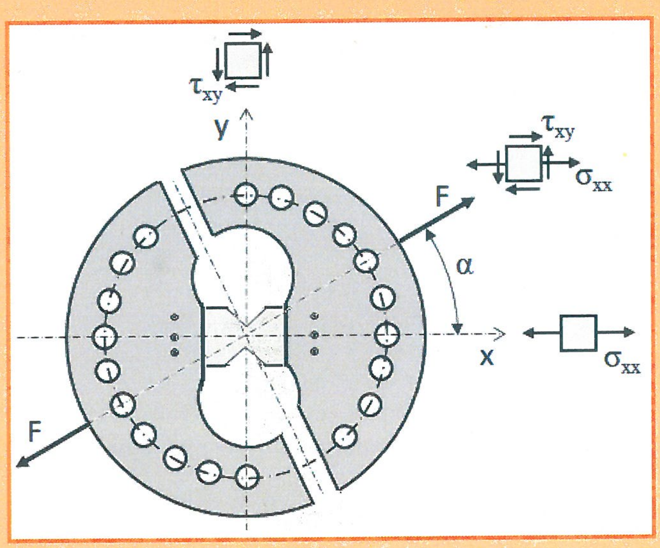
Paul-Doru Bârsănescu

Rezistența Materialelor

Vol. II

Elemente de stabilitate, elasticitate și solicitări compuse



editura Tehnopress

Paul-Doru Bârsănescu

Rezistența Materialelor

Vol. II

Elemente de stabilitate, elasticitate și solicitări compuse

editura Tehnopress

Iași – 2022

CUPRINS

PRINCIPALELE NOTAȚII

α	Coeficient de dilatare termică liniară [°C^{-1}], unghi [rad], coeficient
β	Unghi [rad], coeficient
γ	Lunecare specifică [rad] / greutate specifică [N/mm^3] / coeficient
δ	Deplasare, strângere [mm]
δ_{ij}	Coeficienții de influență (metoda eforturilor)
ε	Alungire specifică
ε_r, ε_t	Alungire specifică pe direcție radială / tangențială
ε_v	Alungire specifică volumică
$\varepsilon_{xx}= \varepsilon_x$	Alungirea specifică pe direcția Ox
θ	Rotire specifică [rad/mm]; unghi [rad]
λ	Coeficient de zveltețe
ν	Coeficientul Poisson
ρ	Densitate [kg/m^3] / raza de curbură [mm]
ρ, δ	Creșterea razei / deplasarea cercului Mohr [MPa]
ρ_p, ρ_m	Raze de curbură paralel / meridian (vase cu pereți subțiri) [mm]
σ, τ	Tensiune normală / tangențială [MPa]
σ_a, τ_a	Tensiuni admisibile [MPa]
σ_{cr}	Tensiune critică de flambaj [MPa]
σ_{ech}	Tensiune echivalentă [MPa]
σ_L, τ_L	Tensiuni limită (de curgere sau de rupere) [MPa]
σ_{LT}, σ_{LC}	Tensiune normală limită la tracțiune / compresiune [MPa]
σ_p, σ_c, σ_r	Tensiuni de proporționalitate/curgere/rupere [MPa]
σ_m	Tensiune normală medie / tens. pe direcția meridianului [MPa]
σ_m, σ_p	Tensiuni normale pe direcția meridianului / paralelului [MPa]
σ_r, σ_t, σ_l	Tensiuni pe direcție radială, tangențială si longitudinală [MPa]
σ_{rez}, τ_{rez}	Tensiuni rezultante [MPa]
$\sigma_{xx}=\sigma_x$	Tensiunea normală pe direcția Ox [MPa]
σ_1, σ_2, σ_3	Tensiuni principale [MPa]
Φ	Funcția de tensiuni
φ	Unghi, rotire [rad] / coeficient [-]
Ω	Suprafața mărginită de fibra medie la profile dublu conexe [mm^2]
ω	Viteza unghiulară [rad/sec]
A	Aria [mm^2] / notația unui punct
AEF	Analiza cu elemente finite
c	Coeficient de siguranță
D, d	Diametru [mm]

E, G	Modulele de elasticitate longitudinală și transversală [MPa]
F_{cr}	Forța critică de flambaj [N]
f	Săgeata maximă [mm]
g	Accelerația gravitațională [m/sec^2]
h, t	Distanță / grosimea peretelui [mm]
I_z, I_y, I_p	Momente de inerție axiale si respectiv polar [mm^4]
I_1, I_2, I_3	Invarianții tensiunilor
I_t, W_t	Caracteristici geom. (torsiunea barelor prismatice) [mm^4], [mm^3]
i_z, i_y	Raze de inerție [mm]
k	coeficienț
L	Lungimea barei [mm]
L_f	Lungime de flambaj [mm]
l, m, n	Cosinușii directori
m_i	Moment fictiv [Nmm]
m	Panta dreptei
M_t	Moment de torsiune (încărcare) [Nmm]
M_x, M_z, M_y	Eforturile moment de torsiune / momente încovoietoare [Nmm]
M	Moment rezultant
N, T	Forță normală / forță axială [N]
p, p_f	Tensiunea rezultantă / presiune / presiune de fretaj [MPa]
p_x, p_y, p_z	Componentele tensiunii totale [MPa]
q	Intensitatea forței distribuite [N/mm]
Q	Rezultanta static echivalentă a forței distribuite [N]
R, r	Raza [mm] / raza cercului Mohr [MPa]
s	Lungime arc [mm]
S_z	Moment static față de Oz [mm^3]
T_σ, T_ε	Tensorii tensiunilor / deformațiilor
T_1, T_2	Puncte pe cercul lui Mohr
tan	Funcția tangentă (tg)
U	Energia potențială de deformare elastică [J]
U_1	Energia specifică de deformare elastică [J/mm^3]
U_{1V}	Energia specifică modificatoare de volum [J/mm^3]
U_{1F}	Energia specifică modificatoare de formă [J/mm^3]
u, v, w	Deplasările pe direcțiile axelor Ox, Oy și Oz [mm]
X, Y, Z	Componentele forței masice [N/mm^3] / notare puncte
W_z, W_y, W_p	Module de inerție axiale si respectiv polar [mm^3]

PREFAȚĂ

Ultimele decenii au adus o dezvoltare fără precedent a metodelor numerice în inginerie. Acest lucru a schimbat modul în care se studiază științele inginerești, între care și Rezistenta Materialelor (RM). Probleme complicate, inabordabile în trecut prin metode pur analitice, pot fi rezolvate acum cu Metoda Elementelor Finite, de exemplu. Cu toate acestea, utilizarea metodelor numerice necesită o bună înțelegere a conceptelor de bază din Rezistența Materialelor (RM) și Teoria Elasticității (TE). Se spune, pe deplin justificat, că *Metoda Elementelor Finite poate transforma un inginer bun într-unul foarte bun și un inginer slab într-unul periculos*. Proiectarea platformei de foraj marin Sleipner North Sea s-a făcut integral cu ajutorul Analizei cu Elemente Finite (AEF) și a metodelor Computer-Aided Design (CAD). Cu toate acestea, în 1991 ea s-a prăbușit, când era în fază finală a instalării. O combinație nefavorabilă de erori inițiale destul de mici au condus în final la erori importante (tensiunile din camerele de balast au fost subestimate cu 47% și ca urmare unii pereți de beton au fost prea subțiri pentru a rezista presiunii hidrostatice). Consecințele financiare au fost severe și s-a decis reproiectarea platformei concomitent prin AEF și metode analitice. În acest caz, nepriceperea proiectanților au transformat metodele CAD în Computer-Aided Catastrophes*.

Pentru a evita asemenea catastrofe, structurile importante sunt proiectate parțial prin metode mixte și verificate prin metode experimentale. Din păcate se mai întâlnesc proiectanți care utilizează AEF și operează cu noțiuni de RM și TE pe care nu le înțeleg în profunzime. Aceștia riscă să facă greșeli grave.

Al doilea volum de Rezistența Materialelor îl completează pe primul și, la fel ca acesta, încearcă să țină cont de impactul pe care îl are dezvoltarea metodelor numerice asupra modului în care este predată Rezistența Materialelor. Astfel, în acest volum s-a pus un accent mai mare pe Teoriile de stare limită, având în vedere faptul că, în cazul solicitărilor compuse, proiectantul trebuie sa aleagă o teorie, fie că lucrează cu metode analitice sau numerice, iar această alegere este hotărâtoare pentru un calcul de rezistență corect. Aceste două volume cuprind mare parte din cursul de Rezistența Materialelor predat studenților de la Facultatea de Mecanică a Universității Tehnice „Gheorghe Asachi" din Iași. Drumul cunoașterii nu are sfârșit și niciodată nu vom putea ajunge la capătul său. Acesta nu este însă un motiv de descurajare, după cum nu este un motiv de a nu încerca să ajungem cât mai departe pe acest drum. Un proverb chinezesc spune că „Marșul de 1000km începe cu primul pas". Pe studenții mei îi încurajez să facă plini de curaj acest prim pas, indispensabil când încep să studieze o nouă disciplină, urmat de cât mai mulți alții.

Volumul se adresează în primul rând studenților de la facultățile cu profil mecanic, dar poate fi util și studenților de la facultățile cu profil de inginerie civilă. De asemenea, el poate fi util inginerilor proiectanți. Problemele complicate rămân să fie abordate totuși cu ajutorul AEF.

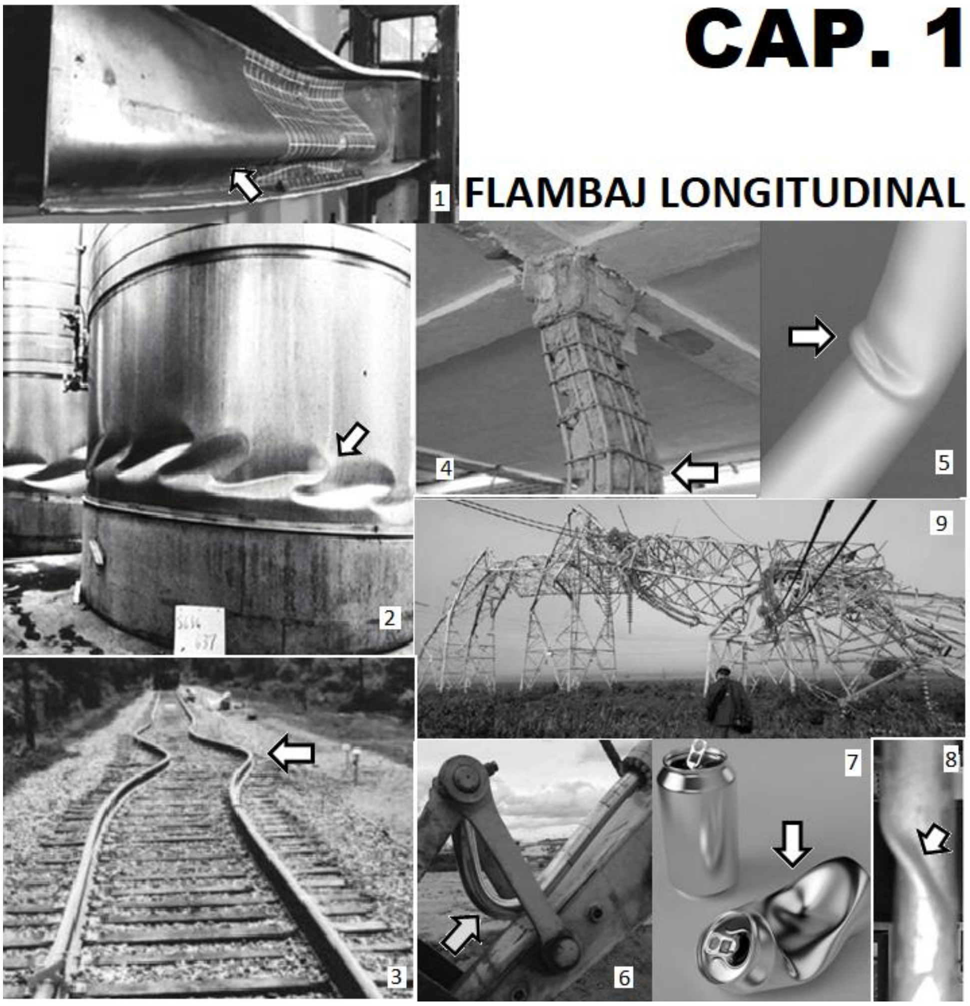
Desenul de pe copertă prezintă schematic dispozitivul *Arcan*, utilizat pentru testarea la solicitări compuse (solicitări axiale cu forfecare).

Autorul

* https://en.wikipedia.org/wiki/Sleipner_A

CAP. 1

FLAMBAJ LONGITUDINAL



Legenda:

Flambarea inimii unei grinzi profil I (1); Voalarea pereţilor subţiri ai unor vase (2, 7); Flambarea şinelor datorită dilatărilor termice împiedicate (3); Flambarea unui stâlp de beton armat (4); Flambaj transversal la îndoirea unui tub cu pereţi subţiri (5); Flambajul tijei pistonului unui cilindru hidraulic (6); Flambaj la torsiunea unui tub cu pereţi subţiri (voalarea pereţilor) (8); Flambajul vaselor cu pereți subțiri; Flambarea unor stâlpi de înaltă tensiune, jud. Mureş, iunie, 2016 (9).

Pentru realizarea colajului din acest capitol s-au folosit sursele:

Nan L., He Y., Heng L., Siliang Y., Plastic wrinkling prediction in thin-walled part forming process: A review, Chinese Journal of Aeronautics (2016) 29(1): 1-14

Yang G., Bradford G.A., Engineering failure analysis, 92, (2018) 107-120

https://www.friedmanresearch.com/manufacturing-support2

http://pecconsultinggroup.com/tag/evaluation-of-buildings-and-structures/

https://civil4m.com/threads/what-type-of-failure-occurred-in-this-column.7482/

https://classes.mst.edu/civeng110/concepts/06/elastic_torsion/failure/fsae/8.jpg

https://www.comsol.com/blogs/buckling-structures-suddenly-collapse/

1. FLAMBAJ LONGITUDINAL

1.1. INTRODUCERE

În primul volum al acestei lucrări [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001] s-a prezentat teoria barelor drepte cu deformaţii elastice mici în raport cu dimensiunile lor, la care s-a putut aplica *teoria de rezistenţă de gradul* I. Conform acestei teorii, la calculul reacţiunilor şi al eforturilor s-au neglijat deformaţiile elastice. Dimensionarea pieselor şi a componentelor s-a făcut în vederea evitării apariţiei unor situații periculoase pentru material (curgerea sau ruperea).

