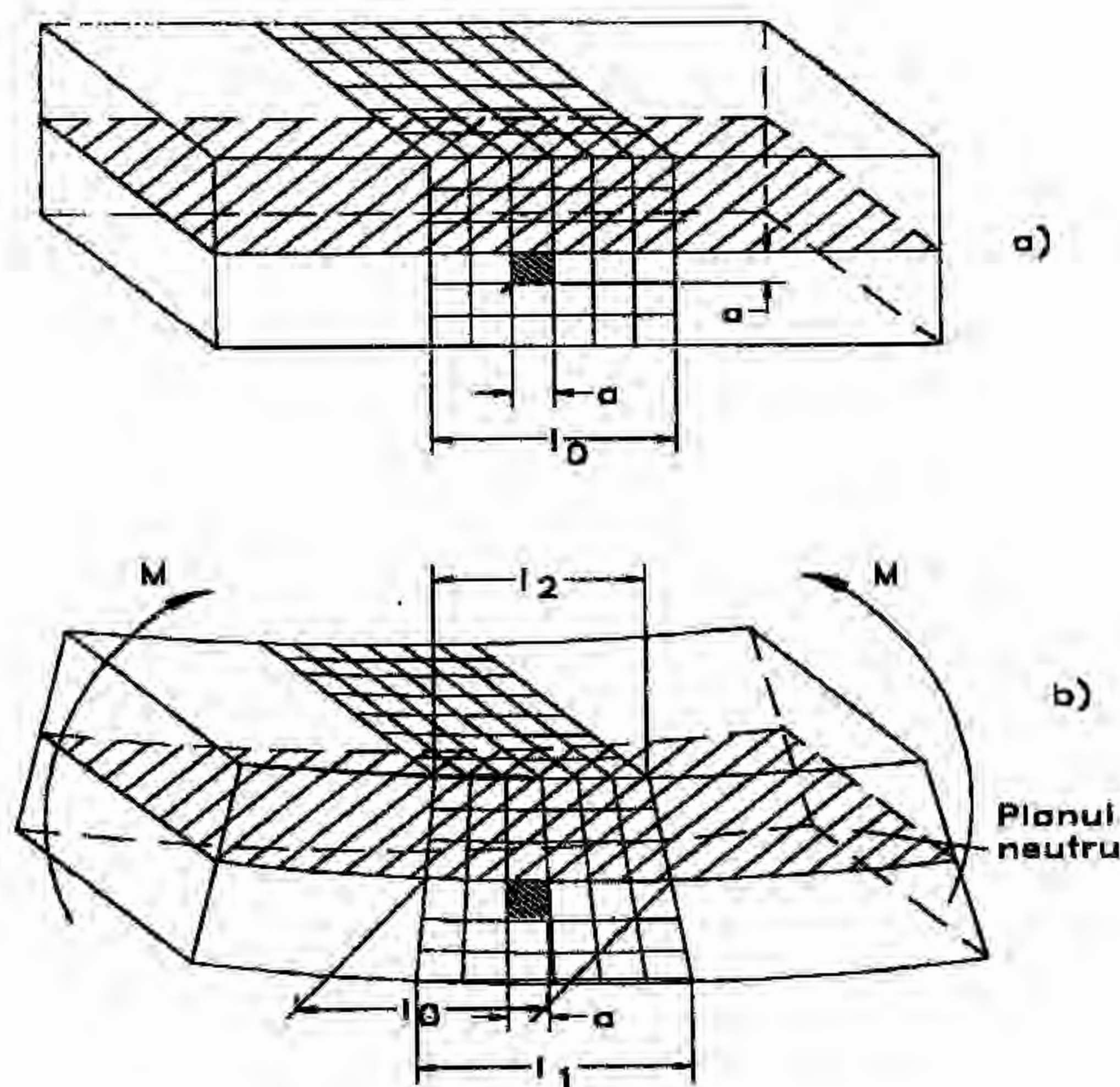


Fig. 7.2



După aplicarea solicitării cu două momente încovoietoare pe capetele barei, figura 7.2b, se constată că generatoarele din rețeaua trasată iau forma unor arce de cerc iar secțiunile transversale se rotesc dar rămân plane și perpendiculare pe axa barei. Se observă de asemenea că, la exteriorul curburii fibrele își măresc lungimea ( $l_1 > l_0$ ) iar la interiorul curburii fibrele își micșorează lungimea ( $l_2 < l_0$ ). Fibrele aflate în planul median al barei iau de asemenea forma unor arce de cerc dar lungimea lor nu se modifică.

### 7.3. Calculul deformațiilor și tensiunilor

Se consideră o bară de secțiune constantă solicitată la capete de două momente încovoietoare  $M$ , figura 7.3.

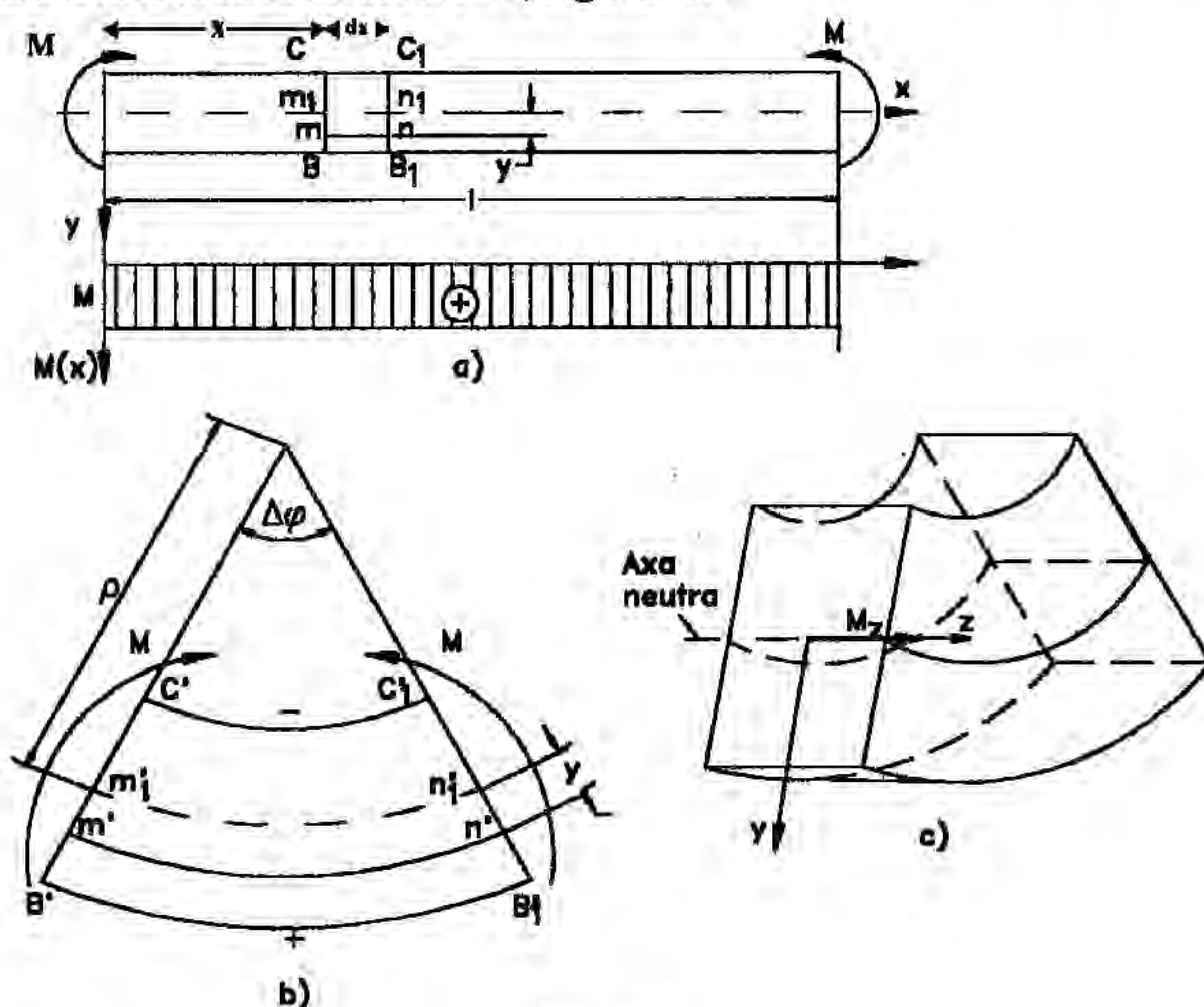


Fig. 7.3

În secțiunile transversale ale barei apar numai momente încovoietoare  $M(x) = M = \text{const.}$  orientate după axa  $z$ , ca urmare,



solicitarea este de încovoiere pură. Ipotezele menționate anterior rămân valabile și în cadrul acestui calcul.

Se va studia deformarea produsă asupra elementului de lungime  $dx$  situat la distanța  $x$  de unul din capetele barei. Pe acest element se consideră fibra  $mn$  situată la distanța  $y$  de axa geometrică a barei. După deformare secțiunile transversale se rotesc. Astfel, două secțiuni aflate inițial la distanța  $dx$  se vor roti cu unghiul  $d\varphi$  care poartă numele de *rotire elementară*, figura 7.3b. Se observă că fibrele din partea de sus a elementului sunt comprimate iar cele din partea de jos sunt întinse.

Tinând seama de omogenitatea și continuitatea materialului rezultă că, există un plan care conține toate fibrele ce rămân cu aceeași lungime, și care nu sunt supuse nici la întindere nici la comprimare. Acest plan se numește *plan neutru*, fibrele respective se numesc *fibre medii deformate* iar raza de curbură a acestora este notată cu  $\rho$ . Intersecția planului neutru cu planul secțiunii transversale determină axa neutră care coincide aici cu axa  $oz$ , figura 7.3c. Aceeași axă neutră se poate obține prin intersecția planului secțiunii transversale înainte de deformare și același plan după deformare.

Fibra  $mn$  aflată la distanța  $y$  de axa neutră are inițial lungimea  $dx$  iar în final lungimea  $(\rho+y)d\varphi$ . Fibrele din planul neutru rămân, și după deformare, cu lungimea  $dx$  ce se poate calcula ca fiind:  $dx = \rho d\varphi$ . Alungirea specifică a fibrei  $mn$  va fi:

$$\epsilon_x = \frac{\text{arc}(m'n') - (mn)}{(mn)} = \frac{(\rho+y)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho+y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (7.1)$$

Relația obținută arată că alungirea specifică variază liniar cu distanța la axa neutră (pentru  $\rho = \text{const.}$ ). Alungirii specifice îi corespunde, conform legii lui Hooke, o tensiune:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = E \frac{y}{\rho} \quad (7.2)$$

Se observă că tensiunea este egală cu zero pe axa neutră și are valorile cele mai mari în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră, figura 7.4a.



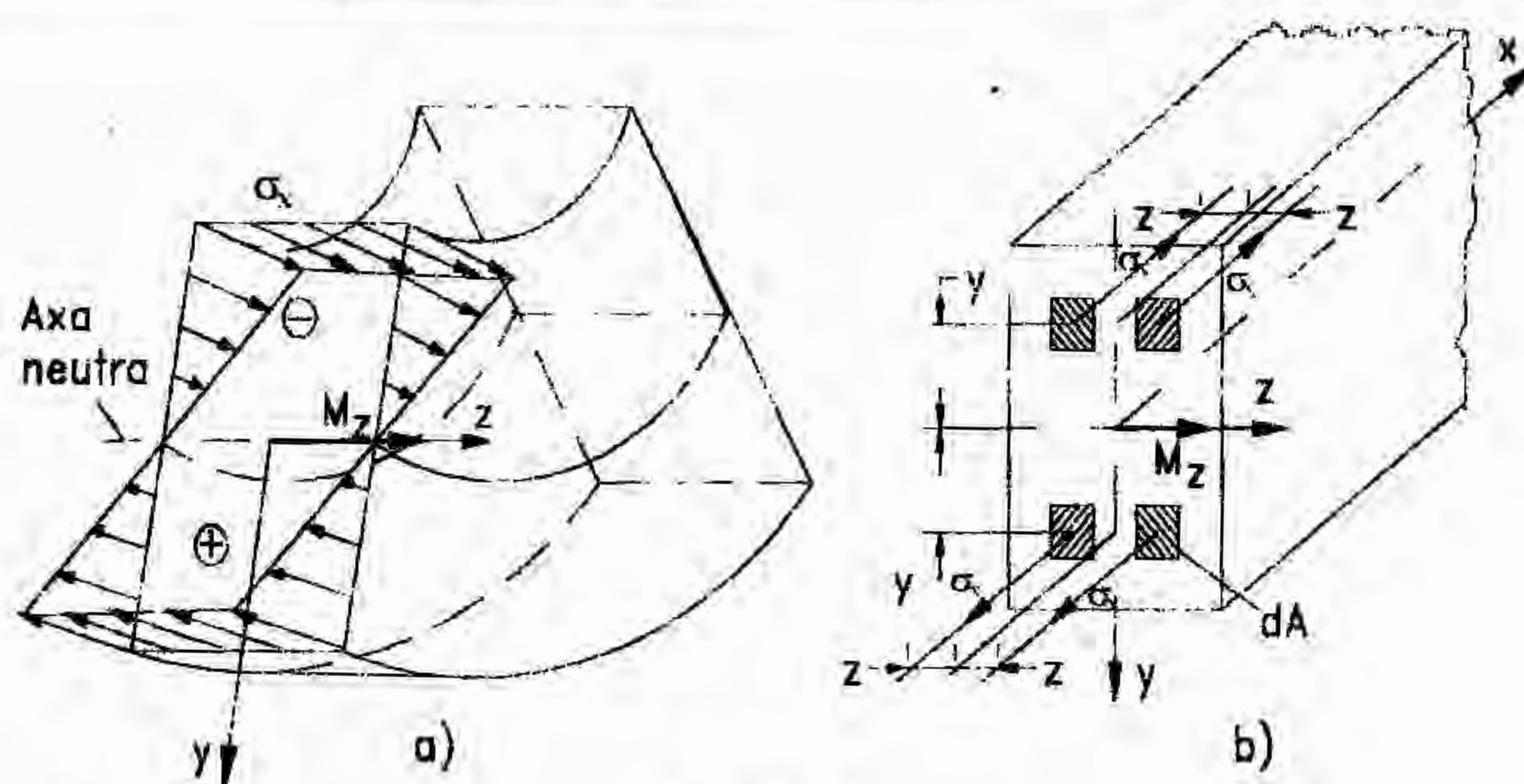


Fig.7.4

Se consideră o bară dreaptă, cu secțiunea constantă, simetrică față de axa  $oy$ , figura 7.4b, în care este introdus momentul încovoiator  $M_z$  ca efort interior, dirijat după axa  $oz$ . Având în vedere tensiunile  $\sigma_x$  care apar în secțiunea transversală, putem considera următoarele ecuații de echivalență (1.9):

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x dA = 0 \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = 0 \\ M_z &= \int_A \sigma_x y dA = M_i \end{aligned} \quad (7.3)$$

Din figura 7.4b se observă că într-adevăr, forța axială  $N_x$  și momentul  $M_y$  rezultă egale cu zero. Din prima ecuație (7.3) rezultă:

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0 \Rightarrow S_z = 0$$

Momentul static  $S_z$  este nul doar dacă axa  $oz$  (axa neutră) trece prin *centrul de greutate* al secțiunii transversale. Ca urmare, originea sistemului de referință coincide cu centrul de greutate al secțiunii transversale.

Din a doua ecuație (7.3) rezultă:



$$\int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0 \Rightarrow I_{yz} = 0$$

Momentul de inerție centrifugal este nul dacă una dintre axele  $oz$  sau  $oy$  este axă de simetrie pentru secțiunea transversală. Cum originea sistemului coincide cu centrul de greutate al secțiunii rezultă că axele  $oz$  și  $oy$  sunt axe centrale principale de inerție, supoziție făcută chiar de la începutul capitolului.

Din a treia ecuație (7.3) rezultă:

$$M_i = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z \quad (7.4)$$

în care  $I_z = \int_A y^2 dA$  este momentul de inerțial axial calculat față de axa  $oz$  după care este dirijat și momentul încovoiator, ca efort, din secțiunea considerată.

Din ecuația (7.2) rezultă că:  $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E y}$  care, înlocuită în (7.4) va da:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_i \cdot y}{I_z} \quad (7.5)$$

ce constituie *relația lui Navier* și care arată că, tensiunea într-o fibră aflată pe secțiunea transversală este o funcție liniară de distanța măsurată de la axa neutră la fibra respectivă ( $y$ ).

De obicei, valorile tensiunii  $\sigma_x$  care interesează sunt cea maximă și minimă. Acestea se găsesc în fibrele extreme ale secțiunii transversale, figura 7.5.

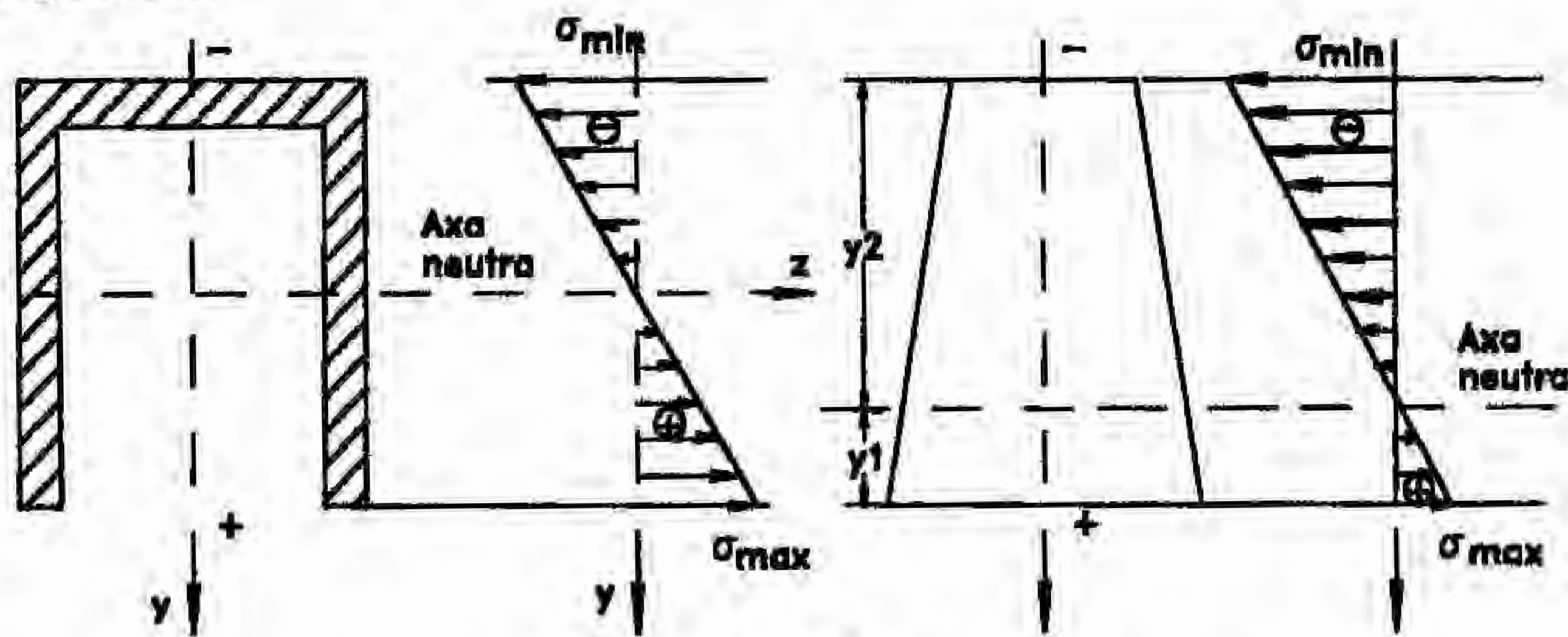


Fig. 7.5



În cazul în care axa neutră, după care este dirijat momentul încovoiator  $M_i$ , este axă de simetrie, vom avea:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M_i \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_i}{W_z} \quad (7.6)$$

în care :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (7.7)$$

este o caracteristică geometrică ce depinde de forma și dimensiunile secțiunii transversale și se numește *modul de rezistență axial*.

Pentru dimensionare, din condiția de rezistență, se va impune ca:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a \quad (7.8)$$

Dacă axa neutră nu este axă de simetrie pentru secțiunea transversală, figura 7.5b, trebuie calculată atât tensiunea maximă cât și cea minimă:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i \cdot y_1}{I_z}; \quad \sigma_{\min} = \frac{M_i \cdot y_2}{I_z}$$

Dacă materialul din care este confecționată bara rezistă la fel de bine la tracțiune și la compresiune ( $\sigma_{at} = \sigma_{ac} = \sigma_a$ ) atunci pentru dimensionare vom avea:

$$\max(\sigma_{\max}, |\sigma_{\min}|) \leq \sigma_a \quad (7.9)$$

Dacă tensiunile admisibile pentru tracțiune și compresiune sunt diferite, se va impune:

$$|\sigma_{\min}| \leq \sigma_{ac} \quad \text{și} \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_{at} \quad (7.10)$$

*Observații:*

1. Modulul de rezistență  $W_z$  al secțiunilor compuse nu se sumează. Pentru calculul acestuia se determină mai întâi  $I_z$  pentru secțiunea compusă respectivă după care se folosește relația (7.7);

2. Deși relația lui Navier a fost dedusă pentru solicitarea de încovoiere pură, ea poate fi aplicată și în cazul încovoierei simple cu condiția ca  $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{4}$  în care  $h$  este înălțimea secțiunii transversale iar  $l$  este

lungimea barei. În aceste condiții, tensiunile tangențiale introduse ca urmare a acțiunii forțelor tăietoare au o influență neglijabilă.

3. La încovoierea simplă a barelor de secțiune constantă, în care momentul variază de obicei pe lungimea barei, calculul de rezistență se conduce pentru secțiunea periculoasă a barei pentru care momentul încovoiator are cea mai mare valoare:



$$\sigma_{\max, \max} = \frac{Mz_{\max} \cdot y_{\max}}{I_z}$$

4. În cazul în care, în secțiunea transversală există un concentrator de tensiune, din relația lui Navier rezultă doar valoarea nominală a tensiunii. Tensiunea maximă în această secțiune se obține cu relația:  $\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n = \alpha_k \frac{M_i}{W_z}$  în care  $\alpha_k$  este coeficientul teoretic de concentrare al tensiunilor.

#### 7.4. Secțiuni raționale la încovoiere

Mărimea care ne poate da o măsură a raționalizării secțiunii la solicitarea de încovoiere este modulul de rezistență axial  $W_z$ . Din relația (7.6) se observă că, la o anumită valoare a momentului încovoiator, tensiunea introdusă este cu atât mai mică cu cât  $W_z$  este mai mare. Se impune totuși a avea un  $W_z$  mare dar cu un consum minim de material. În aceste condiții, vom avea o raționalitate cu atât mai bună cu cât raportul  $W_z/(Ah)$  este mai mare, în care  $A$  este aria secțiunii transversale, iar  $h$  este înălțimea acesteia.

Materialul unei secțiuni supuse la încovoiere este solicitat la limita de rezistență numai în fibrele extreme. Toate celelalte fibre sunt solicate la tensiuni inferioare rezistenței admisibile. Ca urmare, se impune eliminarea unei părți din material aflată în vecinătatea axei neutre. În figura 7.6 se prezintă valorile raportului  $W_z/(Ah)$  pentru câteva secțiuni uzuale.

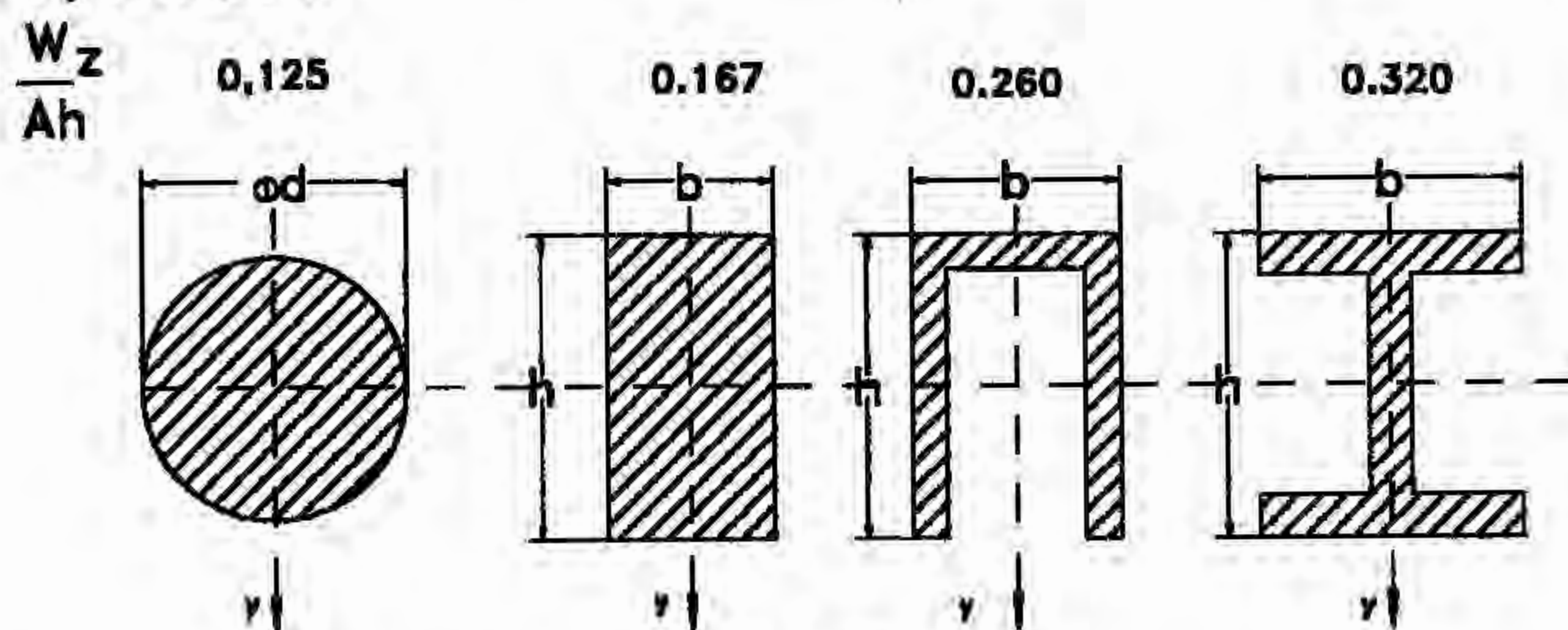


Fig. 7.6



Se observă că, secțiunile de tipul profilului I sunt aproximativ de două ori mai economice decât cele dreptunghiulare. În toate cazurile prezentate în figura 7.6, momentul încovoiător trebuie să aibe direcția axei oz. În caz contrar, bara cu secțiunea respectivă va rezista foarte prost la încovoiere. Prin urmare, aceste profile se vor așeza astfel încât axa oy să fie cuprinsă în planul forțelor iar axa oz în cel al momentelor.

Secțiunea circulară are avantajul aceleiași rezistențe la încovoiere față de orice direcție. Acest lucru este exploatat în cazul încovoierii rotative a arborilor.

### 7.5. Încovoierea barelor cu secțiuni nesimetrice

Atunci când s-a demonstrat relația lui Navier, s-a presupus că una din axele sistemului, respectiv oy, este axă de simetrie pentru secțiunea transversală. Astfel, s-a ajuns la concluzia că axa neutră (oz) trece prin centrul de greutate iar momentul încovoiător este dirijat după această axă. Presupunem că avem o secțiune oarecare, cu axele oy și oz axe centrale principale de inerție fără ca una dintre ele să fie axă de simetrie, figura 7.7.

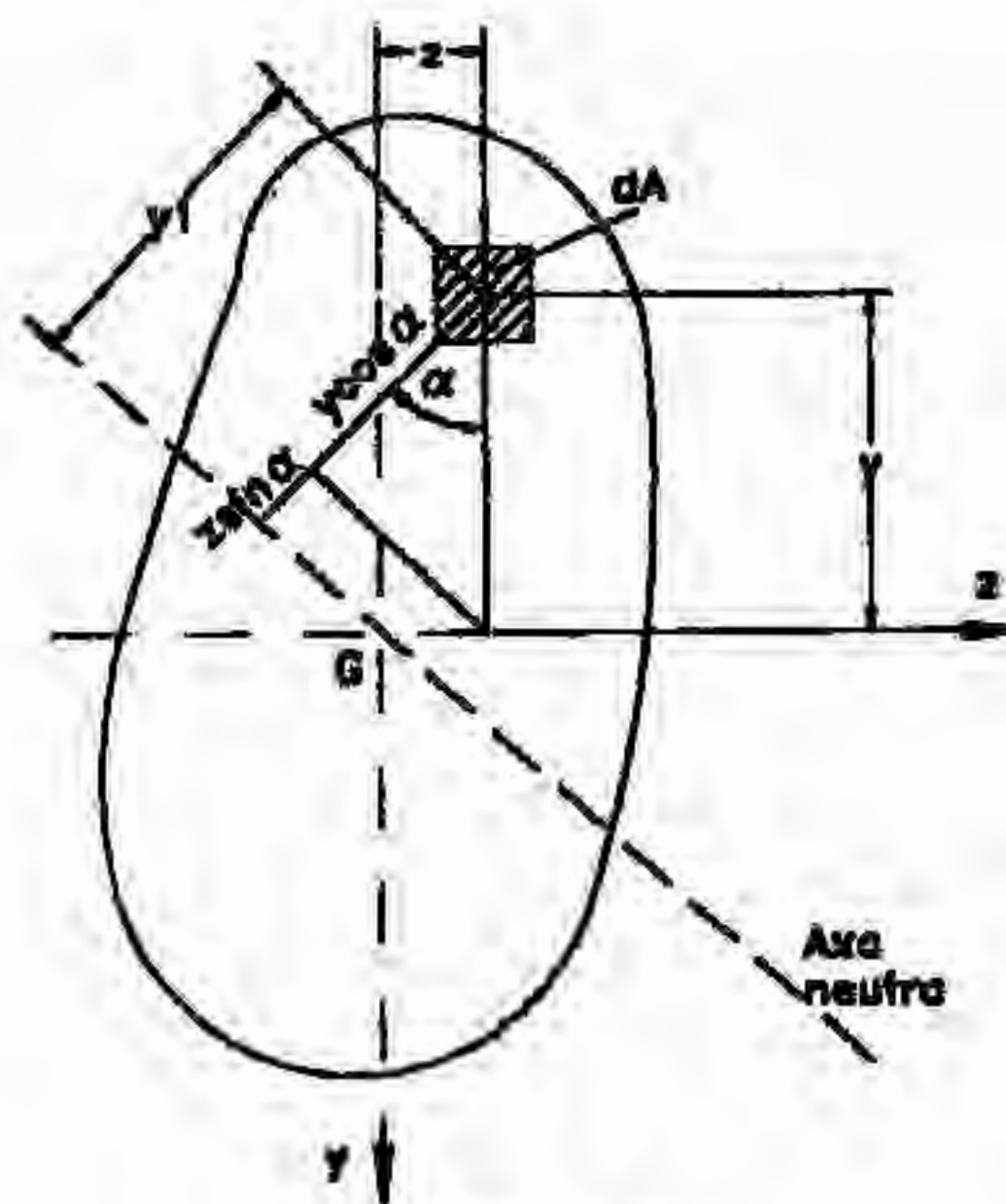


Fig. 7.7

Pe baza ipotezei secțiunilor plane și a legii lui Hooke s-a arătat că distribuția tensiunilor este dată de relația:  $\sigma_x = \frac{E}{\rho} y_1$



în care  $y_1$  reprezintă distanța de la punctul de pe secțiune, în care vrem să calculăm tensiunea, la axa neutră. Dacă unghiul pe care îl face axa  $oz$  cu axa neutră este  $\alpha$  atunci vom avea:  $y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$

Din a doua relație (7.3) va rezulta:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \int_A \frac{E}{\rho} (yz \cos \alpha + z^2 \sin \alpha) dA = \int_A \frac{E}{\rho} (I_{yz} \cos \alpha + I_y \sin \alpha) dA = 0$$

Cum avem:  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ ,  $I_{yz} = 0$  și deoarece axele  $oz$  și  $oy$  sunt axe principale

de inerție rezultă că  $\sin \alpha = 0$  deci  $\alpha = 0$  ceea ce înseamnă că axa neutră coincide cu axa vectorului moment.

Ca urmare, dacă vectorul moment încovoietor acționează după una din axele centrale principale de inerție atunci axa neutră coincide cu axa respectivă iar distribuția de tensiuni se poate determina cu ajutorul relației lui Navier.



### 7.6. Calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă

În secțiunile transversale ale barelor supuse la încovoiere simplă, ca eforturi apar, atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare. Momentele încovoietoare sunt datorate tensiunilor normale a căror variație este dată de relația lui Navier. Forțele tăietoare presupun existența tensiunilor tangențiale care se vor determina în cele ce urmează.

Se consideră o bară dreaptă, având secțiunea transversală simetrică față de axa  $y$ , solicitată la încovoiere simplă, momentele încovoietoare fiind dirijate după axa  $z$ , figura 7.8a.

Din această bară se izolează un element de lungime  $dx$ . În secțiunea I a respectivului element este introdus ca efort, momentul încovoiător  $M_{iz}(x)$  iar în secțiunea II momentul  $M_{iz}(x) + dM$ , figura 7.8b. Tensiunile normale din cele două secțiuni sunt repartizate liniar și pot fi calculate cu relația lui Navier ca fiind  $\sigma(y)$  și respectiv  $\sigma(y) + d\sigma$ , figura 7.8c:

$$\sigma(y) = \frac{M_{iz}(x) \cdot y}{I_z}; \quad \sigma(y) + d\sigma = \frac{[M_{iz}(x) + dM] \cdot y}{I_z}$$

Forța tăietoare  $T$  se dezvoltă ca urmare a tensiunilor tangențiale  $\tau$  repartizate pe suprafața secțiunii transversale. Ecuațiile de echivalență dintre tensiunile tangențiale și forțele tăietoare sunt:

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad T_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (7.11)$$

Tensiunile tangențiale de pe conturul secțiunii transversale sunt tangente la acest contur. Dacă nu ar fi așa ar trebui să existe două componente ale tensiunii pe contur,  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{xz}$ , figura 7.8b și conform principiului dualității tensiunilor tangențiale și pe suprafața exterioară trebuie să existe o tensiune tangențială  $\tau_{xz}$ . Întrucât bara nu prezintă încărcări exterioare dispuse longitudinal pe suprafața exterioară, rezultă că  $\tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ .

Ca urmare a acestei precizări și ținând seama că axa  $y$  este axă de simetrie, tensiunile tangențiale de pe dreapta  $nn'$  se întâlnesc într-un punct  $J$  de pe axa  $y$ , figura 7.8d.



Pentru tensiunile  $\tau$  aflate pe dreapta  $nn'$  paralelă cu axa  $z$ , **Juravski** admite faptul că tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  aflate pe dreapta  $nn'$  au aceeași valoare. A doua ecuație (7.11) este satisfăcută întrucât, pentru două puncte simetrice față de axa  $oy$  tensiunile  $\tau_{xz}$  sunt egale și de sensuri opuse.

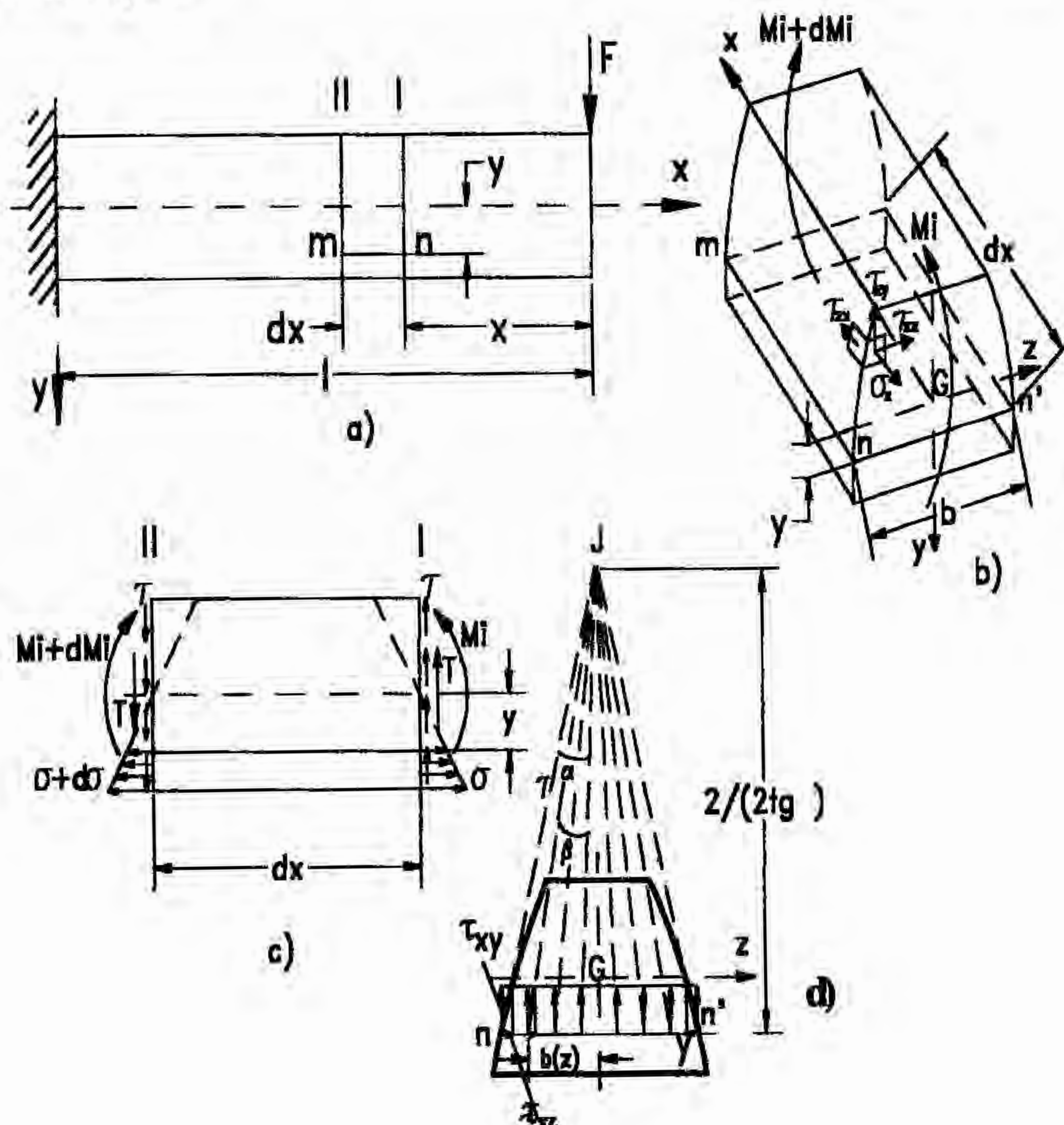


Fig. 7.8

Vom determina în continuare variația tensiunilor tangențiale pe secțiunea transversală a unei bare în care apar ca eforturi, o forță tăietoare  $T$  și un moment încovoiator  $M$ , figura 7.8c. Pe tronsonul de



bară de lungime  $dx$  se face o secțiune longitudinală după un plan ce conține dreapta  $nn'$  de lungime  $b$ , figura 7.9.