Structurile pot ceda însă nu numai datorită atingerii limitelor critice de mai sus, ci şi *datorită modificării formei* unor componente, sau chiar a întregii structuri, la atingerea unor valori critice ale încărcărilor care cresc progresiv *și a basculării de la un echilibru stabil la unul instabil*. Acest fenomen se numește flambaj. După iniţierea flambajului, în organe de maşini sau în componente structurale apar şi alte solicitări, înafara celor existente inițial, iar deformaţiile cresc progresiv, odată cu încărcările, până la distrugere.

Fie, de exemplu, o bară dreaptă zveltă (având lungimea mare în raport cu dimensiunile secţiunii transversale), supusă la compresiune centrică (forţele sunt aplicate în centrul de greutate al secţiunii transversale), aşa cum se vede în figura 1.1.

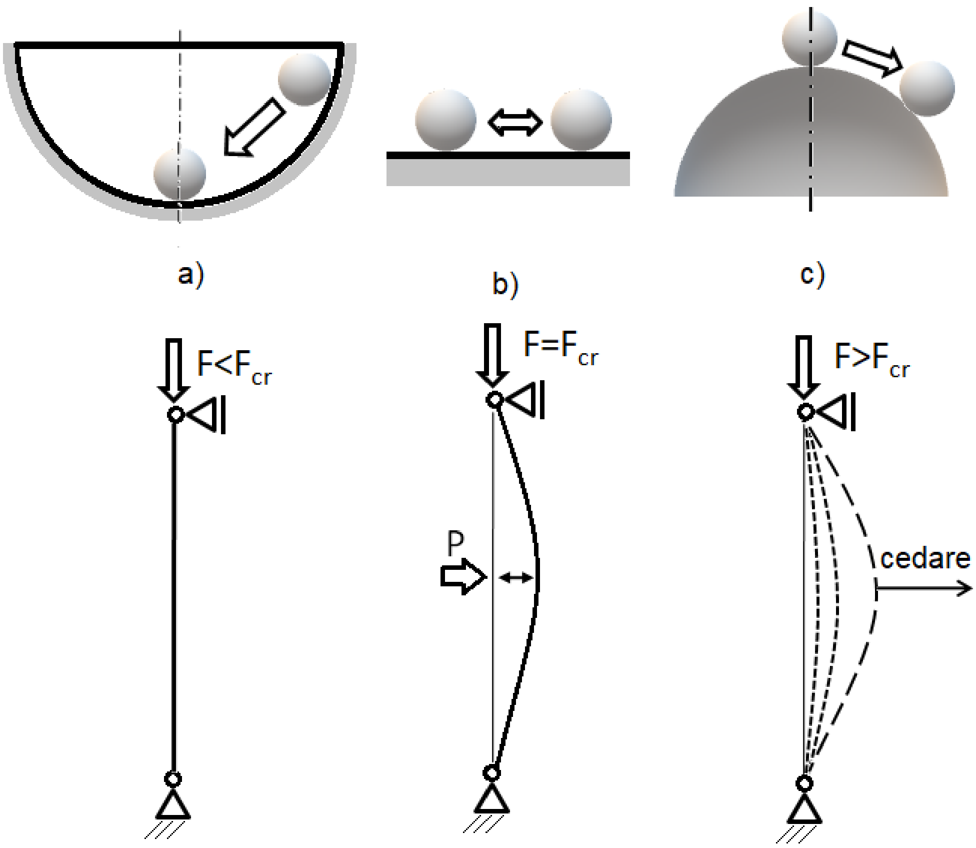


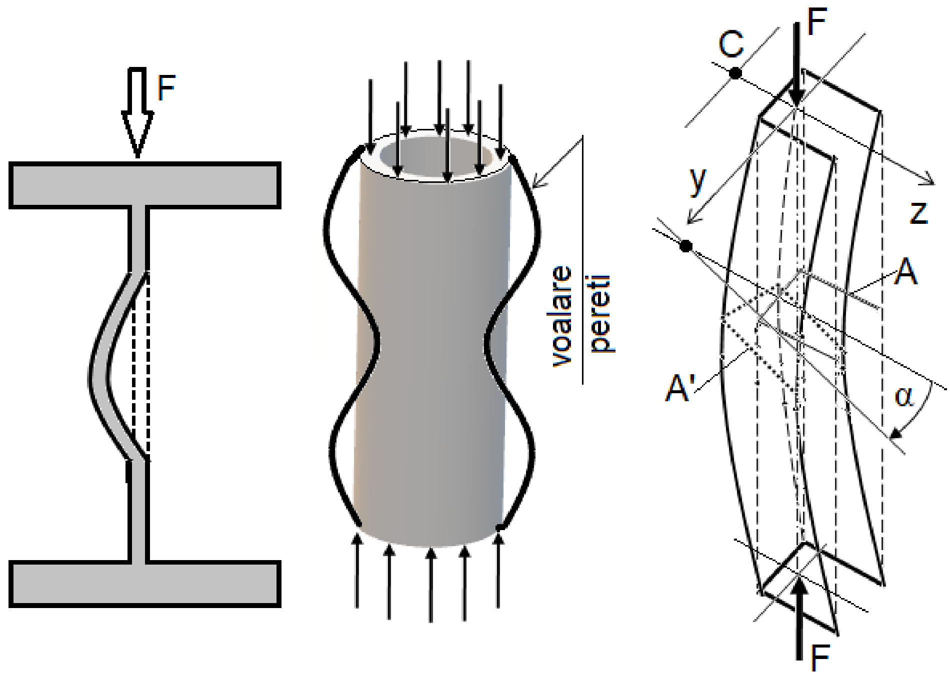
Fig. 1.1. Analogie între flambajul la o bara dreaptă supusă la compresiune şi tipul de echilibru al unui corp: bara nu flambează-echilibru stabil (a); inițierea flambajului-echilibru indiferent (b); depăşirea forţei critice F_{cr} - echilibru instabil (c)

Flambajul se iniţiază la atingerea unei valori critice a forţei, notată F_{cr}. Pentru încărcări mai mici decât F_{cr}, la aplicarea unei forţe perturbatoare P, normală pe direcţia barei, aceasta se curbează (axa geometrică părăseşte direcţia rectilinie), dar revine la forma iniţială după îndepărtarea acestei forţe. Altfel spus, bara are un comportament asociat echilibrului stabil al corpurilor (fig. 1.1a). La o anumita valoare a încărcării, $F = F_{cr}$, bara nu mai revine la forma rectilinie după îndepărtarea forței perturbatoare P. Ea poate fi adusă însă la forma rectilinie prin aplicarea unei forţe perturbatoare de sens contrar. Acest comportament este asociat echilibrului indiferent (fig. 1.1b). Odată cu forța F creşte şi săgeata, până când bara cedează, adică își pierde capacitatea de a mai prelua încărcări. Acest comportament este asociat echilibrului instabil (fig. 1.1c). Ca urmare a acestei asocieri, flambajul în domeniul elastic mai este numit şi *pierderea stabilității elastice*. Flambajul barelor drepte supuse la compresiune se numește *flambaj longitudinal*.

Atingerea valorii critice a încărcării reprezintă o situație periculoasă pentru organe de maşini sau componente structurale. Depășirea acestei valori conduce la apariția deformațiilor mari şi în final la cedarea componentelor sau a structurilor. Aceste cedări se pot produce la tensiuni sensibil mai mici decât cele considerate a fi periculoase pentru material (curgere sau rupere).

Flambajul este un fenomen care se poate produce la diferite solicitări (compresiune, torsiune, încovoiere, forfecare). El este însă întotdeauna asociat cu trecerea de la o formă de echilibru stabil la una de echilibru instabil, cu schimbarea formei corpului, ceea ce conduce la apariția unor solicitări suplimentare la atingere unor valori critice ale încărcărilor. Chiar şi la solicitarea la tracțiune apariția stricţionărilor pe o epruvetă din material cu comportament ductil poate fi considerată o formă de flambaj în domeniul elasto-plastic. Se dau în continuare câteva exemple de flambaj produs la diverse solicitări.

La comprimarea unor profile laminate cu inima înaltă (eventual supraînălţate prin tăiere şi sudare), este posibil să se producă flambajul inimii (fig. 1.2a). La comprimarea tuburilor cu pereți subțiri, flambajul se manifestă prin voalarea pereților (fig. 1.2b). În flambajul longitudinal al profilelor subțiri deschise apar solicitările suplimentare la încovoiere şi torsiune (fig. 1.2c).



a) b) c)

Fig. 1.2. Alte tipuri de flambaj produs prin compresiune: flambarea inimii unui profil I (a); voalarea pereților unui tub (b); flambajul profilelor deschise cu pereți subțiri introduce solicitări suplimentare la încovoiere şi torsiune (c)

Un inel sau tub cu pereți subțiri, supuse la presiune hidrostatică, vor flamba când presiunea atinge o valoare critică. Secțiunea circulară devine mai întâi eliptică, apoi ia forma cifrei 8 şi astfel structura cedează (fig. 1.3). La curbarea tuburilor cu pereți subțiri se produce voalarea (încrețirea) pereților la interiorul curburii, unde sunt tensiuni normale de compresiune (fig. 1.4). Acesta este *flambajul transversal*. Pentru a preveni apariția sa, tuburile sunt umplute cu nisip şi închise cu dopuri de lemn la capete, iar pentru îndoire se folosesc dispozitive speciale, cu role de ghidare etc.

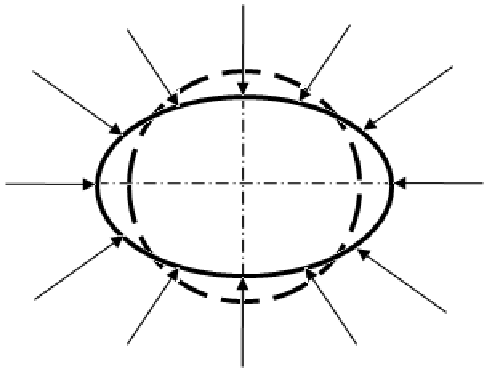


Fig. 1.3. La flambarea unui inel sau tub cu pereți subțiri sub acțiunea presiunii hidrostatice forma circulară inițială devine eliptică

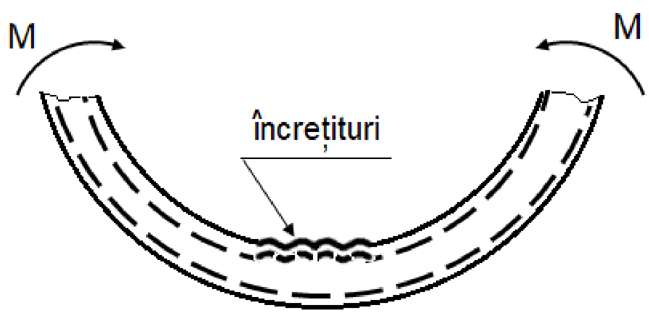


Fig. 1.4. Voalarea (încrețirea) pereților la îndoirea tuburilor cu pereți subțiri (flambaj transversal)

La încovoierea unor profile înalte este posibil să apară flambajul lateral (fig. 1.5).

La torsiunea profilelor cu pereți subțiri poate să apară voalarea pereților (v. fig. 1.6a). În cazul torsionării unor fire lungi netracţionate acestea pot părăsi forma rectilinie în diferite locuri, unde se îndoaie în formă de U, după care cele două ramuri se torsionează între ele (fig. 1.6b). Aceste două exemple ilustrează *flambajul la torsiune*.

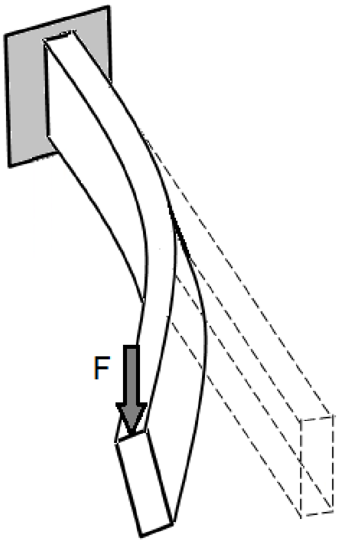
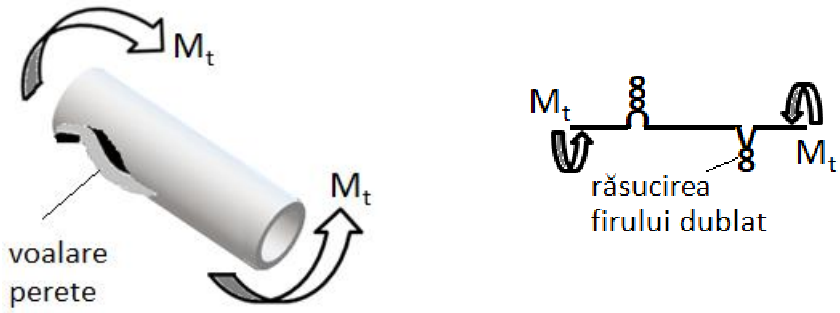


Fig. 1.5. Flambaj lateral

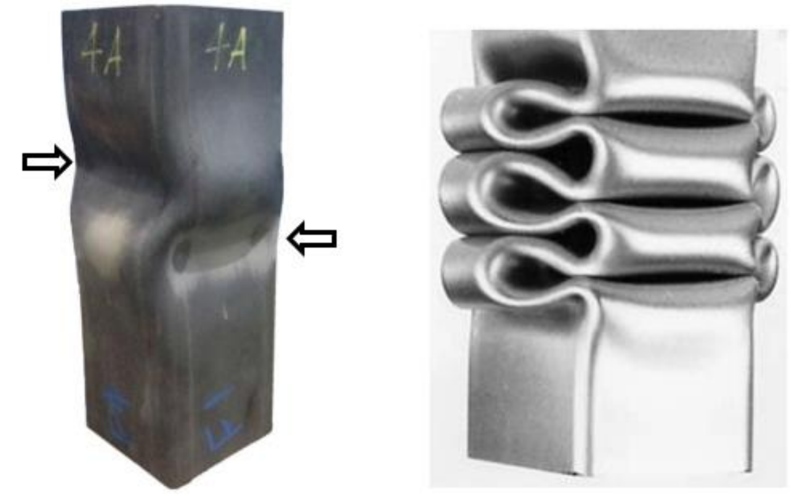


a) b)

Fig. 1.6. Flambaj la torsiune: tuburi cu pereți subțiri (a);
fire subțiri netracţionate (b)

Se mai poate produce flambajul barelor cotite sau curbe, al plăcilor, învelitorilor etc. Flambajul poate să apară la încărcări statice sau dinamice, în domeniul elastic sau în cel elasto-plastic. În cazul materialelor polimere, care au un comportament vâscoelastic, flambajul poate să apară asociat cu fluajul (fenomen care se referă la o curgere lentă, la tensiune constantă). Acesta se manifestă astfel: o bară din material vâscoelastic este comprimată încât inițial nu flambează; totuşi flambajul poate să apară după un timp îndelungat, deşi încărcarea, temperatura şi umiditatea au rămas constante.

Flambajul este un fenomen periculos, care poate conduce la pierderea rapidă a capacităţii portante a structurilor. Există însă şi situații în care flambajul este urmărit deliberat. Flambajul local al țevilor pătrate cu pereți subțiri, produs în domeniul elasto-plastic, consumă multa energie şi din acest motiv asemenea profile sunt utilizate la confecționarea lonjeroanelor șasiurilor vehiculelor. În cazul unui impact frontal, prin voalarea pereților profilului (tip armonică) se preia o parte semnificativa din energie, care astfel nu mai este transferată pasagerilor (fig. 1.7).



a) b)

Fig.1.7. Flambaj local al țevilor pătrate cu pereți subțiri: începutul fenomenului (a); colapsul țevii (b) [Wang J., 2017; Nan L., 2016]

1.2. CAUZELE PRODUCERII FLAMBAJULUI

În primul rând trebuie menționat faptul că în cazul barelor scurte supuse la compresiune flambajul nu se produce. Din acest motiv, pentru încercarea la compresiune se utilizează epruvete cu un raport între lungime şi diametru $1 \leq h_0/d_0 \leq 5$ [ASTM E9-89A, rev. 2000]. În cazul compresiunii se poate produce ruperea doar a epruvetelor confecționate din materiale cu comportament fragil. La comprimarea materialelor cu comportament ductil epruveta capătă o formă de butoi, datorită forțelor de frecare dintre platanele maşinii şi capetele epruvetei. Aceste forțe limitează curgerea materialului pe direcția radială (fig. 1.8). In cazul compresiunii materialelor cu comportament ductil încercarea se încheie la apariția primei fisuri sau la atingerea unei scurtări specifice A_t=50%.

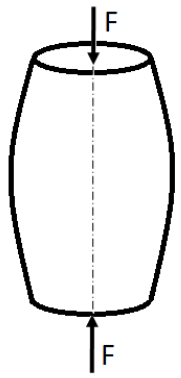


Fig. 1.8. Epruvetele scurte, confecționate dintr-un material cu comportament ductil, capătă o formă de butoi când sunt solicitate la compresiune

Cauzele producerii flambajului nu sunt suficient de bine cunoscute. Din acest motiv s-au formulat mai multe teorii privind apariția acestui fenomen. Câteva dintre acestea sunt prezentate în cele ce urmează.

O primă cauză ar putea fi faptul că forțele care comprimă bara nu acționează exact în centrul de greutate al secțiunii transversale şi nici nu sunt perfect coliniare. În acest caz, pe lângă forța de compresiune apare şi un moment încovoietor. Chiar dacă brațul cuplului este foarte mic, el ar putea favoriza apariția flambajului. Însă în condiții de laborator, riguros controlate, s-a arătat că flambajul să apară chiar şi atunci când forțele de compresiune sunt practic centrice şi coliniare.

Curbura inițială a barelor, chiar dacă este foarte mică, ar putea şi ea să favorizeze apariția flambajului. Totuși experiența arată că flambajul se produce şi în cazul barelor care sunt practic rectilinii.

Desigur că ipotezele simplificatoare admise în Rezistența Materialelor şi Teoria Elasticității nu se verifică riguros la scară micro, unde materialele nu sunt perfect omogene. Datorita neomogenității, eforturile nu mai sunt aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale şi forțele axiale nu mai sunt coliniare cu încărcările. Cu cât bara este mai lungă, cu atât excentricitatea acestor forțe este mai mare. Experimental s-a demonstrat că la materialele neomogene flambajul apare la valori mai mici ale F_{cr}.

Chiar dacă la scară macro multe materialele metalice pot fi considerate izotrope, ele sunt materiale cristaline (granulare) şi grăunții sunt anizotropi. Orientarea aleatoare şi numărul mare de grăunți asigură izotropia la scară macro. Rețeaua cristalină, la rândul ei, are defecte (microsufluri, incluziuni etc.). Chiar dacă materialul în ansamblul său are un comportament liniar-elastic, totuşi în anumite grăunţe se poate depăși limita de curgere.

La scară micro, datorită neomogenității şi anizotropiei, caracteristicile elastice (E, G, ν) nu mai sunt riguros constante. Astfel tensiunile şi deformațiile nu mai sunt constante în tot volumul barei, ipoteza lui *Bernoulli* nu se verifică riguros şi apare o necoliniaritate (excentricitate) între eforturi şi încărcări.

Pe de alta parte, așa cum se va arăta ulterior, excentricitatea încărcărilor faţă de axa geometrică a barei practic nu modifică valoarea lui F_{cr} în cazul flambajului longitudinal [Buzdugan G., 1986].

În concluzie, cauzele pierderii stabilității elastice par să fie mai degrabă generate de micile imperfecțiuni geometrice ale barei şi de faptul că ipotezele simplificatoare stau la baza unui model matematic ce descrie comportamentul unui material ideal, care de fapt nu există. Materialele utilizate în practica inginerească prezintă abateri mai mari sau mai mici de la acest model. Cumularea acestor abateri ar putea conduce la flambaj.

1.3. FLAMBAJUL LONGITUDINAL ÎN DOMENIUL ELASTIC

Flambajul barelor drepte supuse la compresiune a fost studiat prima dată de către *Leonhard Euler* (1707-1783). Pentru această realizare remarcabilă *Euler* a dezvoltat concepte noi:

- A introdus în Rezistenţa materialelor teoria de ordinul al II-lea, în baza căreia se scriu eforturile și reacțiunile pentru corpul deformat;
- A stabilit ecuația axei neutre deformate, care permite calculul săgeții şi al rotirii la bare drepte supuse la încovoiere;
- A găsit modul de rezolvare al ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți.

Deoarece construcțiile din acea perioada erau masive (din piatră, cărămidă sau lemn), ecuațiile lui *Euler* pentru calculul forței critice de flambaj au rămas multă vreme fără aplicație. Abia odată cu realizarea construcțiilor zvelte (din beton armat sau din oţel) problema calculului la flambaj a devenit stringentă. Cercetările asupra fenomenului de flambaj s-au dezvoltat atât de mult, încât în prezent calculul la stabilitate formează o disciplină de sine stătătoare [Timoshenko J., Gere S., 1964].

Modelarea matematică a flambajului se reduce la o problemă de trifurcație care, pentru o anumită valoare a forței, F_{cr}, admite mai mult de o singură soluție. În figura 1.9 se observă că din punctul în care se atinge F_{cr} diagrama F-Δl poate continua pe o traiectorie care asigură un echilibru stabil (forța creşte în continuare), echilibru indiferent (deformația creşte la forță constantă) sau instabil (forța scade). Deşi toate cele trei soluții sunt matematic corecte, sens fizic are cea care asigură energia potențială minimă. Însă continuarea calculului cu formule pentru domeniul liniar-elastic peste punctul de trifurcație nu este acceptată.

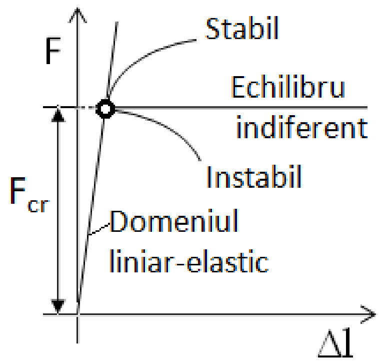


Fig. 1.9. Posibilități teoretice de continuare a diagramei F-Δl după punctul de trifurcare

1.3.1. Flambajul barei articulată la capete

Deoarece cauzele producerii flambajului nu sunt cunoscute, deducerea modelului matematic nu a fost făcută de către *Euler* pornind de la cauza la efect, ci admițând că flambajul tocmai s-a produs, indiferent din ce cauze.

Fie o bară dreaptă, articulată la capete (dublu articulată), solicitată la compresiune. Ea se află în stare deformată din cauza inițierii flambajului. În (fig. 1.10) articulațiile s-au reprezentat prin balustrări. O articulație este fixă iar alta se poate deplasa axial. Se vor determina condiţiile în care această stare reprezintă o configuraţie de echilibru a barei, sub acţiunea forţelor de compresiune. Se admit următoarele ipoteze simplificatoare:

- Solicitarea barei are loc în domeniul liniar elastic;
- Secțiunea barei este constantă pe toată lungimea ei;
- Direcția încărcărilor rămâne constantă în timp ce săgeata creşte;

- Se neglijează greutatea barei, care este mică în raport cu încărcarea;
- Se neglijează frecarea din articulații.

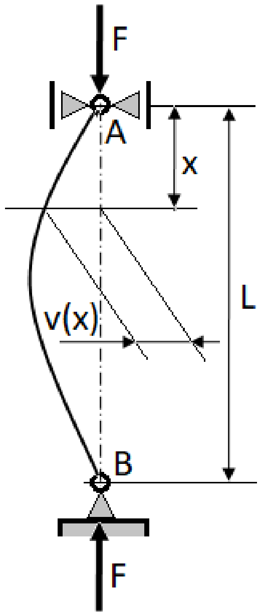


Fig. 1.10. Flambajul longitudinal al barei dublu articulate
(la inițierea flambajului $F=F_{cr}$)

În secţiunea *x* se scrie momentul încovoietor faţă de poziția deformată a barei (Teoria de ordinul al II-lea):

$$M_z(x) = Fv \tag{1.1}$$

Ținând cont de (1.1) ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate pentru grinzi drepte este [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -Fv \tag{1.2}$$

Cu notația

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_z} \tag{1.3}$$

ecuația (1.2) se rescrie

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=0 \tag{1.4}$$

Ecuaţia diferențială cu coeficienți constanți (1.4) are soluţia generală de forma

$$v(x)=C\sin\alpha x+D\cos\alpha x \tag{1.5}$$

Constantele de integrare *C* şi *D* se determină din condiţiile la limită (de rezemare):

$$\begin{aligned} x=0, v=0 \quad in\ A \\ \mathrm{x}=L, v=0 \quad in\ B \end{aligned} \tag{1.6}$$

Înlocuind în (1.5) se obține

$$D=0; \quad C\sin\alpha L=0 \tag{1.7}$$

Ultima ecuație admite soluțiile:

1. C=0 (absurd, pentru că astfel bara rămâne rectilinie, adică flambajul nu se produce, așa cum s-a presupus inițial);
2. L=0 (absurd, deoarece bara dispare);
3. α=0, ceea ce implică F=0 (absurd, astfel nu exista încărcare);
4. Există soluții cu sens fizic doar pentru

$$\sin\alpha L=0 \Rightarrow \alpha L=n\pi; \quad \mathrm{n}=1, 2,... \tag{1.8}$$

Astfel rezultă

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2}=\frac{F_{cr}}{EI_z}\Rightarrow F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_z}{L^2}n^2 \tag{1.9}$$

Deoarece atingerea forței critice de flambaj reprezintă o situație periculoasă care, odată depășită, conduce la cedarea barei, se admite pentru *n* cea mai mică valoare, n=1. Înlocuind în (1.9) rezultă

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \tag{1.10}$$

Aceasta este forța minimă la care se inițiază flambajul în bara dublu articulată. Relaţia a fost stabilită de către *Leonhard Euler* în 1759.

Valorile următoare ale lui *n* au şi ele sens fizic: pentru n=2 bara are un ghidaj la mijloc, care nu-i permite deplasări laterale. Astfel lungimea porțiunii de bară care flambează este L/2, iar forța critică de flambaj devine de patru ori mai mare (fig. 1.11). Analog, dacă n=3 există doua ghidaje intermediare, lungimea porțiunii de bară care flambează este L/3 şi forța critică de flambaj devine de nouă ori mai mare etc.
Utilizarea ghidajelor intermediare reprezintă o soluție simplă pentru mărirea forței critice de flambaj.

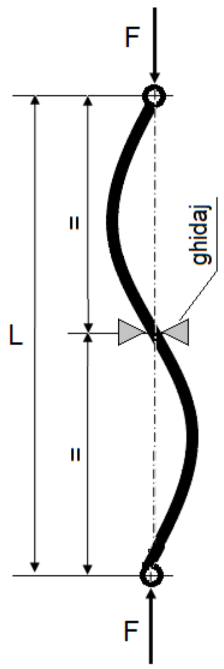


Fig. 1.11. Flambajul barei dublu articulate şi ghidate la mijloc

Deoarece $sin\alpha L = 0$, rezultă că *C* este nedeterminat din (1.7). Altfel spus, constanta *C* poate fi aleasă arbitrar, ceea ce corespunde condiţiei de echilibru indiferent din momentul inițierii flambajului.

1.3.2. Alte cazuri de rezemare

Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Pentru această bară (fig. 1.12) se alege originea sistemului de referință în capătul liber *A*.