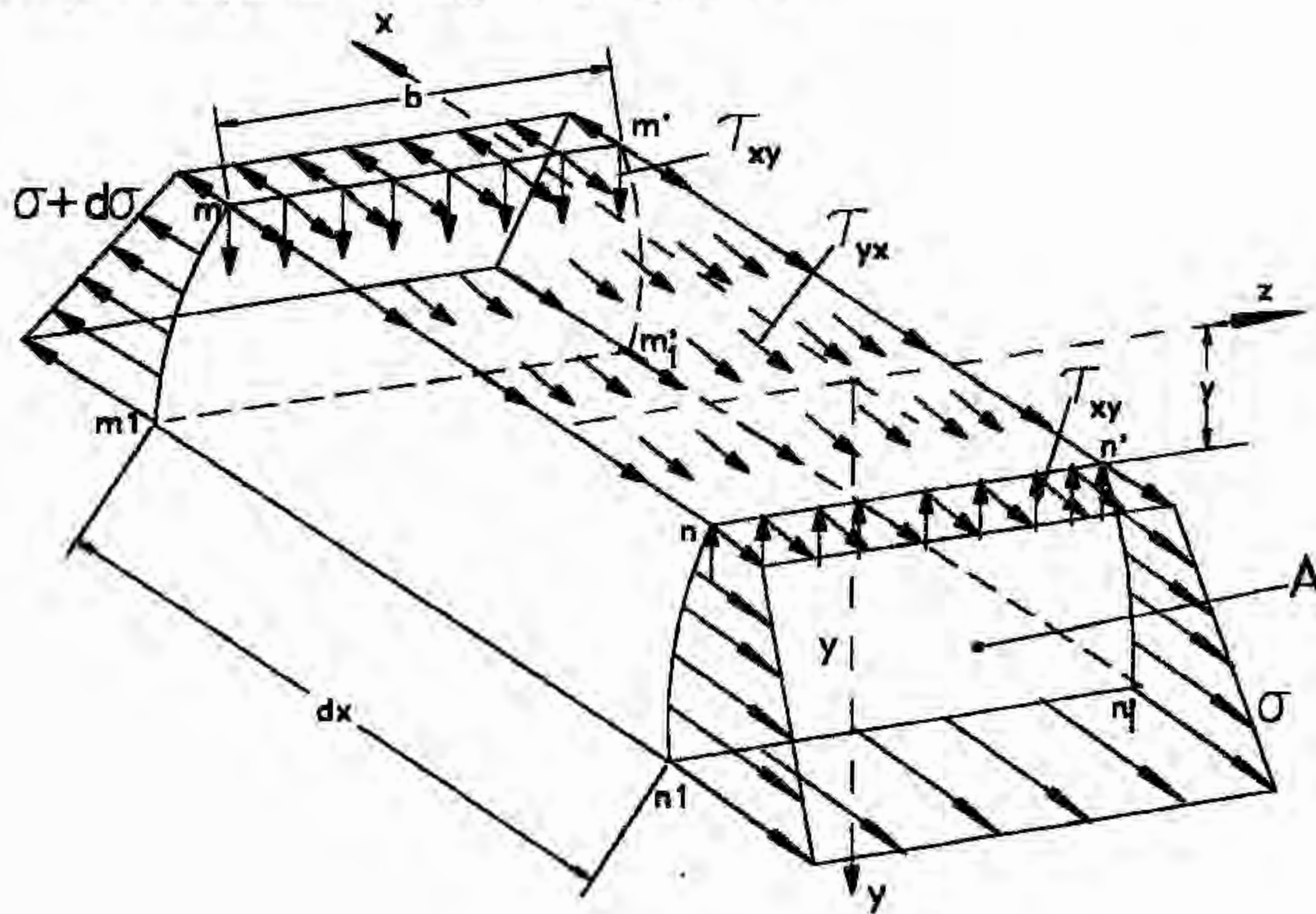


Fig 7.9

Din cele arătate anterior, se poate admite că tensiunile  $\tau_{xy}$  sunt egale. Pe baza principiului dualității tensiunilor tangențiale se constată că și pe suprafața  $mnn'm'$  trebuie să existe tensiuni tangențiale  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . Aupra secțiunilor transversale aflate la distanța  $dx$  acționează și tensiunile  $\sigma$ , respectiv  $\sigma+d\sigma$ . Aria suprafeței  $nn_1n_1'n'$  este egală cu aria suprafeței  $mm_1m_1'm'$  deoarece bara este de secțiune constantă. Pentru elementul de volum din figura 7.9, echilibrul de forțe după axa  $x$  se poate scrie astfel:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A (\sigma + d\sigma) dA - \int_A \sigma dA - \tau_{yx} b dx = 0$$

de unde rezultă:

$$\int_A d\sigma dA = \tau_{yx} b dx$$

în care  $d\sigma$  se poate calcula cu relația:



$$d\sigma = \frac{dM_{iz} \cdot y}{I_z}$$

și ca urmare

$$\int_A \frac{dM_{iz} \cdot y}{I_z} dA = \tau_{yx} b dx$$

sau

$$\tau_{yx} = \frac{1}{b I_z} \int_A \frac{dM_{iz}}{dx} \cdot y \cdot dA$$

Ținând cont de relația diferențială dintre forța tăietoare și momentul încovoiător:  $T = \frac{dM_{iz}}{dx}$  va rezulta:  $\tau_{yx} = \frac{T}{b \cdot I_z} \int_A y \cdot dA$ . Integrala din

această relație reprezintă momentul static  $S_z(y)$ , față de axa neutră  $oz$ , al suprafeței de arie  $A$  care se găsește sub dreapta  $nn'$ , adică al părții din secțiunea transversală care tinde să lunece sub acțiunea tensiunilor tangențiale  $\tau_{yx}$ :  $S_z(y) = \int_A y \cdot dA$ . În consecință va rezulta:

$$\tau_{yx}(x, y) = \frac{T(x) \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \quad (7.12)$$

în care  $b(y)$  reprezintă lățimea secțiunii la distanța  $y$  față de axa neutră iar  $I_z$  este momentul de inerție axial, față de axa  $z$ , al întregii secțiuni. Expresia (7.12) poartă numele de **relația lui Juravski**. Din această relație se observă că, într-o secțiune transversală fixată valoarea tensiunii tangențiale depinde de mărimea raportului  $S_z/b$  deci de ordonata  $y$ . Pentru cele mai multe forme ale secțiunilor transversale, acest raport are valoare maximă pe axa neutră unde se înregistrează tensiunile tangențiale cele mai mari și deci pericolul distrugerilor prin alunecare longitudinală este mai mare.

În lungul grinzii, tensiunea tangențială depinde de valoarea forței tăietoare din secțiunea respectivă,  $T(x)$  și de  $I_z$ .

După determinarea tensiunii  $\tau_{yx}$  cu ajutorul relației lui Juravski, se pot determina componentele  $\tau_{xz}$  și tensiunea totală  $\tau$  dintr-un punct oarecare  $N$ , aflat pe dreapta  $nn'$  la distanța  $b(z)$  de axa  $oy$ , figura 7.8d.

Astfel, pentru  $\tau_{xz}$  vom avea:

$$\tau_{xz} = \tau_{yx} \frac{b(z)}{b(y)} 2 \operatorname{tg} \alpha \quad (7.13)$$

în care  $\alpha$  este unghiul făcut de tangenta la suprafața exterioară cu verticala, figura 7.8d.



În continuare se vor prezenta exemple în vederea determinării variației tensiunilor tangențiale pentru câteva secțiuni.

*Secțiune dreptunghiulară, figura 7.10.*

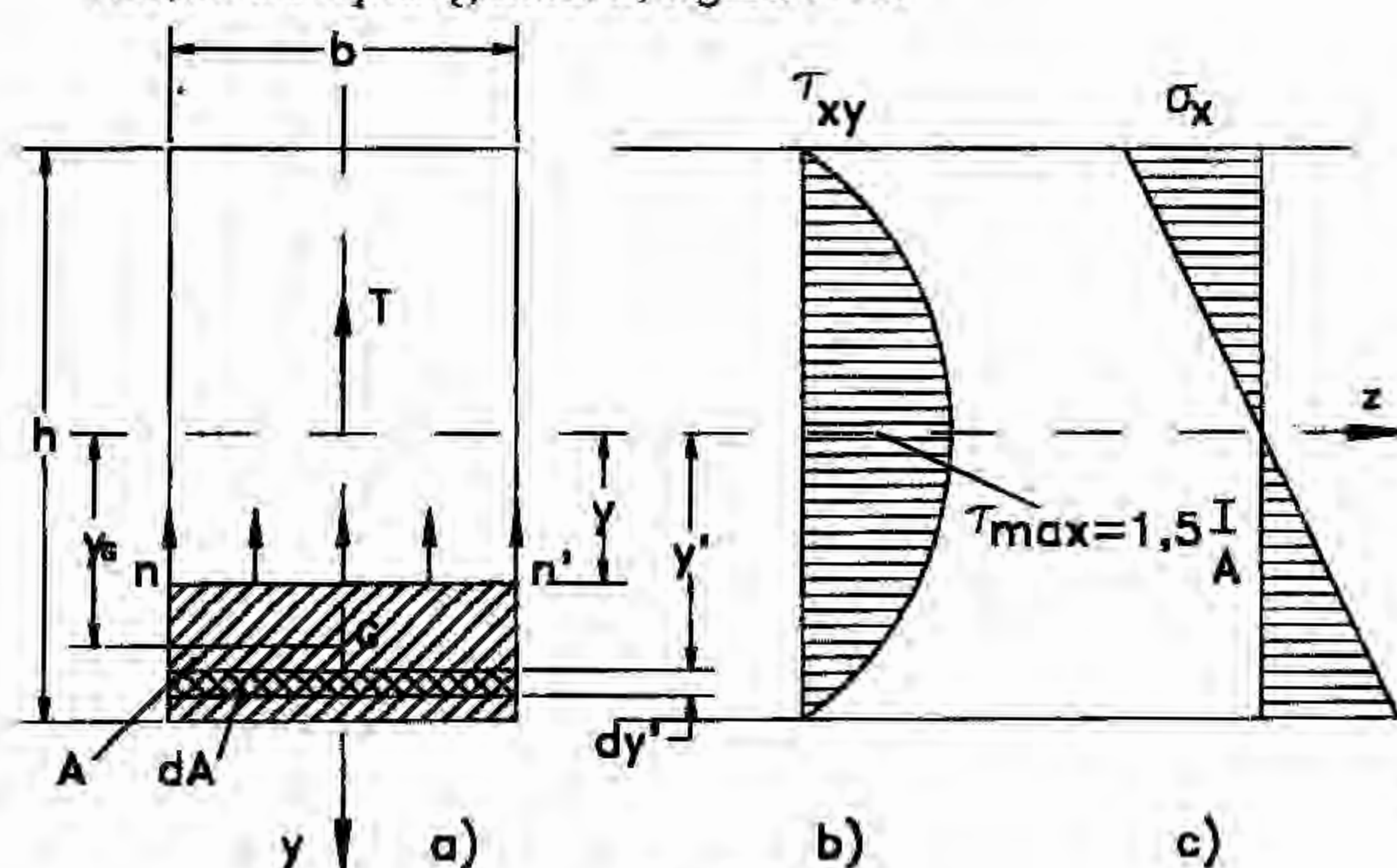


Fig. 7.11

La distanța  $y$  de axa neutră  $oz$ , se consideră o paralelă  $nn'$  la axa neutră care delimitează în partea inferioară aria  $A$ , ce tinde să lunece sub acțiunea tensiunilor tangențiale aflate în planul longitudinal superior acestei arii. Momentul static al acestei suprafețe față de axa neutră este:

$$S_z(y) = \int_A y' \cdot dA = \int_y^{h/2} y' \cdot b \cdot dy' = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \text{ sau}$$

$$S_z(y) = A \cdot y_G = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Tinând seama că  $I_z = \frac{bh^3}{12}$  și introducând expresia pentru  $S_z(y)$  și  $I_z$  în relația lui Juravski, se obține:



$$\tau_{yx}(y) = \frac{T \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

în care  $A=bh$  este aria secțiunii transversale. Se observă că  $\tau_{yx}$  este o funcție parabolică de ordonata  $y$  și are valoarea maximă la  $y=0$  deci pe axa neutră:  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}$ . Se constată că  $\tau_{yx} = \text{const.}$  pe orice dreaptă paralelă cu axa neutră. Rezultatul obținut arată că tensiunea tangențială maximă obținută prin aplicarea relației lui Juravski este de 1,5 ori mai mare decât cea obținută cu relația de la forfecare.

Abscisele din figura 7.10b reprezintă valorile tensiunilor  $\tau_{yx}$  dirijate pe secțiunea longitudinală respectiv sau reprezintă valorile tensiunilor  $\tau_{xy}$ , ca direcție fiind rabătute cu  $90^\circ$  față de direcția reală a acestora care este direcția forței tăietoare  $T$ . Din relația (7.13) se observă că  $\tau_{xz}=0$  întrucât  $\alpha=0$ .

În figura 7.10c s-a reprezentat variația tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii transversale. Se constată că pe axa neutră avem o stare de forfecare pură întrucât  $\sigma_x=0$ . Pe fibrele exterioare ( $y=\pm h/2$ ), avem o stare de întindere, respectiv de compresiune pură. Oricare alte fibre suportă o solicitare compusă - forfecare + solicitare axială.

Secțiune circulară, figura 7.11a.

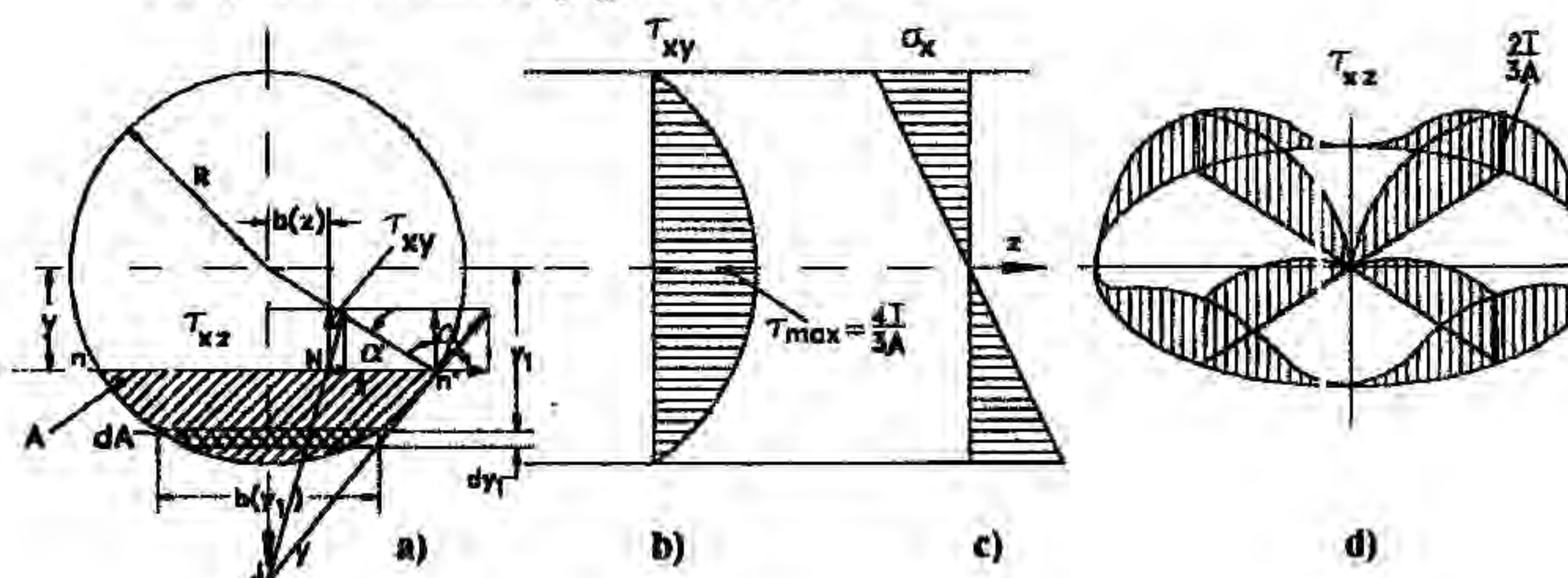


Fig. 7.11



Paralela  $nn'$  la axa neutră  $oz$  delimitează în partea inferioară a secțiunii transversale, aria hașurată  $A$ . Momentul static al acestei arii față de axa neutră este:

$$S_z(y) = \int_A y_1 dA \quad \text{în care} \quad dA = b(y_1) dy_1 = 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1$$

Astfel, vom avea:

$$S_z(y) = \int_y^R 2y_1 \sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - y^2)^3}$$

Intrucât  $b(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$  și  $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$  aplicând relația lui Juravski va rezulta:

$$\tau_{yx} = \frac{T \cdot 2\sqrt{(R^2 - y^2)^3} \cdot 4}{3 \cdot 2\sqrt{(R^2 - y^2)} \pi R^4} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

în care  $A = \pi R^2$  este aria secțiunii transversale.

Se observă că  $\tau_{yx}$  este o funcție parabolică de ordonata  $y$  și are valoarea maximă la  $y=0$ , deci pe axa neutră:  $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}$ . Rezultatul

obținut arată că tensiunea tangențială maximă determinată cu ajutorul relației lui Juravski este cu 33% mai mare decât cea determinată cu relația de la solicitarea de forfecare. Pentru determinarea tensiunii  $\tau_{xz}$  se

folosește relația (7.13) în care:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$ , figura 7.11a. Astfel, va

rezulta:

$$\tau_{xz}(y) = \frac{4}{3} \frac{T}{A} \frac{b(z) \cdot y}{R^2}$$

Valorile tensiunilor  $\tau_{xz}$  sunt mai mici decât cele ale tensiunilor  $\tau_{yx}$  și nu prezintă interes deosebit pentru calcul. Tensiunile  $\tau_{xz}$  sunt nule pe cele două axe:  $oz$  ( $y=0$ ) și  $oy$  ( $b(z)=0$ ). Valoarea lor maximă se

înregistrează pentru  $b(z) = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$  și este:  $\tau_{xz} = \frac{2}{3} \frac{T}{A}$ ,

iar reprezentarea este dată în figura 7.11d.



Profil I, figura 7.12a

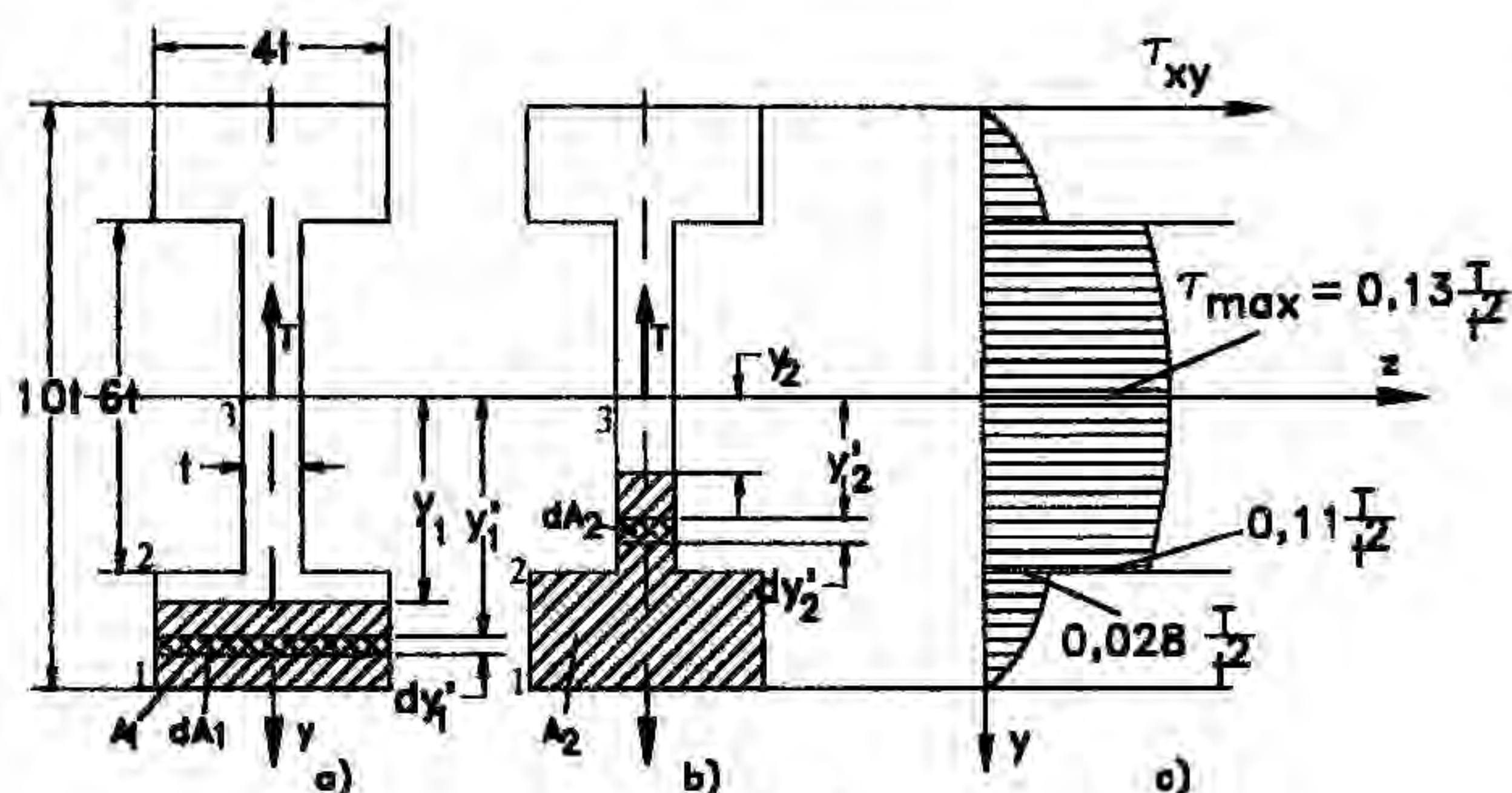


Fig. 7.12

Momentul de inerție axial, față de axa oz se calculează astfel:

$$I_z = 2 \left[ \frac{4t(2t)^3}{12} + 8t^2(4t)^2 \right] + \frac{t(6t)^3}{12} = 279,33t^4$$

Se va considera, pentru început, o paralelă la axa neutră, aflată în regiunea 1-2 a secțiunii. Aceasta delimitează în partea inferioară aria  $A_1$ , figura 7.12a, al cărei moment static față de axa neutră este:

$$S_z(y_1) = \int_A y_1 dA = \int_{y_1}^{6t} y_1 \cdot 4t \cdot dy_1 = 2t(25t^2 - y_1^2)$$

Introducând  $I_z$  și  $S_z(y_1)$  în relația lui Juravski, va rezulta:

$$\tau_{yx}(y_1) = \frac{T}{558,66t^2} \left( 25 - \frac{y_1^2}{t^2} \right)$$

în care  $y_1 \in [3t, 5t]$ ;  $\tau(5t) = 0$  și  $\tau(3t) = 0,028 \frac{T}{t^2}$



Se va considera o a doua paralelă la axa neutră, aflată în regiunea 2-3 a secțiunii transversale. Aria  $A_2$  delimitată este cea hașurată în figura 7.12b. Momentul static al acestei arii față de axa neutră este:

$$S_z(y_2) = \int_A y_2 dA = \int_{y_2}^{3t} y_2 \cdot t \cdot dy_2 + (4t \cdot 2t)4t = \frac{73t^4}{2} - \frac{t \cdot y_2^2}{2}$$

iar tensiunea tangențială  $\tau_{yx}$  va fi:

$$\tau_{yx}(y_2) = \frac{T}{558,66t^2} \left( 73 - \frac{y_2^2}{t^2} \right)$$

în care  $y_2 \in [0, 3t]$ ;  $\tau(0) = 0,13 \frac{T}{t^2}$  și  $\tau(3t) = 0,11 \frac{T}{t^2}$

Variația tensiunii tangențiale este prezentată în figura 7.12c.

Pentru determinarea tensiunilor tangențiale  $\tau_{xz}$  se reface echilibrul de forțe pentru porțiunea exterioară aflată la distanța  $z$  de oxa  $oy$ , figura 7.13.

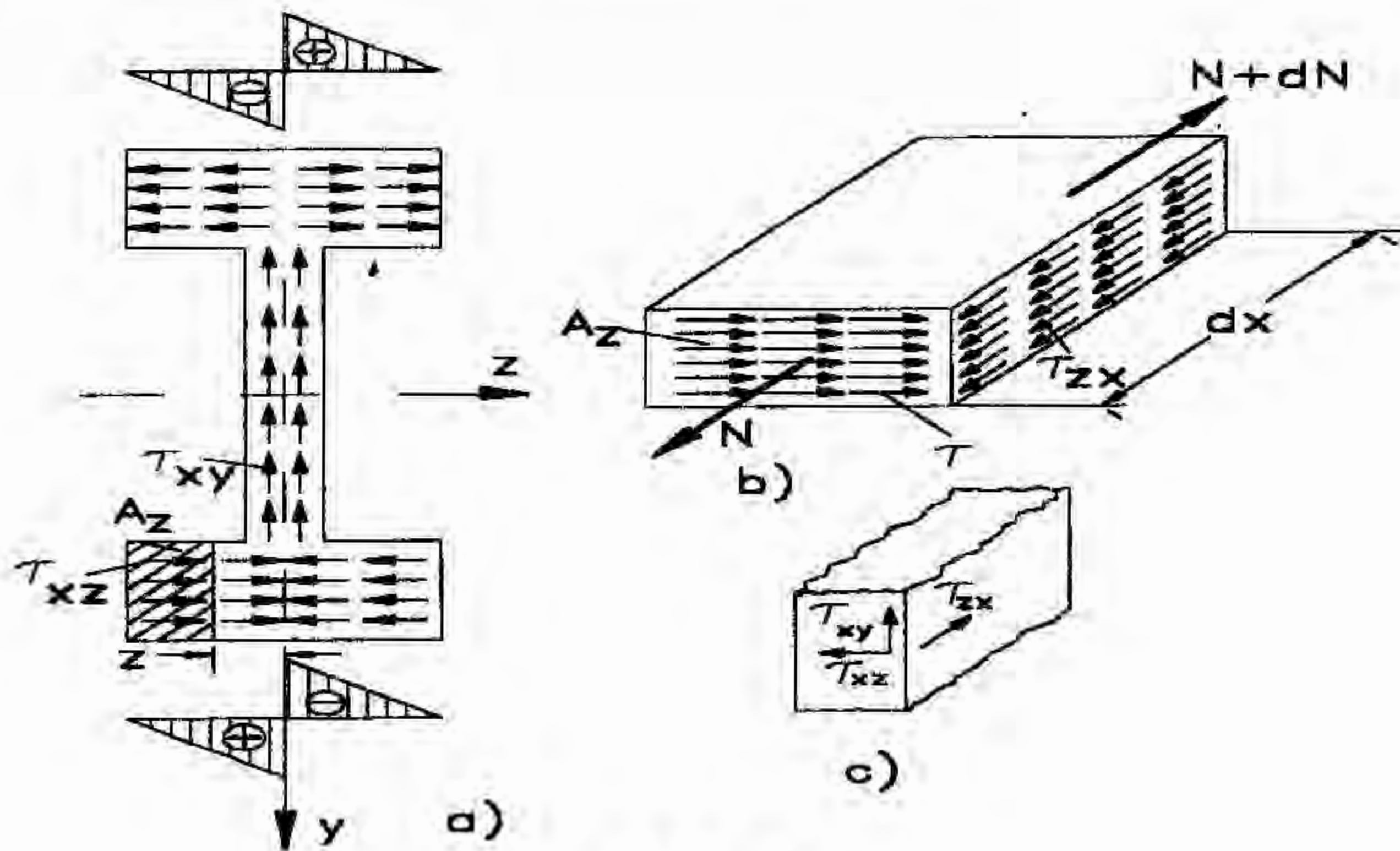


Fig. 7.13



Forțele  $N$  și  $N+dN$  reprezentate în figura 7.13b sunt determinate de tensiunile  $\sigma$  și  $\sigma+d\sigma$  ce acționează pe fețele respective aflate la distanța  $dx$ . Ecuația de echilibru de forțe după axa  $ox$  va fi:

$$\int_{A_x} \sigma dA + \tau_{xz} 2t \cdot dx - \int_{A_x} (\sigma + d\sigma) dA = 0 \Rightarrow \tau_{xz} 2t \cdot dx = \int_{A_x} \frac{dM \cdot y}{I_z} dA \Rightarrow$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2tI_z} \int_{A_x} \frac{dM}{dx} y \cdot dA = \frac{TSz}{2tI_z}$$

în care  $Sz = 8t^2(4t - z)$  și ca urmare:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T}{69,8t^2} \left(4 - \frac{z}{t}\right)$$

ce reprezintă o variație liniară funcție de  $z$ , unde:

$$z \in [0, 4t], \quad \tau_{xz}(4t) = 0 \quad \text{și} \quad \tau_{xz}(0) = 0,057 \frac{T}{t^2}$$

Sensul acestor tensiuni este cel indicat în figura 7.13a în care semnul "+" s-a adoptat atunci când sensul tensiunilor coincide cu sensul pozitiv al axei  $oz$ . Pe grosimea inimii nu apar tensiunile  $\tau_{xz}$ . Dacă acest lucru s-ar întâmpla, ar trebui să apară tensiuni egale pe suprafața exterioară a inimii, figura 7.13c. Cum această suprafață nu este încărcată cu sarcini longitudinale rezultă că  $\tau_{xz} = 0$  pe grosimea inimii.

### 7.7. Trasarea diagramelor de eforturi

Pentru a face calculul de rezistență la barele supuse solicitării de încovoiere trebuie să se cunoască momentul încovoietor maxim, determinat pe baza relației lui Navier, și forța tăietoare maximă determinată cu ajutorul relației lui Juravski. Aceste eforturi se determină din diagramele de variație a momentului încovoietor și a forței tăietoare pentru bara supusă la încovoiere simplă. Etapele de lucru necesare în acest sens sunt descrise în cele ce urmează.

1. *Figurarea și calculul reacțiunilor.* Numărul reacțiunilor care apar în reazeme depinde de tipul reazemelor care susțin bara. În cazul încovoierii plane, toate forțele acționează într-un plan ce conține una din axele centrale principale de inerție iar momentele acționează într-un plan perpendicular pe primul ce conține, evident, cealaltă axă principală de



inertie. În aceste condiții se vor putea scrie doar trei ecuații de echilibru și anume:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Pentru a avea o problemă static determinată trebuie ca numărul reacțiunilor introduse să nu fie mai mare de trei. În cele ce urmează se va studia doar acest caz. Problemele static nedeterminate la care numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor se vor studia în capitolul 9.

**2. Împărțirea barei în regiuni și figurarea reacțiunilor.** O regiune a unei bare supuse la încovoiere se caracterizează prin aceea că, prezintă o aceeași lege de variație pentru sarcina de încărcare și o aceeași lege de variație pentru aria secțiunii transversale. Ca urmare, împărțirea barei în regiuni va ține seama de considerentele exprimate mai sus.

Pe fiecare regiune în parte se face câte o secțiune care se cotează cu  $x_i$  față de un punct a cărei poziție este strict determinată. Este de preferat ca acel punct să fie considerat chiar la una din marginile regiunii respective. În acest fel, pentru variabila  $x_i$  vom avea:  $x_i \in [0, l_i]$ , în care  $l_i$  reprezintă lungimea regiunii respective.

**3. Eforturile din fiecare secțiune în parte se determină pe baza metodei secțiunilor:**

- *forța tăietoare într-o secțiune a unei bare, este egală cu suma algebrică a tuturor forțelor tăietoare începând din capătul din stânga sau din capătul din dreapta al barei până în secțiunea considerată;*

- *momentul încovoiitor într-o secțiune a unei bare, este egal cu suma algebrică a tuturor momentelor încovoiitoare începând din capătul din stânga sau din capătul din dreapta al barei până în secțiunea considerată.*

Relativ la o secțiune a unei bare, în mod convențional, eforturile tăietoare și a celor încovoiitoare sunt considerate pozitive în cazul în care au sensul din figura 7.14.

Pe baza expresiilor obținute pentru forțele tăietoare și momentele încovoiitoare secționale, se trasează diagramele de eforturi respective pe fiecare regiune în parte. Tot în mod convențional, la solicitarea de încovoiere diagrama momentului încovoiitor se trasează cu partea



pozitivă în sensul axei  $y$  pozitive care este luată în jos. Explicația acestui mod de trasare constă în faptul că, alura diagramei de momente astfel trasată, sugerează modul în care se deformează bara și poate deveni un criteriu de verificare empirică a acestei diagrame.

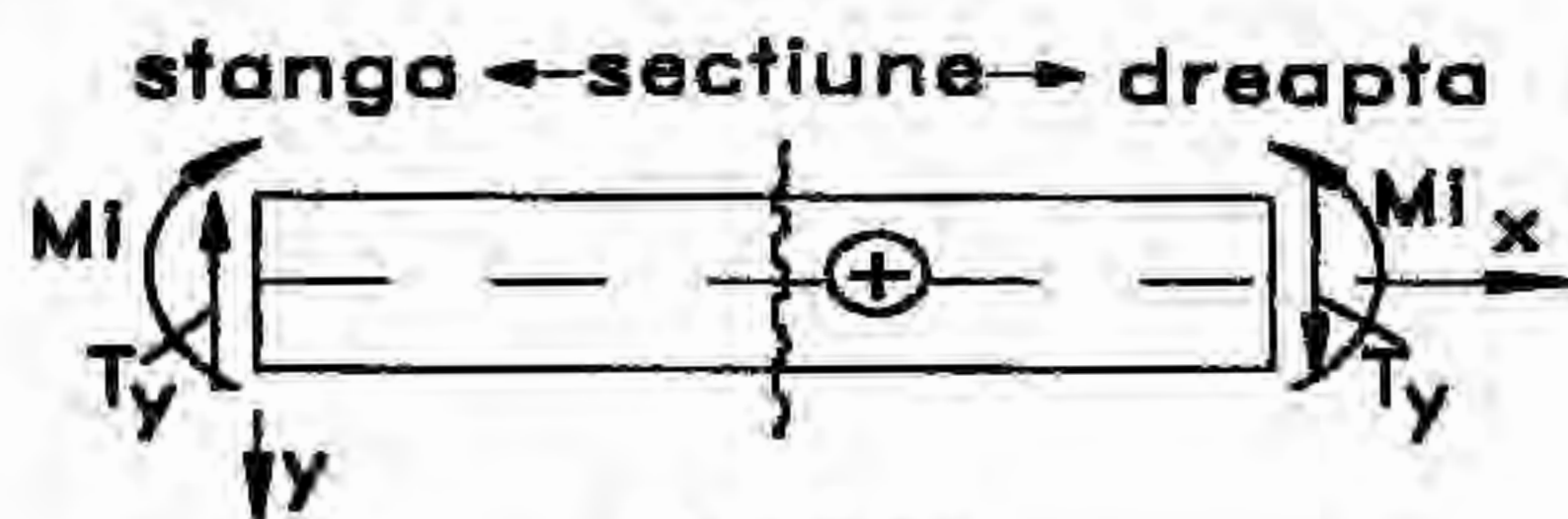


Fig. 7.14

#### 4. Verificarea diagramelor de eforturi

Pentru verificarea corectitudinii trasării diagramelor de forțe tăietoare și momente încovoietoare trebuie să se țină seama de următoarele aspecte:

a)- dacă gradul funcției polinomiale ce exprimă încărcarea  $q(x)$  a barei este  $n$ , atunci gradul funcției polinomiale pentru forța tăietoare este  $(n+1)$  iar pentru momentul încovoiitor  $(n+2)$ . Pe o regiune neîncărcată a unei bare, forța tăietoare ca efort este constantă iar momentul încovoiitor ca efort are variație liniară;

b)- acolo unde pe bară există o forță tăietoare concentrată, în diagrama eforturilor tăietoare trebuie să existe un salt, egal în valoare absolută cu valoarea forței concentrate respective;

c)- acolo unde pe bară există un moment încovoiitor concentrat, în diagrama eforturilor încovoiitoare trebuie să existe un salt, egal în valoare absolută cu valoarea momentului încovoiitor respectiv;

Având în vedere punctele b) și c), trebuie să se verifice în cele două diagrame, să nu existe salturi dacă pe bară nu există sarcinile exterioare concentrate respective;

d)- dacă se parcurge bara de la stânga la dreapta, trebuie să fie îndeplinite condițiile:

- $T(x) > 0 \Rightarrow M(x)$  strict crescător;
- $T(x) < 0 \Rightarrow M(x)$  strict descrescător;

e)- atunci când diagrama forței tăietoare trece prin zero, momentul încovoiitor prezintă un punct de extrem.



## Aplicații

**A.7.1.** Să se traseze diagramele de eforturi și să se dimensioneze secțiunea transversală pentru bara din figura 7.15. Se cunosc:  $F = 10 \text{ kN}$ ,  $l = 0,4 \text{ m}$ ,  $\sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ .

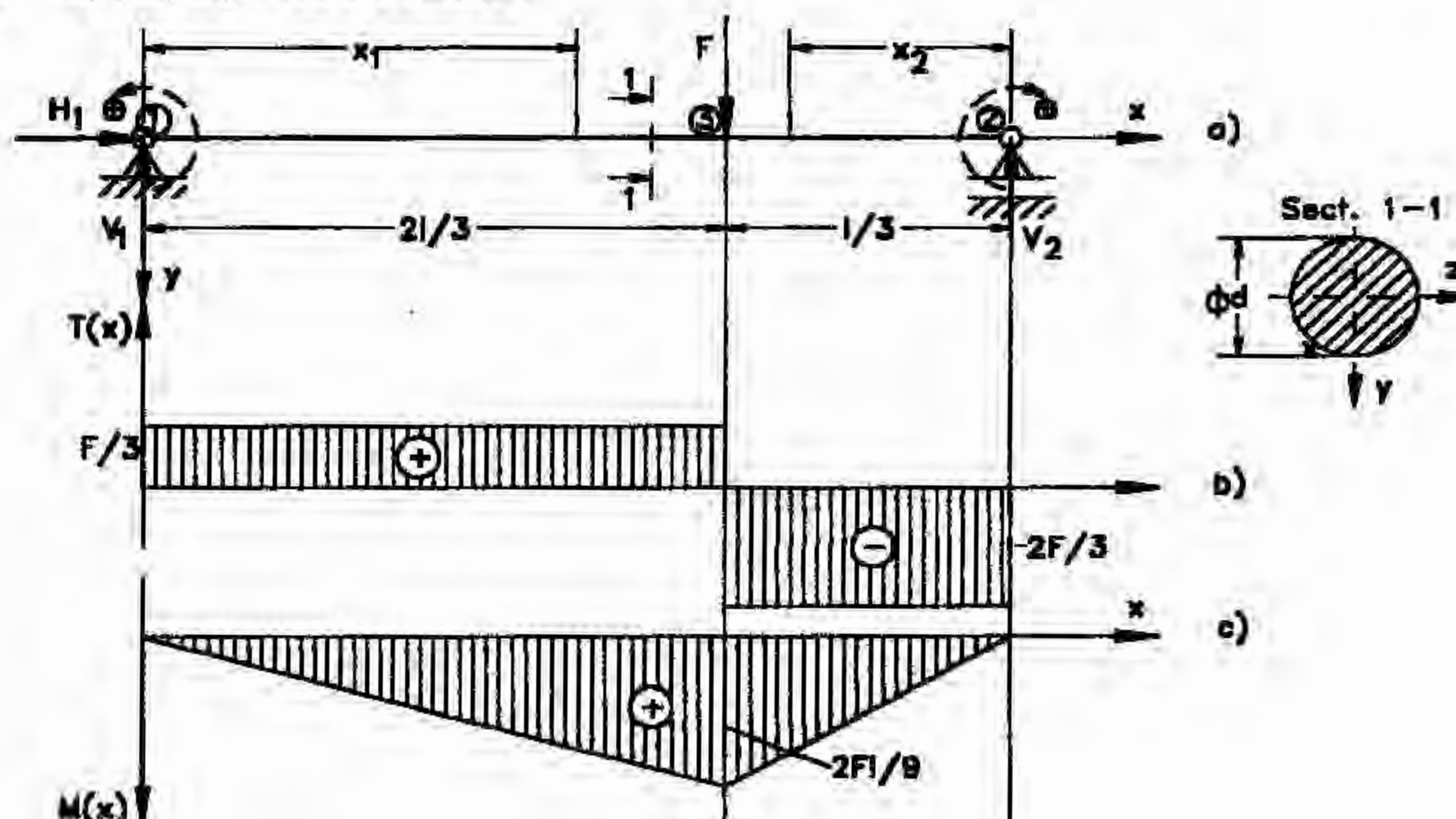


Fig. 7.15

Etapele de rezolvare a problemei propuse sunt descrise în cele ce urmează.

1. Bara este așezată pe două reazeme: reazemul 1 este articulat și ca urmare introduce două forțe de reacțiune iar reazemul 2 este simplu și introduce o singură forță de reacțiune, figura 7.15. Ecuațiile de echilibru static sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ F - V_1 - V_2 = 0 \\ V_1 \cdot l - \frac{Fl}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = \frac{F}{3} \\ V_2 = \frac{2F}{3} \end{cases} \quad (7.14)$$

Se observă că axa  $z$  s-a ales să treacă prin punctul 2. Se recomandă să fie figurată cu un simbol, de forma celui din punctul 2, rotirea produsă de primul moment luat în considerare ( $V_1 l$ ) ca fiind



pozitiv. Astfel, semnele tuturor momentelor următoare din suma de momente respectivă, vor fi date de rotirea pe care o vor produce barei față de punctul 2.

Pentru verificarea corectitudinii determinării reacțiunilor se utilizează relația:

$$\sum M_{z(1)} = 0 \Rightarrow V_2 \cdot l - \frac{2Fl}{3} = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{2F}{3}$$

Se atrage atenția că această din urmă relație se scrie *doar pentru verificare*. Evident că această relație poate înlocui oricare din relațiile a doua sau treia din sistemul (7.14) urmând ca relația înlocuită să fie folosită pentru verificare.

2. Așa cum se observă, bara este formată din două regiuni delimitate de acțiunea forței  $F$ . Pe fiecare din cele două regiuni s-au considerat secțiunile  $x_1$  și  $x_2$ . Se recomandă ca atunci când o regiune este mai aproape de unul din capetele barei, secțiunea de pe acea regiune să se raporteze la punctele apropiate aceluși capăt iar dacă este ultima regiune, să se raporteze chiar la acel capăt. Această raportare va conduce la relații de calcul mai simple, rezultatele rămânând aceleași.