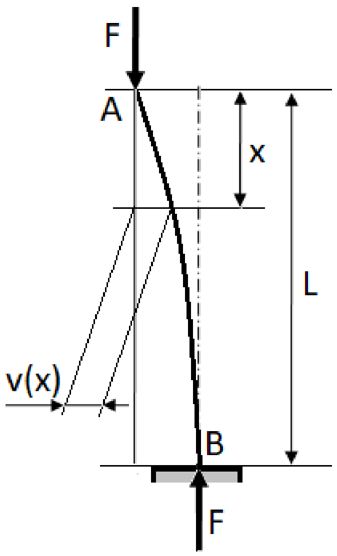


Fig. 1.12. Flambajul barei încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Constantele de integrare *C şi D* se determină din condiţiile la limită, care în acest caz sunt:

1. la capătul liber săgeata este considerată nulă faţă de sistemul de referință cu originea în *A*;
2. în încastrare (capătul *B*) rotirea este nulă.

$$\begin{aligned} & x=0, v=0 \Rightarrow D=0 \\ & x=L, \varphi=\frac{dv}{dx}=0 \Rightarrow C\alpha\cos(\alpha L)=0 \end{aligned} \qquad (1.11)$$

După eliminarea soluțiilor care nu au sens fizic, rămân

$$\alpha L=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots(2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (1.12)$$

Prima dintre aceste rădăcini furnizează valoarea forței critice minime pentru acest caz de rezemare

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2} \tag{1.13}$$

Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt

În acest caz de rezemare în articulație apare reacțiunea H, iar în încastrare reacțiunile V, H şi M (fig. 1.13).

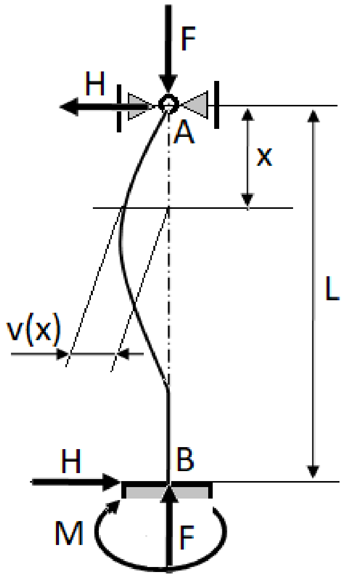


Fig. 1. 13. Flambajul barei încastrată la un capăt şi articulată şi ghidată la celălalt

În secțiunea *x* momentul încovoietor este

$$M_z(x) = Fv - Hx \tag{1.14}$$

Ecuația diferențială a axei deformate se scrie succesiv

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Fv}{EI_z} + \frac{H}{EI_z}x; \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = \frac{H}{EI_z}x \tag{1.15}$$

Soluția generala a acestei ecuații este

$$v = C\sin(\alpha x) + D\cos(\alpha x) + v_1 \tag{1.16}$$

unde v_1 este o soluție particulară

$$v_1 = \frac{H}{F} x \tag{1.17}$$

Înlocuind (1.17) în (1.16) rezultă

$$v = C\sin(\alpha x) + D\cos(\alpha x) + \frac{H}{F} x \tag{1.18}$$

Constantele de integrare *C* şi *D* se determină din condiţiile de rezemare:

$$\begin{gathered} x = 0, v = 0 \quad in\ A \Rightarrow D = 0 \\ \mathrm{x} = L, v = 0, \frac{dv}{dx} = 0 \quad in\ B \end{gathered} \tag{1.19}$$

Înlocuind în (1.18), se obțin succesiv expresiile săgeții şi respectiv rotirii

$$v = C\sin(\alpha x) + \frac{H}{F} x; \quad \frac{dv}{dx} = C\alpha\cos(\alpha x) + \frac{H}{F} \tag{1.20}$$

Se pune acum condiția x=L în încastrare

$$C\sin(\alpha L) + \frac{H}{F} L = 0 \Rightarrow C\sin(\alpha L) = -\frac{H}{F} L \tag{1.21}$$

$$C\alpha\cos(\alpha L) + \frac{H}{F} = 0 \Rightarrow C\alpha\cos(\alpha L) = -\frac{H}{F} \tag{1.22}$$

Împărțind (1.21) la (1.22) rezultă

$$\frac{\tan(\alpha L)}{\alpha} = L \Rightarrow \tan(\alpha L) = \alpha L \tag{1.23}$$

Ecuația transcendentă (1.23) se poate rezolva aproximativ prin încercări şi are rădăcina minimă pozitivă:

$$\alpha L = 4,49; \quad \alpha^2 L^2 = 20,16 = \frac{F_{cr} L^2}{EI_z}$$
$$20,16 \approx 2\pi^2 \Rightarrow F_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EI_z}{L^2} \tag{1.24}$$

Bara încastrată la capete

Acest caz de rezemare este prezentat în figura 1.14.

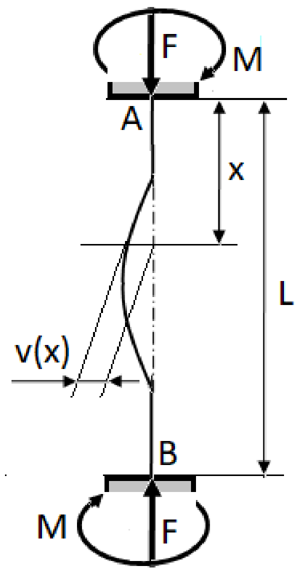


Fig. 1.14. Flambajul barei dublu încastrate

Momentul încovoietor în secțiunea *x* este

$$M_z(x) = Fv + M \tag{1.25}$$

Se scrie ecuația diferențială a axei deformate

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{F}{EI_z} v - \frac{M}{EI_z}; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\frac{M}{EI_z} \tag{1.26}$$

care admite soluția generală de forma

$$v(x) = C \sin \alpha x + D \cos \alpha x + \frac{M}{F} \tag{1.27}$$

Constantele *C* şi *D* se află din condițiile de rezemare, care în acest caz sunt

$$\begin{aligned} & x=0, v=0, \frac{dv}{dx}=0 \quad in\ A \Rightarrow D=-\frac{M}{F} \\ & \mathrm{x}=L, v=0, \frac{dv}{dx}=0 \quad in\ B \end{aligned} \tag{1.28}$$

Se înlocuieşte *D* în (1.27) şi se scriu săgeata şi rotirea în secțiunea *x*

$$\begin{aligned} & v(x)=C\sin\alpha x+\frac{M}{F}(1-\cos\alpha x) \\ & \frac{dv}{dx}=C\alpha\cos(\alpha x)+\frac{M}{F}\alpha\sin(\alpha x) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Înlocuind în (1.28), pentru rotirea în reazemul *A* se obține

$$C\alpha=0 \tag{1.30}$$

Deoarece $\alpha \neq 0$, conform argumentării de la bara dublu articulată, rezultă

$$C=0 \tag{1.31}$$

Înlocuind în (1.29), rotirea şi săgeata din *B* devin

$$\frac{M}{F}(1-\cos\alpha L)=0; \quad \frac{M}{F}\alpha\sin(\alpha L)=0 \tag{1.32}$$

Cele doua condiții trebuie să fie îndeplinite simultan şi de aici rezultă

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha L)=1 \Rightarrow \alpha L=0, 2\pi, \ldots 2\mathrm{n}\pi \\ & \sin(\alpha L)=0 \Rightarrow \alpha L=0, \pi, \ldots \mathrm{n}\pi \end{aligned} \tag{1.33}$$

Cea mai mică soluție comună care are sens fizic este

$$\alpha L=2\pi \Rightarrow F_{cr}=\frac{4\pi^2 EI_z}{L^2} \tag{1.34}$$

1.3.3. Comasarea cazurilor de rezemare

Expresiile forței critice de flambaj pentru cele patru cazuri de rezemare examinate mai sus, adică (1.10), (1.13), (1.24) şi (1.34), diferă doar printr-un coeficient numeric. Ele pot fi comasate într-o singură formulă astfel:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \tag{1.35}$$

unde s-a notat cu L_f mărimea numită lungime de flambaj, care depinde de cazul de rezemare (fig. 1.15).

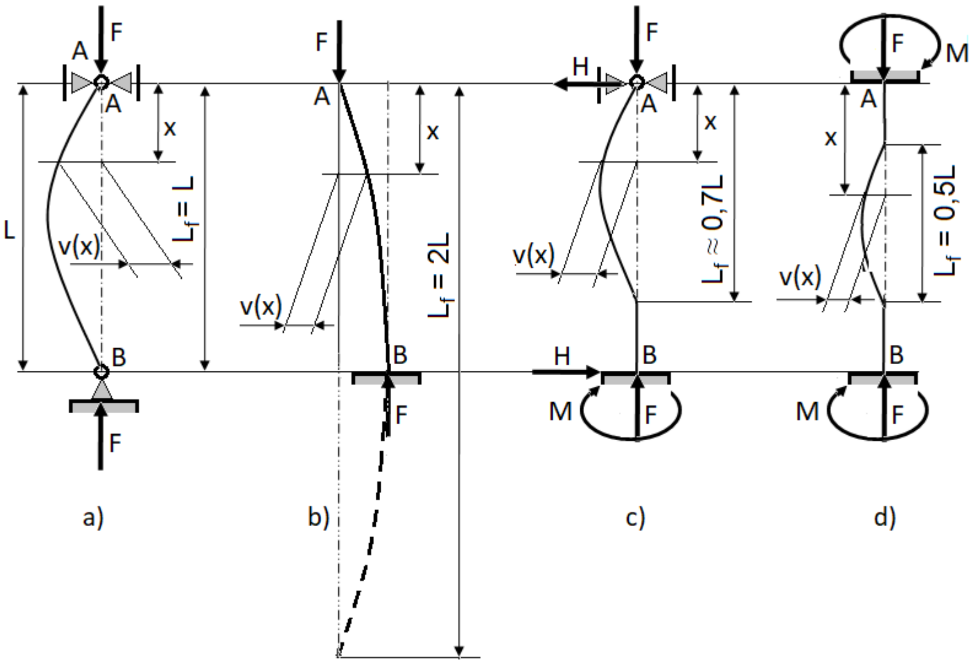


Fig. 1.15. Lungimile de flambaj L_f pentru cele patru cazuri de rezemare studiate

În tabelul 1.1 se prezintă lungimea de flambaj L_f pentru cele patru cazuri de rezemare studiate.

Tab. 1.1. Lungimile de flambaj L_f

Nr. crt.	Cazul de rezemare	Lungimea de flambaj L_f (L=lungimea barei)
1	Bară articulată la capete	$L_f = L$
2	Bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt	$L_f = 2L$
3	Bară încastrată la un capăt şi articulată la celălalt	$L_f = L/\sqrt{2} \approx 0{,}7L$
4	Bară încastrată la capete	$L_f = L/2$

Observații:

- În formula (1.35) s-a înlocuit I_z cu I deoarece, pentru cazurile care nu implică decât încastrări (fig. 1.16), flambajul se produce pe direcția normalei la axa față de care I=minim;
- Cazul articulațiilor cilindrice va fi discutat în paragraful 1.3.6, unde se va argumentata necesitatea acestei înlocuiri;
- In practica inginerească se întâlnesc și alte tipuri de reazeme, care pot fi modelate prin legături elastice. Modelarea acestor reazeme este prezentată în [Pissarenko G., 1979];
- Teoria lui *Euler* se bazează pe o abordare pur matematică, care nu ține cont de imperfecțiunile geometrice, dimensionale si de cele ale materialului. Factorii enumerați mai sus afectează însă forța critică de fambaj și din acest motiv în calculele inginerești formula lui *Euler* se utilizează corijată cu anumiți coeficienți de influență. Singură lungimea de flambaj rămâne neafectată de nici un coeficient de corecție [Kerguignas M., 1976].

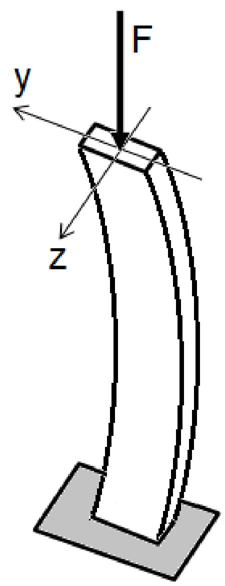


Fig. 1.16. Pentru cazurile de rezemare care implică numai încastrări flambajul se produce pe direcția normalei la axa față de care I=minim

În practică cazurile de rezemare pot fi reprezentate simplificat, așa cum se arată în figura 1.17.

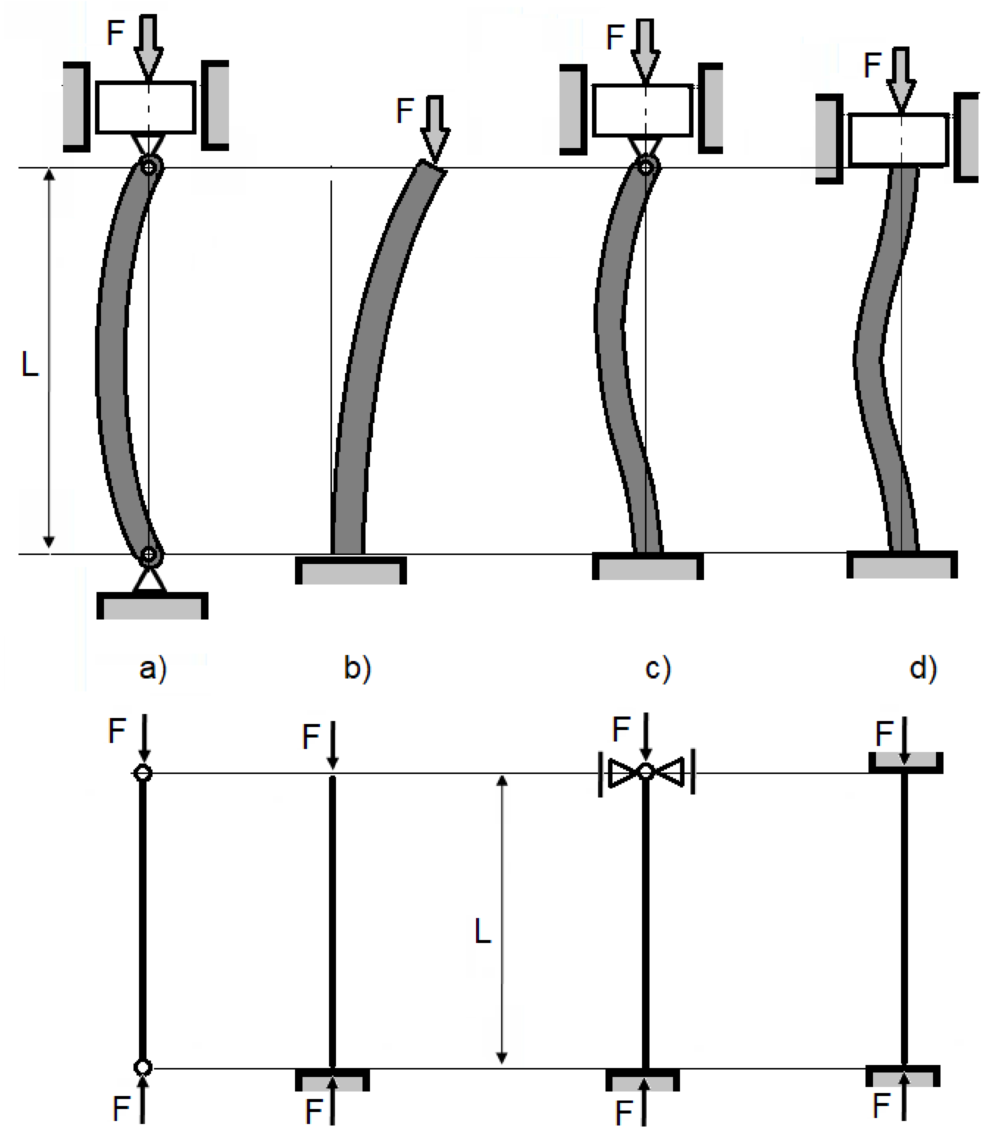


Fig. 1.17. Cazurile de rezemare (rândul de sus) şi reprezentarea lor simplificată (rândul de jos)

1.3.4. Tensiune critică de flambaj

În relația (1.35) de împart ambii membri la aria secțiunii transversale A:

$$\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{L_f^2 A} \Leftrightarrow \quad \frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 E}{L_f^2\,\frac{A}{I}} \tag{1.36}$$

Raportul dintre forţa critică de flambaj şi aria secţiunii transversale a barei se numește tensiune critică de flambaj şi se notează σ_{cr}

$$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A} \tag{1.37}$$

Raportul I/A reprezintă pătratul razei de inerție a secțiunii transversale [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}} \tag{1.38}$$

Cu aceste notații relația (1.36) devine

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_f}{i}\right)^2} \tag{1.39}$$

Se introduce mărimea adimensională numită *coeficient de zvelteţe*

$$\lambda=\frac{L_f}{i} \tag{1.40}$$

Cu această notaţie, relaţia lui σ_{cr} devine

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{1.41}$$

1.3.5. Limitele de valabilitate ale formulelor lui Euler

Relațiile (1.35) şi (1.41) sunt echivalente. Relația (1.41) reprezintă o hiperbolă în coordonate σ_{cr}-λ şi are sens fizic numai în domeniul de proporționalitate al unui material elastic (fig. 1.18).

Astfel, înlocuind σ_{cr} cu tensiunea de proporționalitate se poate determina λ_0, limita inferioară de valabilitate a formulei *Euler*

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \tag{1.42}$$

Pentru multe materiale λ_0 ia valori în intervalul 80-100. Nu se recomandă $\lambda>200$ deoarece în acest caz barele devin prea zvelte şi sunt sensibile la vibrații şi la forțe transversale. Asfel se stabilește limita superioară pentru λ (fig. 1.18).

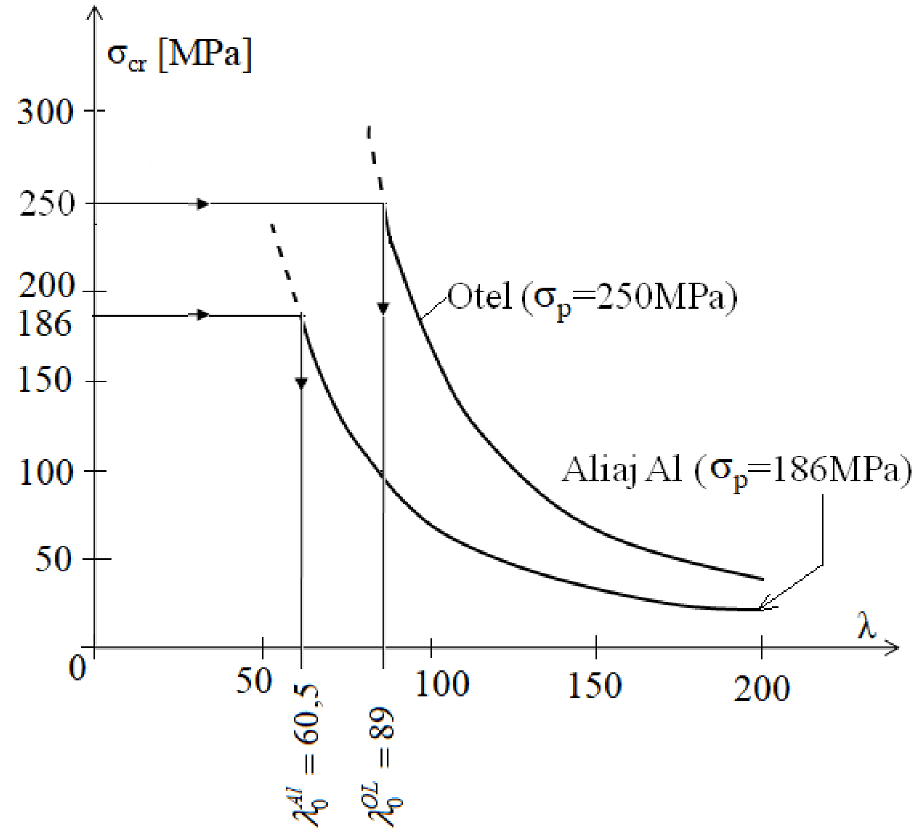


Fig. 1.18. Trasarea hiperbolei Euler pentru oțel structural (σ_p=250MPa) şi aliaj de Al (σ_p=186MPa). Pentru calcule de rezistență se reține poțiunea de hiperbolă cuprinsă între λ_0 şi λ=200

1.3.6. Direcție preferențială de flambaj

Rezemări numai cu încastrări

Fie bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt din figura 1.19, care flambează în domeniul liniar-elastic (*Euler*). Experiența arată că bara flambează în planul xOz, dacă h>b. Se discută în continuare acest comportament preferențial.

Încastrarea de la partea inferioară a barei are același comportament în orice direcție. Altfel spus, la încastrare avem același caz de rezemare şi aceeași lungimea de flambaj, indiferent de direcția în care ar flamba bara.

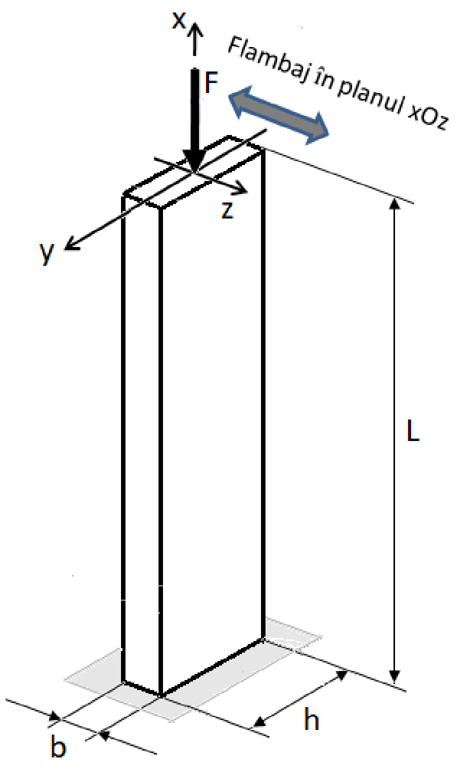


Fig. 1.19. Flambarea barei încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Din (1.35) se observă că forța critică minimă se obține pentru momentul de inerție minim, care în acest caz este I_y. Contează doar forța minimă la care se inițiază flambajul. Deplasarea barei are loc pe direcția axei Oz, normală la axa Oy, față de care s-a calculat momentul de inerție minim. Aceeași observație este valabilă şi pentru bara încastrată la capete, adică pentru cazurile de rezemare care nu utilizează articulații cilindrice.

Se trasează elipsa de inerție pentru secțiunea dreptunghiulară a barei, în ipoteza h>b (fig. 1.20). Semiaxele elipsei sunt

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{1.43}$$

unde

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad A = bh \tag{1.44}$$

Din (1.43) şi (1.44) rezultă

$$i_z = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_y = \frac{b}{2\sqrt{3}} \tag{1.45}$$

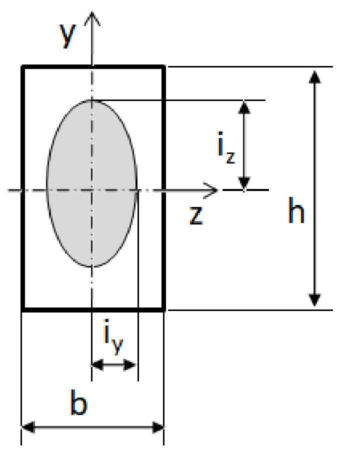


Fig. 1.20. Elipsa de inerție pentru secțiunea dreptunghiulară

Înlocuind pe rând I_z şi I_y în (1.35), se observă că forța critică minimă se obține pentru momentul de inerție minim, care în acest caz este I_y. Se reţine forța minimă la care se inițiază flambajul.

Pentru a calcula valoarea minimă a lui F_{cr} în cazurile de rezemare care implică numai încastrări (respectiv bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt şi bara încastrată la capete), în (1.35) se va înlocui $I = I_{min}$.

Pentru bara din figura 1.19 se continuă raționamentul cu referire la relația (1.41). Se observă că tensiunea critică minimă (care corespunde forței critice minime) se obține pentru λ maxim.

Pentru cazul rezemărilor cu încastrare se vor nota coeficienții de zveltețe

$$\lambda_z = \frac{L_f}{i_z}; \quad \lambda_y = \frac{L_f}{i_y} \tag{1.46}$$

Pentru secțiunea dreptunghiulară rezultă

$$\lambda_z = \frac{L_f}{i_z} = \frac{2\sqrt{3}L_f}{h}; \quad \lambda_y = \frac{L_f}{i_y} = \frac{2\sqrt{3}L_f}{b} \tag{1.47}$$
$$h > b \Rightarrow \lambda_y > \lambda_z$$

Având în vedere cele de mai sus, se observă că *flambajul se inițiază pentru σ_{cr} calculat cu coeficientul de zveltețe maxim* λ_{max}. Deplasarea barei se produce pe direcția axei Oz, normală la direcția axei față de care coeficientul de este zveltețe maxim, respectiv λ_y pentru cazul din figura 1.19.

Rezemări care conțin articulații

Spre deosebire de încastrare, articulația cilindrică nu se comportă la fel în toate direcțiile. Ușile sunt montate pe două articulații cilindrice (balamale) coaxiale. Acestea permit o rotire ușoară în plan orizontal, în jurul axei verticale a articulațiilor. Rotirea ușii în alt plan (față de altă axă) este însă împiedicată deoarece în acest caz articulațiile nu lucrează şi se comportă ca niște încastrări. În mod similar se comportă şi bara din figura 1.21, care poate flamba ca dublu articulată în planul xOy sau ca dublu încastrată în planul xOz, dacă momentele de inerţie axiale permit acest lucru. La bara din figura 1.21 rulmenții de la articulația de jos sunt fixați la batiu, cei de la articulația de sus sunt ghidați şi se pot deplasa numai pe direcția axei Ox.

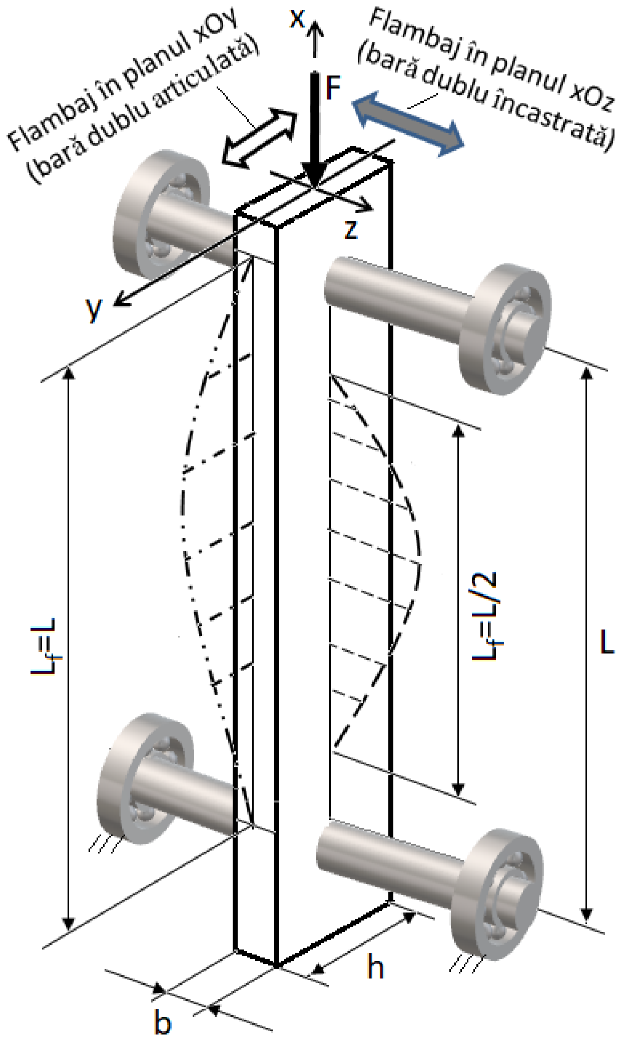
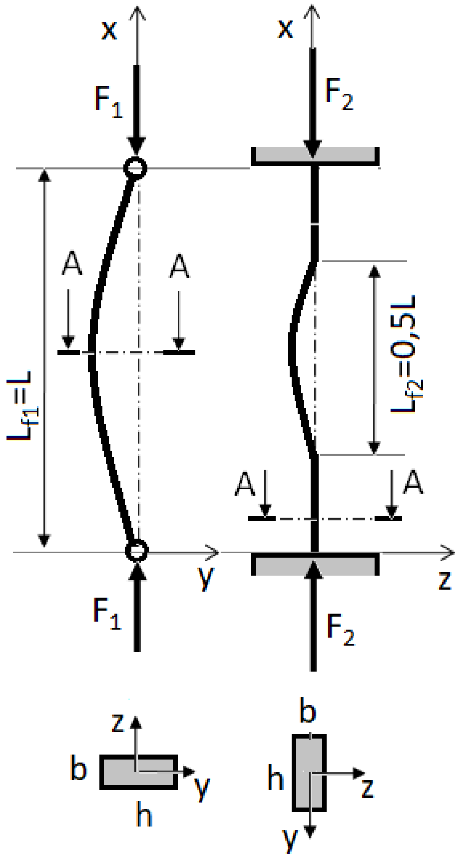


Fig. 1.21. Particularitățile articulațiilor cilindrice: bara poate flamba ca dublu articulată în planul xOy sau ca dublu încastrată în planul xOz

În acest caz lungimile de flambaj în cele doua plane sunt diferite, din cauza comportamentului dual al articulațiilor cilindrice: bara poate flamba ca dublu articulată în planul xOy sau ca dublu încastrată în planul xOz (fig. 1.22).



$$F_{cr1} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{f1}^2}$$

$$F_{cr2} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{f2}^2}$$

Fig. 1.22. Bara din fig. 1.21 poate flamba ca dublu articulată în planul xOy sau ca dublu încastrată în planul xOz, dacă momentele de inerție axiale ale secțiunii transversale îi permit acest lucru

Dacă flambajul se produce într-un singur plan, (adică există o direcție preferențială de flambaj) aceasta înseamnă că față de una dintre axele principale de inerție ale secțiunii transversale a fost distribuit prea mult material.