3. Având în vedere metoda secțiunilor pentru determinarea eforturilor, enunțată anterior, și regula de semne stabilită, pe fiecare din cele două regiuni vom avea:

$$x_1 \in \left[0, \frac{2l}{3}\right] \begin{cases} T(x_1) = V_1 = \frac{F}{3} \\ M(x_1) = V_1 x_1 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = 0 \\ x_1 = \frac{2l}{3} \Rightarrow M(x_1) = \frac{2Fl}{9} \end{cases} \end{cases}$$

$$x_1 \in \left[0, \frac{l}{3}\right] \begin{cases} T(x_1) = -V_1 = -\frac{2F}{3} \\ M(x_1) = V_2 x_2 \begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow M(x_2) = 0 \\ x_{2l} = \frac{l}{3} \Rightarrow M(x_2) = \frac{2Fl}{9} \end{cases} \end{cases}$$

Diagramele de eforturi sunt trasate pe baza acestor expresii în figura 7.15, b și c.

4. Se constată că sunt verificate salturile corespunzătoare forțelor tăietoare concentrate ce acționează pe bară:



- în punctul 1 saltul este de  $F/3 (=V_1)$ ;
- în punctul 3 saltul este de  $F (=F)$ ;
- în punctul 2 saltul este de  $2F/3 (=V_2)$ .

De asemenea, nu există nici un alt salt în diagrama de forțe tăietoare.

Diagrama de momente încovoietoare nu prezintă salturi întrucât nu avem momente concentrate pe bară. Se mai constată următoarele:

- pe regiunea 1-3,  $T > 0$  și  $M$  este strict crescător;
- pe regiunea 3-2  $T < 0$  și  $M$  este strict descrescător.

5. Dimensionarea se face din condiția de rezistență utilizând relația lui Navier:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2Fl d}{\pi d^4} \leq \sigma_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{64Fl}{9\pi\sigma_a}} = 39,22 \text{ mm}$$

Se va adopta valoarea întreagă imediat superioară, adică:  $d=40 \text{ mm}$ .

A.7.2. Să se traseze diagramele de eforturi și să se dimensioneze secțiunea transversală pentru bara din figura 7.16a. Se cunosc:  $q=20 \text{ N/mm}$ ,  $l=0,12 \text{ m}$  și  $\sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2$ .

1. În punctul 1 fiind o încastrare, se introduc trei reacțiuni ca urmare a solicitării exterioare. Echilibrul sarcinilor exterioare, în care se includ și reacțiunile, se scrie astfel:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(3)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 - q \cdot 2l = 0 \\ V_1 \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l - M_1 - q \cdot l^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = 2ql \\ M_1 = ql^2 \end{cases}$$

Pentru verificare se va utiliza, de exemplu, relația:

$$\sum M_{z(1)} = 0 \Rightarrow ql^2 - q \cdot 2l \cdot l + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = ql^2$$

Așa cum s-a arătat în capitolul 1, sarcina distribuită se poate înlocui cu o sarcină concentrată (în anumite condiții), astfel:

- valoarea sarcinii concentrate  $Q$  este egală cu aria figurii geometrice determinată de legea de distribuție respectivă. Pentru sarcina uniform distribuită din figura 7.16a:  $Q = ql$ ;

- sarcina concentrată înlocuitoare  $Q$  trece prin centrul de greutate al figurii geometrice respective.



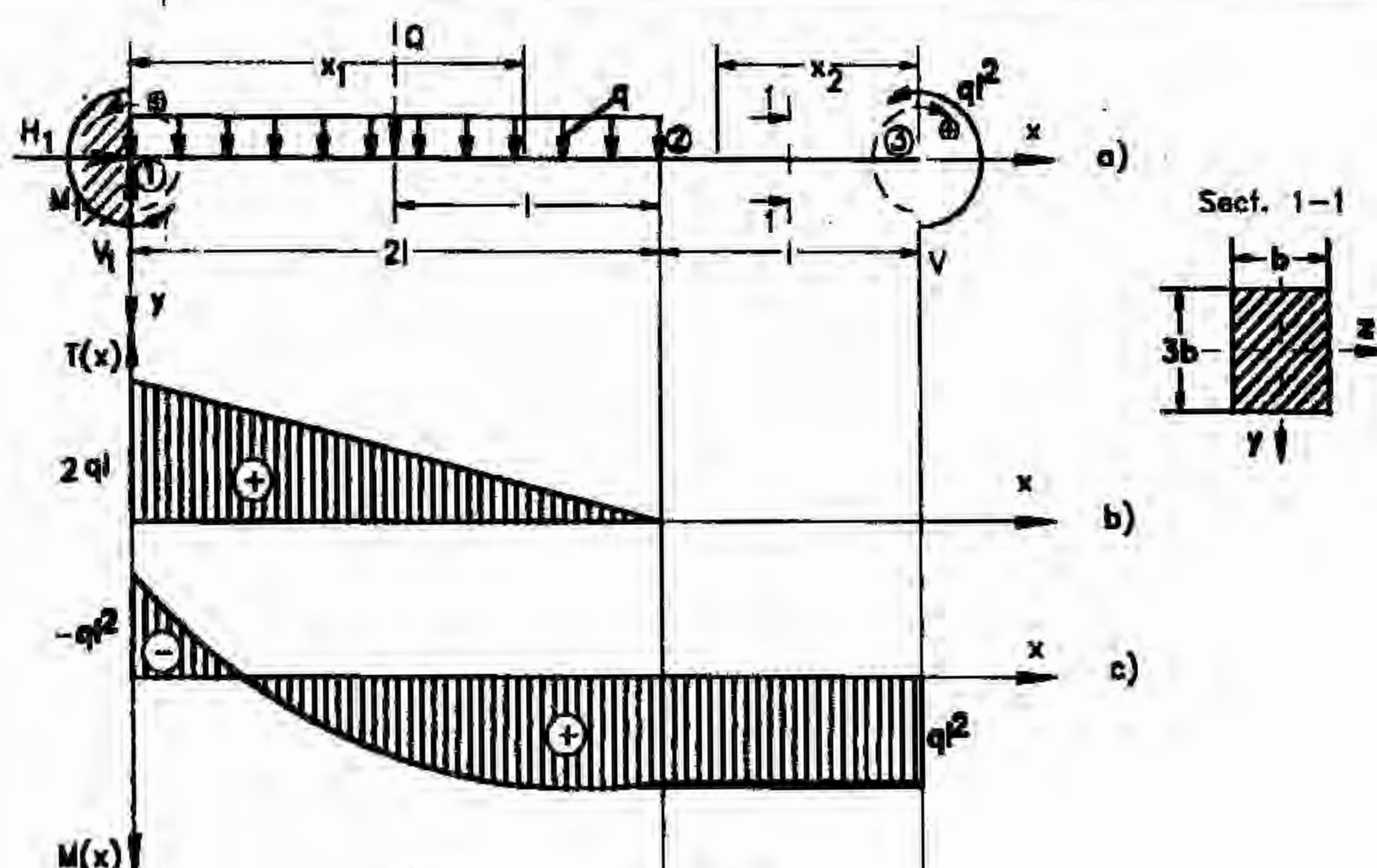


Fig. 7.16

2. Se constată că avem două regiuni delimitate de variația încărcării exterioare. Pe fiecare din cele două regiuni s-a făcut câte o secțiune,  $x_1$  și  $x_2$ .

3. Expresiile eforturilor tăietoare și a celor încovoietoare, în secțiunile respective, sunt:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} T(x_1) &= V_1 - qx_1 = 2ql - qx_1 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow T(x_1) = 2ql \\ x_1 = 2l \Rightarrow T(x_1) = 0 \end{cases} \\ M(x_1) &= V_1 x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} - ql^2 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = -ql^2 \\ x_1 = 2l \Rightarrow M(x_1) = ql^2 \end{cases} \\ M'(x_1) &= 2ql - qx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2l \in [0, 2l]; \quad M(2l) = ql^2 \\ M''(x_1) &= -q < 0 \Rightarrow \text{ca punctul } \begin{cases} x_1 = 2l \\ M(2l) = ql^2 \end{cases} \text{ este punct de max în} \end{aligned} \right. \\
 & x_1 \in [0, 2l] \\
 & \left\{ \begin{aligned} T(x_2) &= 0 \\ M(x_2) &= ql^2 \end{aligned} \right. \\
 & x_2 \in [0, l]
 \end{aligned}$$

Diagramele de eforturi sunt trasate pe baza expresiilor anterioare în figura 7.16 b și c.



4. Se constată că avem un salt în diagrama de forțe tăietoare în dreptul punctului 1. Valoarea saltului respectiv este egală cu valoarea forței  $V_1$  ce acționează în acel punct. În diagrama de momente sunt două salturi corespunzătoare momentelor concentrate  $M_1$  și  $ql^2$  aflate pe bară. În cele două diagrame nu există nici un alt salt în afară de cele prezentate și care sunt corespunzătoare eforturilor concentrate exterioare. Se mai constată următoarele:

- pe regiunea 1-2,  $T > 0$ , momentul este strict crescător;
- pe regiunea 2-3,  $T < 0$ , momentul este strict descrescător;
- în punctul 2,  $T = 0$ ,  $M$  prezintă punct de extrem.

5. Valoarea momentului încovoiitor maxim de pe diagrama de momente este:  $M_{\max} = ql^2$  și ca urmare vom avea:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{12ql^2 \frac{3b}{2}}{b \left( \frac{3b}{2} \right)^3} \leq \sigma_s \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{16ql^2}{3\sigma_s}} = 22,22 \text{ mm}$$

Valoarea obținută se rotunjește la:  $b = 23 \text{ mm}$ .

4.7.3. Se cere să se dimensioneze bara din figura 7.17a, ținând cont atât de tensiunile normale date de relația lui Navier cât și de tensiunile tangențiale date de relația lui Juravski. Se cunosc:  $q = 18 \text{ N/mm}$ ,  $l = 0,2 \text{ m}$ ,  $\sigma_s = 150 \text{ N/mm}^2$  și  $\tau_s = 40 \text{ N/mm}^2$ .

Etapile de rezolvare sunt descrise în cele ce urmează.

1. Reacțiunile introduse de reazeme sunt  $V_1$ ,  $V_2$  și  $H_2$ , care se determină din ecuațiile de echilibru:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(3)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - \frac{2q3l}{2} = 0 \\ V_1 \cdot 5l - \frac{2q \cdot 3l}{2} \cdot 3l - q \cdot l^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = 2ql \\ V_2 = ql \end{cases}$$

Pentru verificare se va utiliza, de exemplu, relația:

$$\sum M_{z(1)} = 0 \Rightarrow V_2 5l + ql^2 - \frac{2q3l}{2} 2l = 0 \Rightarrow V_2 = ql$$

2. Avem trei regiuni pe bară delimitate de variația sarcinilor exterioare. Secțiunile de pe cele trei regiuni sunt  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$ .



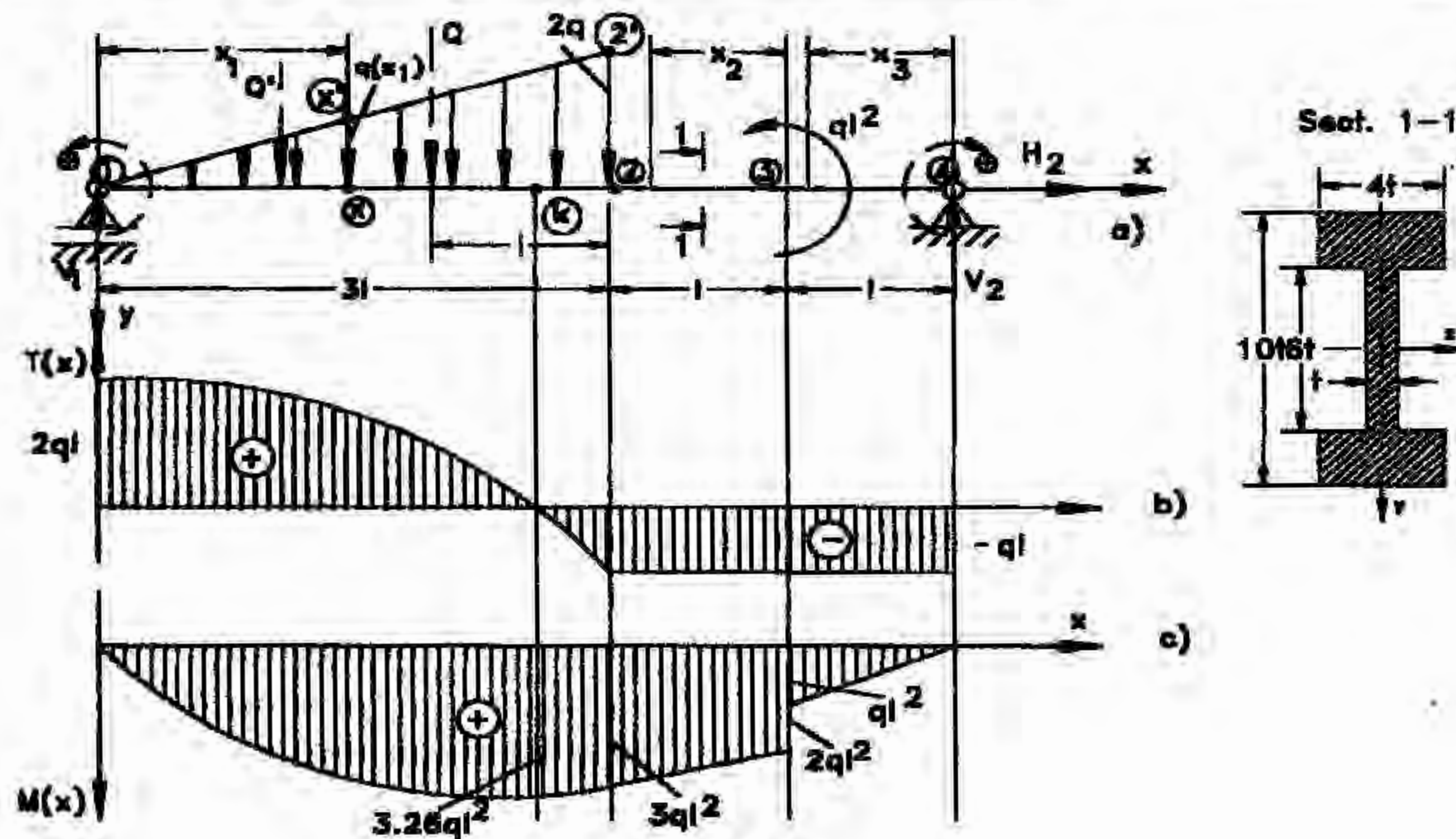


Fig. 7.17

3. Expresiile eforturilor în cele trei secțiuni sunt date în continuare.

Pentru  $x_1 \in [0, 3l]$  vom avea:

$$T(x_1) = V_1 - \frac{q(x_1) \cdot x_1}{2} = 2ql - \frac{qx_1^2}{3l} \text{ var iatie polinomiala } \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow T(x_1) = 2ql \\ x_1 = 3l \Rightarrow T(x_1) = -ql \end{cases}$$

$$\text{unde } q(x_1) \text{ se deduce din asemanarea: } \Delta 122' \sim \Delta 1xx': \frac{q(x_1)}{2q} = \frac{x_1}{3l} \Rightarrow q(x_1) = \frac{2q \cdot x_1}{3l}$$

$$T'(x_1) = -\frac{2qx_1}{3l} = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$

$$T''(x_1) = -\frac{2q}{3l} < 0 \text{ deci punctul } \begin{cases} x_1 = 0 \\ T(0) = 2ql \end{cases} \text{ este punct de max im}$$

$$M(x_1) = V_1 x_1 - \frac{q(x_1) \cdot x_1 \cdot x_1}{3} = 2qlx_1 - \frac{qx_1^3}{9l} \text{ var iatie polinomiala } \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = 0 \\ x_1 = 3l \Rightarrow M(x_1) = 6ql^2 - 3ql^2 = 3ql^2 \end{cases}$$

$$M'(x_1) = 2ql - \frac{qx_1^2}{3l} = 0 \Rightarrow x_1 = \pm l\sqrt{6}; x_1 = l\sqrt{6} \in [0, 3l]; M(l\sqrt{6}) = 3,26ql^2$$

$$M''(x_1) = -\frac{2qx_1}{3l} < 0 \forall x_1 \in [0, 3l] \Rightarrow \text{ca punctul } \begin{cases} x_1 = l\sqrt{6} \\ M(l\sqrt{6}) = 3,26ql^2 \end{cases} \text{ este punct de max im}$$



Pentru  $x_2 \in [0, l]$  vom avea:

$$\begin{cases} T(x_2) = -V_2 = -ql = \text{ct.} \\ M(x_2) = V_2(l + x_2) + ql^2 = 2ql^2 + qlx_2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow M(x_2) = 2ql^2 \\ x_2 = l \Rightarrow M(x_2) = 3ql^2 \end{cases}$$

Pentru  $x_3 \in [0, l]$  vom avea:

$$\begin{cases} T(x_3) = -V_2 = -ql = \text{ct.} \\ M(x_3) = V_2x_3 = qlx_3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0 \Rightarrow M(x_3) = 0 \\ x_3 = l \Rightarrow M(x_3) = ql^2 \end{cases}$$

Diagramele de eforturi sunt trasate pe baza acestor expresii în figura 7.17, b și c.

4. Salturile care apar în diagrame sunt următoarele:

- în diagrama de forțe tăietoare apar salturile:
  - $2ql$  în punctul 1 corespunzător forței tăietoare concentrate  $V_1$ ;
  - $ql$  în punctul 4 corespunzător forței tăietoare concentrate  $V_2$ ;
- în diagrama de momente se distinge un singur salt, în punctul 3, cu valoarea  $2ql^2 - ql^2 = ql^2$  și este corespunzător momentului concentrat de pe bară.

În cele două diagrame nu există nici un alt salt care să nu corespundă cu eforturile concentrate de pe bară.

Se mai constată următoarele:

- pe regiunea 1-k,  $T > 0$ ,  $M$  strict crescător;
- pe regiunea k-4,  $T < 0$ ,  $M$  strict descrescător;
- în punctul k,  $T = 0$  iar momentul prezintă un punct de extrem.

5. Așa cum cere problema, dimensionarea se va face impunând pe rând două condiții:

a)- tensiunea normală maximă din bară să nu depășească tensiunea admisibilă;

b)- tensiunea tangențială maximă din bară să nu depășească tensiunea tangențială admisibilă.

Se face mențiunea că secțiunea barei a fost prezentată și în figura 7.12a iar calculele referitoare la această secțiune s-au efectuat în paragraful

7.6. S-au determinat:  $I_z = 279,33t^4$  și  $\tau_{\max} = 0,13 \frac{T_{\max}}{t^2}$ .



Momentul maxim și forța tăietoare maximă se iau din diagramele de eforturi respective și sunt:  $M_{\max}=3,26ql^2$ ,  $T_{\max}=2ql$ . Cu ajutorul acestor date, vom avea:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{3,26ql^2 \cdot 5t_1}{279,33t_1^4} \leq \sigma_a \Rightarrow t_1 \geq \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 3,26 \cdot 18 \cdot 200^2}{279,33 \cdot 150}} = 5,87 \text{ mm}$$

$$\tau_{\max} = 0,13 \frac{T_{\max}}{t_2^2} = 0,13 \frac{2ql}{t_2^2} \leq \tau_a \Rightarrow t_2 \geq \sqrt{\frac{0,13 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 200}{40}} = 4,83 \text{ mm}$$

Evident că, dintre aceste două dimensiuni se va adopta cea cu valoarea mai mare și se va rotunji la:  $t=6 \text{ mm}$ .

A.7.4. Se cere să se dimensioneze bara din figura 7.17a dacă aceasta ar avea secțiunea prezentată în figura 7.18. Se specifică faptul că materialul din care este confecționată bara se comportă diferit la tracțiune față de compresiune:  $\sigma_{at}=120 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{ac}=180 \text{ N/mm}^2$ .

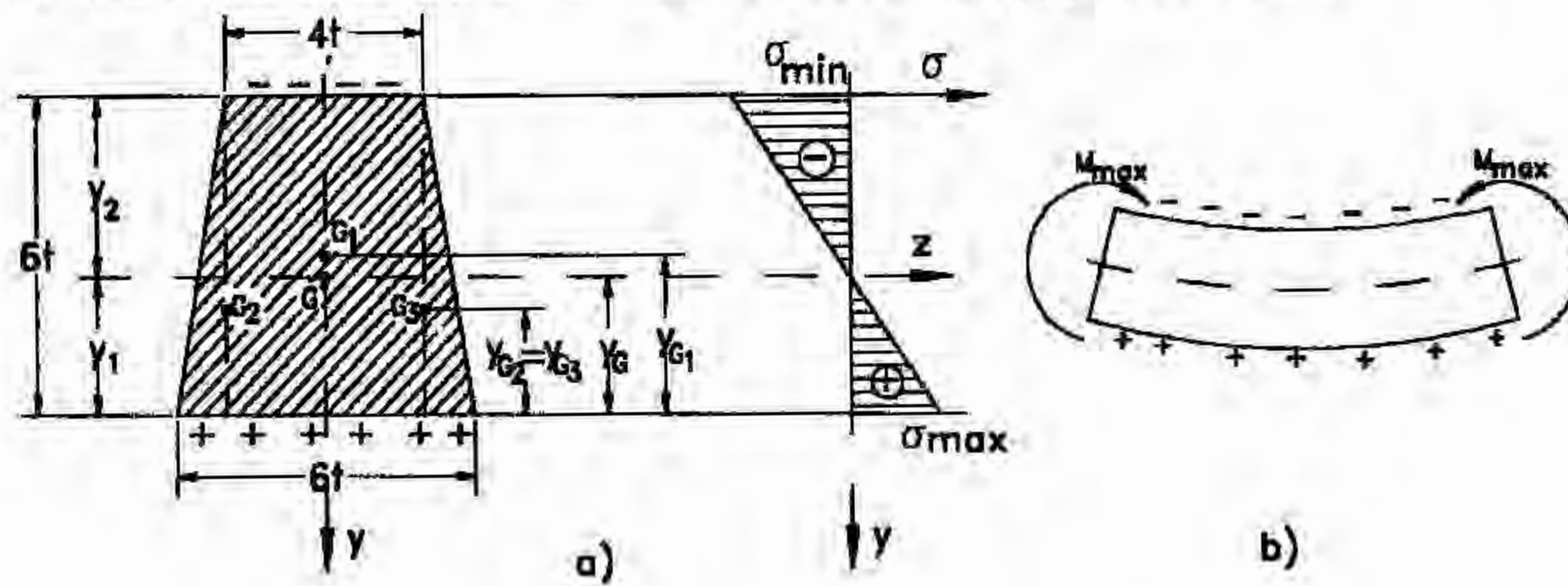


Fig. 7.18

*Rezolvare.* Momentul încovoiitor maxim fiind pozitiv ( $3,26ql^2$ ), creează întindere fibrelor inferioare și compresiune celor superioare, figura 7.18b.

Poziția centrului de greutate al secțiunii transversale considerate va fi:

$$y_G = \frac{\sum A_i y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{24t^2 \cdot 3t + 2 \cdot 3t^2 \cdot 2y}{30t^2} = 2,8t$$



Ca urmare vom avea:  $y_1 = y_{c1} = 2,8t$  și  $y_2 = 6t - y_{c1} = 3,2t$

Momentul de inerție axial față de axa  $z$  va fi:

$$I_z = \sum_i (I_{z_i} + A_i d_i^2) = \frac{4t(6t)^3}{12} + 24t^2(0,2t)^2 + 2 \cdot \left[ \frac{t(6t)^3}{36} + 6t^2(0,8t)^2 \right] = 92,64t^4$$

Tensiunile minimă și maximă se stabilesc în fibrele extreme ale secțiunii  $k$  (figura 7.17) unde se înregistrează momentul maxim:

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_{\max} y_2}{I_z} = -\frac{3,26ql^2 3,2t_1}{92,64t_1^4} = -0,112 \frac{ql^2}{t_1^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_1}{I_z} = \frac{3,26ql^2 2,8t_2}{92,64t_2^4} = 0,098 \frac{ql^2}{t_2^3}$$

Având în vedere faptul că materialul rezistă diferit la compresiune față de tracțiune, condițiile ce trebuie impuse vor fi:

$$|\sigma_{\min}| \leq \sigma_{ac} \text{ și } \sigma_{\max} \leq \sigma_{at}$$

și va rezulta:

$$t_1 \geq \sqrt[3]{\frac{3,26 \cdot 18 \cdot 150^2 \cdot 3,2}{92,64 \cdot 180}} = 6,32 \text{ mm}; \quad t_2 \geq \sqrt[3]{\frac{3,26 \cdot 18 \cdot 150^2 \cdot 2,8}{92,64 \cdot 120}} = 6,92 \text{ mm}$$

Se constată că, deși tensiunea mai mare în valoare absolută este atinsă în fibrele superioare, pericolul de distrugere este mai mare în fibrele inferioare datorită comportării mai slabe a materialului la tracțiune. Oricum, se adoptă valoarea întreagă imediat superioară valorii obținute din calcul:  $t=7 \text{ mm}$ .

### 7.8. Tensiuni principale la grinzile drepte solicate la încovoiere

Așa cum s-a văzut, în secțiunile transversale ale barelor drepte solicate la încovoiere simplă, acționează atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare. Acestea se dezvoltă ca urmare a tensiunilor normale date de relația lui Navier, respectiv a tensiunilor tangențiale date de relația lui Juravski. Astfel, într-un punct oarecare vom avea o stare plană de tensiune. Tensiunile principale în acest punct se calculează cu

relațiile:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



iar direcțiile acestora sunt date de:  $\operatorname{tg}(2\alpha_{1,2}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

Se consideră bara de secțiune dreptunghiulară din figura 7.19 supusă la încovoiere simplă.

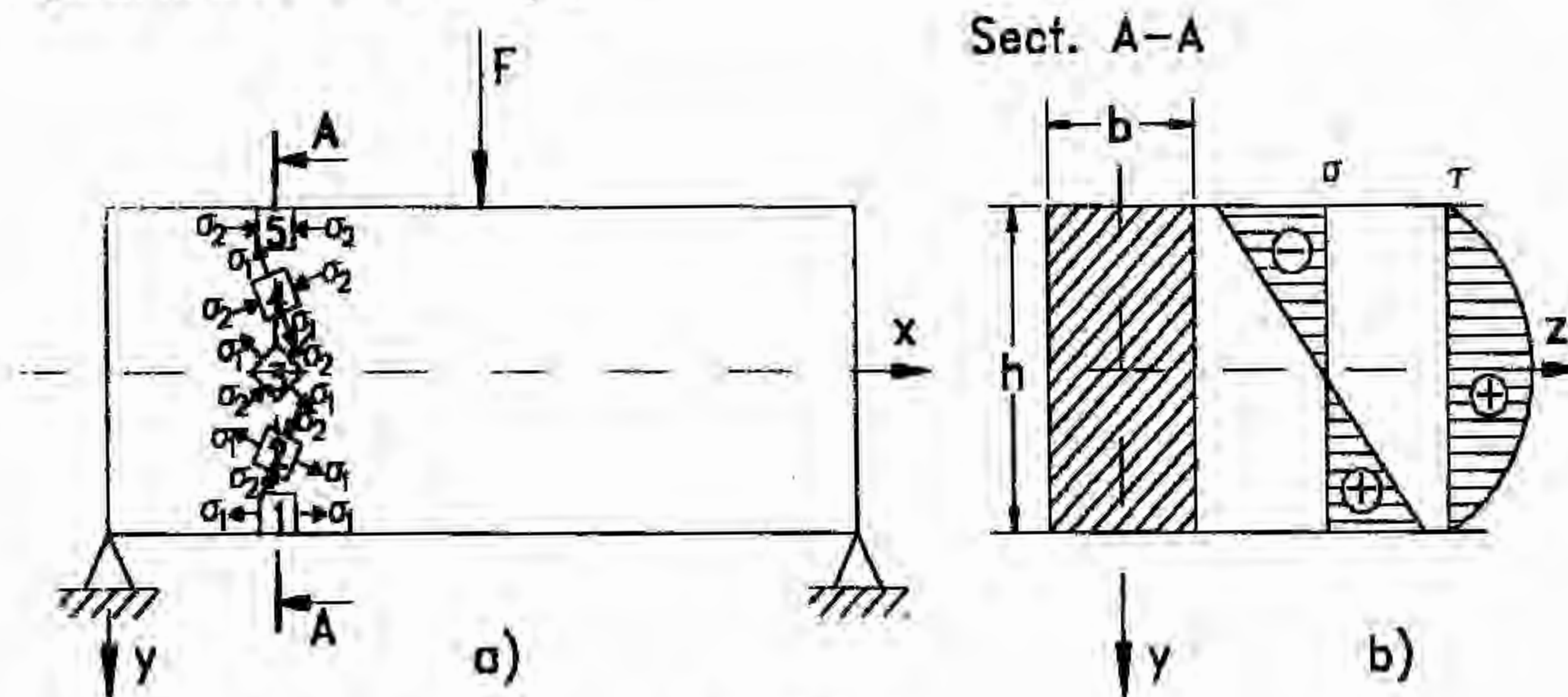


Fig. 7.19

În secțiunea transversală 1-1, variația tensiunilor normale și tangențiale este prezentată în figura 7.19b. Pe înălțimea acestei secțiuni se consideră punctele 1,2,3,4 și 5. În aceste puncte se vor determina tensiunile principale și direcțiile acestora.

În *punctul 1* tensiunea normală este  $\sigma_{x1} = \frac{Mz}{W_z}$  și are valoare pozitivă. Tensiunea tangențială în *punctul 1* este egală cu zero. Tensiunile principale și direcțiile principale vor fi:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1}, \sigma_2 = 0, \alpha_1 = 0 \text{ (II cu axa } ox), \alpha_2 = 90^\circ \text{ (II cu axa } oy)$$

Pentru *punctul 2*, tensiunea dată de momentul încovoiător este  $\sigma_{x2} = \frac{Mz \cdot y_2}{I_z}$  și are valoare pozitivă. Tensiunea tangențială este dată de relația  $\tau_2 = \frac{TSz_2}{b \cdot I_z}$ . Pentru determinarea tensiunilor principale și a direcțiilor principale se construiește cercul lui Mohr, figura 7.20a



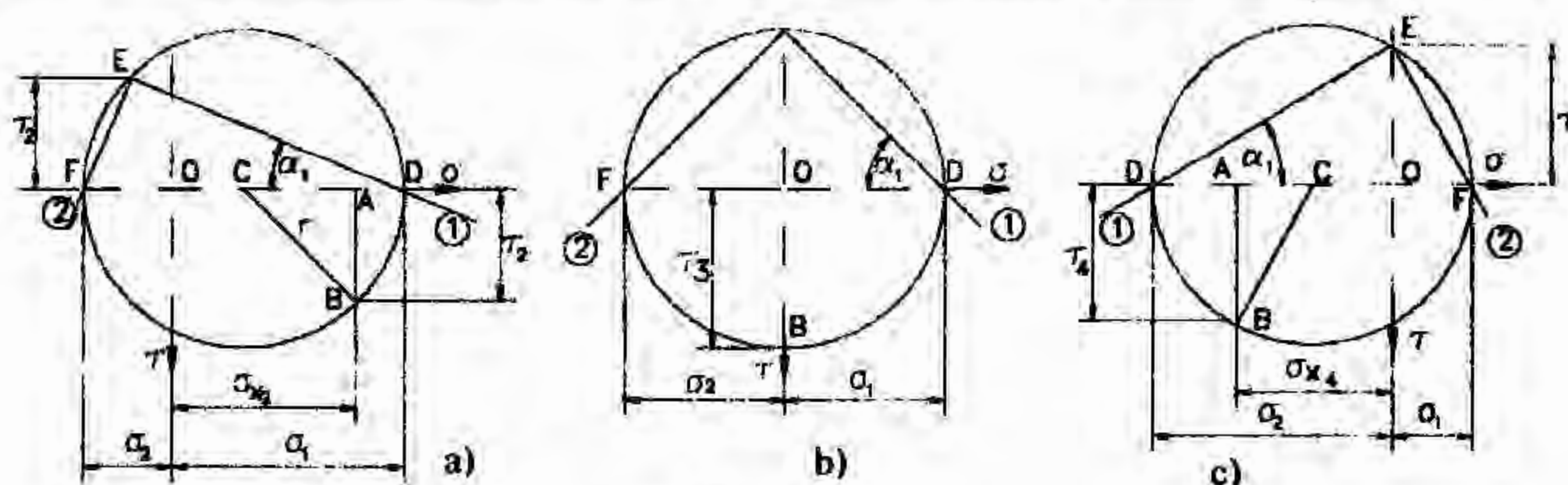


Fig. 7.20

Se constată că  $|\sigma_1| > |\sigma_2|$  și că  $\sigma_1$  are valoare pozitivă iar  $\sigma_2$  valoare negativă.

În *punctul 3* tensiunea normală este egală cu zero ( $\sigma_{x3}=0$ ) iar tensiunea tangențială este maximă  $\tau_3=\tau_{\max}$ . Cercul lui Mohr este prezentat în figura 7.20b de unde rezultă:  $\sigma_1=\tau_{\max}$  și  $\sigma_2=-\tau_{\max}$ . Direcțiile principale sunt orientate la unghiuri de  $45^\circ$  și  $135^\circ$  față de axa  $ox$ .

Pentru *punctul 4* valoarea tensiunii de încovoiere este

$$\sigma_{x4} = \frac{Mz \cdot y_4}{I_z} \text{ și este negativă iar tensiunea tangențială este}$$

$$\tau_4 = \frac{TSz_4}{b \cdot I_z}. \text{ Pentru determinarea tensiunilor principale se construiește}$$

cercul lui Mohr, figura 7.20c. Se observă că  $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ , și că  $\sigma_1$  este pozitivă iar  $\sigma_2$  este negativă.

În *punctul 5* tensiunea normală este  $\sigma_{x5} = \frac{Mz}{W_z}$  și este negativă iar tensiunea tangențială este egală cu zero. Ca urmare, tensiunile principale sunt:  $\sigma_2=\sigma_{x5}$ ,  $\sigma_1=0$  iar direcțiile principale:  $\alpha_2=0$  și  $\alpha_1=90^\circ$ .

Se observă că pe înălțimea secțiunii transversale tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  își schimbă direcția. Curbele care rămân tot timpul tangente la direcțiile principale se numesc *linii de solicitare maximă* sau *linii izostatice*, figura 7.21. Există două familii de linii izostatice: corespunzătoare tensiunilor  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ . Pentru tensiunile  $\sigma_1$  aceste curbe sunt tangente la fibrele întinse și fac un unghi de  $45^\circ$  cu fibra medie. Pentru tensiunile  $\sigma_2$  aceste curbe sunt perpendiculare pe fibrele întinse și fac de asemenea un unghi de  $45^\circ$  cu fibra medie.



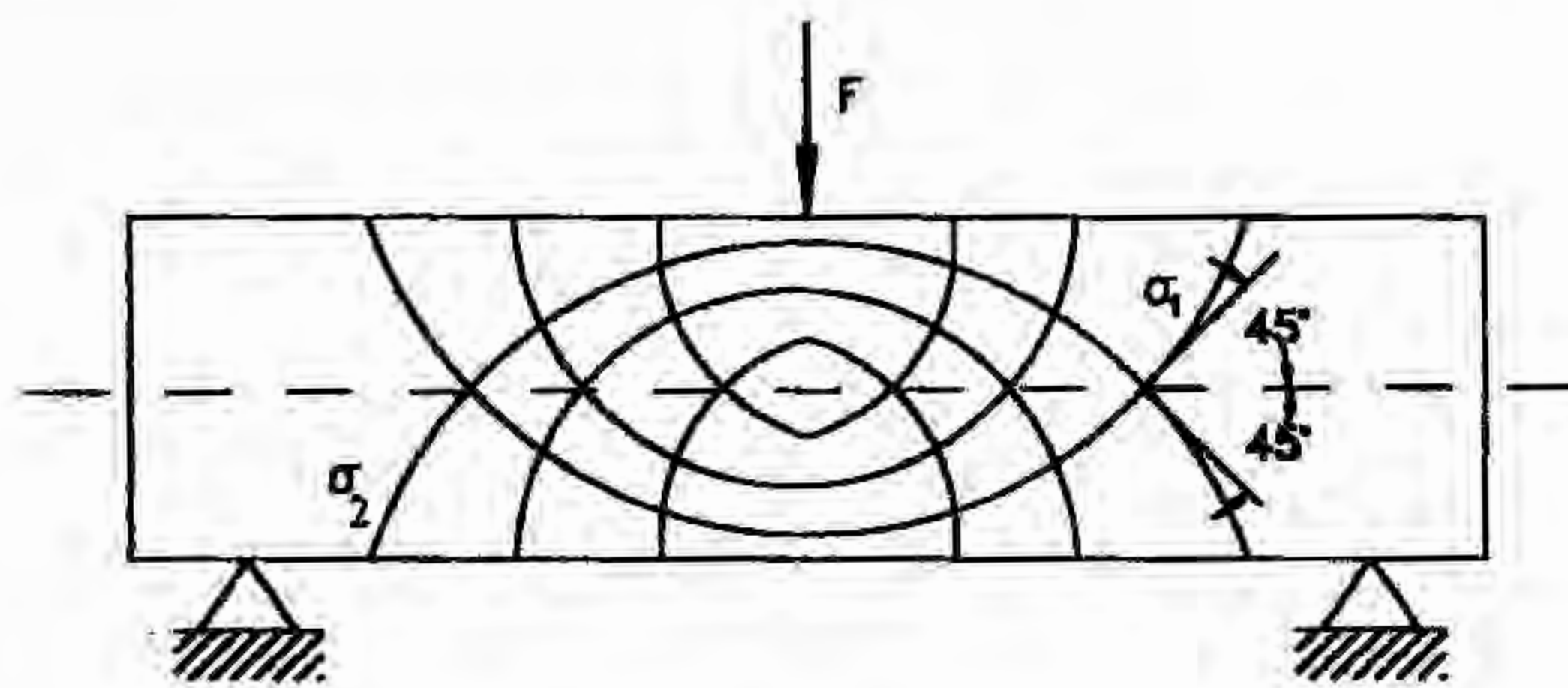


Fig. 7.21

De cele mai multe ori, calculul de rezistență la încovoiere se bazează doar pe tensiunile normale date de relația lui Navier. Sunt însă cazuri în care este necesar să se considere și tensiunea tangențială dată de relația lui Juravski.

Tensiunile tangențiale pot avea valori considerabile în cazul încovoierei grinzilor scurte. De asemenea, sunt materiale anizotrope, cum ar fi lemnul, care nu rezistă bine la solicitarea de forfecare longitudinală între fibre produsă de tensiunile tangențiale date de relația lui Juravski.

În cazul grinzilor slăbite pe secțiunea mediană unde tensiunile tangențiale sunt maxime, este necesar să se facă un calcul și la solicitarea de forfecare longitudinală.

### 7.9. Deplanarea secțiunii transversale sub acțiunea forței tăietoare

În calculul tensiunilor la solicitarea de încovoiere s-a admis ipoteza lui Bernoulli conform căreia secțiunile transversale rămân plane și perpendiculare pe axa barei și după solicitare. Totuși, datorită tensiunilor tangențiale apărute ca urmare a încovoierei simple, apar deplanări ale secțiunii transversale.

Fie o bară dreaptă, solicitată la încovoiere simplă, figura 7.22a. În secțiunea transversală 1-1 apare ca efort resultant, pe lângă momentul încovoiător, și o forță tăietoare  $T$ .



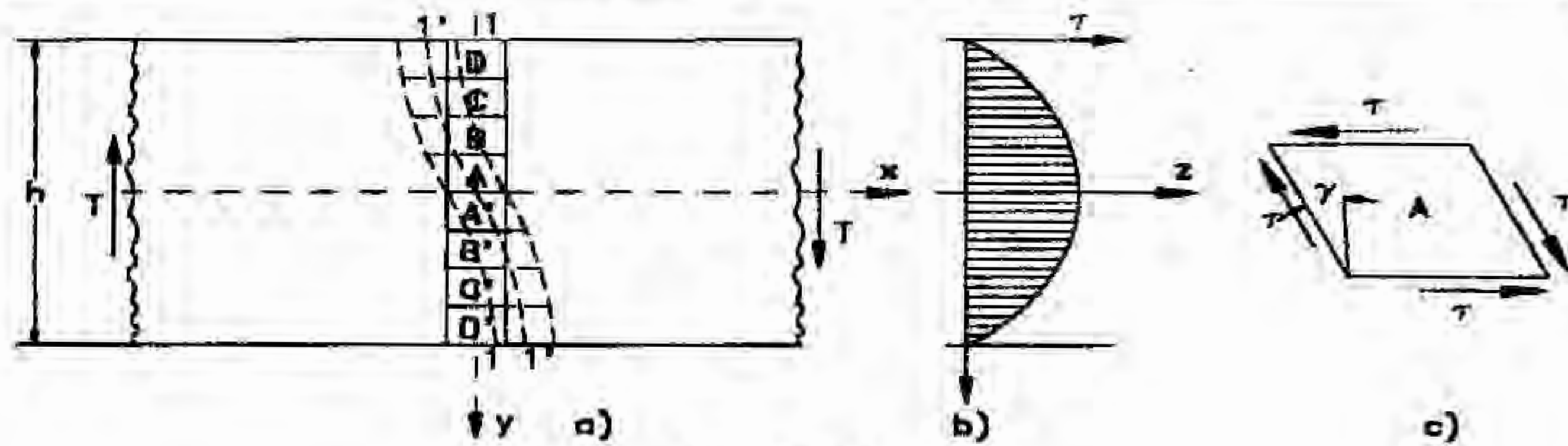


Fig. 7.22

Ca urmare, în elementele de suprafață ABCD și A'B'C'D' se vor introduce tensiuni tangențiale, figura 7.22c. De exemplu, dacă secțiunea 1-1 ar fi dreptunghiulară de lățime  $b$  și înălțime  $h$ , variația tensiunii tangențiale pe această secțiune ar fi:  $\tau(y) = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$ . Această variație este prezentată în figura 7.22b. Variația lunecărilor specifice pe înălțimea secțiunii transversale 1-1 este dată de relația:  $\gamma(y) = \frac{3T}{GA} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$ .

Elementul A va avea lunecarea cea mai mare. Lunecările scad pe măsură ce ne apropiem de fibra exterioară pentru care  $\gamma=0$ . Ca urmare, secțiunea 1-1 va căpăta o nouă poziție 1'-1' care nu mai este plană. Deformarea produsă de tensiunile tangențiale constă într-o deplanare a secțiunilor transversale. Chiar dacă apare această deplanare se permite folosirea relațiilor lui Navier și Juravski mai ales dacă este respectată condiția:  $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{4}$  în care  $l$  este lungimea barei iar  $h$  este înălțimea secțiunii transversale. Se constată de asemenea că, pe intervalul în care forța tăietoare este constantă, lungimea fibrelor rămâne aceeași, figura 7.23 și ca urmare tensiunea  $\sigma_x$  este cea dată de relația lui Navier.

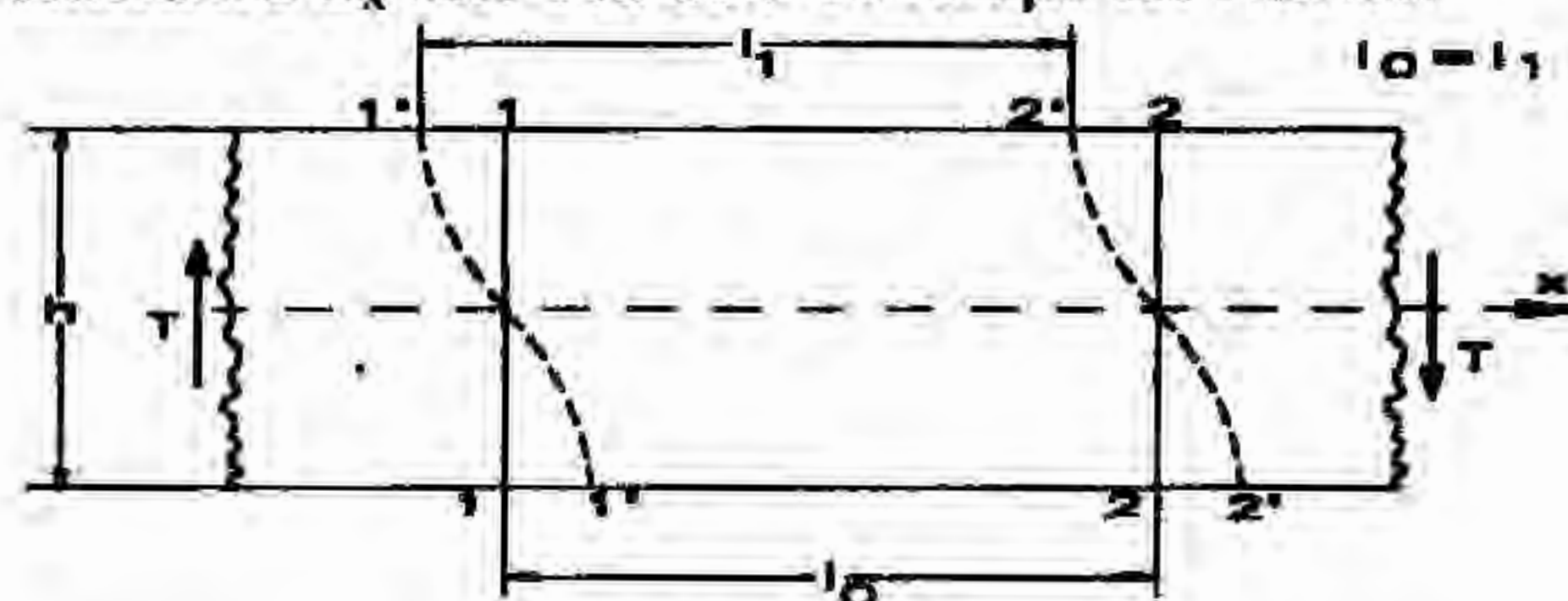


Fig. 7.23



### 7.10. Calculul la încovoiere a grinzilor compuse

Bărele supuse la încovoiere, alcătuite din mai multe componente cu o anumită configurație și solidarizate între ele se numesc *grinzi compuse*. Elementele de solidarizare împiedică alunecarea dintre componentele respective și asigură conlucrarea acestora.

Fie două grinzi identice, cu secțiuni dreptunghiulare, așezate una peste alta, figura 7.24a.

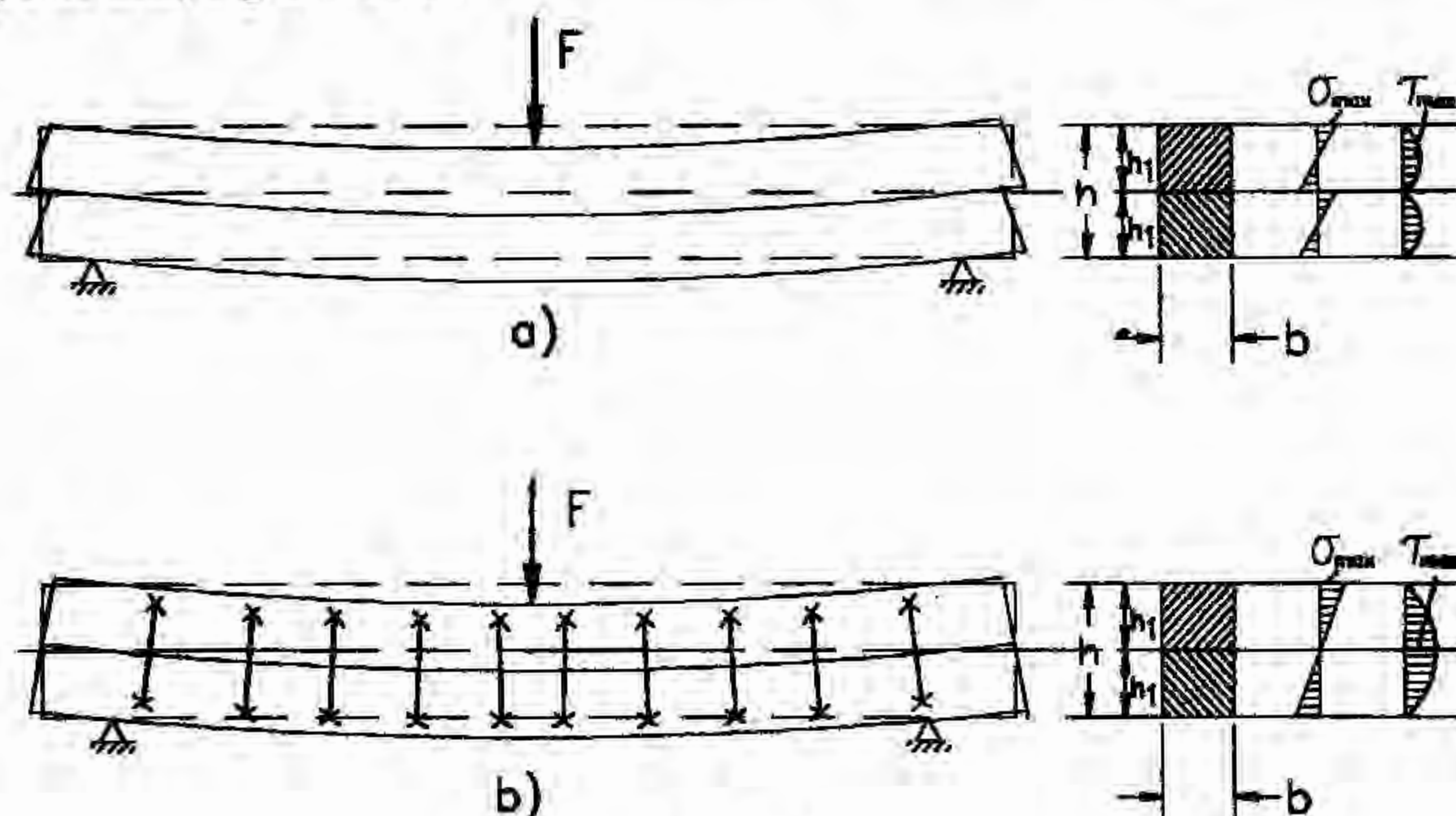


Fig. 7.24

Vom considera de asemenea alte două grinzi de aceeași mărime, solidarizate între ele, figura 7.24b. Cele două ansambluri sunt solicitate la încovoiere simplă.

În cazul grinzilor *nesolidarizate*, figura 7.24a, deformarea acestora se produce independent, cele două suprafețe aflate în contact alunecând liber una față de cealaltă (presupunând că forța de frecare este nulă). Această alunecare relativă se explică prin faptul că, fibrele din partea de jos ale grinzii superioare se întind iar fibrele din partea de sus ale grinzii inferioare se comprimă. Considerând că cele două grinzi se deformează în mod identic, momentul capabil pentru întreaga grindă reprezintă suma momentelor capabile ale grinzilor componente și este:

$$M^{\text{cap}} = 2\sigma_a W_z = 2\sigma_a \frac{bh_1^2}{6} = \sigma_a \frac{bh^2}{12}$$



În situația în care grinzile sunt *solidarizate*, figura 7.24b, lunecarea dintre acestea este împiedicată. În aceste condiții cele două grinzi se deformează ca și cum ar fi una singură. Momentul capabil al întregii

secțiuni este:

$$M^2_{cap} = \sigma_a Wz = \sigma_a \frac{bh^2}{6} = 2\sigma_a \frac{bh^2}{12}$$

Se constată că  $M^2_{cap}/M^1_{cap}=2$  ceea ce arată că grinda solidarizată poate prelua un moment încovoiător de două ori mai mare decât grinda nesolidarizată.

Solidarizarea grinzilor este avantajoasă cu condiția ca tensiunea tangențială maximă, care este mai mare în cazul solidarizării, să nu ducă la distrugerea elementelor de solidarizare.

Pentru grinzile compuse supuse la încovoiere simplă, în funcție de mărimea momentului încovoiător, se pot adopta următoarele soluții:

- pentru momente încovoiătoare relativ mici se adoptă profile laminate;
- pentru momente încovoiătoare medii se pot utiliza grinzi compuse formate fie din platbenzi sudate sau nituite fie din profile laminate așezate în mod convenabil;
- pentru momente încovoiătoare mari se utilizează grinzi cu zăbrele în care elementele componente pot avea sau nu o axă de simetrie a secțiunii transversale.

Pentru a compara deplasările celor două grinzi se face un calcul al curburilor în cele două cazuri. Astfel, în cazul grinzilor nesolidarizate cele două grinzi se vor curba la fel. Presupunând că momentul încovoiător  $M$  se distribuie în mod egal celor două grinzi, vom avea pentru mărimea curburii:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{EI_1} = 4 \cdot 12 \cdot \frac{M}{Ebh^3}$$

Grinzile solidarizate se vor deforma ca o singură grindă:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{M}{EI_2} = 12 \cdot \frac{M}{Ebh^3}$$

Se constată că, grinda ale cărei componente au fost solidarizate se deformează de 4 ori mai puțin decât grinzile nesolidarizate.

Pentru calculul de rezistență al grinzilor compuse trebuie să se aibe în vedere două aspecte:



- dimensionarea secțiunii transversale la tensiunile normale maxime astfel încât grinda să reziste la momentul încovoiător maxim;
- dimensionarea elementelor de îmbinare astfel încât acestea să reziste la tendința de lunecare longitudinală.

Această din urmă dimensionare trebuie să țină seama de mărimea *forței de alunecare* pe lungimea pe care are loc solidarizarea. Calculul forței de alunecare se prezintă în cele ce urmează.

Fie un tronson de bară de lungime  $l$  ce constituie o regiune pe care forța tăietoare are aceeași lege de distribuție și de asemenea și momentul încovoiător are o aceeași lege de distribuție, figura 7.25.

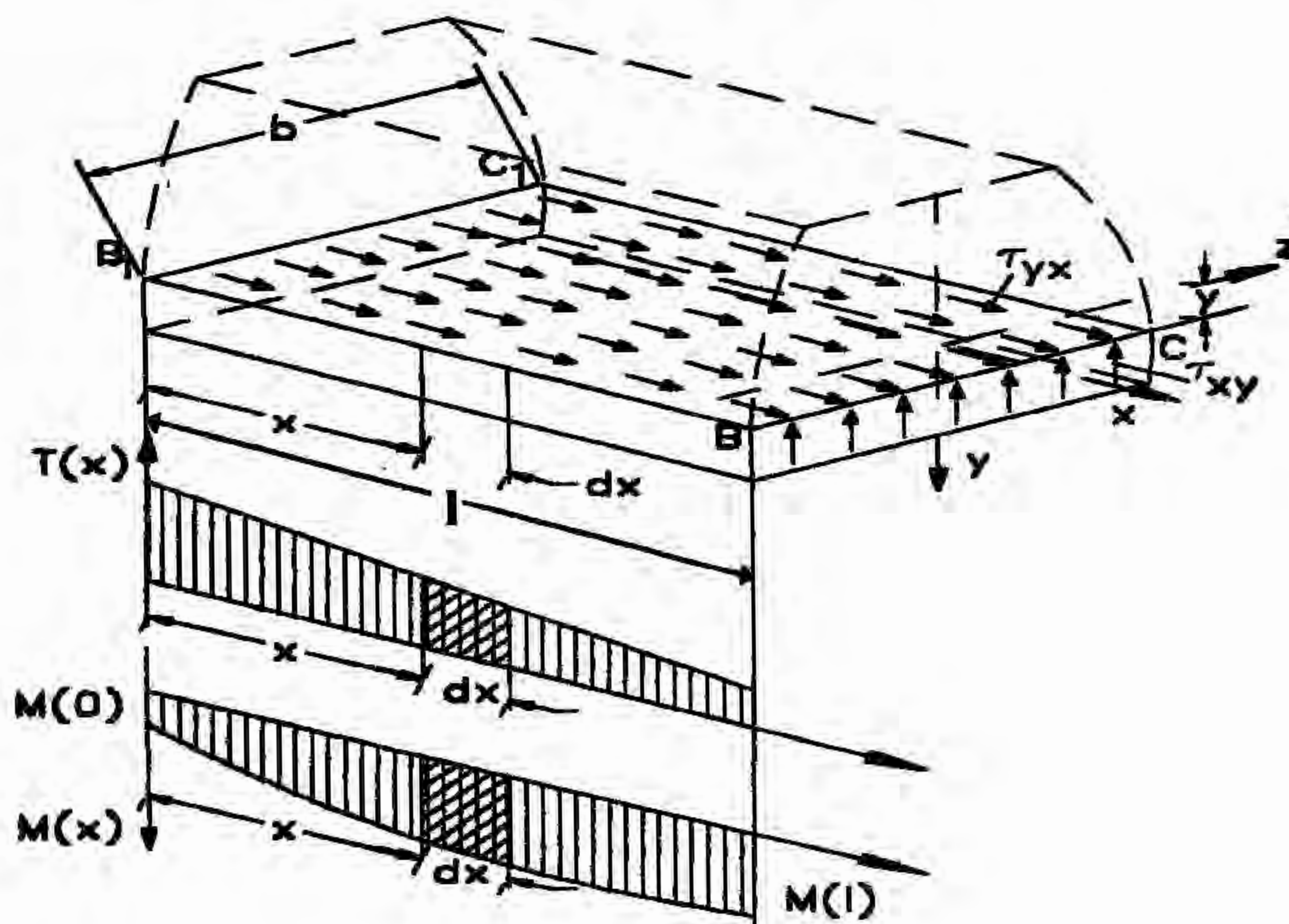


Fig. 7.25

Tensiunilor tangențiale din planul secțiunii transversale  $\tau_{xy}$ , determinate cu relația lui Juravski, le corespunde, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale, tensiuni în planele longitudinale,  $\tau_{yx}$ . Forța de lunecare este dată de rezultanta tuturor tensiunilor tangențiale



$\tau_{yx}$  pe suprafața  $BCC_1B_1$ . Forța de lunecare pe un element de lungime este:  $dN_1 = \tau_{yx} b dx$  în care  $\tau_{yx} = \frac{T(x)Sz(y)}{b(y)I_z}$ . Așadar va rezulta:

$$N_1 = \int_0^l \frac{T(x)Sz(y)}{I_z} dx = \frac{Sz(y)}{I_z} \int_0^l T(x) dx = \frac{Sz(y)}{I_z} A_{0-l}^T$$

în care  $A_{0-l}^T$  reprezintă aria diagramei de forțe tăietoare pe lungimea tronsonului de bară considerat.

Tinând cont de relația diferențială dintre eforturi:  $T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$

se obține:

$$N_1 = \frac{Sz(y)}{I_z} [M_1 - M_0]$$

în care  $M_1$  și  $M_0$  reprezintă momentele încovoietoare la capetele tronsonului considerat.

Forța de lunecare este maximă în planul neutru, acolo unde  $Sz$  este maxim.



## CAPITOLUL 8

### DEPLASARI LA SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE

- 8.1. Generalități
- 8.2. Ecuația diferențială a axei medii deformate
- 8.3. Metoda integrării analitice
- 8.4. Procedul Clebsch
- 8.5. Relația lui Clapeyron
- 8.6. Teorema lui Castigliano

#### 8.1. Generalități

Barele drepte supuse unei solicitări exterioare de încovoiere se deformează și ca urmare, secțiunile transversale ale acestora își schimbă poziția față de cea de dinaintea solicitării. Fie bara din figura 8.1.

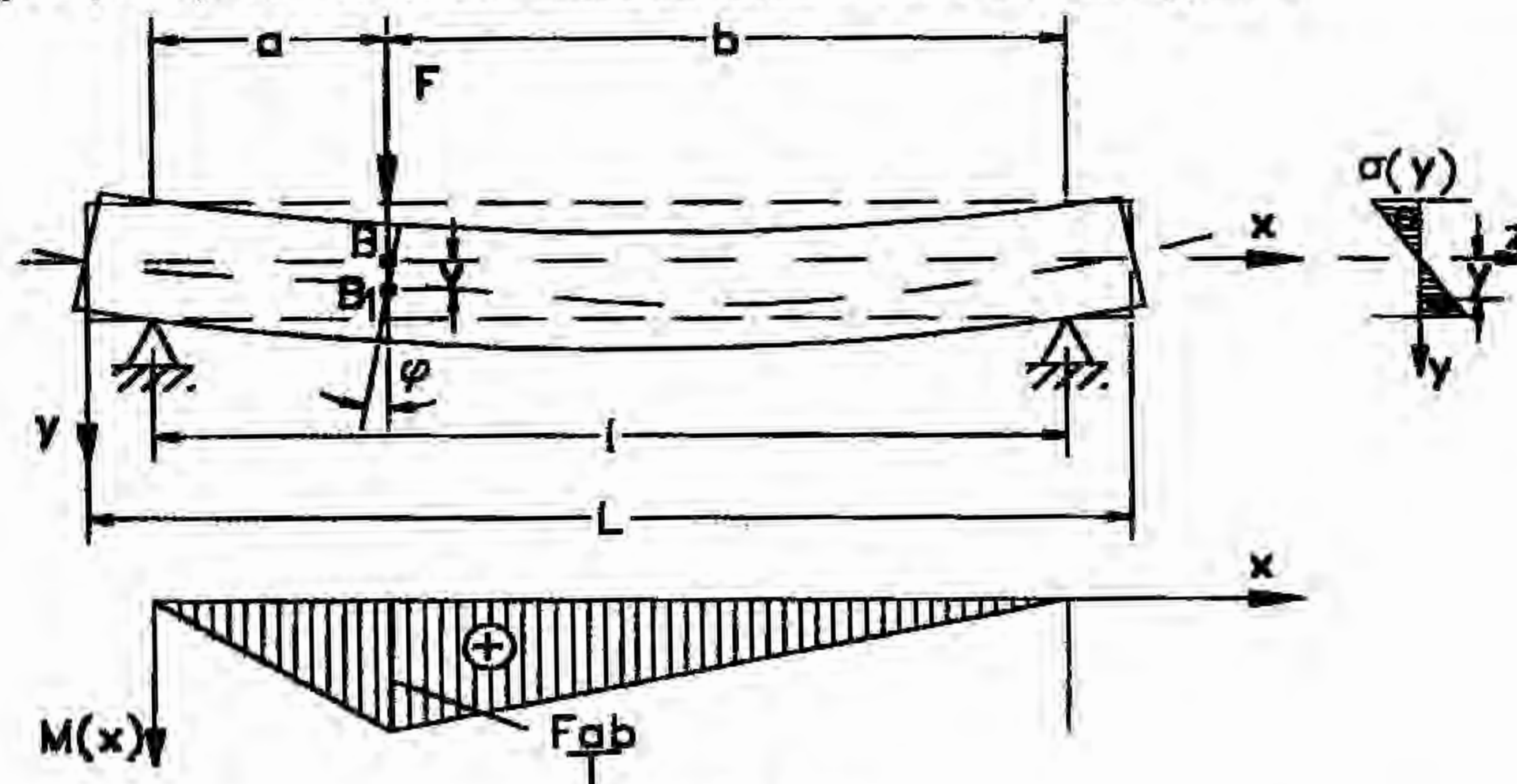


Fig. 8.1



Se constată că, sub acțiunea solicitării exterioare de încovoiere, fibrele din partea de sus a planului neutru își micșorează lungimea iar fibrele din partea de jos își măresc lungimea. Astfel, toate aceste fibre capătă anumite deformații date de legea lui Hooke:  $\varepsilon_x(y) = \frac{\sigma_x(y)}{E}$ .

Deci, în afară de fibrele aflate în planul neutru ( $y=0$ ), toate celelalte fibre se *deformează*. În plus, toate fibrele barei se vor găsi, după aplicarea sarcinilor, într-o nouă poziție. Putem spune că avem o *deplasare* a diferitelor puncte ale barei. De exemplu, un punct B aflat în planul neutru al barei îl vom găsi după solicitare în noua poziție B<sub>1</sub>. Așa cum s-a văzut, fibrele din planul neutru nu se deformează ( $\varepsilon_x=0$ ) în schimb punctele aflate în acest plan se deplasează.

## 8.2. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate

O bară dreaptă având secțiunea constantă, solicitată la încovoiere, se reprezintă, de obicei, prin fibra ei medie, figura 8.2a.

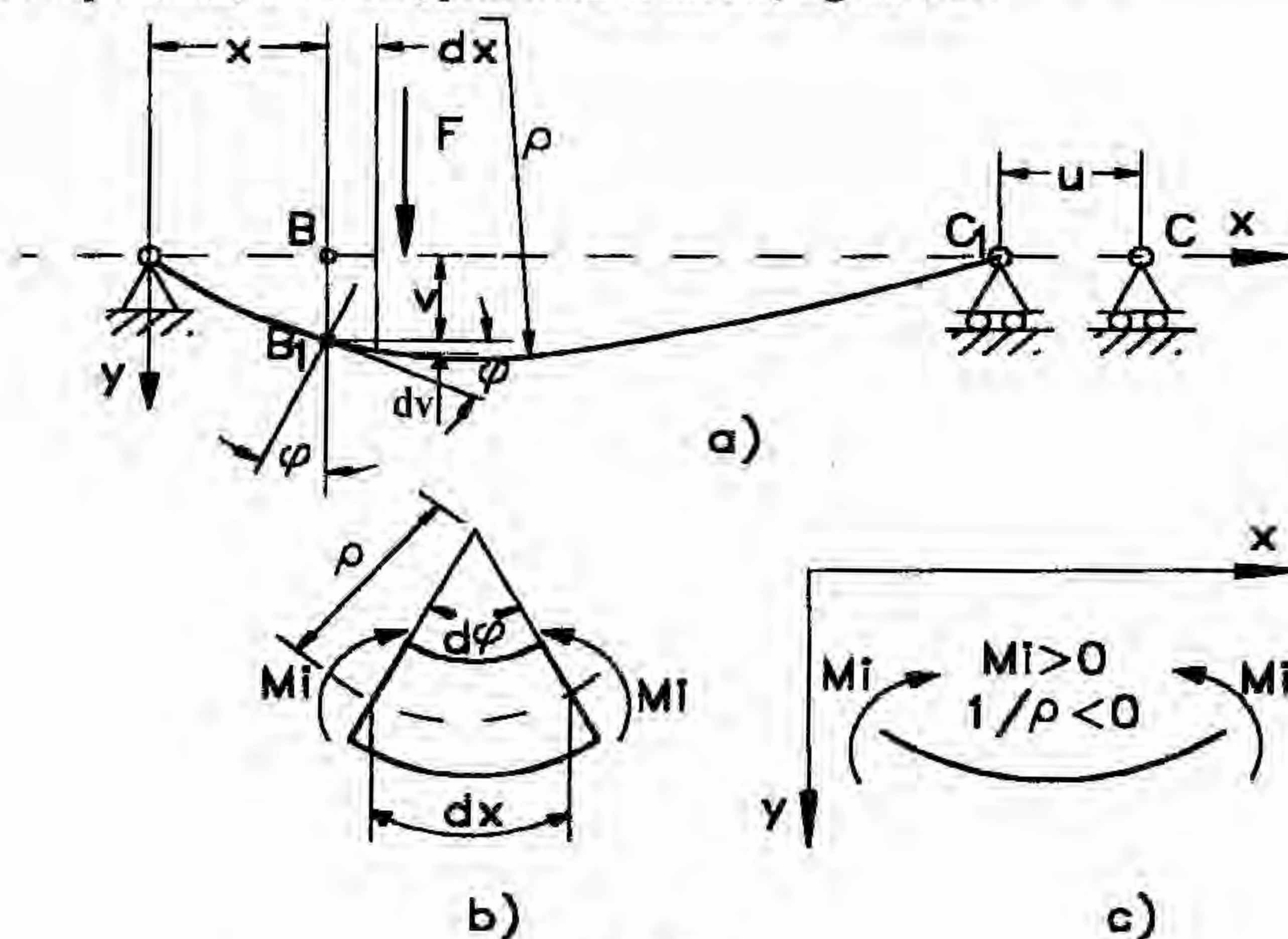


Fig. 8.2



Pentru a determina noua poziție a fibrei medii deformate, va trebui ca pentru fiecare punct să cunoaștem:

- deplasarea  $v$  pe direcție transversală, paralelă cu axa  $oy$ , numită și *săgeată*;
- unghiul de înclinare a secțiunii transversale față de poziția sa inițială sau unghiul dintre fibra inițială și tangenta la fibra deformată, numit *rotire* și notat cu  $\varphi$ ;
- deplasarea  $u$  pe direcția axei  $ox$ . De obicei  $u \ll v$  și această deplasare se neglijează;
- curbura fibrei medii deformate,  $1/\rho$ .

Din figura 8.2a se constată că  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx}$ . Având în vedere faptul că deplasările materialelor metalice în domeniul elastic sunt relativ mici în raport cu lungimea barelor se poate deduce și că rotirile sunt mici:  $\varphi < 1^\circ$ . În aceste condiții se poate scrie că:  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \approx \frac{dv}{dx}$ .

În cazul încovoierii în domeniul elastic, fibra medie a barei va avea o curbura ce rezultă din relația (7.4) ca fiind:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{Mz}{EIz} \quad (8.1)$$

Semnul "-" apare pentru că, un moment pozitiv, după regula de semne adoptată deja, produce o curbura negativă în sistemul de axe  $xoy$  din figura 8.2a și folosit până acum, figura 8.2c.

Expresia curburii, dedusă din geometria diferențială, funcție de coordonatele punctelor fibrei medii deformate este:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (8.2)$$

În majoritatea cazurilor, deplasările produse prin solicitarea de încovoiere sunt mici în raport cu lungimea barei. De exemplu, pentru o grindă simplu rezemată, fibra medie deformată se poate asimila cu o parabolă, figura 8.3, a cărei ecuație este:  $y = v = \frac{4f}{l^2} x(1-x)$ .



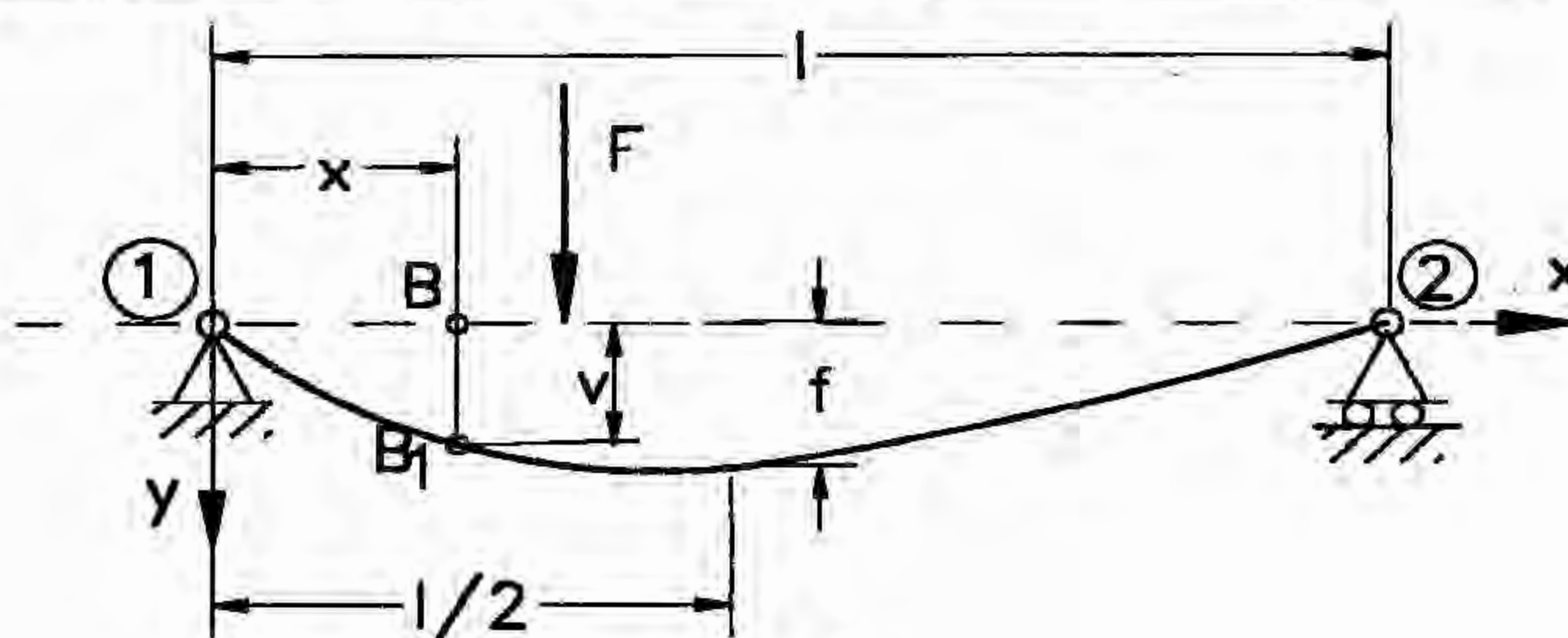


Fig. 8.3

Ecuția rotirilor va fi dată de relația:  $\varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{4f}{l^2} (1 - 2x)$

Cele mai mari valori ale rotirilor se regăsesc în reazeme:

$$\varphi_{1,2} = \pm \frac{4f}{l}$$

Dacă se consideră că deplasările sunt mici, de exemplu  $\frac{f}{l} = \frac{1}{400}$ , în acest caz rotirea maximă va fi:  $\varphi_{\max} = 1/100$  de unde rezultă că:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \varphi^2 = 0,0001$$

Ca urmare a acestor constatări, se poate spune că  $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \ll 1$  și ca

urmare:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Mz}{EIz}$$

Relația

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Mz(x)}{EIz} \quad (8.3)$$

reprezintă *ecuația diferențială aproximativă* a fibrei medii deformate. Produsul  $E \cdot Iz$  se numește *modul de rigiditate la încovoiere* al secțiunii transversale. Bara va căpăta deplasări cu atât mai mici cu cât acest produs este mai mare.



După exprimarea momentului încovoiator funcție de variabila  $x$ , integrându-se o dată relația (8.3) se obține funcția  $\varphi = \varphi(x, C_1)$  iar dacă se integrează de două ori se obține funcția  $v = v(x, C_1, C_2)$  în care  $C_1$  și  $C_2$  reprezintă constante de integrare. Funcția  $\varphi = \varphi(x, C_1)$  reprezintă expresia *rotirii* pe regiunea în care a fost considerată variația momentului  $M_z(x)$  iar funcția  $v = v(x, C_1, C_2)$  reprezintă expresia *săgeții* pe aceeași regiune. Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se determină pe baza condițiilor la limită. Acestea sunt, după caz, condiții de rezemare și de continuitate referitoare la săgeata  $v$  și rotirea  $\varphi$ .

Când funcția  $M_z(x)$  nu se poate preciza, acesta fiind cazul problemelor static nedeterminate, se folosesc relațiile diferențiale între eforturi și între eforturi și încărcarea exterioară:

$$\frac{dM}{dx} = T; \quad \frac{dT}{dx} = -q$$

În aceste condiții se obține:

$$q = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2} \left( -EIz \frac{d^2 v}{dx^2} \right)$$

$$\text{sau} \quad \frac{q}{EIz} = \frac{d^4 v}{dx^4} \quad (8.4)$$

relație ce reprezintă ecuația de ordin 4 a fibrei medii deformată pentru cazul în care momentul de inerție axial este constant. Dacă se cunoaște legea de variație a intensității sarcinii  $q=q(x)$ , se poate integra relația (8.4) de patru ori obținându-se, după a trei și a patra integrare, expresia rotirii, respectiv a săgeții funcție de variabila  $x$ :

$$\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, C_3), \quad v = v(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

Condițiile necesare pentru determinarea constantelor de integrare se referă atât la deplasări ( $\varphi$  și  $v$ ) cât și la eforturi ( $T$  și  $M$ ).

### 8.3. Metoda integrării analitice

În ecuația diferențială de ordinul doi  $\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EIz}$ , momentul încovoiator  $M_z(x)$  se exprimă în funcție de variabila  $x$  pentru fiecare regiune în parte a barei, luându-se în considerare și variația modulului de rigiditate ( $E \cdot Iz$ ) dacă este cazul.



Pe fiecare regiune  $i$ , se integrează de două ori relația anterioară obținându-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)_i &= -\left(\frac{1}{Elz}\right) \int Mz_i(x) dx + C_i = [\varphi(x)]_i \\ [v(x)]_i &= -\left(\frac{1}{Elz}\right) \int \left(dx \int Mz_i(x) dx\right) + C_i x + D_i \end{aligned} \quad (8.5)$$

Prima relație din (8.5) reprezintă ecuația rotirilor pe regiunea de bară notată cu  $i$  iar a doua relație reprezintă ecuația săgeților pe regiunea de bară  $i$ . Se obțin câte două constante de integrare  $C_i$  și  $D_i$  pentru fiecare regiune în parte. Valörile acestor constante se determină din condițiile de rezemare și de continuitate a fibrei medii deformate.

Condițiile de rezemare se impun prin valoarea rotirii și săgeții în punctele de legătură a barei, figura 8.4a.

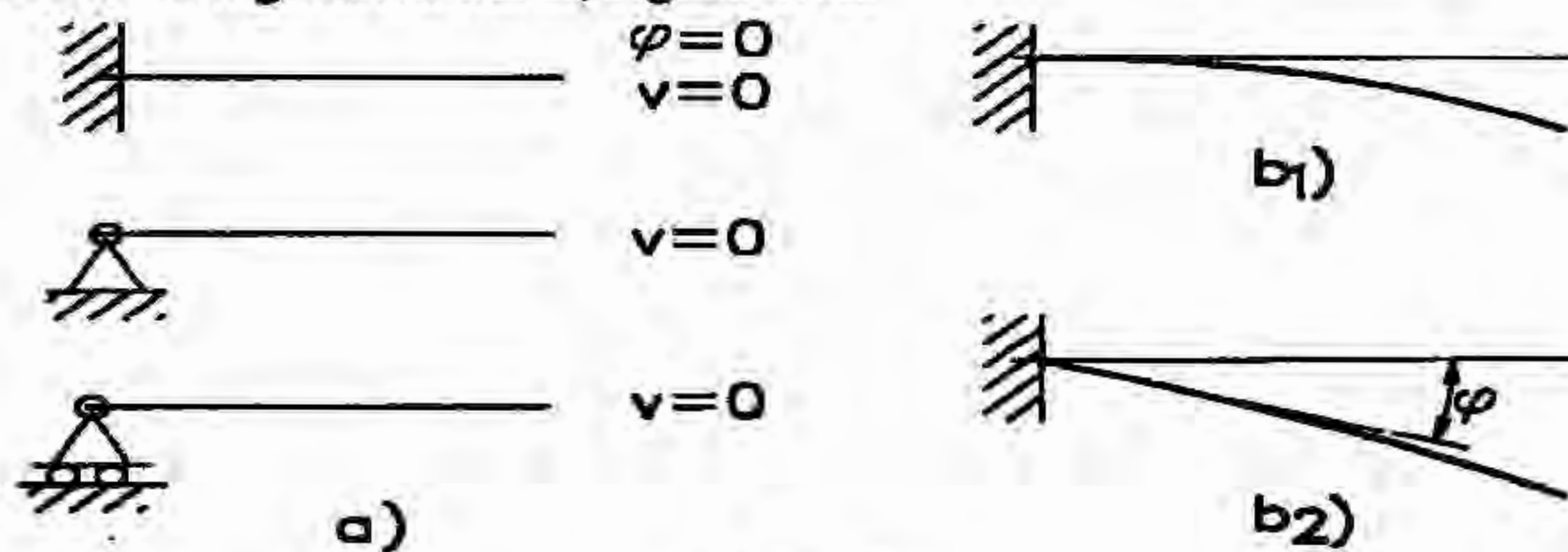


Fig. 8.4

Pe lângă reacțiunile pe care le introduc, punctele de legătura obligă la o anumită deformare. Condițiile de rezemare, exprimate și de figura 8.4a, sunt:

- într-o încastrare, atât săgeata cât și rotirea sunt nule;
- în reazemele simple sau articulate săgeata este nulă.

Având în vedere prima observație, se constată următoarele:

- deplasările barei în încastrare sunt împiedicate pe orice direcție;
- direcția tangentei în încastrare la fibra medie deformată coincide cu direcția fibrei de dinainte de deformare, figura 8.4b<sub>1</sub>, altfel, ar trebui să se producă o deformare ca în figura 8.4b<sub>2</sub> ceea ce nu este posibil decât prin *îndoirea barei*.

Condițiile de continuitate ale deplasărilor se impun în dreptul secțiunilor de trecere de la o regiune la alta a barei. Având în vedere



ipoteza deformațiilor elastice, chiar dacă apar modificări ale rigidității barei sau ale încărcării exterioare, fibra medie deformată este continuă, formată din arce de cerc racordate între ele, figura 8.5a.