De exemplu, pentru secțiunea dreptunghiulară economia maximă de material se produce atunci când raportul h/b este astfel ales încât să nu existe o direcție preferențială de flambaj sau, altfel spus, flambajul se poate produce simultan în ambele plane (xOz şi xOy). Aceasta implică (v. fig. 1.22) îndeplinirea condiţiei ca forțele critice de flambaj, respectiv tensiunile critice de flambaj în cele două plane să fie egale

$$F_{cr1} = F_{cr2} \Leftrightarrow \sigma_{cr1} = \sigma_{cr2} \tag{1.48}$$

Astfel, pentru bara din figura 1.22 se pune condiția

$$F_{cr1} = F_{cr2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2 E}{L^2} I_z = \frac{4\pi^2 E}{L^2} I_y \tag{1.49}$$

Înlocuind (1.44) în (1.49) rezultă h=2b.

Similar se pot egala tensiunile critice pentru flambajul în doua plane

$$\sigma_{cr1} = \sigma_{cr2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} \Rightarrow \lambda_z = \lambda_y \tag{1.50}$$

Se scriu relațiile (1.47) pentru cazul din figurile 1.21 şi 1.22

$$\lambda_z = \frac{L_{f1}}{i_z} = \frac{2\sqrt{3}L}{h}; \quad \lambda_y = \frac{L_{f2}}{i_y} = \frac{2\sqrt{3}}{b} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\sqrt{3}L}{b} \tag{1.51}$$

Din (1.50) şi (1.51) rezultă de asemenea h=2b.

Aplicația 1

Din două profile U20 (STAS 564-86), [1], cuplate între ele cu zăbrele, se confecționează un stâlp zvelt care este încastrat la bază, liber la vârf şi este supus la compresiune (fig. 1.23). Să se determine distanța *t* la care trebuie să fie amplasate cele două profile U astfel încât să nu existe o direcție preferențială de flambaj.

Se va neglija influența barelor de legătura (zăbrele) dintre cele doua profile.

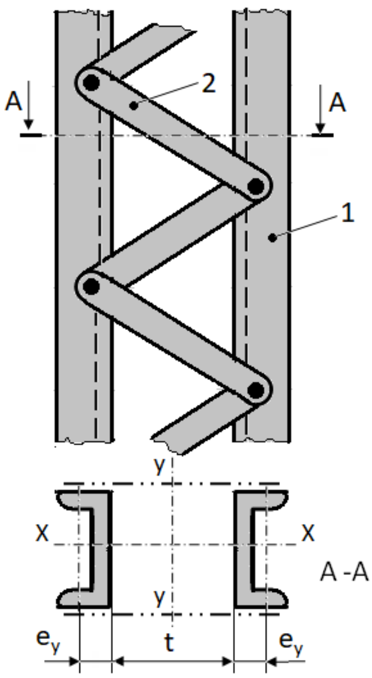


Fig. 1.23. Stâlp format din două profile U solidarizate cu zăbrele

Rezolvare

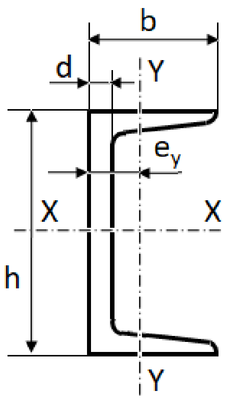
Caracteristicile profilelor laminate se iau din standarde. Pentru oțelul laminat la cald U20 (STAS 564-86) doar caracteristicile necesare acestui calcul sunt prezentate în figura 1.24.

Pentru profilul U20 se transformă unităţile de măsură din tabelul din figura 1.24: $A=3220mm^2$; $I_X=19{,}1\cdot10^6mm^4$; $I_Y=1{,}48\cdot10^6mm^4$; $e_y=20mm$. Pentru două profile U20, așezate la distanţa *t*, se calculează momentele de inerție faţă de axele X-X şi y-y (fig. 1.23):

$$I_X^{(2)} = 2 \cdot 19{,}1 \cdot 10^6 mm^4 = 38{,}2 \cdot 10^6 mm^4$$

$$I_y^{(2)} = 2\left[I_Y + A\left(\frac{t}{2} + e_y \right)^2 \right] \tag{1.52}$$

$$I_y^{(2)} = 2\left[1{,}48 \cdot 10^6 + 3220\left(\frac{t}{2} + 20 \right)^2 \right]$$



Oțel U

Simbol U	Dimensiuni [mm]			A [cm^2]	Mărimi statice pentru încovoiere				e_Y [cm]
	h	b	d		I_X [cm^4]	i_x [cm]	I_Y [cm^4]	i_y [cm]	
20	200	75	8,5	32,2	1910	7,7	148	2,14	2

Fig. 1.24. Caracteristici geometrice ale profilului U20 (extras STAS 564-86), [1]

Pentru a nu avea o direcție preferențială de flambaj este necesar ca momentele de inerție ale secțiunii stâlpului față de cele două axe X-X şi y-y să fie egale

$$I_X^{(2)} = I_y^{(2)} \Leftrightarrow 38{,}2 \cdot 10^6 = 2\left[1{,}48 \cdot 10^6 + 3220\left(\frac{t}{2} + 20 \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow t^2 + 80t - 42176 = 0 \tag{1.53}$$

$$\Rightarrow t \approx 169{,}2 mm$$

1.3.7. Alegerea materialului. Secțiuni raționale

Pentru flambajul în domeniul liniar-elastic se observă că singura caracteristică de material care intervine în relațiile (1.35) şi (1.41) este modulul *Young*, E. Această caracteristică elastică variază puțin de la o marcă de oţel la alta. În consecință, *nu este rațional ca pentru confecționarea barelor zvelte supuse la compresiune să se aleagă oţeluri de înaltă rezistenţă.* Însă λ_0 și coeficienții *a* și *b* (v. paragraful 1.4), depind de tipul de oțel.

În ceea ce privește forma secțiunii transversale, din (1.35) se vede că, în vederea creșterii forței critice momentul de inerție axial ar trebui să fie cât mai mare. Din (1.41), (1.40) şi (1.38) reiese că de fapt momentul de inerție axial I trebuie să fie cât mai mare pentru o arie dată A. Pentru a compara performanţele diverselor secțiuni ale barelor zvelte supuse la compresiune se introduce noțiunea de *rază de girație specifică*, care este o mărime adimensională [Pissarenko G., 1979]:

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{A}} \tag{1.54}$$

Datele din tabelul 1.2. permit alegerea unor secțiuni raționale pentru barele zvelte supuse la compresiune.

Tab.1.2. Raza specifică de girație pentru diverse secțiuni

Nr. crt.	Secțiunea	ξ	Nr. crt.	Secțiunea	ξ
1	Tubulară (d_{int}/d_{ext}=0,95-0,8)	2,25-1,64	5	Profil U (fig. 1.24)	0,41-0,29
2	Tubulară (d_{int}/d_{ext}=0,7-0,8)	1,2-1	6	Pătrată	0,289
3	Cornier	0,5-0,3	7	Circulară	0,283
4	Profil I	0,41-0,27	8	Dreptunghiulară (h=2b)	0,204

Din analiza datelor cuprinse în tabelul 1.2 reiese că secțiunile raționale pentru barele zvelte supuse la compresiune sunt cele tubulare sau cheson cu pereți subțiri (fig. 1.25). Secțiunea dreptunghiulară plină este cea mai puțin performantă. Când se adoptă secțiunea unei bare zvelte care trebuie să preia o forță de compresiune cât mai mare, se va urmări să nu existe direcții preferențiale de flambaj.

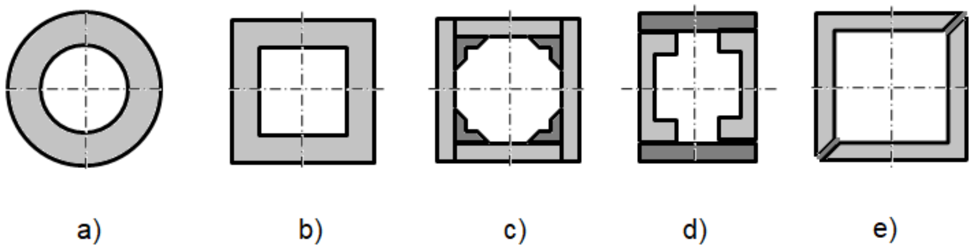


Fig. 1.25. Secțiuni raționale pentru bare zvelte supuse la compresiune: circulară inelară (a); tip țeava pătrată (b); tip cheson, formată din plăci şi profile corniere (c); tip cheson, formată din plăci şi profile U (d); tip cheson, formată prin sudarea profilelor cornier cu aripi egale (e)

1.4. FLAMBAJ ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

Flambajul longitudinal se poate produce şi după depășirea limitei de proporționalitate. În domeniul flambajului elasto-plastic, pe baza experiențelor făcute de *F.S. Iaşinski* (1895) şi *L. Tetmajer* (1896), diagrama tensiunii critice de flambaj se aproximează cu o dreaptă pentru oțeluri

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \tag{1.55}$$

şi cu o parabolă pentru fonte

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2 \tag{1.56}$$

Relațiile *Tetmajer-Iaşinki* (1.55) şi (1.56) sunt empirice. Constantele *a, b* şi *c* depind de material şi se determină experimental (tab. 1.3). Ele sunt valabile pentru intervalul $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0]$.

Pentru comportament ductil σ_{cr} *se limitează la tensiunea de curgere* a materialului, σ_c *.* Se notează cu λ_1 abscisa punctului de ordonată $\sigma_{cr} = \sigma_c$. Pentru $\lambda<\lambda_1$ suntem în *domeniul barelor scurte, la care flambajul nu se produce. Ele sunt calculate doar la compresiune* (fig. 1.26).

Flambajul barelor intermediare se produce în domeniul elasto-plastic şi este un fenomen extrem de complex. Există mai multe formulele care îl modelează şi toate sunt determinate empiric (pe bază experimentală).

Tab. 1.3. Valorile coeficienților a, b şi c din formula Tetmajer-Iaşinski şi coeficienții de zveltețe care limitează intervalul în care se produce flambajul elasto-plastic

Material	*a* [MPa]	*b* [MPa]	*c* [MPa]	λ_0	λ_1
Oțel OL 37	310	1,14	-	105	60
Oțel OL 42	321	1,16	-	90	60
Oțel OL 50	459,3	1,98	-	85	60
Oțel aliat cu 5% Ni	470	2,3	-	86	-
Oțel aliat cu Cr-Mo	980	5,3	-	55	-
Oțel cu Si	589	3,82	-	100	
Duraluminiu	372	2,14	-	50	-
Lemn (brad)	29,3	0,19	-	100	-
Fontă cenuşie	776	12	0,053	80	5

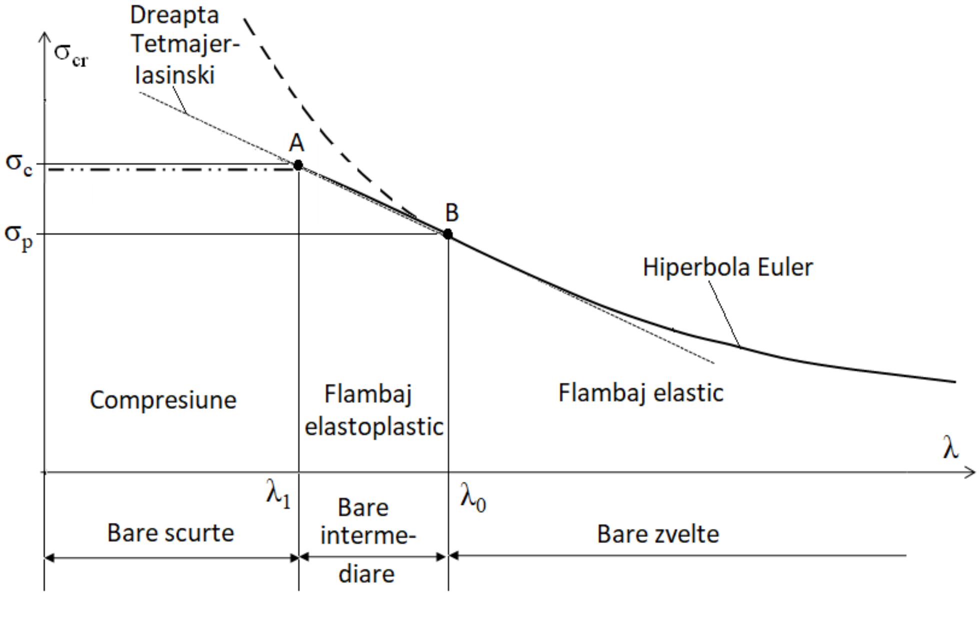


Fig. 1.26. Domeniile de valabilitate ale relațiilor (1.41) şi (1.55)

Diagrama din figura 1.27 cuprinde două regiuni:

- C-D este o porțiune din hiperbola *Euler*, utilizată pentru calculul la flambaj al barelor zvelte;
- Porțiunea A-B-C este modelată de ecuația lui *Jhonson*, utilizată pentru flambajul barelor intermediare şi scurte.