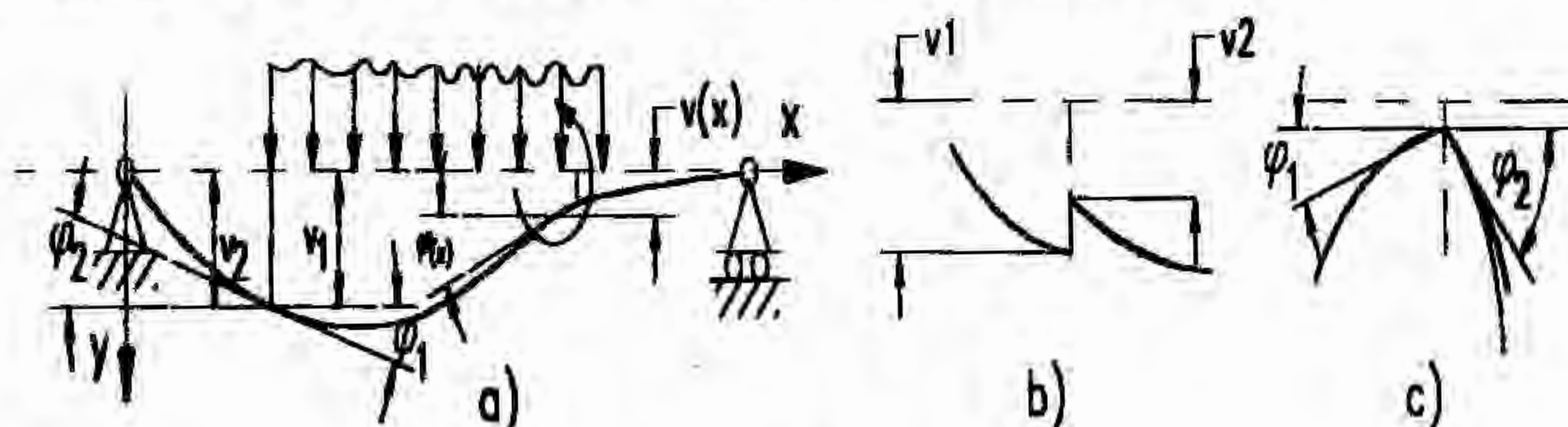


Fig. 8.5

Continuitatea se exprimă prin egalitatea săgeților și rotirilor pentru punctele infinit vecine aflate la granița a două regiuni diferite:

$$v_1 = v_2 \text{ și } \varphi_1 = \varphi_2$$

Dacă nu ar fi respectată prima condiție, ar trebui ca, în secțiunea de trecere de la o regiune la alta, bara să se rupă, figura 8.5b. Dacă nu ar fi respectată cea de-a doua condiție, ar trebui să avem o îndoire a barei (deformație plastică) ceea ce contravine ipotezei deformațiilor elastice.

Numărul constantelor de integrare ce se obțin pentru o grindă cu  $n$  regiuni este  $2n$ . Pentru aflarea acestora se pot impune, de exemplu, două condiții de rezemare și respectiv  $2(n-1)$  condiții de continuitate pentru cele  $(n-1)$  secțiuni de trecere ce separă cele  $n$  regiuni. Se obține astfel, un sistem de  $2n$  ecuații cu  $2n$  necunoscute ce poate fi rezolvat. Pentru determinarea deplasărilor prin această metodă, pentru barele cu mai mult de două regiuni (mai mult de patru constante de integrare), se recomandă utilizarea programelor specializate în rezolvarea de sisteme de ecuații întrucât volumul de calcul devine destul de mare.

#### Aplicație

**A.8.1.** Se consideră bara dreaptă, de secțiune constantă, din figura 8.6a. Bara este încastrată la un capăt, simplu rezemată la celălalt și solicitată de o forță uniform distribuită pe lungimea  $2l$  și de un moment concentrat de valoare  $ql^2$ . Se cere să se determine legile de distribuție pentru rotiri și săgeți pe cele două regiuni ale barei și să se traseze graficele de variație ale acestora.



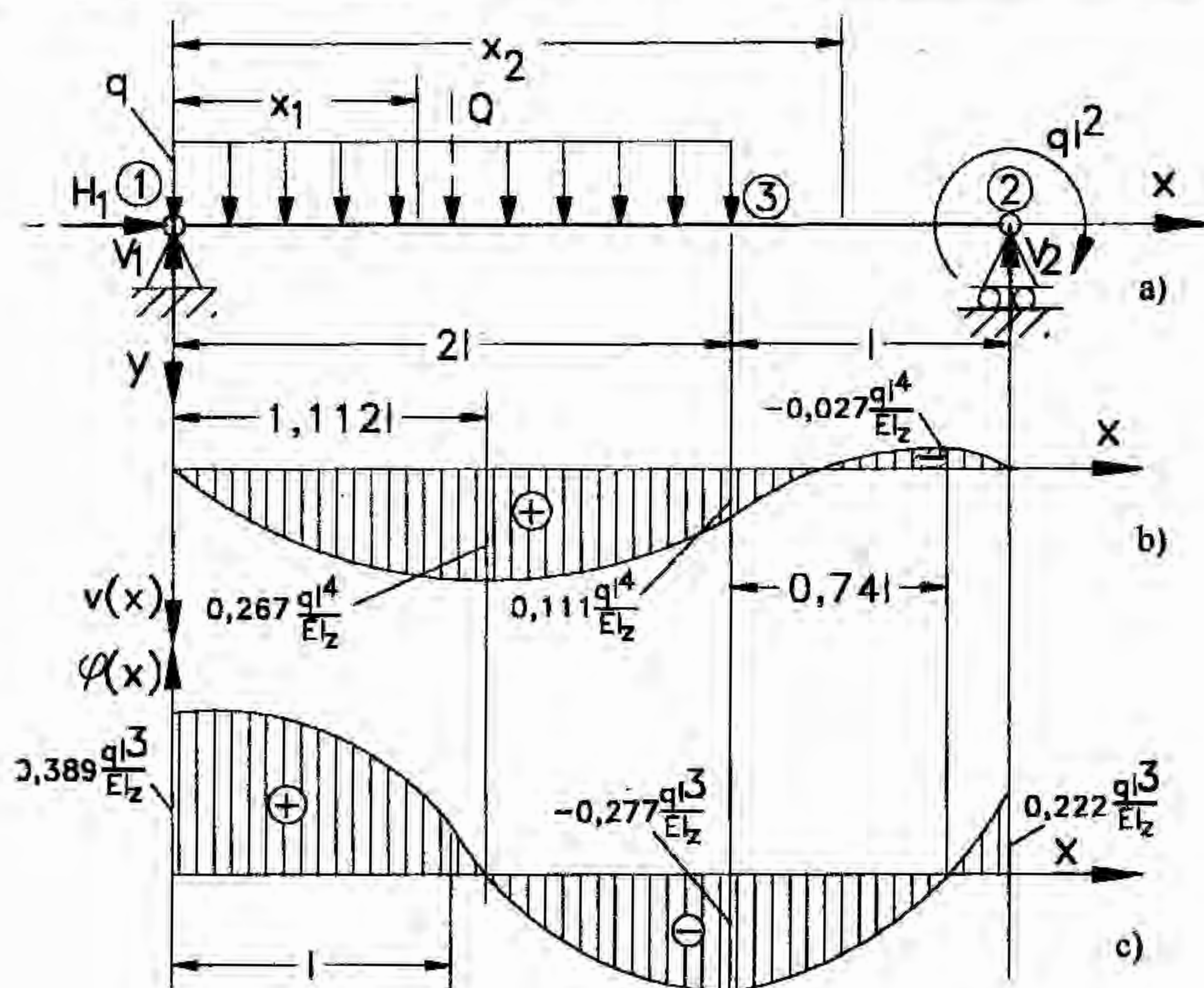


Fig. 8.6

Având în vedere modul de rezemare al barei, reacțiunile care apar în reazeme ca urmare a solicitării exterioare sunt forțele  $V_1$ ,  $H_1$  și  $V_2$ . Aceste reacțiuni se determină din ecuațiile de echilibru static, care se scriu astfel:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - 2ql = 0 \\ V_1 \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l + ql^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = ql \\ V_2 = ql \end{cases}$$

Bara se împarte în două regiuni determinate de variația diferită a încărcării exterioare. Pe fiecare regiune în parte se face câte o secțiune:  $x_1$  și  $x_2$  cu  $x_1 \in [0, 2l]$  și  $x_2 \in [2l, 3l]$ . Momentele încovoietoare, în fiecare din cele două secțiuni, sunt:



$$M(x_1) = qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2}, \quad M(x_2) = qlx_2 - 2ql(x_2 - l) = 2ql^2 - qlx_2$$

Aplicând relația (8.3) va rezulta:

$$\begin{cases} Elz \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = -qlx_1 + \frac{qx_1^2}{2}, & Elz \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = -2ql^2 + qlx_2 \end{cases}$$

Integrând, succesiv, de două ori aceste relații, se obține:

$$\begin{cases} Elz\varphi_1(x_1) = -ql \frac{x_1^2}{2} + q \frac{x_1^3}{6} + C_1 & Elz\varphi_2(x_2) = -2ql^2 x_2 + ql \frac{x_2^2}{2} + C_2 \\ Elz \cdot v_1(x_1) = -ql \frac{x_1^3}{6} + q \frac{x_1^4}{24} + C_1 x_1 + D_1 & Elz \cdot v_2(x_2) = -2ql^2 \frac{x_2^2}{2} + ql \frac{x_2^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \end{cases}$$

Se constată că, avem patru constante de integrare:  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  și  $D_2$  pentru a căror determinare sunt necesare patru condiții. Condițiile ce se vor impune sunt:

- două condiții de reazem:
  - pentru  $x_1=0$ ,  $v_1(0)=0$
  - pentru  $x_2=3l$ ,  $v_2(3l)=0$
- două condiții de continuitate:

$$\text{- pentru } x_1=x_2=2l \quad \begin{cases} \varphi_1(2l) = \varphi_2(2l) \\ v_1(2l) = v_2(2l) \end{cases}$$

Ca urmare a aplicării acestor condiții se va obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 0 = D_1 \\ 0 = -ql^2 9l^2 + ql \frac{27l^3}{6} + C_2 3l + D_2 \\ -ql \frac{4l^2}{2} + \frac{8ql^3}{6} + C_1 = -2ql^2 2l + \frac{ql}{2} 4l^2 + C_2 \\ -ql \frac{8l^3}{6} + \frac{16ql^4}{24} + C_1 2l + D_1 = -ql^2 4l^2 + ql \frac{8l^3}{6} + C_2 2l + D_2 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute, constantele de integrare rezultă cu valorile:

$$C_1 = \frac{7}{18} ql^3, D_1 = 0, C_2 = \frac{31}{18} ql^3, D_2 = -\frac{2}{3} ql^4.$$



Înlocuind aceste valori în ecuațiile care dau săgețile și rotirile, se obține legea de variație a acestora pentru fiecare regiune în parte:

$$\begin{cases} EIz\varphi_1(x_1) = -ql \frac{x_1^2}{2} + q \frac{x_1^3}{6} + \frac{7}{18}ql^3 \\ EIz \cdot v_1(x_1) = -ql \frac{x_1^3}{6} + q \frac{x_1^4}{24} + \frac{7}{18}ql^3 x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIz\varphi_2(x_2) = -2ql^2 x_2 + ql \frac{x_2^2}{2} + \frac{31}{18}ql^3 \\ EIz \cdot v_2(x_2) = -2ql^2 \frac{x_2^2}{2} + ql \frac{x_2^3}{6} + \frac{31}{18}ql^3 x_2 - \frac{2}{3}ql^4 \end{cases}$$

Diagramele de variație a rotirilor și săgeților de-a lungul barei sunt prezentate în figura 8.6, bși c.

#### 8.4. Metoda Clebsch

Metoda Clebsch, folosită pentru calculul deplasărilor la încovoiere, aduce simplificări în ceea ce privește numărul constantelor de integrare obținute. Astfel, prin aplicarea acestei metode, se obțin cel mult două constante de integrare indiferent de numărul regiunilor în care trebuie împărțită bara.

Fie o grindă de secțiune constantă ( $EIz = \text{const.}$ ) ce conține  $n$  regiuni, figura 8.7.

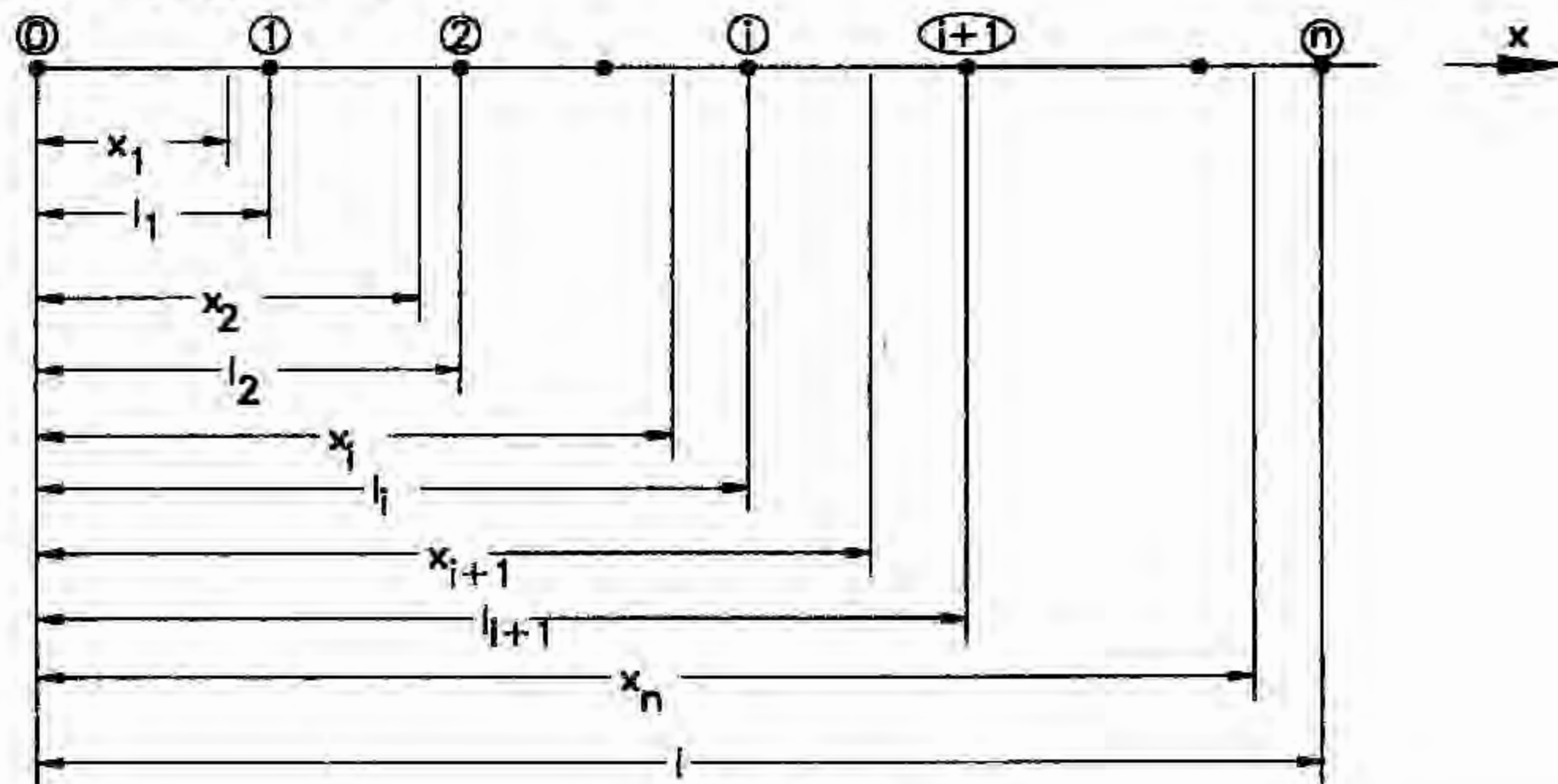


Fig. 8.7



Se alege un sistem de axe de coordonate cu originea  $O$  într-unul din capetele barei (stânga). Toate secțiunile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de pe cele  $n$  regiuni se iau cu originea în  $O$ . Se scriu momentele  $M(x_i)$  pe fiecare regiune și se introduc în relații de forma (8.3). Dacă se integrează relațiile respective se obțin  $2n$  constante de integrare  $C_i$  și  $D_i$ . Se constată că, în expresia momentului încovoietor dintr-o regiune oarecare a barei, se va regăsi și expresia pentru momentul încovoietor din regiunea precedentă. Astfel, pentru regiunea  $i+1$  vom avea:

$$M(x_{i+1}) = M(x_i) + F_i(x_{i+1} - l_i) + M_i(x_{i+1} - l_i)^0 + q_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^2}{2}$$

în care  $F_i$ ,  $M_i$  și  $q_i$  reprezintă încărcările din regiunea  $i+1$ , aflate între secțiunea  $i$  și secțiunea  $x_{i+1}$  iar  $M(x_i)$  reprezintă expresia momentului încovoietor din regiunea precedentă. Se constată că și momentul încovoietor  $M_i$  se atașează un factor de forma  $(x-l_i)$ , evident la puterea zero, pentru a se păstra corectitudinea calculelor ulterioare. Se mai admite că:

$$\int (x - l_i)^m dx = \frac{(x - l_i)^{m+1}}{m+1} \quad (8.6)$$

Pentru regiunile vecine  $i$  și  $i+1$  ecuațiile rotirilor și ale săgeților vor fi:

$$i \quad \begin{cases} \varphi_i = -\frac{1}{EIz} \left[ \int M(x_i) dx_i + C_i \right] \\ v_i = -\frac{1}{EIz} \left[ \int \left( \int M(x_i) dx_i \right) + C_i x_i + D_i \right] \end{cases}$$

$$i+1 \quad \begin{cases} \varphi_{i+1} = -\frac{1}{EIz} \left[ \int M(x_i) dx_i + F_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^2}{2} + M_i (x_{i+1} - l_i) + q_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^3}{6} + C_{i+1} \right] \\ v_{i+1} = -\frac{1}{EIz} \left[ \int \left( \int M(x_i) dx_i \right) + F_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^3}{6} + M_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^2}{2} + q_i \frac{(x_{i+1} - l_i)^4}{24} + C_{i+1} x_{i+1} + D_{i+1} \right] \end{cases}$$

Pentru determinarea celor  $2n$  constante de integrare se impun

condițiile: - pentru  $x = l_i \Rightarrow \begin{cases} \varphi_i = \varphi_{i+1} \\ v_i = v_{i+1} \end{cases}$

În aceste condiții rezultă:

- din prima egalitate:  $C_{i+1} = C_i = C$
- din a doua egalitate:  $D_{i+1} = D_i = D$



Așadar, din cele  $2n$  constante de integrare au rămas numai două. Acestea pot fi ușor determinate dacă se impun condițiile de rezeme. Se constată de asemenea că în origine vom avea:

$$\varphi_0 = \frac{C}{EI_z} \text{ și } v_0 = \frac{D}{EI_z}$$

de unde rezultă:  $C = \varphi_0 EI_z$  și  $D = v_0 EI_z$  în care  $\varphi_0$  și  $v_0$  reprezintă rotirea, respectiv săgeată în origine.

Se observă că, metoda Clebsch reduce semnificativ numărul constantelor de integrare și ca urmare și volumul de calcul. Pentru aplicarea corectă a acestei metode este nevoie să se respecte următoarele etape de lucru și condiții:

1. Se alege originea de măsurare într-unul din capetele barei;
2. Secțiunea cotată cu  $x$  față de originea aleasă se face în ultimul câmp al barei (referitoare la originea respectivă);
3. Dacă pe bară există sarcini distribuite care nu ajung până în secțiunea respectivă, acestea se prelungesc până în secțiune după aceeași lege de variație. Evident, pentru a nu se schimba deplasarea barei, sarcina distribuită adăugată se va scădea în mod corespunzător. Sarcina scăzută va ajunge automat până în secțiunea considerată.
4. Se scrie momentul în raport cu această secțiune, cu observația că toate componentele acestuia, în afară de sarcinile ce acționează în origine, trebuie să conțină paranteze de forma  $(x-l_i)$ . Pentru momentele concentrate se adoptă binomul  $(x-l_i)^0$  în care  $l_i$  reprezintă coordonata punctului de aplicație al momentului respectiv.
5. Se scrie relația (8.3), în care  $M_z(x)$  reprezintă expresia momentului determinată conform indicațiilor de la punctele anterioare.
6. Se integrează de două ori expresia obținută. La integrare, se consideră că o expresie de forma  $(x-l_i)$  constituie o singură variabilă de tipul  $y = (x-l_i)$  astfel încât să se respecte condiția (8.6).

De exemplu: 
$$\int (x-l_i)^3 dx = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} = \frac{(x-l_i)^4}{4}.$$

7. Pentru determinarea celor două constante de integrare rezultate, se vor impune condițiile de rezemare care sunt aceleași cu cele arătate în paragraful anterior. În cadrul particularizării variabilei  $x$  în expresia rotirii sau a săgeții, *nu se vor lua în considerare parantezele care, neridicate la putere, rezultă prin înlocuire negative*. În acest fel are



loc o particularizare corectă a expresiei momentului încovoiător și ca urmare a rotirii și săgeții funcție de zona în care se află reazemul.

8. Constantele de integrare astfel obținute, se introduc în expresiile rotirii și ale săgeții.

9. Pentru determinarea rotirii sau a săgeții într-un anumit punct dorit, se particularizează variabila  $x$  pentru punctul respectiv. În cadrul acestei particularizări trebuie avută în vedere observația de la punctul 7.

Aplicarea procedurii Clebsch în vederea determinării săgeții și rotirii are câteva avantaje majore. În primul rând se constată că se reduc numărul de constante de integrare la două (pentru barele cu mai multe regiuni), deci a numărului de ecuații necesare pentru determinarea lor și ca urmare se reduce volumul de calcul. Așadar, procedeul Clebsch este avantajos a se aplica la barele care se împart în mai multe regiuni. De asemenea, odată determinate cele două constante de integrare, săgeata și rotirea se pot calcula, prin particularizarea corespunzătoare a variabilei  $x$ , în orice punct al barei fără a mai fi necesare calcule suplimentare laborioase. În schimb, trebuie urmate cu strictețe etapele de lucru și aplicate în mod corespunzător.

#### Aplicație.

A.8.2. Se consideră bara dreaptă, de secțiune constantă, solicitată ca în figura (8.8). Se cere să se determine săgeata în punctul 3 și rotirea în punctul 5.

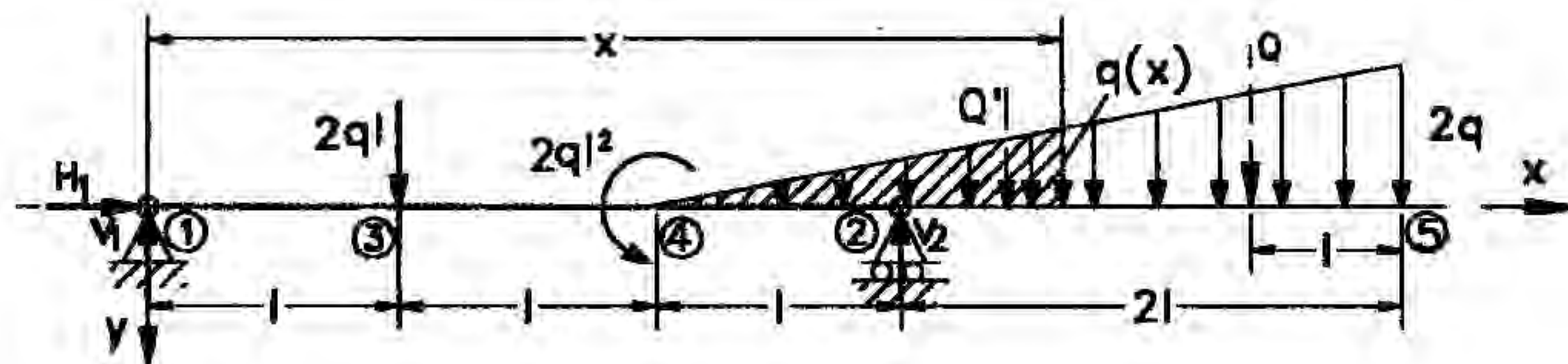


Fig. 8.8

Reacțiunile ce apar în reazeme sunt:  $V_1$ ,  $H_1$  și  $V_2$ . Acestea se determină din ecuațiile de echilibru static care sunt următoarele:



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 - Q = 0 \\ V_1 \cdot 3l - 2ql \cdot 2l - 2ql^2 + Ql = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_2 = 4ql \\ V_1 = ql \end{cases}$$

în care forța  $Q$  este înlocuitoarea forței liniar distribuite și este:

$$Q = \frac{2q \cdot 3l}{2} = 3ql.$$

Calculul săgeților și al rotirilor se va face prin metoda Clebsch, respectând etapele de lucru specificate.

Originea se alege în capătul din stânga al barei (punctul 1). Ca urmare, secțiunea se va face pe regiunea 2-3.

Respectând indicațiile referitoare la modalitatea de scriere a momentului încovoiator și având în vedere faptul că sarcina distribuită ajunge până în secțiune, pentru momentul încovoiator în secțiunea  $x$  vom avea expresia:

$$M(x) = qlx - 2ql(x-l) - 2ql^2(x-2l) + 4ql(x-3l) - q \frac{(x-2l)^3}{9l}$$

Ultimul termen din expresia dată pentru momentul încovoiator reprezintă momentul dat de forța  $Q'$  față de secțiunea  $x$ :

$$M_{Q'}(x) = q(x) \frac{x-2l}{2} \frac{x-2l}{3} = 2q \frac{x-2l}{3l} \frac{x-2l}{3} \frac{x-2l}{2} = q \frac{(x-2l)^3}{9l}$$

Aplicând relația (8.3) și integrând succesiv de două ori vom obține:

$$\begin{cases} Elz\phi(x) = -ql \frac{x^2}{2} + 2ql \frac{(x-l)^2}{2} + 2ql^2(x-2l) - 4ql \frac{(x-3l)^2}{2} + q \frac{(x-2l)^4}{36l} + C \\ Elz \cdot v(x) = -ql \frac{x^3}{6} + 2ql \frac{(x-l)^3}{6} + 2ql^2 \frac{(x-2l)^2}{2} - 4ql \frac{(x-3l)^3}{6} + q \frac{(x-2l)^5}{180l} + Cx + D \end{cases}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare,  $C$  și  $D$ , se impun condițiile de rezemare. Acestea sunt:

- pentru  $x=0 \Rightarrow v(0)=0$
- pentru  $x=3l \Rightarrow v(3l)=0$

și vor conduce la următoarele relații:

$$\begin{cases} 0 = D \\ 0 = -ql \frac{27l^3}{6} + ql \frac{8l^3}{3} + 2ql^2 \frac{l^2}{2} + q \frac{l^5}{180l} + C \cdot 3l \end{cases}$$



de unde rezultă:  $D = 0$  și  $C = \frac{149}{540} ql^3$ . Aceste valori se introduc în relațiile rotirii și săgeții.

Pentru determinarea săgeții în punctul 2 și a rotirii în punctul 5, se particularizează în mod corespunzător variabila  $x$  în relațiile respective. Astfel, pentru săgeata în punctul 3, vom avea:

$$x = l \Rightarrow Elz \cdot v_3 = -\frac{ql^4}{6} + \frac{149}{540} ql^4 \Rightarrow v_3 = \frac{59}{540} \frac{ql^4}{Elz}$$

Pentru rotirea în punctul 5 vom avea:

$$\begin{aligned} x = 5l \Rightarrow Elz \varphi_5 &= -ql \frac{25l^2}{2} + 2ql \frac{16l^2}{2} + 2ql^2 \cdot 3l - 4ql \frac{4l^2}{2} + q \frac{81 \cdot l^4}{36 \cdot l} + \frac{149}{540} ql^4 \\ \Rightarrow \varphi_5 &= \frac{1087}{270} \frac{ql^3}{Elz} \end{aligned}$$

Odată determinate relațiile pentru rotiri și săgeți, prin particularizare corespunzătoare, se poate determina rotirea și săgeata în oricare punct de pe lungimea barei.

### 8.5. Metoda Clapeyron

Se consideră o grindă dreaptă din figura 8.9 supusă la încovoiere simplă. Fie, pe această grindă, trei secțiuni oarecare, 1, 2 și 3. Fibra medie deformată a barei este o curbă continuă, formată din arce de cerc racordate între ele. În dreptul secțiunilor 1, 2 și 3, săgețile sunt  $v_1$ ,  $v_2$  și  $v_3$ . Se consideră că momentele de inerție axiale  $I_z$  pe cele două regiuni sunt diferite  $I_1 \neq I_2$ . Diagrama de momente se poate descompune în triunghiuri, (pentru care laturile verticale sunt egale fiecare cu momentul încovoiător, ca efort interior, din dreptul punctului respectiv) și din ariile  $A_1$  și  $A_2$  corespunzătoare încărcărilor efectiv aplicate pe porțiunile respective de grindă. Având în vedere ipoteza continuității fibrei medii deformată, se poate demonstra că între săgețile din punctele 1, 2 și 3 și rotirea secțiunii din dreptul punctului 2 există relațiile:



$$v_1 = v_2 + \varphi_2 l_1 - \frac{S_{12}}{EI_1}; \quad v_3 = v_2 - \varphi_2 l_2 - \frac{S_{23}}{EI_2} \quad (8.7)$$

în care  $S_{12}$  și  $S_{23}$  reprezintă momentele statice ale ariilor diagramelor de momente  $A_1$  respectiv  $A_2$  față de punctele extreme considerate, 1 și 3.

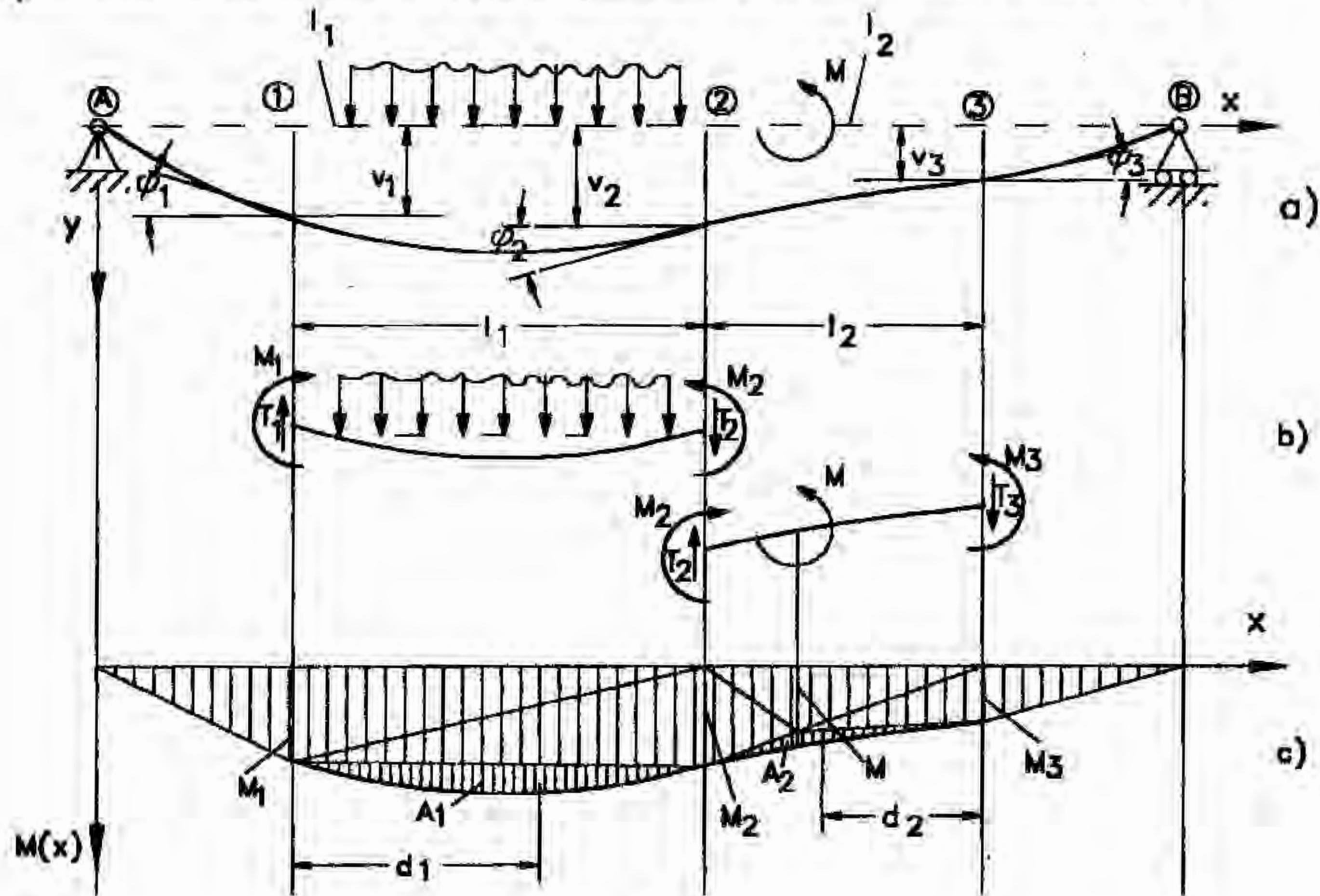


Fig. 8.9

Din relațiile (8.7), dacă se elimină  $\varphi_2$  se obține:

$$E \left( \frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} \right) = \frac{S_{12}}{l_1 I_1} + \frac{S_{23}}{l_2 I_2} \quad (8.8)$$

Cum  $S_{12}$  și  $S_{23}$  sunt date de relațiile:

$$S_{12} = A_1 d_1 + \frac{M_1 l_1}{2} \frac{l_1}{3} + \frac{M_2 l_1}{2} \frac{2l_1}{3}; \quad S_{23} = A_2 d_2 + \frac{M_3 l_2}{2} \frac{l_1}{3} + \frac{M_2 l_2}{2} \frac{2l_2}{3}$$

prin înlocuirea acestora în relația (8.8) se va obține ecuația lui Clapeyron sub forma:

$$6E \left( \frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} \right) = +M_1 \frac{l_1}{I_1} + 2M_2 \left( \frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + M_3 \frac{l_2}{I_2} + 6 \left( \frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_2}{l_2 I_2} \right)$$

Această ecuație permite determinarea unei săgeți dacă se cunosc



celelalte două. De exemplu, pe orice grindă simplu rezemată se cunoaște faptul că, săgețile din dreptul reazemelor sunt egale cu zero și ca urmare se poate afla săgeata într-un al treilea punct. Această săgeată, astfel determinată, se poate folosi la rândul ei pentru determinarea altor săgeți.

*Observații:*

1- Pentru trasarea numai a diagramelor de arii  $A_1$  și  $A_2$ , cele două regiuni din bară se vor considera separat, așezate fiecare pe câte două reazeme simple și încărcate numai cu sarcinile efectiv aplicate pe regiunea respectivă;

2- Pentru aplicarea ecuației în încastrare, acest tip de reazem se va transforma în două reazeme simple, infinit apropiate. Lungimea regiunii astfel determinate va fi nulă iar diagramă de momente nu va exista.

3- În cazul în care la trecerea de la o regiune la alta se găsește o sarcină concentrată, pentru ușurința calculelor aceasta va fi atribuită regiunii mai slab încărcate, figura 8.10.

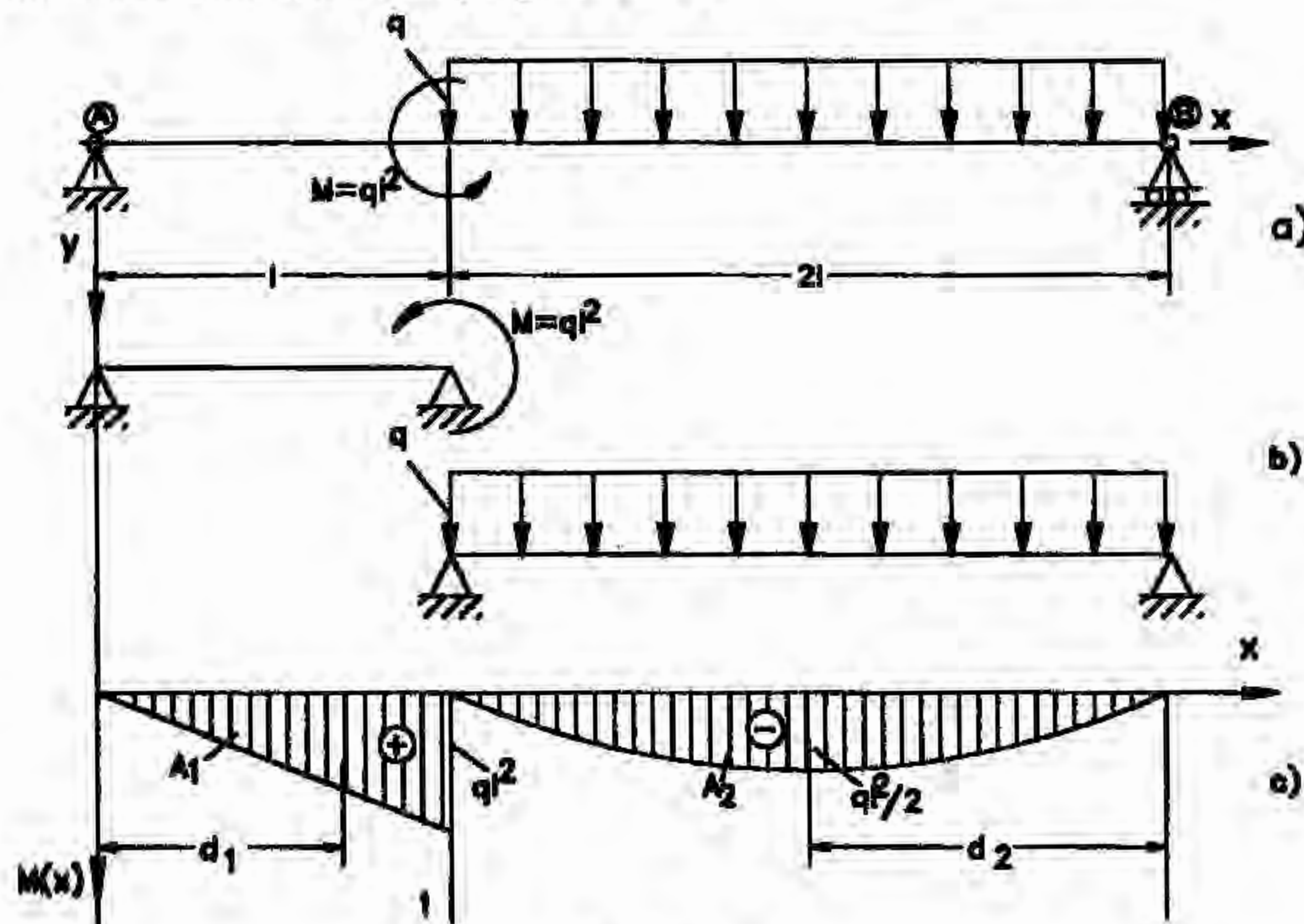


Fig. 8.10

Ecuația lui Clapeyron se aplică, de obicei, pentru barele ce au regiuni cu o încărcare ce determină diagrame de momente relativ simple,



ușor de trasat, ale căror arii  $A_1$  și  $A_2$  sunt ușor de calculat și de asemenea ale căror centre de greutate sunt ușor de găsit.

### Aplicație

A.8.3. Se consideră bara dreaptă, de secțiune constantă, din figura 8.11a. Bara este încastrată la un capăt, liberă la celălalt și solicitată de o forță liniar distribuită având intensitatea maximă în încastrare și egală cu  $2q$ . Se cere să se calculeze săgeata capătului liber al barei.