Ecuația parabolei lui *Jhonson* este

$$\sigma_{cr} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2 \lambda^2}{4\pi^2 E} \tag{1.57}$$

unde $\sigma_{cr} > \sigma_c/2$.

Din (1.57) se observă că pentru $\lambda \to 0 \Rightarrow \sigma_{cr} \to \sigma_c$ .Această relație este recomandată de *American Institute of Steel Construction* din S.U.A.

Pentru a determina λ_0, care este abscisa punctului *C* de la racordarea dintre hiperbola (1.41) şi parabola(1.57), se egalează σ_{cr} calculată cu formula lui *Euler* şi respectiv *Johnson* (v. fig. 1.28):

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = \sigma_c - \frac{\sigma_c^2 \lambda_0^2}{4\pi^2 E} \tag{1.58}$$

de unde rezultă

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}} \tag{1.59}$$

Se observă că valorile lui λ_0 determinate cu (1.42) şi respectiv (1.59) se află în raportul

$$\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\pi^2 E}} = \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\sigma_p}} \tag{1.60}$$

Acest raport este în general diferit de 1, deci valorile lui λ_0 calculate cu cele două relații sunt diferite.

In calculele inginerești se stabilește un coeficient de siguranță funcție de tensiunea critică de flambaj dată de formulele Tetmajer-Iașinski sau *Jhonson* [Massonet Ch., 1980].

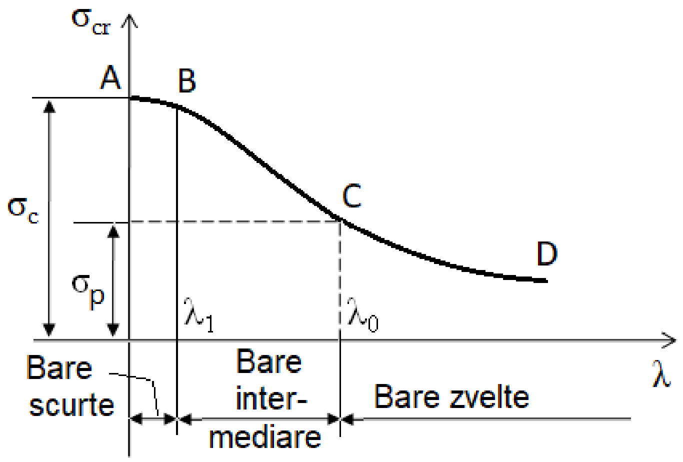


Fig. 1.27. Diagrama σ_{cr}-λ: porțiune din hiperbola Euler (C-D) şi din parabola Jhonson (A-B-C)

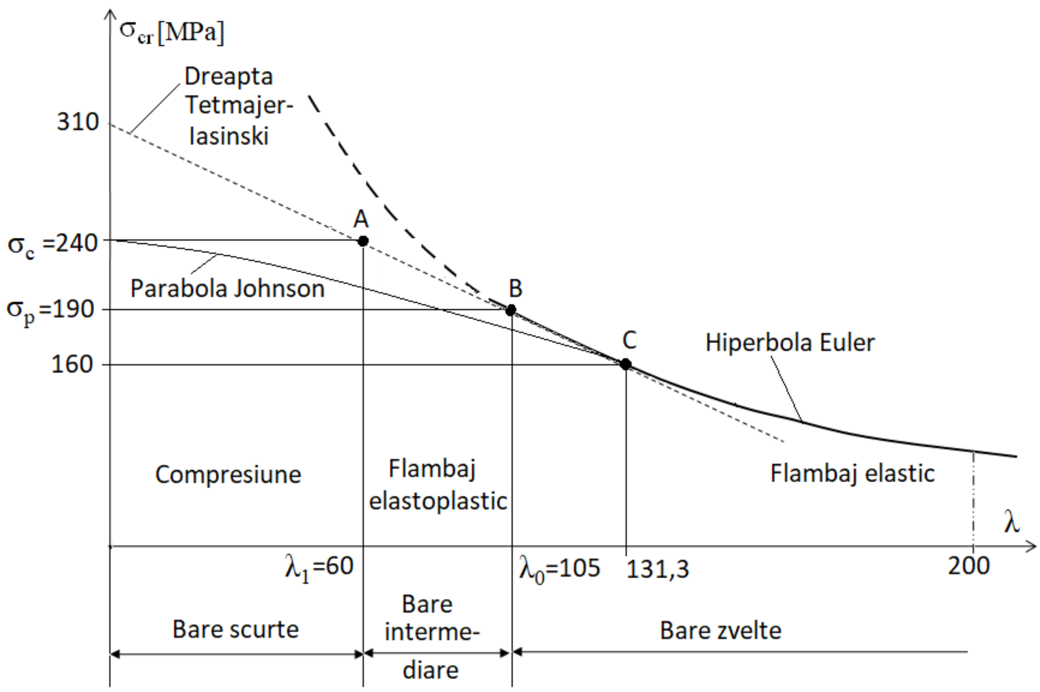


Fig. 1.28. Diagrama σ_{cr}-λ pentru OL37 [Massonnet Ch., 1980]

1.5. CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA FLAMBAJ

Pentru calculul de rezistență la flambaj se adoptă metoda sarcinii limită, care utilizează un coeficient de siguranță global, prezentat în mod explicit. Aplicarea acestei metode conduce a economii de material în cazul barelor zvelte. Se definește un *coeficient de siguranță la flambaj c,* egal cu raportul dintre forța critică de flambaj F_{cr} și forța care încarcă bara, F

$$c = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} \tag{1.61}$$

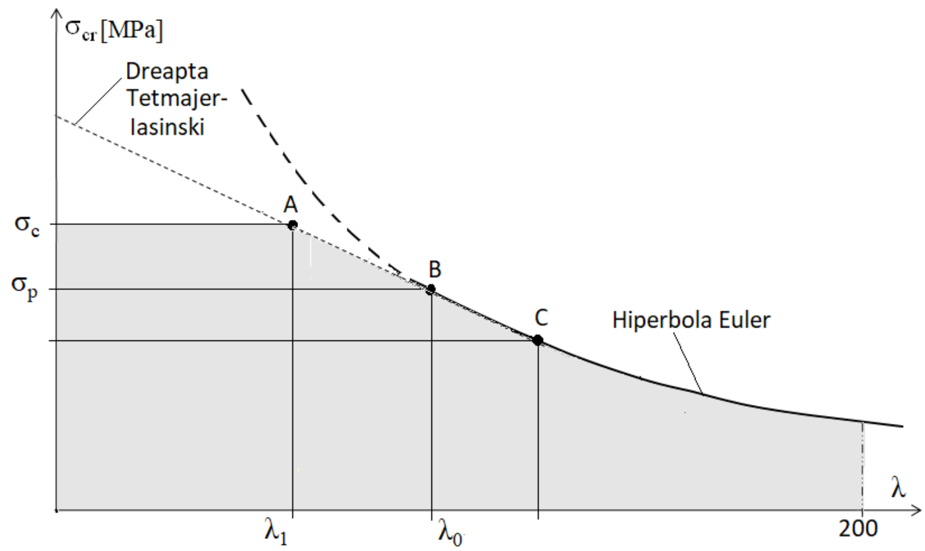
Deoarece nu se cunosc cu certitudine cauzele flambajului și dispersia rezultatelor experimentale este mare, coeficientul de siguranță la flambaj are valori mai ridicate decât în cazul solicitărilor simple statice

- Pentru construcții metalice se admite c=1,7-2;
- Pentru construcții de mașini c=2-20, funcție de importanța piesei în ansamblul respectiv [Buzdugan G., 1986].

În figura 1.29 se observă zona gri, în care c>1.

Ținând cont de (1.61), formula lui Euler (1.41) se poate rescrie:

$$F_{cr} = cF = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \tag{1.62}$$



a)

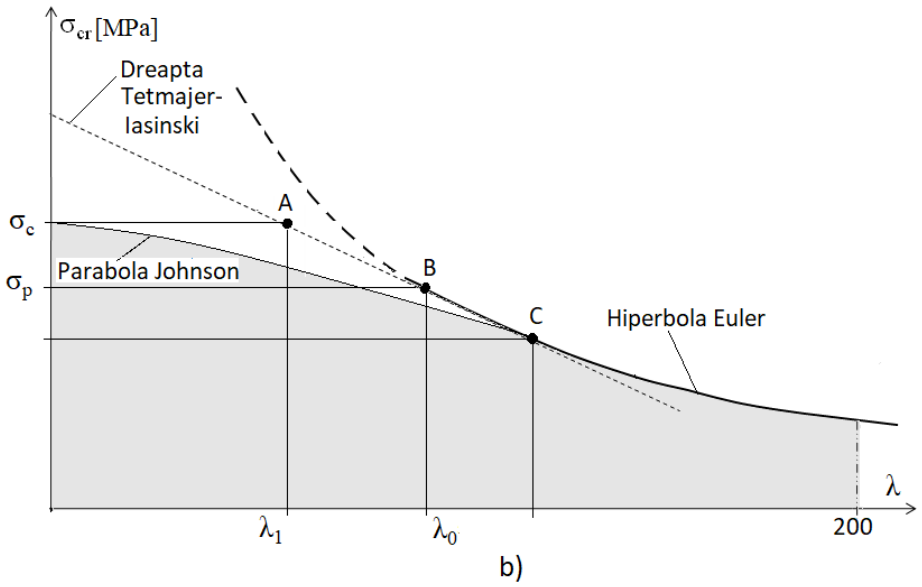


Fig. 1.29. Pe traseul σ_c-A-B-C (până la λ=200) coeficientul de siguranță c=1, în zona gri c>1, iar în zona albă c<1

1.5.1. Calculul de verificare

Calculul de verificare este unul simplu (deoarece se cunosc dimensiunile secțiunii transversale) şi cuprinde următoarele etape:

- Se calculează λ, se compară cu λ_0 și λ_1, se stabilește domeniul în care flambează bara (elastic sau elasto-plastic);
- Se determină coeficientul de siguranță la flambaj cu formulele corespunzătoare domeniului stabilit mai sus și se compară cu valorile recomandate în normativele de calcul.

1.5.2. Calculul de dimensionare

Acesta este cazul întâlnit la proiectare când se stabilesc, pe baza calculului de rezistență și/sau organologic, dimensiunile secțiunii transversale.

Calculul de *dimensionare este îngreunat de faptul că, necunoscând dimensiunile secțiunii transversale, nu se poate calcula raza de inerție i , deci nici λ , neștiindu-se în ce domeniu are loc flambajul* și, în consecință, nu se știe ce formule trebuie să fie utilizate (*Euler* sau *Tetmaier-Iașinski*, respectiv *Jhonson*). În aceasta situație, se presupune într-o primă etapă că flambajul se produce în domeniul elastic și se utilizează formulele lui *Euler*.

Calcul de dimensionare cuprinde următoarele etape:

- Se presupune că $\lambda > \lambda_0$, corespunzător domeniului *Euler*;
- Se calculează valoarea momentului de inerție axial minim cu (1.62), se egalează cu expresia momentului de inerție scrisă funcție de un singur parametru și rezultă astfel dimensiunile provizorii ale secțiunii transversale, care se rotunjesc prin adaos;
- Se calculează o valoare provizorie pentru λ şi se compară cu valorile λ_0 şi λ_1 pentru materialul respectiv;
- Dacă $\lambda \geq \lambda_0$ ipoteza inițială se confirmă, utilizarea formulei lui Euler este justificată, dimensiunile calculate sunt corecte şi calculul se încheie aici;
- Dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ se continuă calculul în domeniul elasto-plastic. Acest calcul se face prin încercări. Se determină σ_{cr} cu (1.55) sau cu altă relație adecvată și respectiv $\sigma = F/A$ pentru compresiune. Coeficientul de siguranță calculat este $c = \sigma_{cr}/\sigma$. Se continuă prin iterații până când se obține un coeficient de siguranță calculat mai mare sau egal cu cel propus pentru aplicația respectivă.

În figura 1.30 se prezintă etapele calculului la flambaj, sub forma unei scheme-bloc. Aceste calcule vor fi aplicate în continuare la rezolvarea unor probleme. Urmând schema din figura 1.30 se poate face un software pentru calculul automat.

Există și alte metode pentru calculul la flambaj [Bia C., 1983; Massonet Ch., 1980; Giet A., 1968; Chèze C., 1966].

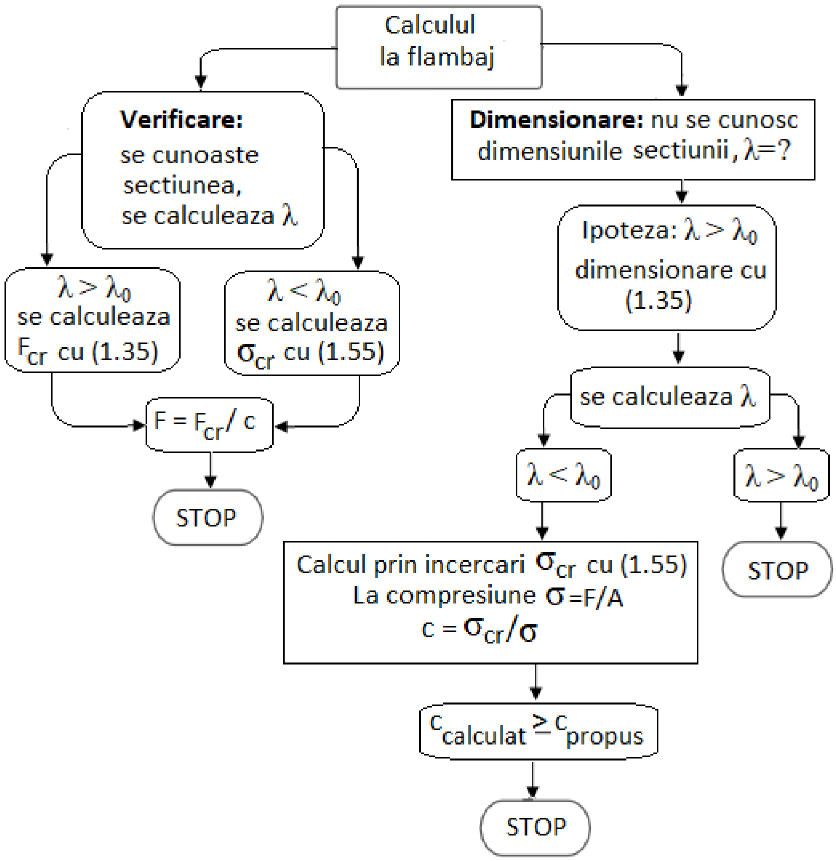


Fig. 1.30. Schema bloc pentru calculul la flambaj longitudinal

Observație:
Pentru $\lambda < \lambda_1$ (domeniul barelor scurte) flambajul nu se produce și se face un simplu calcul la compresiune.