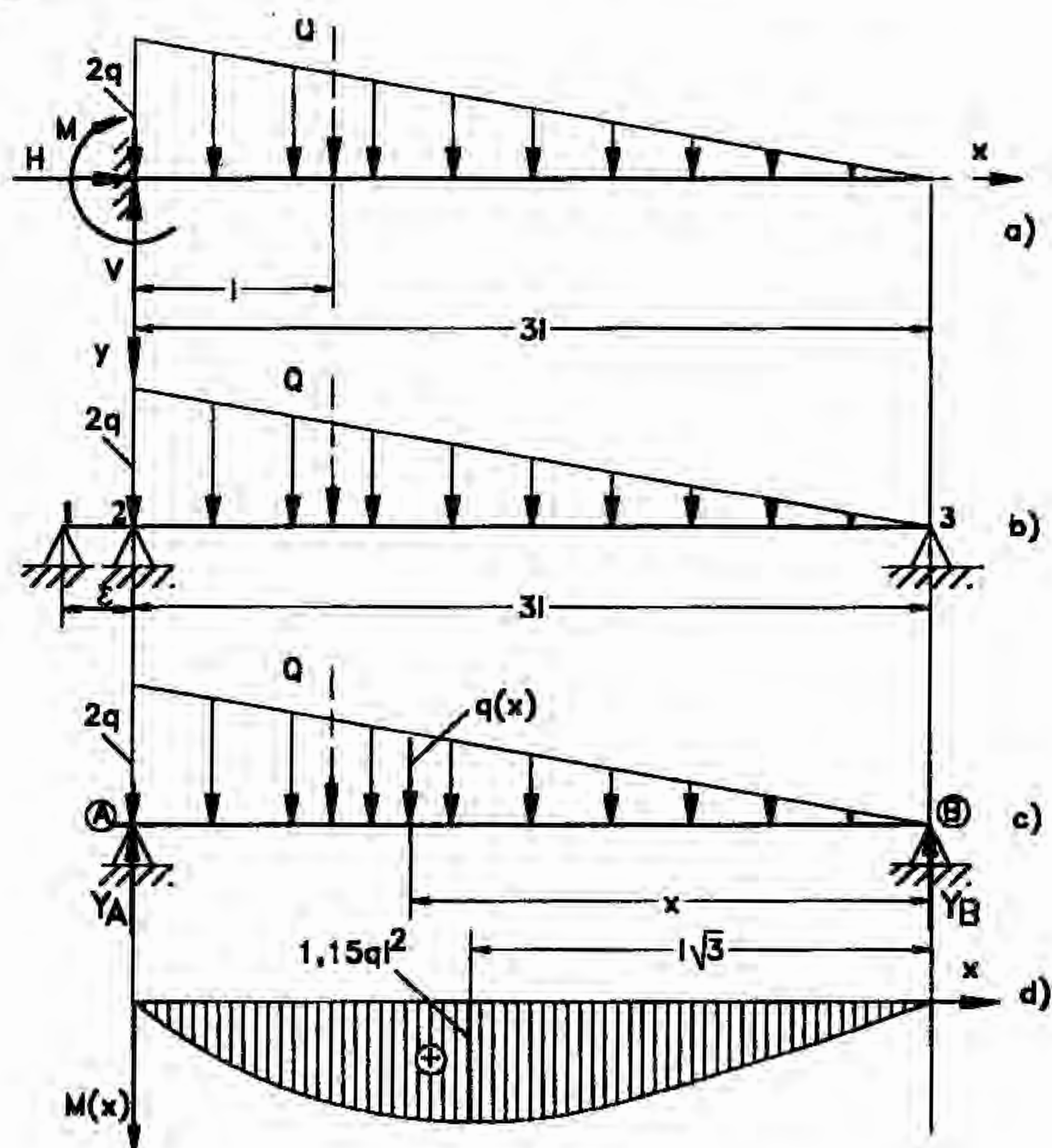


Fig. 8.11



În încastrare apar trei reacțiuni:  $V$ ,  $H$  și  $M$  care se pot determina cu ajutorul ecuațiilor de echilibru:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = 0 \\ V = \frac{2q3l}{2} = 3ql \\ M = -\frac{2q3l}{2}l = -3ql^2 \end{cases}$$

Pentru aplicarea relației lui Clebsch în vederea rezolvării problemei propuse, trebuie să transformăm încastrarea în două rezeme simple, infinit apropiate, figura 8.11b. Pentru punctele 1, 2 și 3 figurate, relația lui Clapeyron se scrie astfel:

$$6E \left( \frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} \right) = +M_1 \frac{l_1}{I_1} + 2M_2 \left( \frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + M_3 \frac{l_2}{I_2} + 6 \left( \frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2 I_2} \right)$$

În această relație se cunosc, pentru început, valorile următoarelor mărimi:  $I_1 = I_2 = I_z = \text{const.}$ ,  $l_1 = \epsilon = 0$ ,  $l_2 = 3l$ ,  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = M = -3ql^2$ ,  $M_3 = 0$ ,  $A_1 = 0$  și  $d_1 = 0$ .

Mărimile  $A_2$  și  $d_3$  reprezintă, aria diagramei de momente corespunzătoare încărcării exterioare de pe regiunea 2-3, respectiv, distanța de la centrul de greutate al acestei arii la punctul 3. Pentru aflarea acestor mărimi se trasează diagrama de momente respectivă.

În figura 8.11c se prezintă regiunea 2-3 cu încărcarea exterioară pentru care se poate scrie:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ Y_A + Y_B = 3ql \\ Y_A 3l - 3ql \cdot 2l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_B = ql \\ Y_A = 2ql \end{cases}$$

Pentru secțiunea  $x$  figurată în 8.11c, momentul încovoiător va fi:

$$M(x) = Y_B x - q(x) \frac{x}{2} \frac{x}{3} = qlx - \frac{qx^3}{9l} \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3l) = 0 \end{cases}$$

$$M'(x) = ql - \frac{qx^2}{3l} = 0 \Rightarrow x = l\sqrt{3} \in [0, 3l], \quad M(l\sqrt{3}) = 1,15ql^2$$

Diagrama de momente respectivă, este prezentată în figura 8.11d.

Aria diagramei de momente pentru această regiune va fi:



$$A_2 = \int_0^{3l} M(x) dx = \int_0^{3l} \left( qlx - \frac{qx^3}{9l} \right) dx = \frac{9ql^3}{4}$$

iar poziția centrului de greutate al acestei diagrame față de punctul 3

este:

$$d_3 = \frac{\int_0^{3l} M(x) x dx}{\int_0^{3l} M(x) dx} = \frac{\int_0^{3l} \left( qlx^2 - \frac{qx^4}{9l} \right) dx}{\frac{9ql^3}{4}} = \frac{8}{5} l$$

Introducând toate datele cunoscute în relația lui Clapeyron se obține:

$$6Elz \left( -\frac{v_3}{3l} \right) = 2(-3ql^2)3l + 6 \frac{9ql^3}{4 \cdot 3l} \frac{8l}{5}$$

de unde rezultă:

$$v_3 = \frac{27}{5} \frac{ql^4}{Elz}$$

Pentru determinarea oricărei alte săgeți pentru o secțiune a barei din figura 8.11, trebuie scrisă din nou relația lui Clapeyron care să cuprindă respectiva secțiune și alte două secțiuni pentru care se cunoaște săgeata. În aceste condiții, se poate folosi ca săgeată cunoscută, cea din capătul liber care tocmai a fost determinată.

### 8.6. Teorema lui Castigliano

Se consideră un corp solid, omogen și izotrop, solicitat în domeniul elastic de un sistem de sarcini exterioare aflate în echilibru static, figura 8.12a.

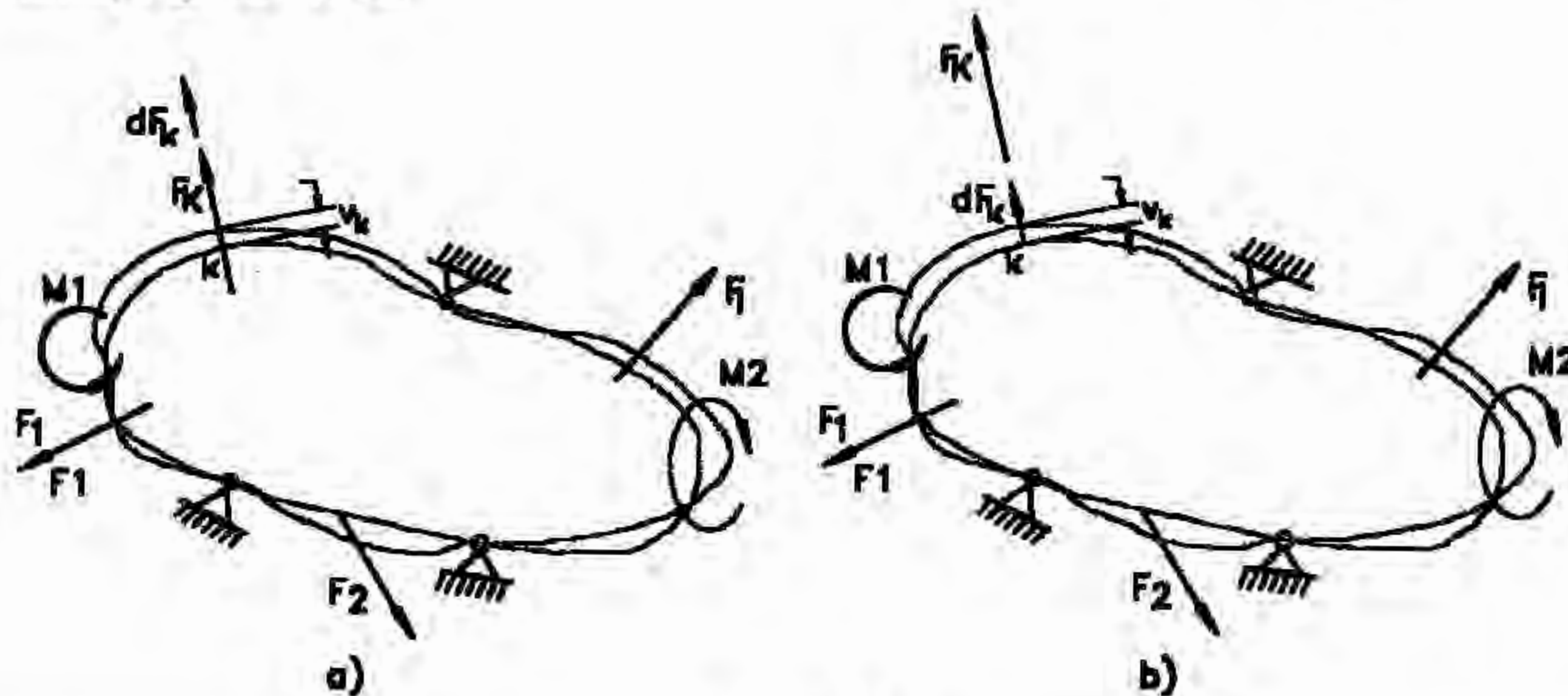


Fig. 8.12



Legăturile fiind fixe, lucrul mecanic este dat numai de sarcinile efectiv aplicate din exterior asupra corpului solid:

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \frac{F_k v_k}{2}$$

în care  $v_k$  reprezintă deplasarea corpului în dreptul și pe direcția sarcinii  $F_k$ . S-a considerat că are loc o creștere lentă în timp a intensității sarcinilor de la valoarea zero la valoarea maximă. Având în vedere ipotezele menționate, lucrul mecanic al sarcinilor exterioare se transformă integral în energie internă de deformare:  $L_0 = U_0$ .

Se consideră același corp solid în două stări echivalente.

*In prima situație*, acționează sistemul de sarcini exterior  $F_1 \dots F_k \dots F_n$  la care se mai adaugă o creștere a sarcinii  $F_k$  cu cantitatea  $dF_k$ . Energia internă de deformare se va modifica, în mod corespunzător, cu cantitatea suplimentară:

$$U_s = \frac{\partial U}{\partial F_k} dF_k \quad (8.9)$$

*In a doua situație*, se consideră că acționează, mai întâi, sarcina elementară  $dF_k$  singură asupra întregului corp. Deformațiile produse de această sarcină asupra corpului sunt neglijabile și de asemenea lucrul mecanic pe care îl produce este neglijabil:

$$l = \frac{dF_k dv_k}{2} \cong 0$$

După aplicarea acestei sarcini, se aplică asupra corpului sistemul de sarcini  $F_1 \dots F_k \dots F_n$  care va deforma corpul în mod aproape identic cu prima situație. În schimb, sarcina  $dF_k$ , ce solicită corpul la întreaga ei intensitate încă de la începutul aplicării sistemului de sarcini menționat, va fi obligată să parcurgă, odată cu forța  $F_k$ , distanța  $v_k$ . Lucrul mecanic suplimentar efectuat va fi:

$$L_s = dF_k \cdot v_k \quad (8.10)$$

Cum cele două situații sunt echivalente, rezultă că lucrul mecanic suplimentar trebuie să se regăsească în energia de deformare suplimentară și ca urmare vom avea:



$$dF_k \cdot v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} dF_k$$

de unde rezultă:

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \quad (8.11)$$

Această relație arată că, derivata parțială a energiei de deformare în raport cu o sarcină oarecare  $F_k$  este egală cu deplasarea punctului corpului solid, în care acționează respectiva sarcină, calculată pe direcția și în sensul sarcinii  $F_k$ . Această definiție poartă numele de *teorema lui Castigliano*.

În cazul în care sarcina din punctul  $k$  este o forță, se poate calcula săgeata în punctul respectiv iar când sarcina este un moment se poate calcula rotirea:

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \quad \varphi_k = \frac{\partial U}{\partial M_k}$$

Acolo unde nu există sarcini concentrate, pentru calculul deplasărilor se procedează în felul următor:

-se aplică în punctul respectiv, pe direcția deplasării dorite, o sarcină  $F_0$ ;

-se efectuează calculele necesare în care se include și sarcina  $F_0$ ;

-se calculează derivata parțială a energiei în funcție de sarcina respectivă;

-la înlocuirea finală, sarcina introdusă se anulează ( $F_0=0$ ).

Pentru solicitarea de încovoiere a barelor, prin derivarea parțială a energiei de deformare se obține:

$$v_k = \sum_i \int_1 \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F_k} dx; \quad \varphi_k = \sum_i \int_1 \frac{M_{iz}(x)}{EI_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M_k} dx$$

în care  $M_{iz}(x)$  sunt momentele încovoiitoare pe fiecare regiune în parte, integrarea făcându-se pe lungimea fiecărei regiuni iar sumarea se face pentru cele  $i$  regiuni în care a fost împărțită bara.

#### Aplicație

A.8.4. Să se calculeze săgeata punctului 3 și rotirea secțiunii 2 pentru bara de secțiune constantă din figura 8.13.



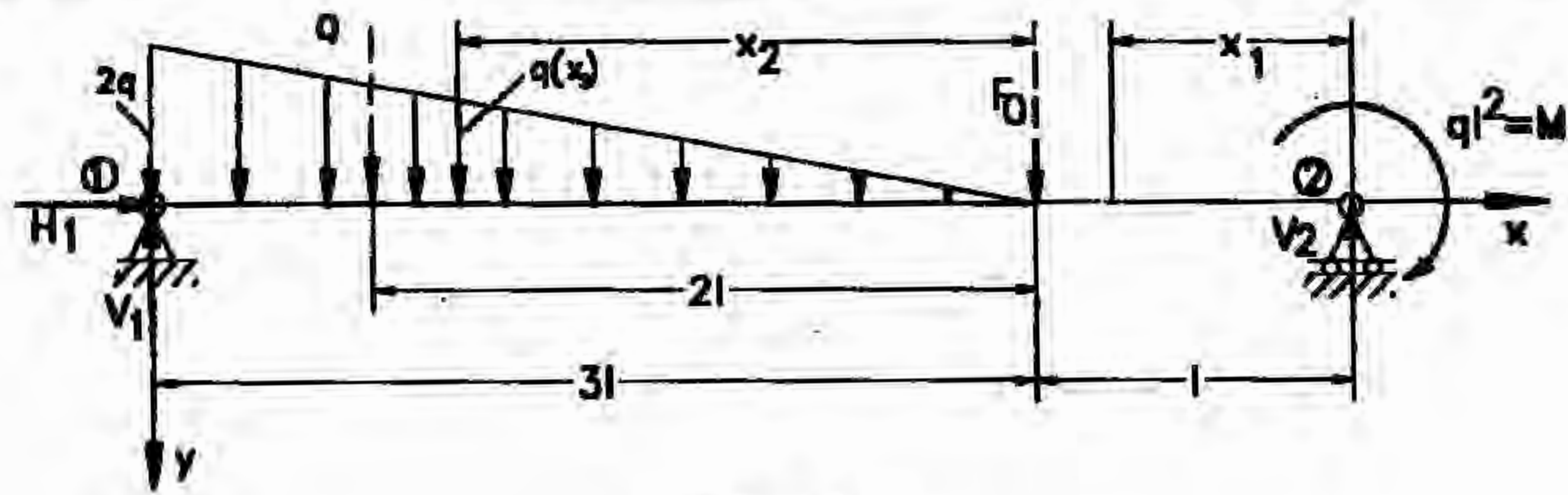


Fig. 8.13

Reacțiunile care se introduc în reazemele 1 și 2 sunt  $V_1$ ,  $H_1$  și  $V_2$ . Acestea se pot determina pe baza ecuațiilor de echilibru astfel:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 = 3ql \\ V_1 4l - 3ql 3l + ql^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_2 = ql \\ V_1 = 2ql \end{cases} \quad (8.12)$$

Se constată că, avem nevoie pentru determinarea săgeții în punctul 3 de o forță tăietoare  $F_0$ , arbitrar introdusă. În consecință, sistemul de sarcini exterior se schimbă și odată cu acesta și reacțiunile corespunzătoare din reazeme. În aceste condiții, ecuațiile de echilibru se pot scrie astfel:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 = 3ql + F_0 \\ V_1 4l - 3ql 3l - F_0 l + ql^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_2 = ql - \frac{F_0}{4} \\ V_1 = 2ql + \frac{F_0}{4} \end{cases} \quad (8.13)$$

Având în vedere faptul că avem totuși  $F_0=0$ , prin înlocuirea acestei valori în sistemul (8.13) rezultatele trebuie să fie aceleași cu cele din sistemul (8.12).

Aplicând relația lui Castigliano, săgeata în punctul 3 se poate scrie astfel:

$$v_3 = \sum \int_1 \frac{M(x)}{EIz} \frac{\partial M(x)}{\partial F_0} dx \quad (8.14)$$



Pentru rezolvarea acestei integrale avem nevoie de expresia momentelor  $M(x)$  pe fiecare din cele două regiuni ale barei și de asemenea trebuie să determinăm derivatele parțiale ale momentelor respective în funcție de forța  $F_0$ .

$$x_1 \in [0, l] \begin{cases} M(x_1) = ql(x_1 - l) - \frac{F_0}{4} x_1 \\ \frac{\partial M(x_1)}{\partial F_0} = -\frac{x_1}{4} \end{cases} \quad x_2 \in [0, 3l] \begin{cases} M(x_2) = qlx_2 - \frac{qx_2^3}{9l} - \frac{F_0}{4}(1 + 5x_2) \\ \frac{\partial M(x_2)}{\partial F_0} = -\frac{1 + 5x_2}{4} \end{cases}$$

Având în vedere faptul că  $E \cdot I_z = \text{const.}$  și introducând expresiile obținute pentru momentul  $M(x)$  și derivata parțială a acestuia în raport cu  $F_0$  în relația (8.14), se obține:

$$v_3 = \frac{1}{EI_z} \left\{ \int_0^l ql(x_1 - l) \left( -\frac{x_1}{4} \right) dx_1 + \int_0^{3l} \left( qlx_2 - \frac{qx_2^3}{9l} \right) \left( -\frac{1 + 5x_2}{4} \right) dx_2 \right\}$$

în care s-a considerat  $F_0 = 0$ . După efectuarea calculelor se obține:

$$v_3 = -5 \frac{ql^4}{EI_z}$$

Pentru calculul rotirii secțiunii 3, nu se va considera în calculul reacțiunilor valoarea  $ql^2$  a momentului din punctul respectiv, acesta notându-se pentru început cu  $M$ . Când se va ajunge la calculul integralelor se va înlocui  $M$  cu  $ql^2$ . Deoarece, se poate considera că avem o nouă încărcare ( $M$  în loc de  $ql^2$  în punctul 3) ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 + V_2 = 3ql \\ V_1 4l - 3ql 3l + M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_2 = \frac{3ql}{4} + \frac{M}{4l} \\ V_1 = \frac{9ql}{4} - \frac{M}{4l} \end{cases} \quad (8.15)$$

Evident că, prin înlocuirea lui  $M$  cu  $ql^2$  în sistemul (8.15) trebuie să se ajungă la sistemul (8.12).

Momentele încovoietoare pe cele două regiuni ale barei și derivatele parțiale ale acestora în raport cu momentul  $M$  sunt:



$$\begin{aligned}
 x_1 \in [0, 1] \left\{ \begin{aligned} M(x_1) &= \frac{3qlx_1}{4} + \frac{Mx_1}{4l} - M \\ \frac{\partial M(x_1)}{\partial F_0} &= \frac{x_1}{4l} - 1 \end{aligned} \right. \\
 x_2 \in [0, 3l] \left\{ \begin{aligned} M(x_2) &= \frac{3}{4}ql(1+x_2) - \frac{qx_2^3}{9l} + \frac{M(1+x_2)}{4l} - M \\ \frac{\partial M(x_2)}{\partial F_0} &= \frac{x_2}{4l} - \frac{3}{4} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Având în vedere că  $E \cdot I_z = \text{const.}$  și că în expresiile momentului  $M(x)$ ,  $M=ql^2$ , se obține pentru rotirea secțiunii 3:

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI_z} \left\{ \int_0^1 ql(x_1 - 1) \left( \frac{x_1}{4l} - 1 \right) dx_1 + \int_0^{3l} \left( qlx_2 - \frac{qx_2^3}{9l} \right) \left( \frac{x_2}{4l} - \frac{3}{4} \right) dx_2 \right\}$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\varphi_3 = -0,33 \frac{ql^3}{EI_z}$$

Dacă se dorește determinarea săgeții sau a rotirii în oricare altă secțiune, calculele trebuie reluate așa cum s-a arătat anterior.



## CAPITOLUL 9

### GRINZI DREPTE STATIC NEDETERMINATE

- 
- 9.1. Introducere
  - 9.2. Ridicarea nedeterminării prin metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a fibrei medii deformată
  - 9.3. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clebsch
  - 9.4. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clapeyron
  - 9.5. Ridicarea nedeterminării cu ajutorul teoremei lui Castigliano
- 

#### 9.1. Introducere

În cazul în care reacțiunile care apar în reazeme nu se pot determina numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static, avem de-a face cu o grindă *static nedeterminată*. Gradul de nedeterminare este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor (reacțiuni) și numărul de ecuații de echilibru independente care se pot scrie pentru grinda respectivă. În aceste condiții nu se pot determina nici eforturile din secțiunile transversale ale grinzilor și ca urmare nu se pot trasa diagramele de variație a acestor eforturi.

Pentru grinzile drepte, nedeterminarea apare ca urmare a legăturilor suplimentare ale acestora, în acest caz sistemul respectiv este *static nedeterminat exterior*.

Pentru ridicarea nedeterminării exterioare se folosesc mai multe metode. Toate acestea se bazează pe observația că, în încastrare, atât săgeata cât și rotirea sunt egale cu zero iar în reazemele simple și

---



articulate, săgeata este egală cu zero. După ridicarea nedeterminării, rezolvarea problemei decurge ca și în cazul sistemelor static determinate.

Metodele de ridicare a nedeterminării expuse în continuare sunt cele folosite și pentru calculul deplasărilor.

## 9.2. Ridicarea nedeterminării prin metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a fibrei medii deformate

Ecuația diferențială aproximativă a fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \quad (9.1)$$

Această ecuație se scrie pe fiecare regiune în parte având în vedere faptul că se pot schimba, fie legea de variație a momentului încovoietor, fie momentul de inerție axial, fie ambele. Integrând de două ori relația (9.1) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)_i &= -\left(\frac{1}{EI_z}\right) \int M_{z_i}(x) dx + C_i = [\varphi(x)]_i \\ [v(x)]_i &= -\left(\frac{1}{EI_z}\right) \int \left(dx \int M_{z_i}(x) dx\right) + C_i x + D_i \end{aligned} \quad (9.2)$$

ce reprezintă variația rotirii și a săgeții pe fiecare regiune  $i$  în parte.

Considerăm o grindă dreaptă așezată pe  $m$  reazeme simple și care conține  $n$  regiuni determinate de variația încărcării exterioare (inclusiv reacțiuni) sau (și) de variația de secțiune (respectiv  $I_z$ ), figura 9.1.

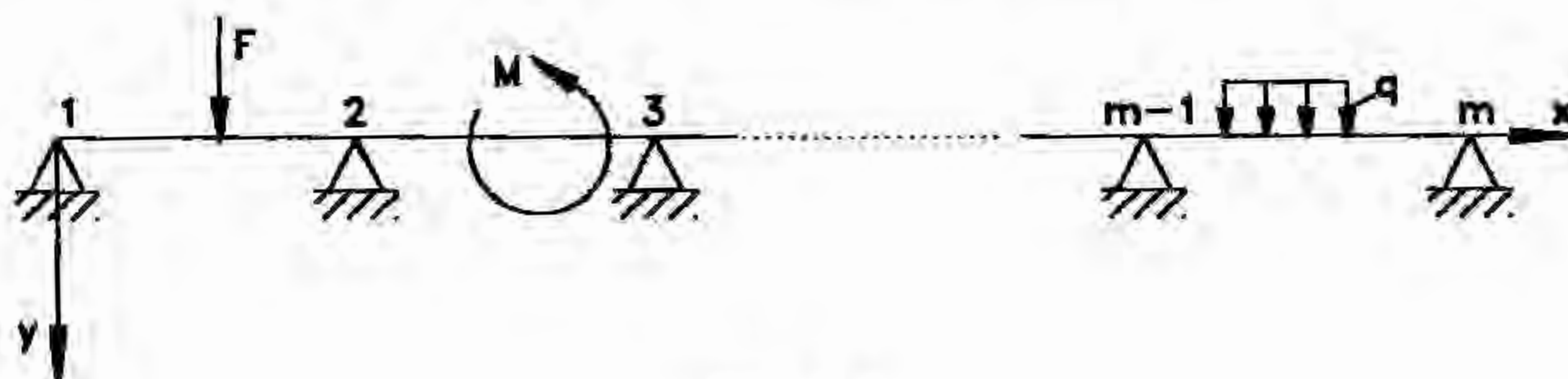


Fig. 9.1

Vom examina numărul necunoscutelor ce trebuie determinate și de asemenea numărul ecuațiilor care se pot scrie.

Numărul necunoscutelor este dat de:



- numărul reacțiunilor din reazeme care este egal cu  $m$ ;
- numărul constantelor de integrare care, pentru cele  $n$  regiuni, este egal cu  $2n$ .

Numărul ecuațiilor este format din:

- 2 ecuații de echilibru static: ecuație de forțe după axa  $oy$  și ecuație de momente după axa  $oz$ ;
- $2(n-1)$  condiții de legătură referitoare la continuitatea fibrei medii deformată; sunt  $n-1$  secțiuni de trecere de la o regiune la alta și se impun condiții atât pentru săgeată cât și pentru rotire la fiecare din aceste secțiuni;
- $m$  condiții de reazem referitoare la condiția de săgeată nulă impusă în cele  $m$  reazeme.

Se constată că avem  $m+2n$  necunoscute și tot  $m+2n$  condiții impuse în vederea rezolvării problemei.

Presupunând că s-ar mai introduce un reazem care duce și la apariția unei regiuni în plus, atunci vom mai avea:

- reacțiuni = 1;
- constante de integrare = 2.

În schimb, orice reazem și orice regiune în plus duc la apariția și a condițiilor necesare pentru determinarea necunoscutelor suplimentare:

- condiții de reazem = 1;
- condiții de continuitate = 2.

Se constată că, pe baza integrării ecuației fibrei medii deformată se poate ridica nedeterminarea indiferent de gradul acesteia. Se recomandă însă ca utilizarea acestei metode să se facă în cazul barelor cu puține regiuni pentru ca numărul ecuațiilor de rezolvat să nu devină prea mare. Pentru utilizarea acestei metode la barele ce conțin un număr mare de regiuni se recomandă utilizarea programelor de calcul specializate în vederea rezolvării sistemului de ecuații respectiv.

### *Aplicație*

**A.9.1.** O grindă dreaptă, de secțiune constantă, este încastrată la un capăt, simplu rezemată la celălalt și solicitată de o sarcină uniform distribuită de intensitate  $q$ , figura 9.2. Se cere să se determine reacțiunile din reazeme.



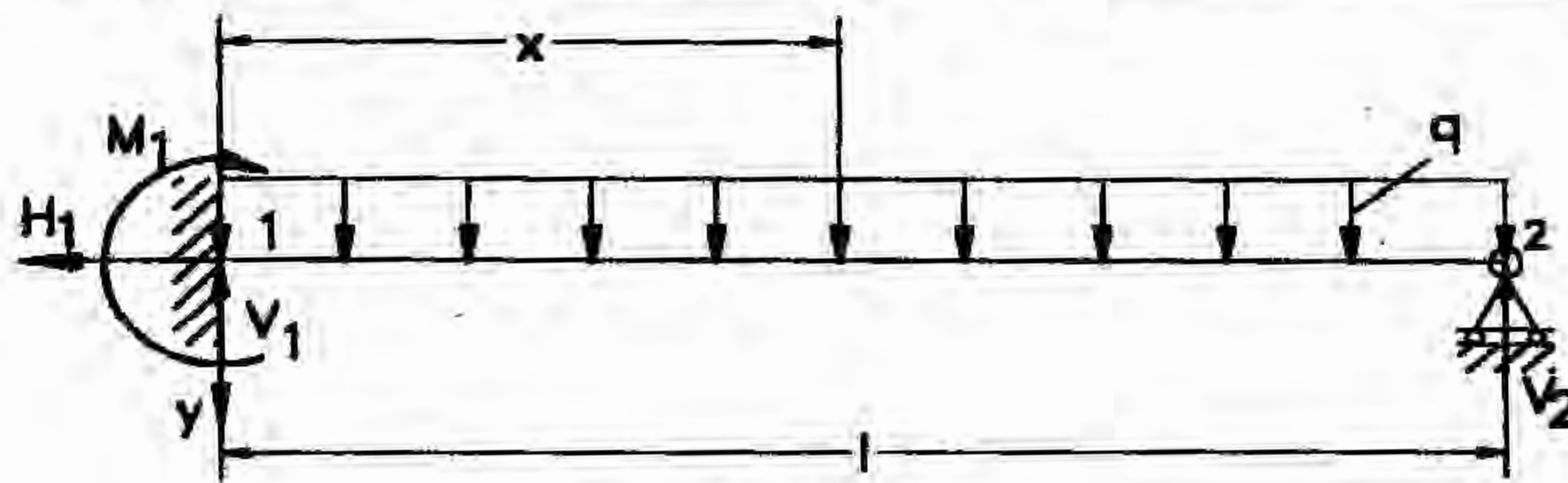


Fig. 9.2

Se constată că apar trei reacțiuni în încastrare și o reacțiune în reazemul simplu.

Ecuatiile de echilibru care se pot scrie sunt următoarele:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ ql - V_1 - V_2 = 0 \\ V_2 l - \frac{ql^2}{2} - M_1 = 0 \end{cases}$$

Ca urmare, rămân două ecuații de echilibru cu trei necunoscute. Deci, problema este simplu static nedeterminată. Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare  $x$  este:

$$M(x) = M_1 + V_1 x - \frac{qx^2}{2}$$

de unde ecuația diferențială a fibrei medii deformate:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_1 + V_1 x - \frac{qx^2}{2}}{EI_z}$$

Prin integrare se obține:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z} \left( -M_1 x - V_1 \frac{x^2}{2} + q \frac{x^3}{6} + C \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left( -M_1 \frac{x^2}{2} - V_1 \frac{x^3}{6} + q \frac{x^4}{24} + Cx + D \right)$$

Pe lângă reacțiunea rămasă în plus din ecuațiile de echilibru mai trebuie determinate și cele două constante de integrare  $C$  și  $D$ . Ca



urmare, va trebui să impunem 3 condiții. Acestea sunt toate condiții de rezemare întrucât avem o singură regiune, deci nu putem impune condiții de continuitate.

Condițiile de rezemare sunt:

$$- \text{pentru } x = 0 \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$- \text{pentru } x = l \quad v(l) = 0$$

de unde rezultă, în ordine:

$$\begin{cases} C = 0; & B = 0; & 0 = -M_1 \frac{l^2}{2} - V_1 \frac{l^3}{6} + q \frac{l^4}{24} \end{cases}$$

Ultima ecuație alături de cele de echilibru vor permite determinarea reacțiunilor. Acestea sunt:  $V_1 = \frac{5ql}{8}$ ,  $V_2 = \frac{3ql}{8}$  și  $M_1 = -\frac{ql^2}{8}$ .

Constantele de integrare  $C$  și  $D$  sunt egale cu zero pentru că, așa cum s-a menționat, ele sunt strict proporționale cu rotirea, respectiv săgeata, în origine. Cum originea s-a ales în încastrare era evident că, cele două constante de integrare trebuiau să fie nule.

### 9.3. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clebsch

Pentru ridicarea nedeterminării prin metoda Clebsch se folosește procedeul utilizat la calculul deplasărilor prin aceeași metodă. Se urmărește respectarea cu strictețe a tuturor etapelor de lucru impuse în cadrul aplicării acestei metode.

Fie grinda de secțiune constantă din figura 9.1 care este sprijinită pe  $m$  reazeme. În mod asemănător ca la determinarea deplasărilor prin metoda Clebsch, se va scrie expresia momentului pentru ultimul câmp al barei, relativ la originea aleasă. Se va scrie apoi, expresia diferențială aproximativă a fibrei medii deformată care se va integra de două ori. Se vor obține succesiv ecuațiile pentru rotiri și săgeți, valabile pentru ultima regiune iar prin particularizare corespunzătoare, și pentru celelalte regiuni ale barei.

În afară de cele  $m$  reacțiuni ce trebuiesc determinate mai apar și constantele de integrare  $C$  și  $D$ . Pentru rezolvarea problemei vom avea nevoie de  $m+2$  ecuații. Aceste ecuații sunt:



- două ecuații de echilibru: de forțe după axa  $oy$  și de momente după axa  $oz$ ;

-  $m$  condiții de reazem impuse deplasărilor. Dacă sunt numai reazeme simple, în toate cele  $m$  reazeme se va impune, prin particularizare corespunzătoare, ca săgeata să fie zero. În cazul în care avem și încastrare se impune ca aici și rotirea să fie zero.

În aceste condiții, numărul necunoscutelor, reacțiuni și constante de integrare, devine egal cu numărul ecuațiilor și ca urmare problema poate fi rezolvată.

*Observație.*

Orice reazem în plus care duce la apariția unei necunoscute în plus, introduce odată cu el și condiția necesară pentru ca acea necunoscută să poată fi determinată.

*Aplicație*

A.9.2. O grindă dreaptă, de secțiune constantă, este sprijinită pe trei reazeme, două simple și unul articulat și solicitată ca în figura 9.3. Se cere să se determine reacțiunile din reazeme.

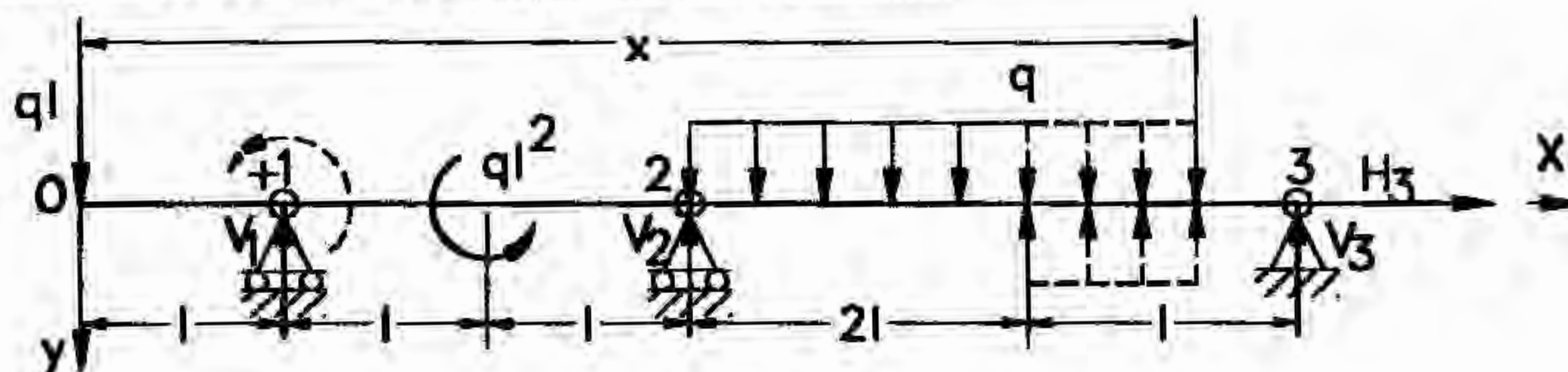


Fig. 9.3

Reacțiunile introduse în reazeme ca urmare a solicitării exterioare sunt:  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  și  $H_3$ .

Ecuațiile de echilibru static sunt următoarele:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_3 = 0 \\ ql + 2ql - V_1 - V_2 - V_3 = 0 \\ ql^2 + 2ql^2 - 2ql \cdot 3l + V_3 5l + V_2 2l = 0 \end{cases}$$

Se constată că rămân în discuție ultimele două ecuații ce conțin trei necunoscute:  $V_1$ ,  $V_2$  și  $V_3$ . Problema este deci, simplu static



nedeterminată. Vom recurge la metoda Clebsch pentru ridicarea nedeterminării.

Originea se alege în capătul din stânga al barei și ca urmare, în ultima regiune din apropierea capătului din dreapta vom face o secțiune. Momentul încovoietor față de această secțiune, scris după regulile enunțate anterior, va fi:

$$M(x) = -qlx + V_1(x-1) - 2ql^2(x-2l)^0 + V_2(x-3l) - q \frac{(x-3l)^2}{2} + q \frac{(x-5l)^2}{2}$$

Expresiile deplasărilor vor fi date de relațiile:

$$(Elz)\varphi(x) = ql \frac{x^2}{2} - V_1 \frac{(x-1)^2}{2} + 2ql^2(x-2l) - V_2 \frac{(x-3l)^2}{2} + q \frac{(x-3l)^3}{6} - q \frac{(x-5l)^3}{6} + C$$

$$(Elz)v(x) = ql \frac{x^3}{6} - V_1 \frac{(x-1)^3}{6} + 2ql^2 \frac{(x-2l)^2}{2} - V_2 \frac{(x-3l)^3}{6} + q \frac{(x-3l)^4}{24} - q \frac{(x-5l)^4}{24} + Cx + D$$

Pe lângă reacțiuni, mai trebuiesc determinate și constantele de integrare C și D. Astfel, vom avea nevoie de trei condiții pentru a rezolva problema. Acestea vor fi condițiile de rezemare, respectiv, în toate cele trei reazeme săgeata este egală cu zero:

$$x=1 \Rightarrow v(x)=0$$

$$x=3l \Rightarrow v(x)=0$$

$$x=6l \Rightarrow v(x)=0$$

Impunând aceste condiții în relațiile care dau rotirea și săgeata va rezulta:

$$\begin{cases} 0 = ql \frac{l^3}{6} + Cl + D \\ 0 = ql \frac{27l^3}{6} - V_1 \frac{8l^3}{6} + 2ql^2 \frac{ql^2}{2} + C \cdot 3l + D \\ 0 = ql \frac{216l^3}{6} - V_1 \frac{125l^3}{6} + 2ql^2 \frac{16l^2}{2} - V_2 \frac{27l^3}{6} + q \frac{81l^4}{24} - q \frac{l^4}{24} + C \cdot 6l + D \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații împreună cu ecuațiile de echilibru, se vor obține următoarele rezultate:  $A = -1,06ql^3$ ,  $B = 0,9ql^4$ ,  $V_1 = 2,4ql$ ,  $V_2 = 0$  și  $V_3 = 0,6ql$ .

Se observă că rotirea în origine este  $\varphi_0 = -1,06 \frac{ql^3}{Elz}$  iar săgeata în

origine este  $v_0 = 0,9 \frac{ql^4}{Elz}$ . Prin introducerea constantelor de integrare C



și  $D$  se pot determina, prin particularizare, deplasările în orice punct al barei. Astfel, metoda Clebsch prezintă avantajul că, odată cu efectuarea calculelor pentru ridicarea nedeterminării, se determină și expresiile necesare pentru determinarea săgeților și ale rotirilor în oricare punct al barei.

#### 9.4. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clapeyron

O problemă este static nedeterminată dacă numărul de reazeme pe care se sprijină bara se regăsește într-una din următoarele situații:

- mai mult de două reazeme simple;
- mai mult de o încastrare.

Astfel, pentru ca problema să fie static nedeterminată trebuie să avem cel puțin trei reazeme simple sau cel puțin o încastrare și un reazem simplu.

Dacă ecuația lui Clapeyron, descrisă în cap. 8.5, se scrie pentru secțiunile 1, 2 și 3 luate în trei reazeme, se va obține:

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

$$0 = +M_1 \frac{l_1}{I_1} + 2M_2 \left( \frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + M_3 \frac{l_2}{I_2} + 6 \left( \frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_2}{l_2 I_2} \right)$$

denumită și ecuația celor trei momente întrucât necunoscutele în acest caz sunt momentele  $M_1$ ,  $M_2$  și  $M_3$ .

##### Observații.

1. În cazul în care avem o încastrare, aceasta se va descompune în două reazeme simple infinite apropiate. Dacă numărul reazemelor este  $m$  avem de determinat  $m$  reacțiuni. Ecuațiile posibil a fi scrise sunt următoarele:

- două ecuații de echilibru (de forțe pe verticală și de momente încovoietoare);

-  $m-2$  ecuații provenite din aplicarea ecuației celor trei momente succesiv pe câte trei reazeme.

2. Momentele încovoietoare  $M_1$ ,  $M_2$  și  $M_3$ , după determinare, se vor exprima în funcție de reacțiunile din reazeme, astfel determinându-se reacțiunile respective.



*Aplicație*

A.9.3. Pentru bara din figura 9.4 se cere să se determine reacțiunile din reazeme. Bara este sprijinită pe două reazeme simple și este încastrată la un capăt.

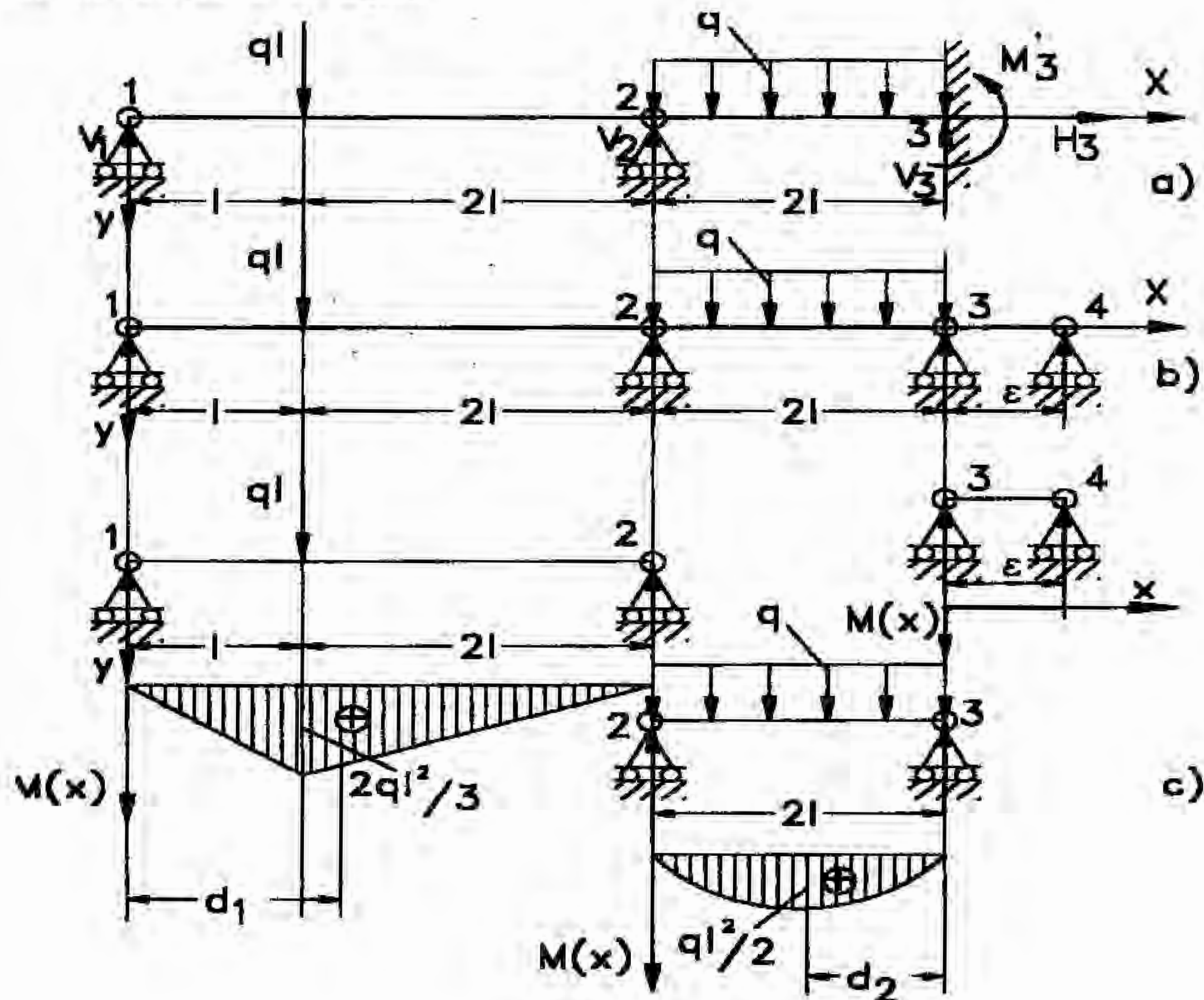


Fig. 9.4

După figurarea reacțiunilor  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $H_3$  și  $M'_3$ , se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_3 = 0 \\ V_1 + V_2 + V_3 - ql - 2ql = 0 \\ ql \cdot l - V_2 \cdot 3l - V_3 \cdot 5l + 2ql \cdot 4l - M'_3 = 0 \end{cases}$$

Din ultimile două ecuații se constată că avem patru necunoscute și ca urmare problema este dublu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se va aplica de două ori ecuația celor trei momente. Mai



întâi se transformă încastrarea din punctul 3 în două reazeme simple infinit apropiate ( $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Pentru secțiunile 1-2-3 vom avea ecuația celor trei momente scrisă astfel:  $M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6 \left( \frac{A_1 d_1}{l_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2} \right) = 0$

având în vedere faptul că  $l_1 = l_2 = \text{const.}$

În această ecuație avem:

$M_1 = 0$ ,  $M_2 = V_1 \cdot 3l - ql \cdot 2l$ ,  $M_3 = M'_3 = \text{necunoscută}$ ,  $l_1 = 3l$  și  $l_2 = 2l$ .

Pentru determinarea momentelor statice  $A_1 d_1$  și  $A_2 d_3$  ale ariilor diagramelor de momente trasate pe regiunile 1-2 și 2-3, se vor considera separat aceste regiuni cu încărcarea exterioară corespunzătoare. Diagramele de momente respective sunt trasate în figura 9.4c. Din respectivele diagrame se obține:

$$A_1 = ql^3, A_2 = \frac{2}{3} ql^3, d_1 = \frac{4}{3} l \text{ și } d_3 = l$$

Înlocuind toate datele obținute în ecuația celor trei momente, se obține relația:

$$M_3 + 15V_1 l = \frac{23}{3} ql^2 \quad (9.3)$$

Pentru secțiunile 2-3-4 ecuația celor trei momente se scrie:

$$M_2 l_2 + 2M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 + 6 \left( \frac{A_2 d_2}{l_2} + \frac{A_3 d_4}{l_3} \right) = 0$$

Mărimile care compun această relație au valorile:

$M_2 = V_1 3l - 2ql^2$ ,  $M_3 = \text{necunoscută}$ ,  $M_4 = 0$ ,  $l_2 = 2l$ ,  $l_3 = 0$ ,  $A_2 = 2ql^3/3$ ,  $d_2 = l$ ,  $A_3 = 0$  și  $d_4 = 0$ .

Prin înlocuire și după efectuarea calculelor se obține relația:

$$2M_3 + V_2 3l = ql^2 \quad (9.4)$$

Din relațiile (9.3) și (9.4), va rezulta:  $V_1 = \frac{43}{81} ql$  și  $M_3 = -\frac{8}{27} ql^2$ .

Cu ajutorul acestor rezultate, înlocuim în ecuațiile de echilibru se vor obține și celelalte necunoscute, respectiv:

$$V_2 = \frac{247}{162} ql \text{ și } V_3 = \frac{153}{162} ql.$$

Dacă problema are și alte cerințe, acestea se rezolvă ca în capitolele precedente referitoare la solicitarea de încovoiere.



A.9.4. Pentru bara de secțiune constantă din figura 9.5, se cere să se determine reacțiunile din reazeme folosind *teorema lui Castigliano*.

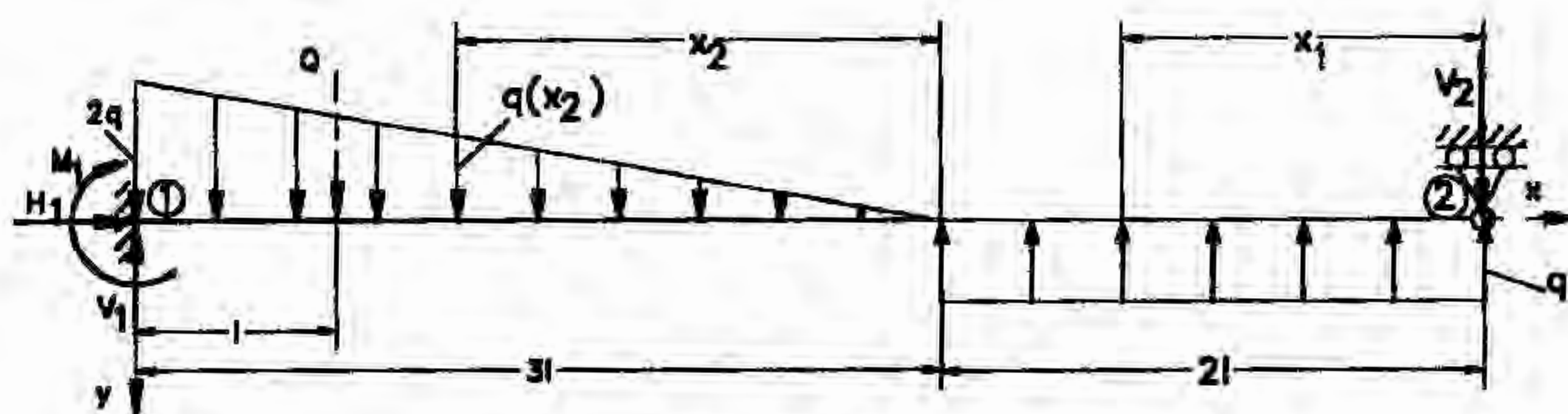


Fig. 9.5

Reacțiunile care se introduc în încastrarea 1 și în reazemul simplu 2, ca urmare a solicitării exterioare, sunt:  $V_1$ ,  $H_1$ ,  $M_1$  și  $V_2$ . Ecuațiile de echilibru care pot fi scrise în acest caz sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{z(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 - V_2 = ql \\ V_1 5l + M_1 - 3ql \cdot 4l + 2ql \cdot l = 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

Din sistemul de ecuații (9.5) se pot lua în considerare ultimele două ecuații care conțin trei necunoscute  $V_1$ ,  $V_2$  și  $M_1$ . Dintre acestea se alege una singură în vederea aplicării teoremei lui Castigliano. De exemplu, reacțiunea  $V_2$ . În raport cu forța  $V_2$ , relația dată de Castigliano se poate scrie:

$$v_2 = \sum \int_1 \frac{M(x)}{EI_z} \frac{\partial M(x)}{\partial V_2} dx = 0$$

Egalitatea cu zero este evidentă deoarece în punctul 2 este un reazem simplu ce nu permite deplasarea pe direcția reacțiunii  $V_2$ . Având în vedere faptul că, secțiunile  $x_1$  și  $x_2$  pe cele două regiuni se iau ca în figura (9.5), calculele vor deveni mai simple.

#### Observație

Dacă aceste secțiuni se iau dinspre punctul 1, în ecuațiile de momente vor apărea și reacțiunile  $V_1$  și  $M_1$ . Se atrage atenția că, în expresiile momentelor încovoietoare, nu trebuie să apară decât necunoscuta (eventual necunoscutele, pentru un grad superior de nedeterminare) aleasă la început, în cazul nostru  $V_2$ . Dacă s-ar proceda



aşa, reacţiunile  $V_1$  şi  $M_1$  trebuie exprimate în funcţie de  $V_2$  cu ajutorul relaţiilor (9.5).

În cazul nostru vom avea:

$$x_1 \in [0, 2l] \left\{ \begin{array}{l} M(x_1) = -V_2 x_1 + \frac{qx_1^2}{2} \\ \frac{\partial M(x_1)}{\partial V_2} = -x_1 \end{array} \right.$$

$$x_2 \in [0, 3l] \left\{ \begin{array}{l} M(x_2) = -V_2(2l + x_2) + 2ql(1 + x_2) - \frac{qx_2^2}{2} \\ \frac{\partial M(x_2)}{\partial V_2} = -(2l + x_2) \end{array} \right.$$

Înlocuind aceste relaţii în expresia (9.6) şi având în vedere faptul că  $Elz \neq \infty$ , va rezulta:

$$\int_0^{2l} \left( -V_2 x_1 + \frac{qx_1^2}{2} \right) (-x_1) dx_1 + \int_0^{3l} \left[ -V_2(2l + x_2) + 2ql(1 + x_2) - \frac{qx_2^2}{2} \right] [-(2l + x_2)] dx_2 = 0$$

După unele calcule simple se obţine:  $V_2 = 0,8ql$ .

Din ecuaţiile de echilibru date de sistemul (9.5) va rezulta:

$$V_1 = 1,8ql \text{ şi } M_1 = ql^2.$$

Calculul reacţiunilor este prima etapă în rezolvarea majorităţii problemelor de rezistenţă. Dacă problema are şi alte cerinţe, acestea se rezolvă în conformitate cu cele arătate în capitolele anterioare.



## CAPITOLUL 10

### FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

#### 10.1. Introducere

#### 10.2. Forța critică de flambaj

#### 10.3. Lungimi de flambaj

#### 10.4. Metode de rezolvare a problemelor de flambaj

#### 10.1. Introducere

Așa cum s-a arătat în capitolele anterioare, atunci când solicitarea exterioară nu depășește o anumită valoare, corpurile solide se deformează elastic. O particularitate în acest sens o constituie solicitarea la compresiune a barelor drepte zvelte,  $l \gg d$ , în care  $l$  este lungimea barei iar  $d$  reprezintă dimensiunea secțiunii transversale. În cadrul solicitării de compresiune deformarea se produce astfel încât axa medie a barei rămâne tot dreaptă. Dacă forța de compresiune atinge o valoare critică  $F_{cr}$ , axa medie a barei își poate pierde stabilitatea trecând într-o altă poziție, figura 10.1.

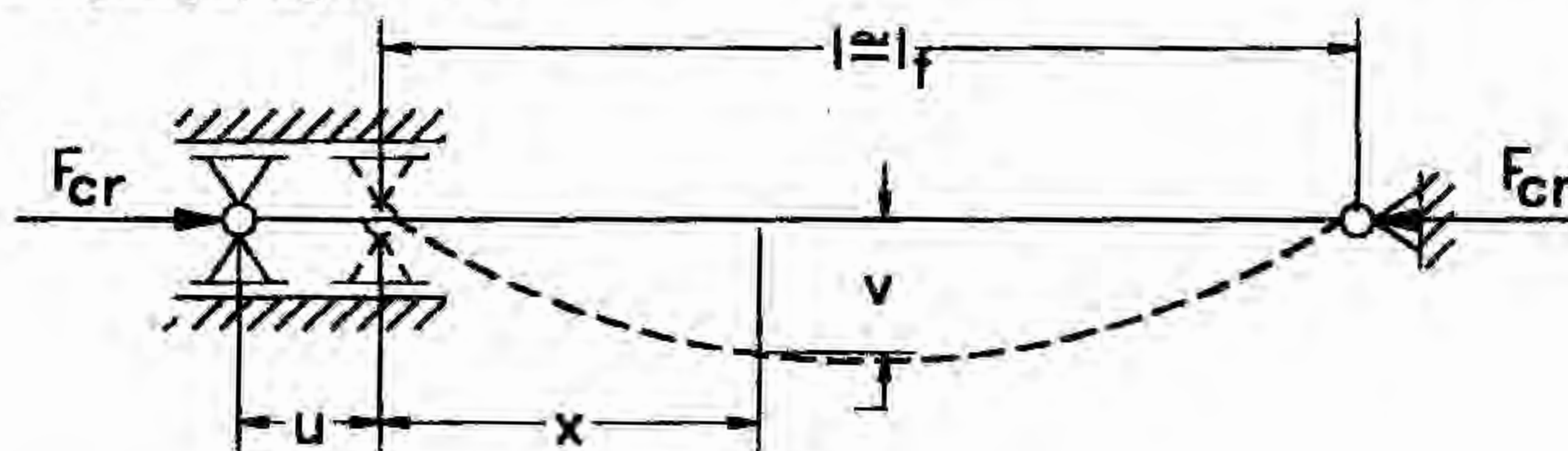


Fig. 10.1



Acest fenomen de pierdere a stabilității care poate duce oricând la distrugerea barei poartă numele de *flambaj*.

O teorie exactă care să caracterizeze fenomenul de flambaj conduce la relații neliniare complicate. Teoriile aproximative elaborate stabilesc, prin calcule simple, mărimile cele mai importante ale fenomenului de flambaj. Cu ajutorul teoriei de ordinul II, pe baza relațiilor de echilibru scrise pentru starea deformată, se pot stabili condițiile de stabilitate.

## 10.2. Forța critică de flambaj

Metoda prin care se propune a se determina forța critică de flambaj este cea care se bazează pe integrarea ecuației aproximative a fibrei medii deformată în condițiile în care se ajunge la pierderea stabilității. În acest sens se utilizează condițiile de legătură și de continuitate pentru starea deformată.

Se consideră bara articulată la ambele capete din figura 10.1. Se admite că  $u \ll l$  și ca urmare se consideră că distanța dintre cele două capete ale barei rămâne aceeași. Se neglijează greutatea proprie a barei și se admite că avem aceeași rigiditate ( $EI = \text{const.}$ ) pe întreaga lungime a barei.

Acționată cu sarcina  $F_{cr}$ , bara trece în starea de flambaj. Într-o secțiune oarecare  $x$ , axa medie se depărtează transversal față de poziția inițială cu distanța  $v$  și ca urmare în această secțiune va apărea un moment încovoietor:

$$M_i(x) = F_{cr} \cdot v$$

Ecuația diferențială a fibrei medii deformată din cadrul solicitării de încovoiere este:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_i(x)}{EI} = - \frac{F_{cr}}{EI} v \quad (10.1)$$

de unde rezultă:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0$$

în care s-a notat:

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$



Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II cu coeficienți constanți este:

$$v = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

Funcția  $v$ , reprezentând ecuația fibrei medii deformate datorită flambajului, va trebui să satisfacă cele două condiții la limită corespunzătoare barei din figura 10.1: pentru  $x=0$  și  $x=l$  vom avea  $v=0$ . Din prima condiție rezultă  $C_2=0$  iar din a doua condiție se obține relația  $C_1 \sin(kl)=0$ .  $C_1$  nu poate fi zero pentru că, în acest caz, poziția barei nu ar mai fi cea flambată și ca urmare va rezulta:

$$\sin(kl)=0 \text{ sau } kl=n\pi \text{ în care } n=1,2,\dots$$

Soluția  $n=0$  se exclude deoarece conduce la  $F_{cr}=0$ . Astfel, se obține valoarea forței critice de flambaj de forma:

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10.2)$$

Pentru  $n=1$  se obține forma de flambaj din figura 10.1. Pentru  $n=2$  se obține forma de flambaj cu două semiunde din figura 10.2a, ș.a.m.d..

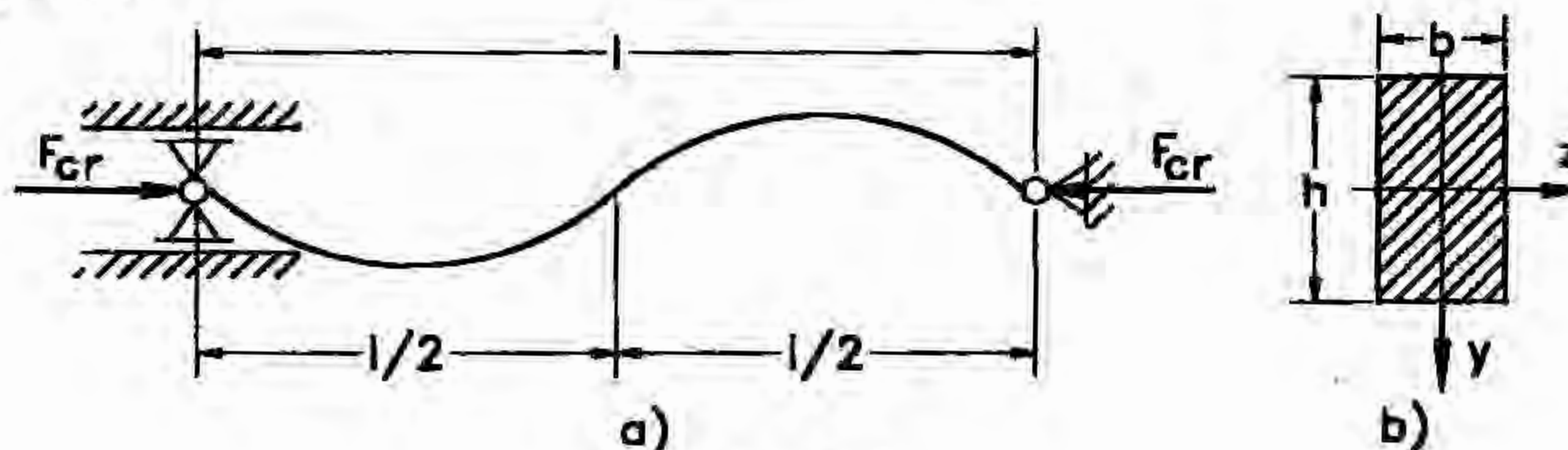


Fig. 10.2

Pentru  $n>1$  se ajunge la valori mult mai mari ale sarcinii critice de flambaj care nu se mai realizează dacă bara a ajuns să flambeze la atingerea forței critice celei mai mici. Lungimea corespunzătoare unei semiunde de flambaj, adică distanța dintre două puncte consecutive de inflexiune, se numește lungime de flambaj și se notează cu  $l_f$ . Pentru bara articulată la ambele capete avem  $l_f=l$ .

Dacă bara are condiții de legătură identice în jurul tuturor axelor centrale principale de inerție ale secțiunii transversale, pericolul de flambaj mai mare este în jurul axei pentru care se stabilește momentul de inerție axial cel mai mic,  $I_{min}$ . Astfel, pentru o secțiune dreptunghiulară



cu  $b < h$ , figura 10.2b, bara va flamba mai degrabă în jurul axei  $z$  pentru care  $I_z = \frac{hb^3}{12} < I_y = \frac{bh^3}{12}$ .

Cu aceste observații, se poate scrie relația fundamentală folosită în cadrul flambajului ca fiind:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2}$$

Această expresie folosită pentru calculul forței critice de flambaj poartă numele de *relația lui Euler*.

### 10.3. Lungimi de flambaj

Se consideră bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt solicitată la compresiune de o sarcină  $F_{cr}$  care poate produce pierderea stabilității, figura 10.3.

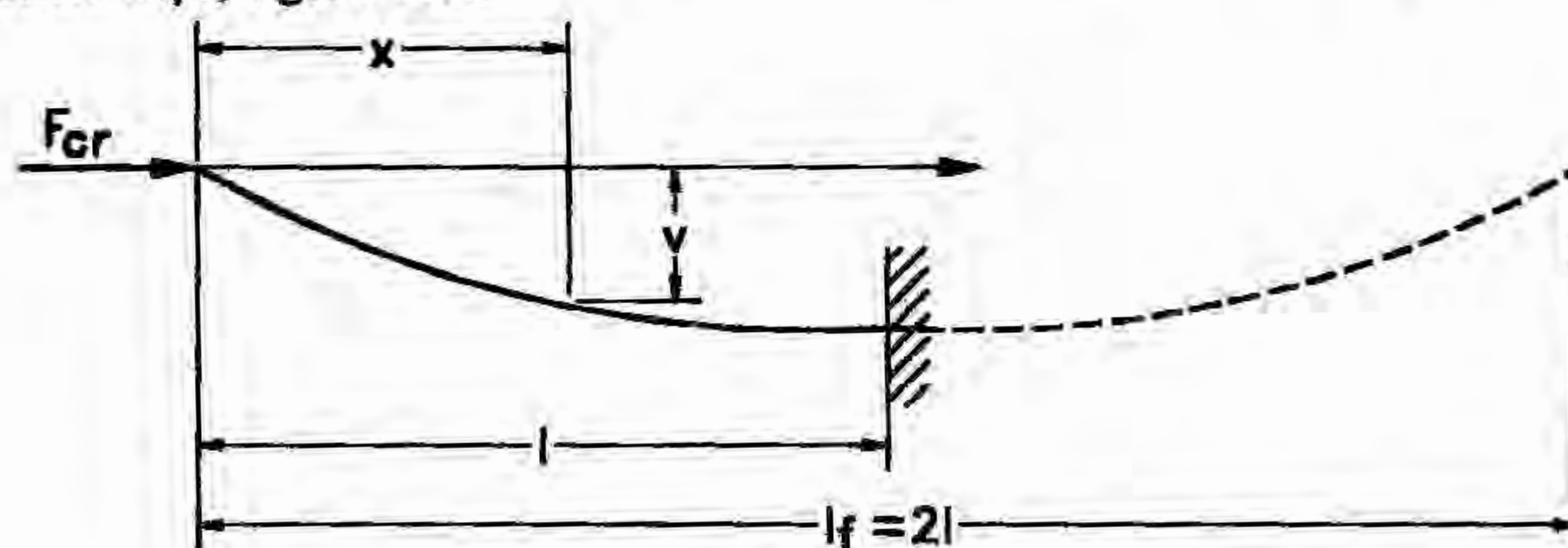


Fig. 10.3

În dreptul unei secțiuni  $x$  oarecare se introduce un moment încovoietor  $M_i = F_{cr} \cdot v$ . Cu ajutorul relației (10.1) se obține:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0$$

în care s-a notat:

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II cu coeficienți constanți este:

$$v = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$



Condițiile la limită care trebuiesc impuse în acest caz sunt:

- pentru  $x=0$ ,  $v=0$
- pentru  $x=l$ ,  $\frac{dv}{dx} = 0$

și va rezulta:

$$C_2=0 \text{ și } C_1 k \cos(kl)=0$$

Intrucât  $C_1 \neq 0$  și  $k \neq 0$  rezultă că este necesar să avem  $\cos(kl)=0$  sau

$$kl = \frac{2n-1}{2} \pi. \text{ Pentru } n=1 \text{ se obține expresia forței critice de flambaj}$$

pentru acest caz, și anume:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

de unde se deduce că lungimea de flambaj are valoarea  $l_f=2l$  deoarece bara flambează printr-o jumătate de semiundă și ne conduce din nou la relația lui Euler.

În mod asemănător se pot deduce lungimile de flambaj în alte două cazuri și anume:

- pentru bara articulată la un capăt și încastrată la celălalt:  $l_f \approx 0,7l$ , figura 10.4a;
- pentru bara încastrată la ambele capete:  $l_f=l/2$ , figura 10.4b.

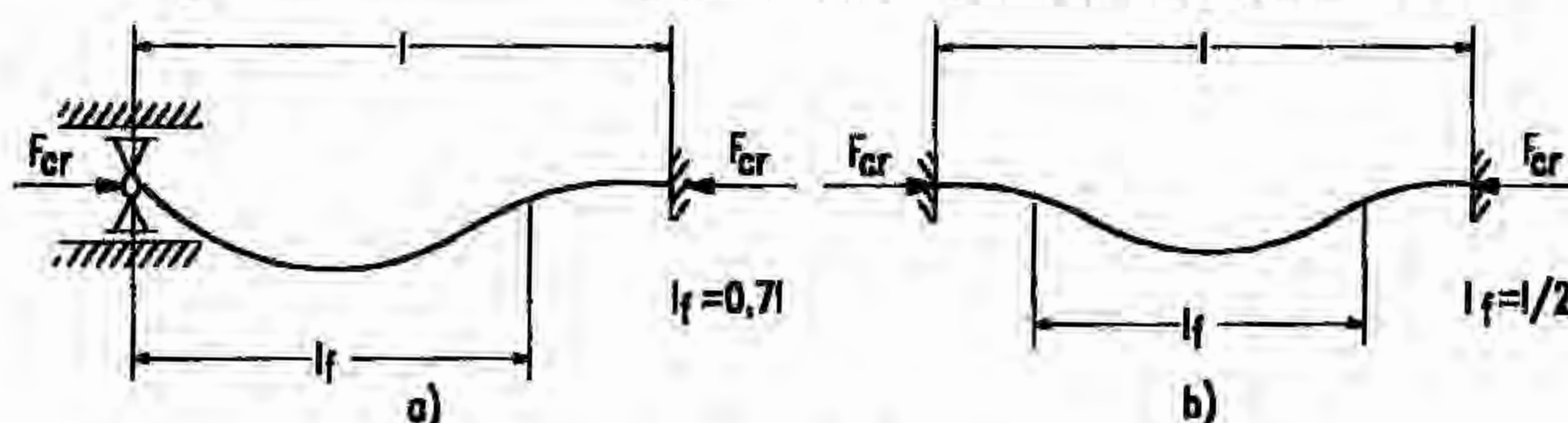


Fig. 10.4

Forței critice de flambaj îi corespunde în secțiunea transversală a barei o tensiune critică de flambaj:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{Al_f^2} = \pi^2 E \left( \frac{i_{min}}{l_f} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}$$



în care s-a notat cu  $\lambda$  raportul  $\frac{l_f}{i_{\min}}$  care se numește coeficient de zveltețe

iar  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  este raza minimă de inerție.

Relația lui Euler este valabilă dacă nu se depășește limita de proporționalitate a materialului:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_p$$

de unde rezultă  $\lambda_{\max} \geq \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$ .

Valoarea coeficientului de zveltețe  $\lambda_0$  depinde numai de material. De exemplu, pentru oțelul OL37 avem  $\lambda_0 = 105$ .

Prin urmare, coeficientul de zveltețe  $\lambda_0$  delimitează două domenii în calculul la flambaj al barelor solicitate la compresiune:

- dacă  $\lambda_{\max} > \lambda_0$  atunci flambajul se numește elastic și se poate aplica relația lui Euler;
- dacă  $\lambda_{\max} < \lambda_0$  atunci flambajul se numește elasto-plastic iar calculul se face cu ajutorul unor relații empirice ca de exemplu relația lui Temajer-Iasinski:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

în care  $a$  și  $b$  sunt coeficienți care depind de material și care au unitatea de măsură în termenii tensiunii:  $N/mm^2$ .

Pentru oțelul OL37 valorile acestor coeficienți sunt:

- $a = 304 N/mm^2$ ;
- $b = 1,12 N/mm^2$ .

Dacă bara prezintă un coeficient de zveltețe pentru care se depășește valoarea tensiunii de curgere  $\sigma_c$ , pericolul de flambaj dispare. Astfel, se limitează domeniul flambajului elasto-plastic la valori  $\lambda > \lambda_1$  în care  $\lambda_1$  este corespunzător tensiunii de curgere. Dacă  $\lambda < \lambda_1$  atunci bara se calculează numai la compresiune.



#### 10.4. Metode de rezolvare a problemelor de flambaj

Problemele care apar în cadrul flambajului pot fi de verificare sau calcul pentru dimensionare.

Prin calculul de *verificare* se urmărește determinarea coeficientului de siguranță la flambaj  $c_f$ . Bara se consideră a fi stabilă dacă acest coeficient este mai mare decât cel prescris.

Etapele de calcul în acest caz sunt următoarele:

- se calculează coeficientul de zveltețe  $\lambda$ . În funcție de valoarea acestuia avem următoarele posibilități:

1- dacă  $\lambda > \lambda_0$  calculul se conduce folosind relația lui Euler:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_f^2} \text{ și } c_f = \frac{F_{cr}}{F}$$

în care  $F$  este forța aplicată efectiv asupra barei;

2- dacă  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$  se utilizează în succesiune relațiile:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad F_{cr} = A\sigma_{cr} \text{ și } c_f = \frac{F_{cr}}{F} > c_{\text{prescris}}$$

3- dacă  $\lambda < \lambda_1$  atunci bara se calculează numai la compresiune.

Se constată că, în cadrul unei probleme de *dimensionare* nu se poate calcula de la început coeficientul de zveltețe  $\lambda$  pentru a determina domeniul în care ne aflăm. În aceste condiții se presupune pentru început că ne aflăm în domeniul elastic deci  $\lambda > \lambda_0$  și ca urmare putem folosi relația lui Euler:

$$I_{\min} = \frac{c_f F l_f^2}{\pi^2 E}$$

în care  $c_f$  este coeficientul de flambaj impus iar  $F$  este forța efectiv aplicată asupra barei. După ce s-au stabilit dimensiunile secțiunii transversale se poate calcula coeficientul de zveltețe  $\lambda$ .

Dacă  $\lambda > \lambda_0$  dimensionarea este corectă și problema este încheiată.

Dacă  $\lambda < \lambda_1$  dimensionarea se face pe baza solicitării de compresiune simple.

Dacă  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$  se utilizează în succesiune următoarele relații:

$\sigma_{cr} = a - b\lambda$  în care  $\lambda$  este cel determinat anterior (incorect de altfel) cu ajutorul relației lui Euler.



$$F_{cr} = A \sigma_{cr}$$

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F}$$

Dacă  $c_f > c_{prescris}$  dimensiunile calculate anterior se pot considera satisfăcătoare.

Dacă  $c_f < c_{prescris}$  se măresc dimensiunile secțiunii transversale și se reface calculul începând cu coeficientul de zveltețe care oricum va conduce la  $\lambda < \lambda_0$  și se va continua cu relația lui Tetmajer-Iasinski.

#### Aplicații

**A.10.1.** Să se verifice la flambaj bara de oțel OL37 din figura 10.5a având secțiunea transversală dată în figura 10.5b. Forța de compresiune aplicată este  $F=9\text{kN}$ , lungimea barei este  $l=650\text{ mm}$ , coeficientul de siguranță la flambaj se impune a fi  $c=5$  iar modulul de elasticitate longitudinal  $E=21 \cdot 10^4\text{ N/mm}^2$ . Coeficienții din relația lui Tetmajer-Iasinski sunt:  $a=304\text{ N/mm}^2$  și  $b=1,12\text{ N/mm}^2$ .

Bara se consideră a fi dublu articulată pentru flambajul după axa oz și dublu încastrată pentru flambajul după axa oy.

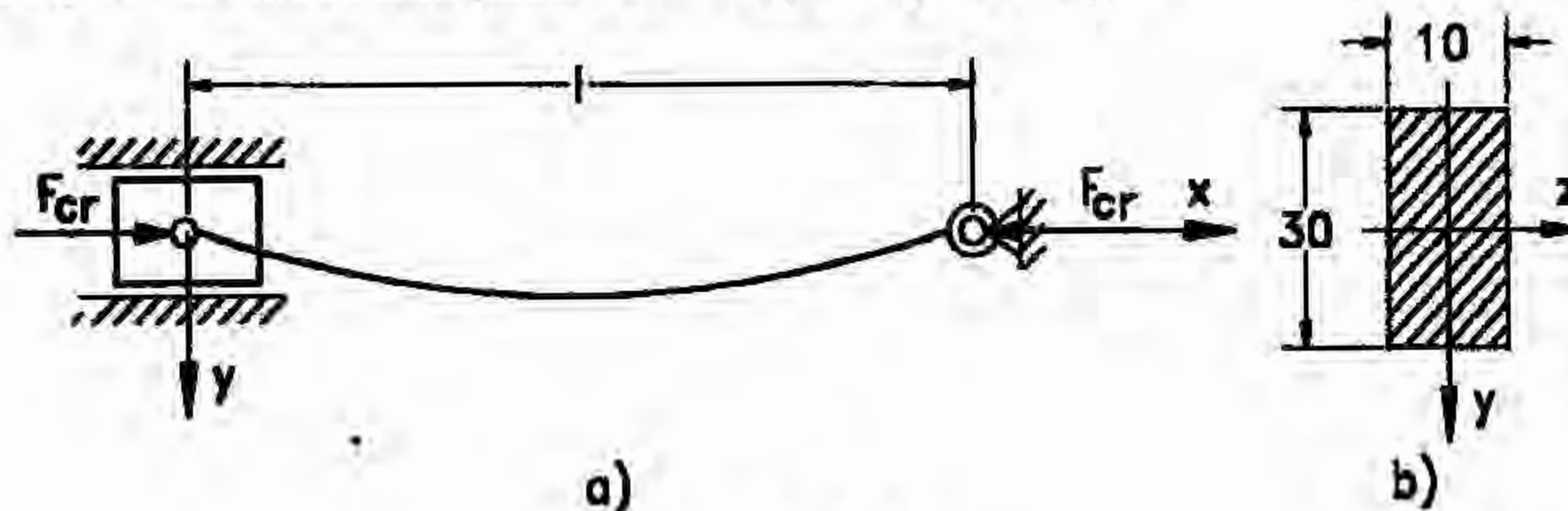


Fig. 10.5

Mai întâi se determină coeficientul de zveltețe  $\lambda$ . Pentru determinarea acestuia trebuie cunoscute mărimile  $i_z$  și  $i_y$  denumite raze de inerție:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 30^3}{12 \cdot 10 \cdot 30}} = 8,66\text{ mm}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 30}{12 \cdot 10 \cdot 30}} = 2,88\text{ mm}$$

Coeficienții de zveltețe vor fi:



$$\lambda_z = \frac{l_f}{i_z} = \frac{650}{8,66} = 75 < \lambda_0; \quad \lambda_y = \frac{l_f}{i_y} = \frac{650}{2,88} = 112,8 > \lambda_0$$

Se constată că bara poate flamba în primul rând după axa oy.

Forța critică de flambaj va fi:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 4}{12 \cdot 650^2} = 49056 \text{ N}$$

de unde rezultă coeficientul de flambaj:

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{49056}{9000} = 5,45 > c$$

Dacă se face și calculul în domeniul elasto-plastic va rezulta:

$$\sigma_{cr} = 304 - 1,12 \cdot 75 = 220 \text{ N/mm}^2$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 66000 \text{ N}$$

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{66000}{9000} = 7,33 > c$$

Ca urmare, coeficientul de siguranță este mai mare decât cel impus deci, în nici un caz nu se ajunge la flambaj.

**A.10.2.** Se cere să se dimensioneze o bară de secțiune inelară din OL37 pentru care  $d_i = 0,8D_e$ , comprimată cu o forță  $F = 15 \text{ kN}$ , dacă se impune un coeficient de siguranță  $c = 3$ . Bara este încastrată la ambele capete iar lungimea ei este  $l = 1,5 \text{ m}$ .

Având în vedere faptul că nu se cunosc dimensiunile secțiunii transversale nu se poate calcula de la început coeficientul de zveltețe pentru a constata în ce domeniu ne aflăm.

Presupunem că ne aflăm în domeniul elastic și ca urmare vom face dimensionarea pe baza relației lui Euler:

$$I_{nec} = \frac{F \cdot c \cdot l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1500}{2}\right)^2}{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4} = 12212,8 \text{ mm}^4$$

Pe de altă parte:

$$I_{nec} = \frac{\pi}{64} (D_e^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} [D_e^4 - (0,8D_e)^4] = 0,0289 D_e^4$$

Diametrul exterior al barei va fi:



$$D_e = \sqrt[4]{\frac{12212,8}{0,0289}} = 25,49 \text{ mm}$$

iar diametrul interior  $d_i = 20,39 \text{ mm}$ .

Cunoscând dimensiunile secțiunii transversale se poate calcula  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{1500 \cdot 4}{2\sqrt{25,49^2 + 20,39^2}} = 91,89 < \lambda_0 = 105$$

Se constată că  $\lambda < \lambda_0$ , ca urmare ne aflăm în domeniul flambajului elasto-plastic deci nu se putea aplica relația lui Euler. Totuși vom considera ca date de plecare valorile pentru  $d_i$ ,  $D_e$  și  $\lambda$  obținute urmând să verificăm pe baza relației lui Temajer-Iasinski dacă avem un coeficient de siguranță satisfăcător.

Tensiunea critică de flambaj va fi în acest caz:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1,12 \cdot 91,89 = 201 \text{ N/mm}^2$$

Sarcina critică de flambaj este:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 201 \cdot \frac{\pi}{4} (25,49^2 - 20,39^2) = 36953,8 \text{ N}$$

iar coeficientul de flambaj:

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{36953,8}{15 \cdot 10^3} = 2,46 < c$$

Așadar, coeficientul de flambaj determinat este mai mic decât cel impus, ca urmare se măresc dimensiunile secțiunii transversale.

De exemplu:  $D_e = 30 \text{ mm}$  și rezultă  $d_i = 24 \text{ mm}$ . În aceste condiții vom avea:

$$\lambda = \frac{1500 \cdot 4}{2\sqrt{30^2 + 24^2}} = 78$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1,12 \cdot 78 = 216,5 \text{ N/mm}^2$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 216,5 \cdot \frac{\pi}{4} (30^2 - 24^2) = 55103 \text{ N}$$

$$c_f = \frac{F_{cr}}{F} = 3,67 > c$$

Se pot adopta în cele din urmă, dimensiunile ultime ale  $D_e$  și  $d_i$ .



## CAPITOLUL 11

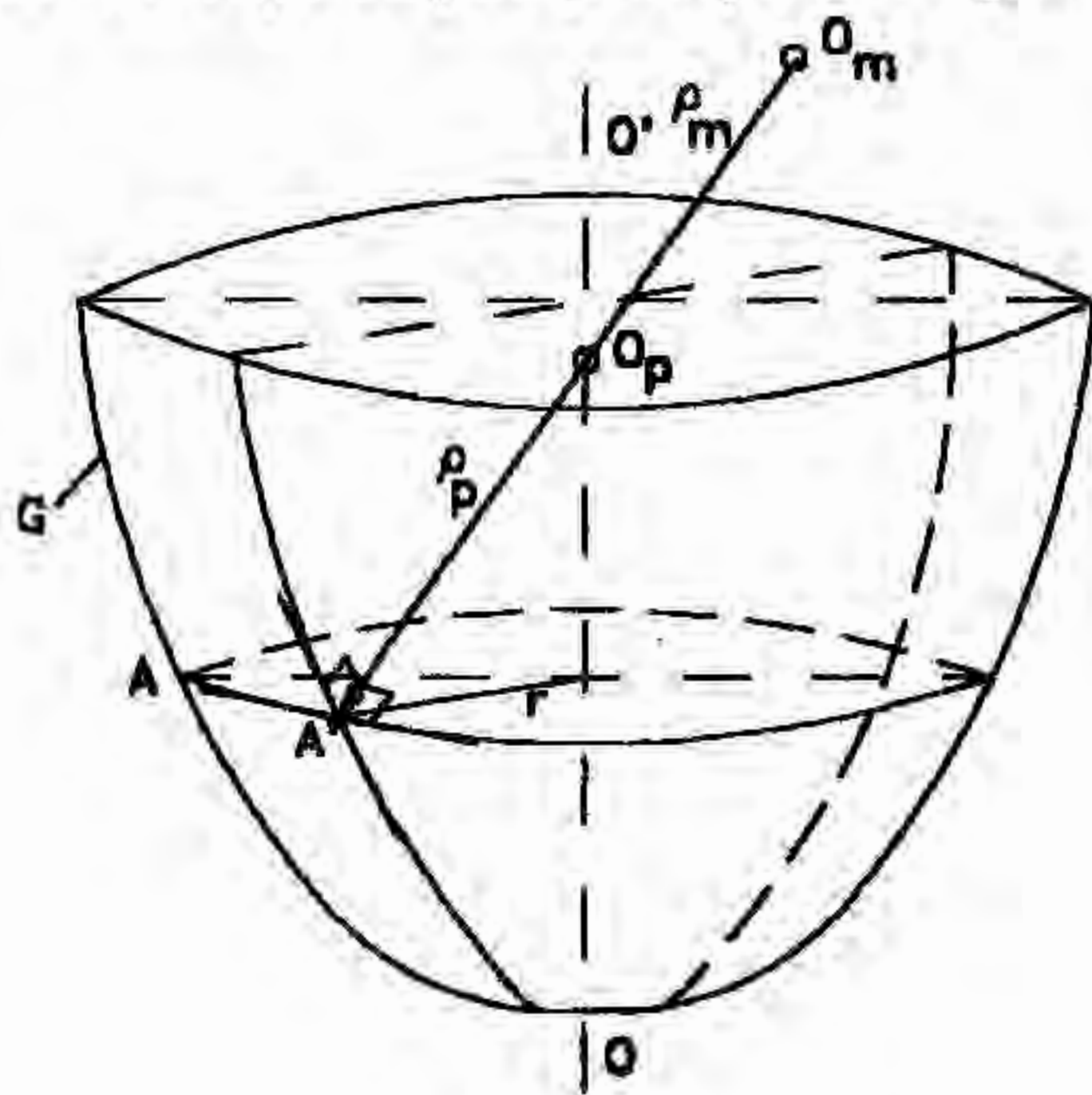
## VASE DE REVOLUTIE CU PERETI SUBTIRI

- 11.1. Introducere  
11.2. Calculul de rezistență  
11.3 Raze de curbură

## 11.1. Introdúcere

Vasele de revoluție cu pereți subțiri se folosesc pe scară largă în industria chimică și petrochimică. Ele fac parte din categoria plăcilor curbe cu grosimea constantă mică pentru care forma este definită de suprafața mediană. Aceste suprafețe se obțin prin rotația unei curbe plane în jurul unei axe numită axă de revoluție.

**Fie vasul de revoluție cu pereți subțiri din figura 11.1.**

**Fig. 11.1**



Prin rotire în jurul axei  $OO'$ , curba generatoare  $G$  dă naștere la suprafața mediană a vasului. Un punct  $A$  de pe această generatoare descrie, prin rotație, un cerc de rază  $r$  numit *cerc paralel*. Curba plană  $G$  care prin rotire generează suprafața mediană a vasului poartă numele de *meridian*.

Perpendiculara la suprafață într-un punct  $A'$  al vasului va fi perpendiculară și pe tangentele la cercul paralel și la meridian. La o anumită distanță pe această perpendiculară vom găsi centrele de curbura principale. Curbura suprafeței poate fi caracterizată prin două raze principale de curbura  $\rho_p$  și  $\rho_m$  orientate perpendicular pe cercul paralel respectiv pe meridian.

### 11.2. Calculul de rezistență al vaselor de revoluție cu pereți subțiri

Se consideră un vas de revoluție cu perete subțire de grosime constantă  $h$ , figura 11.2.

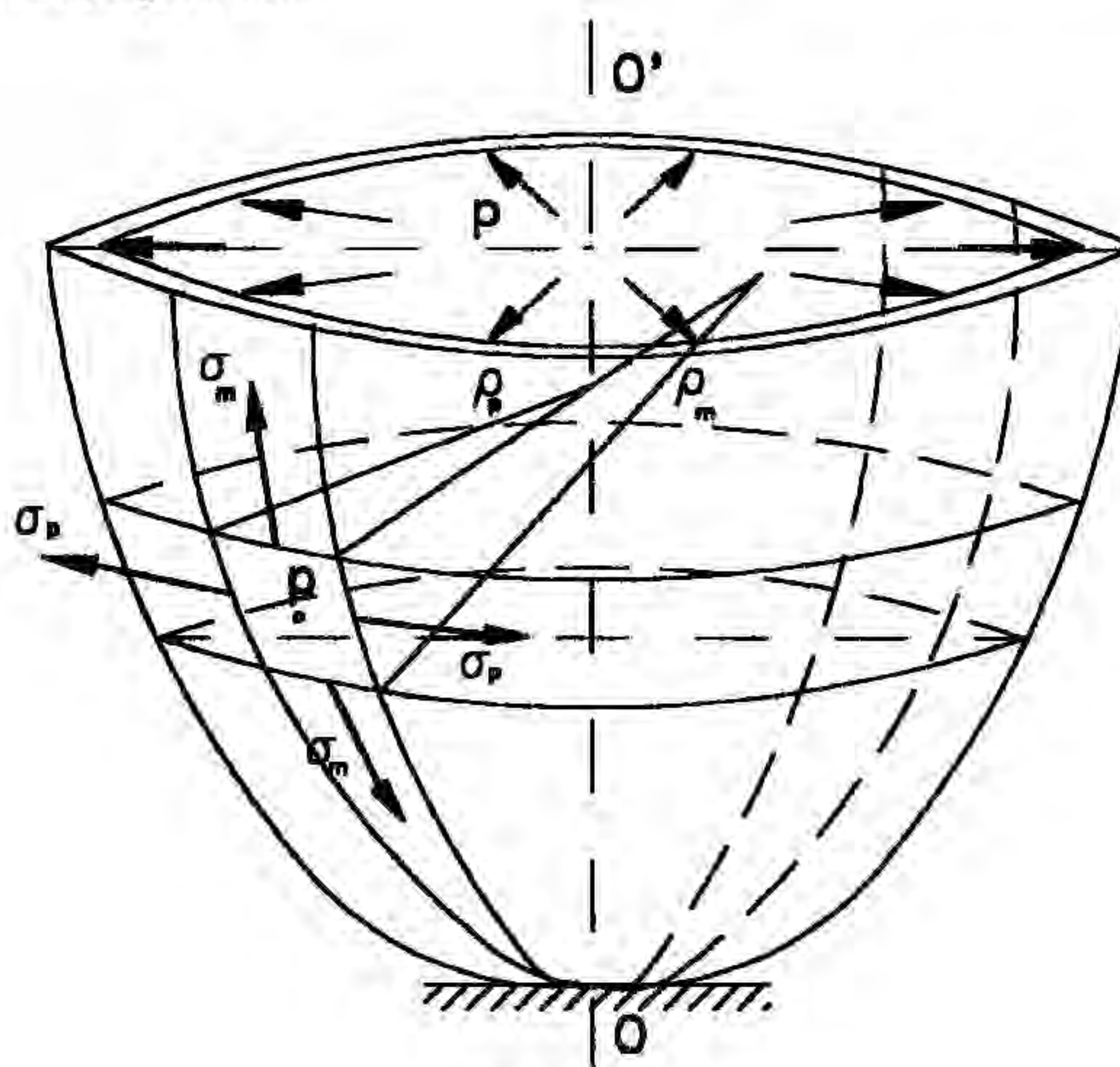


Fig. 11.2



Vasul este solicitat de o presiune interioară  $p$  dat de un mediu lichid sau gazos. Starea de solicitare este simetrică în jurul axei de rotație  $OO'$ . Construcția și încărcarea vaselor cu pereți subțiri se face astfel încât în pereții acestora să se introducă cu preponderență tensiuni de tracțiune repartizate uniform pe grosimea peretelui. Se admite că peretele vasului nu poate prelua tensiuni de încovoiere.

Cu ajutorul a două meridiane și a două cercuri paralele se izolează în jurul unui punct  $P$  al suprafeței un element infinit mic din vas, figura 11.3a.

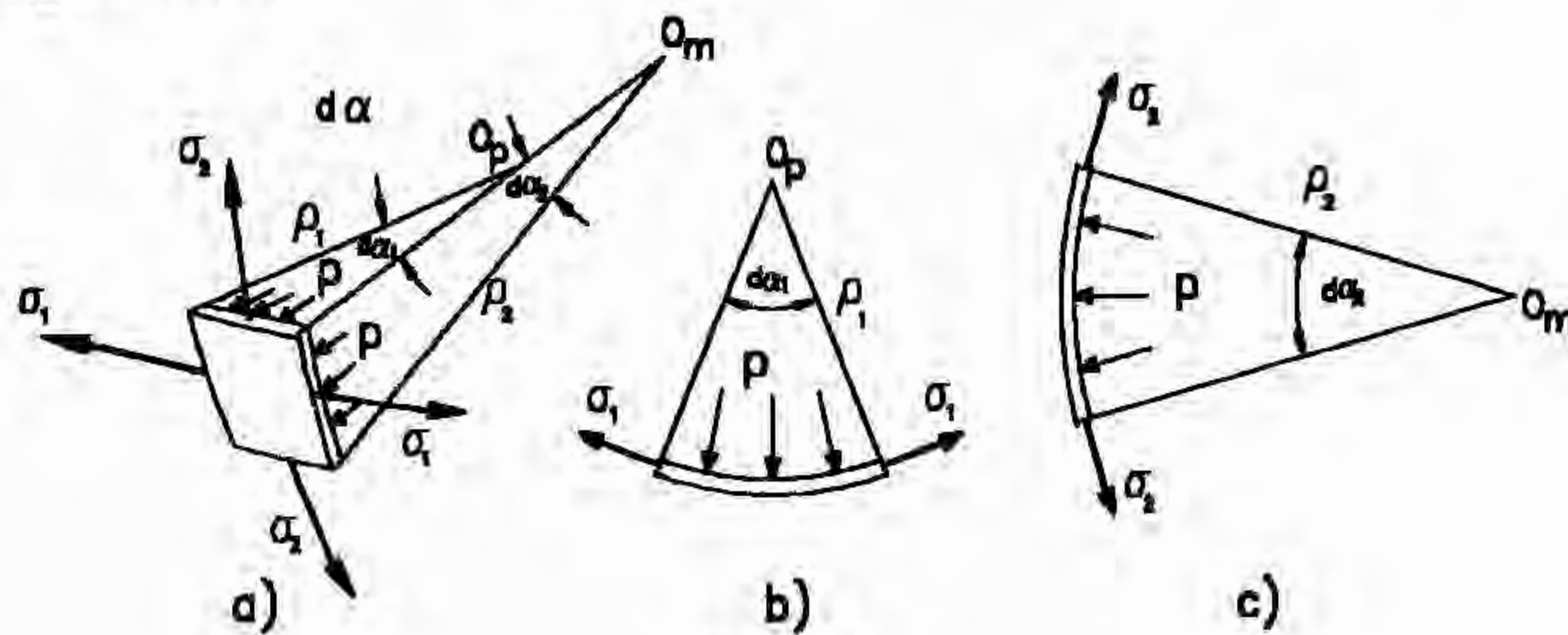


Fig. 11.3

Presiunea de pe element este echilibrată de tensiunile normale din pereții elementului. Tensiuni tangențiale nu apar întrucât acestea sunt incompatibile cu starea simetrică de solicitare. Ca urmare, direcțiile principale de solicitare sunt tot timpul tangente la cercul paralel (direcția 1) și la meridian (direcția 2). După aceste direcții se dirijează tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ . Având în vedere aceste precizări se notează:  $\rho_p = \rho_1$  și  $\rho_m = \rho_2$ .

Echilibrul de forțe pe direcția normalei la elementul considerat este:

$$2\sigma_1 \sin \frac{d\alpha_1}{2} \rho_2 d\alpha_2 h + 2\sigma_2 \sin \frac{d\alpha_2}{2} \rho_1 d\alpha_1 h = p \rho_1 d\alpha_1 \rho_2 d\alpha_2$$

După simplificări și ținând cont că  $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$  se obține:



$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \quad (11.1)$$

relație cunoscută sub numele de *ecuația lui Laplace*.

Această ecuație se utilizează în vederea calculului tensiunilor principale pentru care însă mai este nevoie de încă o ecuație. Aceasta este reprezentată de ecuația de echilibru de forțe care acționează asupra unei porțiuni din vas, figura 11.4.

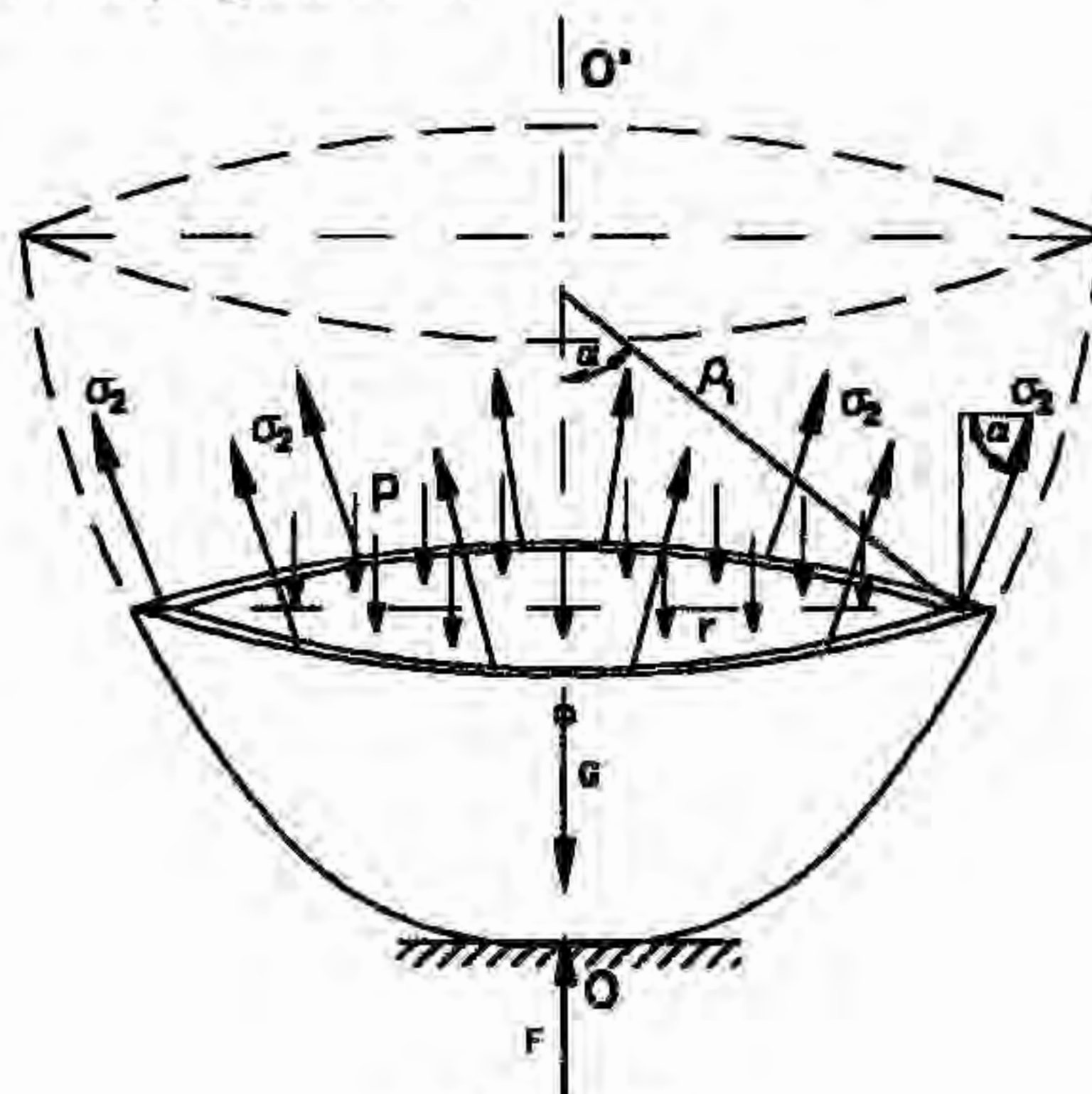


Fig. 11.4

În funcție de situația concretă de încărcare și rezemare a vasului în această ecuație de echilibru pot intra următoarele forțe:

- forța dată de tensiunile  $\sigma_2$  care se introduc în perețele de grosime  $h$  al vasului ca urmare a solicitării:  $\sigma_2 \sin \alpha \cdot 2\pi r h$ ;
- forța dată de presiunea exercitată asupra suprafeței din secțiunea respectivă:  $p\pi r^2$ ;
- atunci când în vas există lichid, apare forța reprezentată de greutatea lichidului aflată în porțiunea de vas luată în considerare:  $G = \gamma \text{Vol}$  în care  $\gamma$  este greutatea specifică a lichidului măsurată în  $[\text{N/mm}^3]$  iar Vol este volumul vasului în care se află lichidul;
- forța de reacțiune  $F$  ce apare ca urmare a eventualei sprijiniri a vasului la partea inferioară.



Ecuatii de proiecții de forțe pe verticală pentru porțiunea de vas din figura 11.4 va fi:

$$\sigma_2 \sin \alpha \cdot 2\pi r h - p \pi r^2 - \gamma \text{Vol} + F = 0$$

Dacă în vas există lichid, presiunea de la nivelul secțiunii considerate este dată de relația:  $p = \gamma H$  în care  $H$  reprezintă înălțimea coloanei de lichid calculată de la nivelul liber la secțiunea considerată.

### 11.3. Raze de curbură

Pentru ușurința calculului în cadrul aplicațiilor, se prezintă în figura 11.5, razele de curbură ale suprafeței după direcțiile principale pentru vasele de formă cilindrică, conică și sferică folosite cel mai adesea în exploatare.

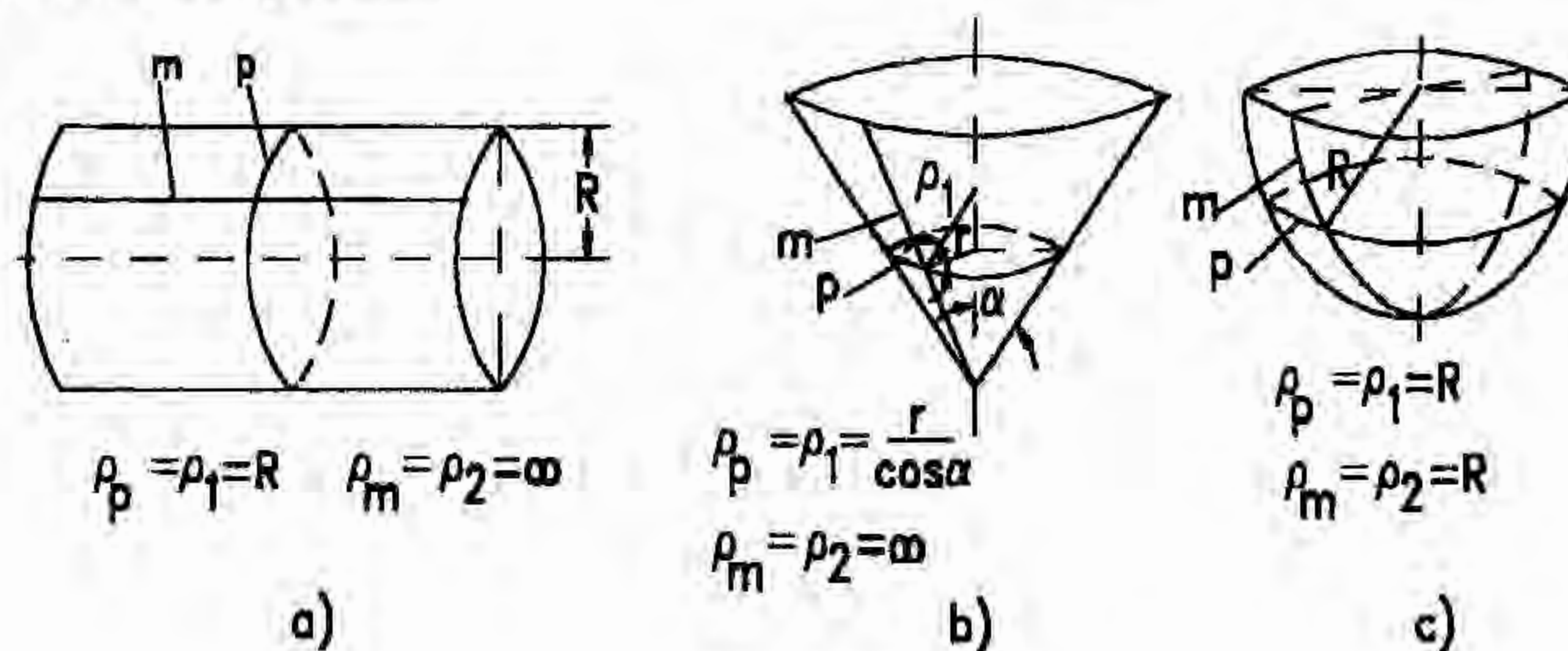


Fig. 11.5

#### Aplicații

A.11.1. Să se calculeze tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  produse într-un vas cilindric și unul sferic solificate fiecare de presiunea uniformă a unui gaz.

S-a văzut că, pentru vasul sferic avem  $\rho_1 = \rho_2 = R$ . Ecuația lui Laplace va fi în acest caz:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{pR}{h}$$



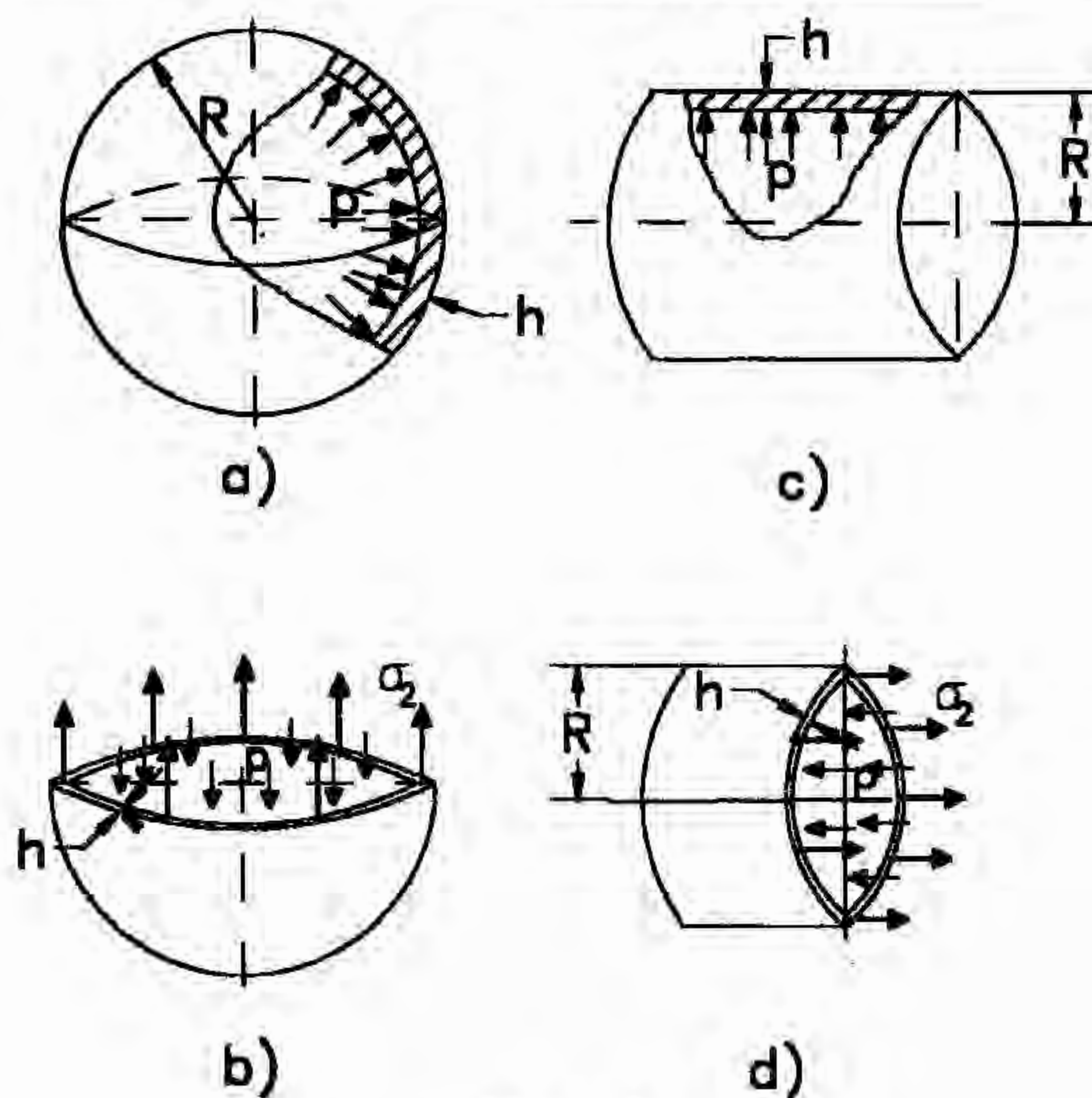


Fig. 11.6

Ecuția de echilibru de forțe pentru porțiunea din figura 11.6b va fi:

$$\sigma_2 \cdot 2\pi R h - p \pi R^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = \frac{pR}{2h} \\ \sigma_1 = \frac{pR}{2h} \end{cases}$$

Pentru vasul cilindric avem:  $p_1=R$  și  $p_2=\infty$ . Ecuția lui Laplace devine:

$$\frac{\sigma_1}{R} = \frac{p}{h} \text{ de unde rezultă: } \sigma_1 = \frac{pR}{h}.$$

Ecuția de echilibru de forțe pentru porțiunea de vas din figura 11.6d va fi:

$$\sigma_2 \cdot 2\pi R h - p \pi R^2 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{pR}{2H}$$



A.11.2. Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor principale pentru vasul, plin cu lichid având greutatea specifică  $\gamma$ , din figura 11.7.

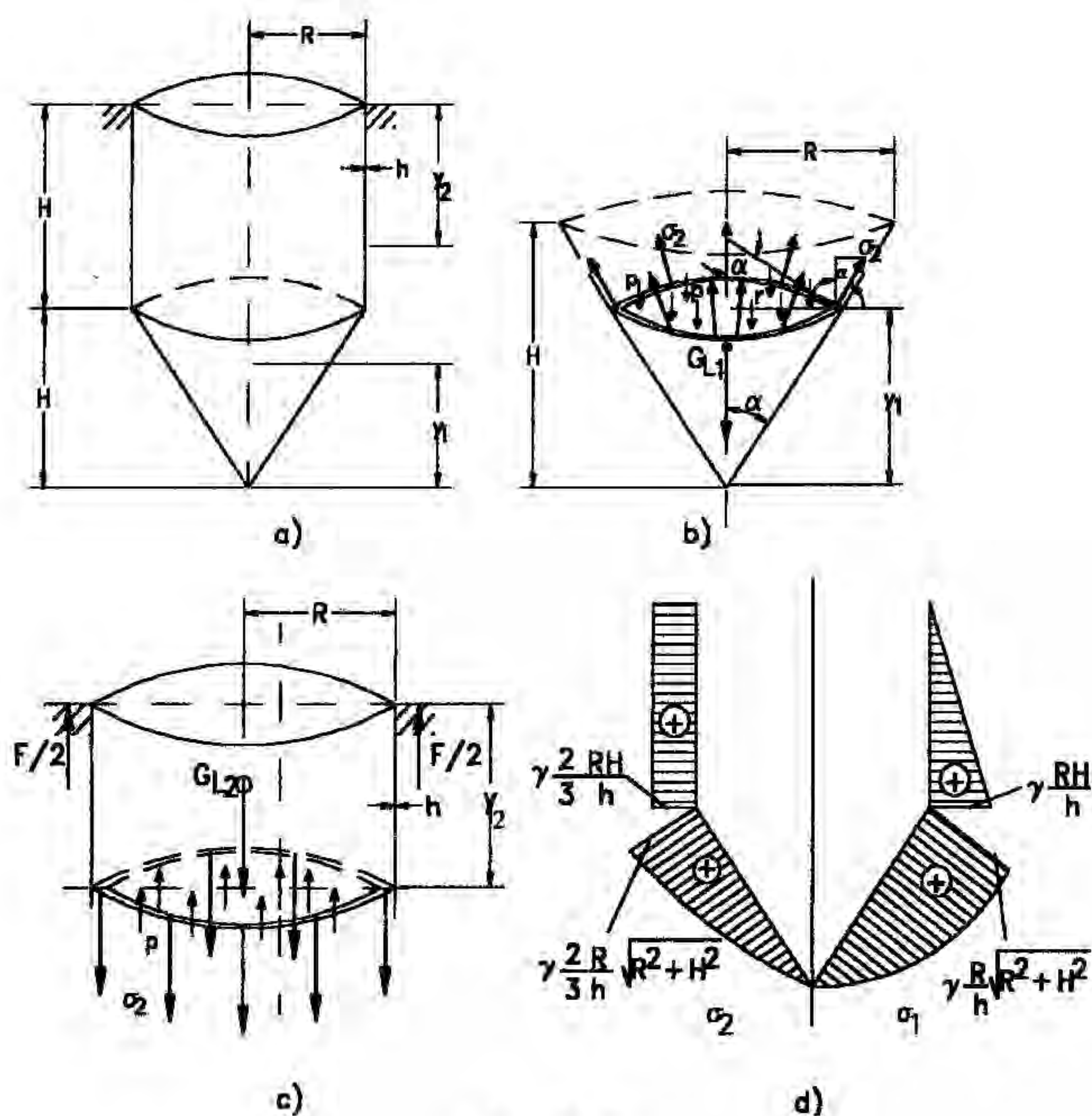


Fig. 11.7

Se constată că avem două regiuni de lucru delimitate de forma constructivă diferită a vasului. Pe fiecare din cele două regiuni se consideră câte o secțiune  $y_1$  și  $y_2$ .

Pentru  $y_1 \in [0, H]$  se scriu ecuația lui Laplace și ecuația de forțe pe verticală pentru porțiunea din vas luată în considerare, figura 11.6b.



$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \\ \sigma_2 2\pi r h \cos \alpha - p\pi r^2 - G_{L1} = 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

în care avem:

$$\rho_1 = \frac{r}{\cos \alpha}; \rho_2 = \infty; r = y_1 \frac{R}{H}; \cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}};$$

$$p = \gamma(2H - y_1); G_{L1} = \gamma \text{Vol} = \gamma \frac{\pi r^2}{3} y_1$$

Prin înlocuirea acestora în relațiile (11.2) se obține:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \gamma \frac{R\sqrt{R^2 + H^2}}{hH^2} (2Hy_1 - y_1^2) \\ \sigma_2 = \gamma \frac{R\sqrt{R^2 + H^2}}{2hH^2} (2Hy_1 - \frac{2}{3}y_1^2) \end{cases} \quad (11.3)$$

Pentru  $y_2 \in [0, H]$  se scriu, de asemenea, ecuația lui Laplace și ecuația de forțe pe verticală pentru secțiunea din vas luată în considerare, figura 11.7c.

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \\ \sigma_2 2\pi R h - p\pi R^2 + G_{L2} - F = 0 \end{cases} \quad (11.4)$$

în care avem:

$$\rho_1 = R; \rho_2 = \infty; p = \gamma y_2; G_{L2} = \gamma \pi R^2 y_2$$

$$F = \gamma \left( \pi R^2 H + \frac{\pi R^2 H}{3} \right) = \frac{4}{3} \gamma \pi R^2 H$$

Prin înlocuirea acestora în relațiile (11.4) va rezulta:

$$\begin{cases} \sigma_1(y_2) = \gamma \frac{R}{h} y_2 \\ \sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{RH}{h} \end{cases} \quad (11.5)$$

Diagramele de variație a tensiunilor principale pentru vasul prezentat sunt trasate pe baza relațiilor (11.3) și (11.5) în figura 11.7d.



## BIBLIOGRAFIE

1. Băușic V. (ș.a), *Rezistența materialelor*, rotaprint I.P.Iași, 1978
2. Bârsănescu P.D., Ciobanu O., *Rezistența materialelor*, vol. 1, Casa de ed. Venus, Iași, 1998
3. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București, 1986
4. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor. Aplicații*, Ed. Academiei, București, 1991
5. Cioclov D., *Mecanica ruperii materialelor*, Ed. Academiei, București, 1977
5. Deutch I., *Rezistența materialelor*, E.D.P., București, 1979
6. Deutch I., *Probleme de Rezistența materialelor*, E.D.P., București, 1983
9. Horbaniuc D. ș.a., *Indrumar pentru lucrări de laborator la disciplina Rezistența materialelor*, rotaprint I.P.Iași, 1987
7. Horbaniuc D., *Rezistența materialelor*, vol 1-2, rotaprint I.P.Iași, 1979
8. Horbaniuc D. ș.a., *Rezistența materialelor-Elasticitate. Probleme*, Ed. "Gh. Asachi", Iași, 1993
10. Leon D., *Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte*, Ed. CERMI, Iași, 1999
18. Mareș M., *Rezistența materialelor-noțiuni fundamentale*, Ed. Tehnopress, Iași, 2001
17. Mazilu P. ș.a., *Probleme de Rezistența materialelor*, vol. 1-2, Ed. Tehnică, București, 1971
12. Mocanu D.R., *Încercarea materialelor*, vol. 1-3, Ed. Tehnică, București, 1982
11. Mocanu D.R., *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980



#### Bibliografie

---

14. Ponomariov S.D. ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. 1-3*, Ed. Tehnică, București, 1960
13. Posea N., *Rezistența materialelor*, E.D.P., București, 1979
15. Roșca V., *Teoria elasticității aplicată în Rezistența materialelor*, Ed. Curtea veche, București, 1997
16. Soare M. ș.a., *Rezistența materialelor în aplicații*, Ed. Tehnică, București, 1996
16. Teodorescu P.P., Ilie V., *Teoria elasticității în mecanica solidelor deformabile*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979



## CUPRINS

### Capitolul 1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Obiectul și problemele Rezistenței materialelor.....           | 1  |
| 1.2. Clasificarea corpurilor solide în Rezistența materialelor..... | 3  |
| 1.3. Modalități de rezemare a corpurilor.....                       | 5  |
| 1.4. Condiții de rezemare.....                                      | 9  |
| 1.5. Calculul reacțiunilor.....                                     | 11 |
| 1.6. Sarcini exterioare.....                                        | 15 |
| 1.7. Eforturi interioare.....                                       | 21 |
| 1.8. Clasificarea solicitărilor.....                                | 26 |
| 1.9. Relații între sarcini și eforturi.....                         | 27 |
| 1.10. Tensiuni.....                                                 | 28 |
| 1.11. Relații între eforturi și tensiuni.....                       | 31 |
| 1.12. Deplasări și deformații.....                                  | 32 |
| 1.13. Relații între tensiuni și deformații .....                    | 35 |
| 1.14. Con tracția transversală.....                                 | 36 |

### Capitolul 2. NOȚIUNI DESPRE MATERIALE

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Clasificarea materialelor.....                                     | 38 |
| 2.2. Noțiuni despre încercarea materialelor.....                        | 39 |
| 2.3. Epruvete utilizate pentru încercări mecanice.....                  | 40 |
| 2.4. Încercarea la tracțiune.....                                       | 43 |
| 2.5. Determinarea caracteristicilor mecanice convenționale.....         | 45 |
| 2.6. Încercarea la compresiune.....                                     | 47 |
| 2.7. Încercarea la forfecare.....                                       | 48 |
| 2.8. Încercarea la răsucire.....                                        | 49 |
| 2.9. Încercarea la încovoiere.....                                      | 50 |
| 2.10. Factori de influență asupra caracteristicilor mecanice.....       | 52 |
| 2.11. Ipoteze simplificatoare în Rezistența materialelor.....           | 57 |
| 2.12. Metode de rezolvare a problemelor în Rezistența materialelor..... | 59 |



### Capitolul 3. ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Introducere.....                                                                                           | 61 |
| 3.2. Starea plană de tensiuni.....                                                                              | 62 |
| 3.3. Forma matriceală pentru calculul tensiunilor<br>și direcțiilor principale în starea plană de tensiuni..... | 65 |
| 3.4. Cercul lui Mohr pentru variația tensiunilor în starea plană.....                                           | 67 |
| 3.5. Starea spațială de tensiuni.....                                                                           | 70 |
| 3.6. Deformații și deplasări.....                                                                               | 81 |
| 3.7. Legea generalizată a lui Hooke.....                                                                        | 84 |
| 3.8. Calculul energiei de deformație.....                                                                       | 87 |
| 3.9. Relația între modulele de elasticitate E și G.....                                                         | 89 |
| 3.10. Teorii privind ruperea materialelor.....                                                                  | 90 |

### Capitolul 4. SOLICITAREA AXIALĂ

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1. Introducere.....                                                                     | 97  |
| 4.2. Calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi.....                       | 98  |
| 4.3. Calculul tensiunilor și al deformațiilor.....                                        | 99  |
| 4.4. Relații de dimensionare și verificare.....                                           | 101 |
| 4.5. Calculul energiei totale de deformație.....                                          | 104 |
| 4.6. Calculul deplasărilor secțiunilor transversale ale<br>barelor drepte nerezemate..... | 104 |
| 4.7. Solicitarea sub acțiunea greutății proprii.....                                      | 122 |
| 4.8. Bara de egală rezistență.....                                                        | 124 |
| 4.9. Sisteme static nedeterminate.....                                                    | 128 |
| 4.10. Sisteme de bare.....                                                                | 135 |
| 4.11. Bare supuse variațiilor de temperatură.....                                         | 140 |
| 4.12. Calculul firelor și cablurilor.....                                                 | 144 |

### Capitolul 5. CALCULUL CONVENȚIONAL LA FORFECĂRE

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Introducere.....                                   | 150 |
| 5.2. Modul de realizare a solicitării la forfecare..... | 150 |
| 5.3. Relații de calcul și verificare.....               | 152 |
| 5.4. Calculul convențional al îmbinărilor.....          | 154 |



## Capitolul 6. RĂSUCIREA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 6.1. Introducere.....                                   | 163 |
| 6.2. Calculul deformațiilor și al tensiunilor.....      | 164 |
| 6.3. Modalități de calcul.....                          | 168 |
| 6.4. Relații de calcul pentru momentul de răsucire..... | 171 |
| 6.5. Calculul energiei totale de deformare.....         | 171 |

## Capitolul 7. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1. Definirea solicitării.....                                              | 183 |
| 7.2. Studiul deformațiilor barelor drepte solicitate la încovoiere pură..... | 185 |
| 7.3. Calculul deformațiilor și tensiunilor.....                              | 186 |
| 7.4. Secțiuni raționale la încovoiere.....                                   | 191 |
| 7.5. Încovoierea barelor cu secțiuni nesimetrice.....                        | 192 |
| 7.6. Calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă.....             | 194 |
| 7.7. Trasarea diagramelor de eforturi.....                                   | 203 |
| 7.8. Tensiuni principale la grinzile drepte solicitate la încovoiere.....    | 214 |
| 7.9. Deplanarea secțiunii transversale sub acțiunea forței tăietoare.....    | 217 |
| 7.10. Calculul grinzilor compuse.....                                        | 219 |

## Capitolul 8. DEPLASĂRI LA SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE A BARELOR DREPTE

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 8.1. Generalități.....                                | 223 |
| 8.2. Ecuația diferențială a axei medii deformată..... | 224 |
| 8.3. Metoda integrării analitice.....                 | 227 |
| 8.4. Procedul Clebsch.....                            | 232 |
| 8.5. Relația lui Clapeyron.....                       | 237 |
| 8.6. Teorema lui Castigliano.....                     | 242 |



**Data aparitiei: octombrie 2021**  
**Comanda nr. 128, Tiraj: 150**  
**Coli tipar: 28**



**Str. Lascăr Catargi nr. 38**  
**Tel.: 032/21.59.49**



## Capitolul 9. GRINZI DREPTE STATIC NEDETERMINATE

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1. Introducere.....                                                                     | 248 |
| 9.2. Metoda integrării analitice a ecuației diferențiale<br>a fibrei medii deformată..... | 249 |
| 9.3. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clebsch.....                                    | 252 |
| 9.4. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clapeyron.....                                  | 255 |
| 9.5. Ridicarea nedeterminării cu ajutorul teoremei lui Castigliano.....                   | 258 |

## Capitolul 10. FLAMBAJUL BARELOR DREPTE

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 10.1. Introducere.....                                  | 260 |
| 10.2. Forța critică de flambaj.....                     | 261 |
| 10.3. Lungimi de flambaj.....                           | 263 |
| 10.4. Metode de rezolvare a problemelor de flambaj..... | 266 |

## Capitolul 11. VASE DE REVOLUȚIE CU PEREȚI SUBȚIRI

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 11.1. Introducere.....            | 270 |
| 11.2. Calculul de rezistență..... | 271 |
| 11.3 Raze de curbura .....        | 274 |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| Bibliografie..... | 278 |
|-------------------|-----|