1.5.3. Aplicații

Problema 1.1

Să se calculeze forța capabilă de compresiune a barei încastrată la un capăt, respectiv articulată și ghidată la celălalt (fig. 1.31), știind că c=3,5, λ_0 *=105,* E=210GPa, L=2m, a=304MPa și b=1,12MPa. Secțiunea transversală a barei este dreptunghiulară, cu dimensiunile b=40mm și h=60mm.

Rezolvare

Aceasta este o problemă de verificare, deoarece se cunosc dimensiunile secțiunii transversale.

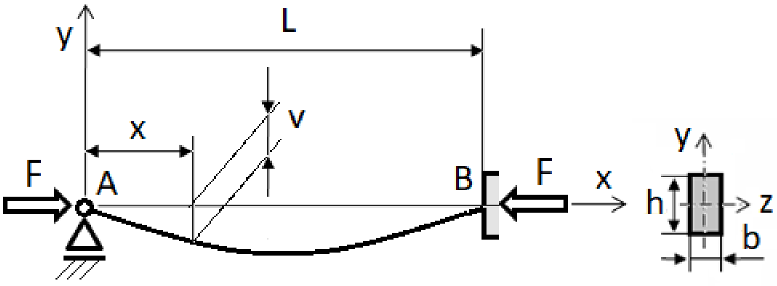


Fig. 1.31. Bară zveltă, cu secțiunea dreptunghiulară, supusă la compresiune

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale

$$A = bh; \quad A = 40 \cdot 60 = 2400 mm^2;$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 72 \cdot 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 32 \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{72 \cdot 10^4}{2400}} = 17,32 mm$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^4}{2400}} = 11,55 mm$$

(1.63)

Se verifică posibilitățile de flambaj în cele două plane, xOy și xOz. Pentru flambaj în planul xOy (bara încastrată și articulată), cu L_{f1}=0,7L, se calculează coeficientul de zveltețe λ_z. Bara poate flamba ca încastrată la capete în planul xOz, cu L_{f2}=0,5L și se calculează coeficientul de zvelteţe λ_y:

$$\lambda_z = \frac{L_{f1}}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 2000}{17,32} = \frac{1400}{17,32} = 80,83 < \lambda_0 = 105$$

$$\lambda_y = \frac{L_{f2}}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 2000}{11,55} = \frac{1000}{11,55} = 86,6 < \lambda_0 = 105 \qquad (1.64)$$

Deoarece ipoteza inițială $\lambda > \lambda_0$ nu se verifică, rezultă că flambajul se produce în domeniul elasto-plastic. Atât λ_z cât și λ_y sunt mai mici decât λ_0 și calculul va fi continua cu formula *Temajer-Iașinski*. Forța minimă care produce flambajul se obține pentru cazul coeficientului de zvelteţe maxim, care în acest caz este λ_y

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad \sigma_{cr} = 304 - 1,12 \cdot 86,6 = 207MPa;$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{cr}}{c}; \quad \sigma = \frac{207}{3,5} \approx 59,14MPa \tag{1.65}$$

$$F_{cap} = \sigma A = 59,4 \cdot 2400 = 142,56kN$$

Problema 1.2

Tija unui piston al unui cilindru hidraulic are secțiunea circulară. Să se dimensioneze tija știind că are lungimea L=1,2m și este supusă la compresiune cu forța maximă de F=100kN. Se adoptă coeficientul de siguranță c=10. Tija este confecționată din oțel cu σ_c=240MPa, E=210GPa, λ_0=105 și este articulată la capete.

Rezolvare

Pentru secțiunea circulară momentul de inerție este

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \tag{1.66}$$

Pentru bara dublu articulată L_f=L. În ipoteza că flambajul se produce în domeniul elastic ($\lambda > \lambda_0$) rezultă

$$F_{cr} = cF = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \Rightarrow I_z = \frac{cFL_f^2}{\pi^2 E}; I_z = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 1200^2}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 69,5 \cdot 10^4 mm^4$$

(1.67)

Din (1.66) și (1.67) rezultă

$$\frac{\pi d^4}{64} = 69,5 \cdot 10^4 \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{69,5 \cdot 10^4 \cdot 64}{\pi}} = 61,3mm \tag{1.68}$$

Se rotunjește valoarea diametrului la d=62mm și apoi se calculează valoarea lui λ

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}; \quad i_z = \frac{62}{4} = 15,5mm$$

$$\lambda = \frac{L_f}{i_z} = \frac{L}{i_z}; \quad \lambda = \frac{1200}{15,5} = 77,4 < \lambda_0 = 105 \tag{1.69}$$

Se continuă cu un calcul empiric, utilizând formula lui Tetmajer-Iașinski. În cele ce urmează, tensiunea normală pentru încercarea (i) se va nota $\sigma^{(i)}$.

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad \sigma_{cr} = 304 - 1{,}12\lambda; \quad \sigma_{cr}^{(1)} = 304 - 1{,}12\lambda_{(1)};$$
$$\sigma_{cr}^{(1)} = 304 - 1{,}12 \cdot 77{,}4 = 217{,}3MPa$$
$$\sigma^{(1)} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_1^2}; \quad \sigma^{(1)} = \frac{4 \cdot 10^5}{\pi 62^2} \approx 33{,}14MPa \tag{1.70}$$
$$c_1 = \frac{\sigma_{cr}^{(1)}}{\sigma^{(1)}}; \quad c_1 = \frac{217{,}3}{33{,}14} \approx 6{,}56 < c_{propus} = 10$$

Deoarece la prima încercare s-a obținut un coeficient de siguranță c_1 mai mic decât cel propus, se majorează diametrul. Se adoptă d_2=80mm și se reia calculul.

$$i_{z2} = \frac{d_2}{4}; \quad i_{z2} = \frac{80}{4} = 20mm; \quad \lambda_{(2)} = \frac{L}{i_{z2}}; \quad \lambda_{(2)} = \frac{1200}{20} = 60$$
$$\sigma_{cr}^{(2)} = 304 - 1{,}12\lambda_{(2)}; \quad \sigma_{cr}^{(2)} = 304 - 1{,}12 \cdot 60 = 236{,}8MPa$$
$$\sigma^{(2)} = \frac{4F}{\pi d_2^2}; \quad \sigma^{(2)} = \frac{4 \cdot 10^5}{\pi 80^2} = 19{,}9MPa \tag{1.71}$$
$$c_2 = \frac{\sigma_{cr}^{(2)}}{\sigma^{(2)}}; \quad c_2 = \frac{236{,}8}{19{,}9} = 11{,}9 > c_{propus}$$

La a doua încercare s-a obținut o valoare prea mare pentru coeficientul de siguranță, ceea ce înseamnă un consum excesiv de material. Se adoptă un diametru mai mic, d_3=75mm și se reia calculul.

$$i_{z3} = \frac{d_3}{4} = \frac{75}{4} = 18{,}75mm; \quad \lambda_{(3)} = \frac{L}{i_{z3}} = \frac{1200}{18{,}75} = 64$$
$$\sigma_{cr}^{(3)} = 304 - 1{,}12\lambda_{(3)}; \quad \sigma_{cr}^{(3)} = 304 - 1{,}12 \cdot 64 = 232{,}3MPa$$
$$\sigma^{(3)} = \frac{4F}{\pi d_3^2}; \quad \sigma^{(3)} = \frac{4 \cdot 10^5}{\pi 75^2} = 22{,}5MPa \tag{1.72}$$
$$c_3 = \frac{\sigma_{cr}^{(3)}}{\sigma^{(3)}}; \quad c_3 = \frac{232{,}3}{22{,}5} = 10{,}3 > c_{propus}$$

Deoarece s-a obținut o valoare cu puțin mai mare decât coeficientul de siguranță propus, se adoptă d=75mm și astfel se încheie calculul de dimensionare a tijei.

Problema 1.3

Să se dimensioneze stâlpul figura 1.32, știind că este profil I (STAS 565-80) solicitat cu o forță F = 100 kN, lungimea L = 1m, coeficientul de siguranță impus c = 3, iar pentru OL 37 se cunosc σ_c = 240 MPa, a=304MPa, b=1,12MPa, λ_0 =105, λ_1 = 60 și E = 210 GPa.

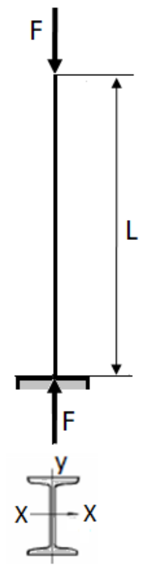


Fig. 1.32. Stâlp profil I

Rezolvare

Pentru bara încastrată la un capăt și liberă la celalalt L_f=2L. Se presupune că flambajul are loc în domeniul elastic ($\lambda>\lambda_0$) și se utilizează formula Euler (1.35):

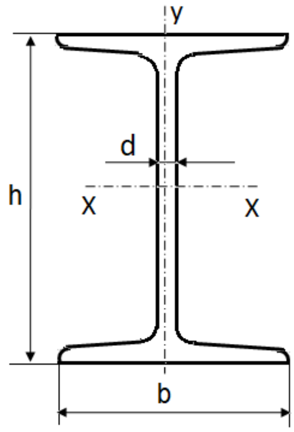
$$F_{cr} = cF = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \Rightarrow I_{nec} = \frac{cFL_f^2}{\pi^2 E}; \quad I_{nec} = \frac{3\cdot 10^5 \cdot 2000^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1\cdot 10^5} = 57{,}69\cdot 10^4 mm^4 \tag{1.73}$$

Valoarea de mai sus este situată între $I_{min} = I_y$ = 54,7·10^4 mm^4, corespunzătoare profilului I16 și 81,3·10^4 mm^4, corespunzătoare profilului

I18 din STAS 565-80, [1]. Se alege profilul I18, cu următoarele caracteristici: A = 2790 mm^2, $I_{min} = I_y = 81{,}3 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min}=i_y=17{,}1$ mm (fig. 1.33).
Se calculează apoi coeficientul de zveltețe

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}}; \quad \lambda = \frac{2000}{17{,}1} = 117 > \lambda_0 = 105 \tag{1.74}$$

Se confirmă astfel ipoteza inițială ($\lambda>\lambda_0$) și se încheie astfel calculul stâlpului la flambaj.



Oțel I (STAS 565-80)

Simbol I	Dimensiuni [mm]			A [cm^2]	Mărimi statice pentru încovoiere				Masa G [kg/m]
	h	b	d		I_X [cm^4]	i_x [cm]	I_Y [cm^4]	i_y [cm]	
16	160	74	6,3	22,8	935	6,4	54,7	1,55	21,9
18	180	82	6,9	27,9	1450	7,2	81,3	1,71	26,3

Fig. 1.33. Caracteristici geometrice ale unor profile I (extras), [1]

Problema 1.4

Să se dimensioneze corpul bielei unui motor cu ardere internă, având secțiunea de forma schematizată în figura 1.34, știind că: diametrul pistonului d=100mm; presiunea maximă din cilindru p=40bar; lungimea bielei l=320mm. Se cere un coeficient de siguranță c=5. Se presupune, într-o primă aproximare, că biela are secțiunea constantă pe lungime. Grosimea inimii și a tălpilor este *t*, înălțimea profilului *5t*, iar lățimea *3t* (fig. 1.34). Biela este confecționată dintr-un oțel cu 5% Ni.

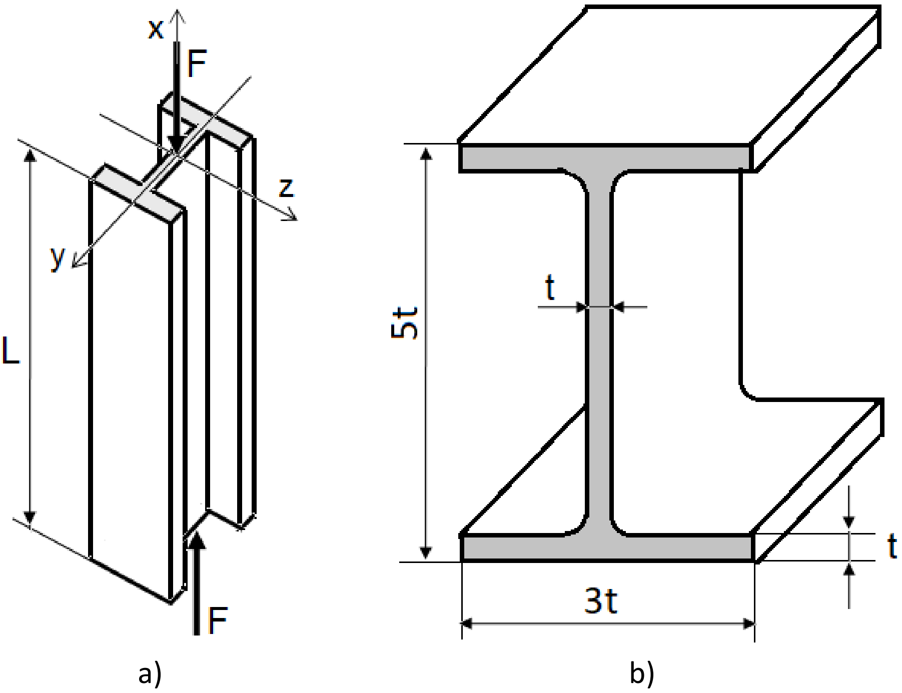


Fig. 1.34. Porțiune de bielă (schematizare): corpul bielei (a); secțiunea (b)

Rezolvare

Biela poate flamba ca dublu articulată în planul xOy (când se consideră I_z) și respectiv ca dublu încastrată în planul xOz (când se consideră I_y).

Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii din figura 1.35

$$A = 3t^2 + 2 \cdot 3t^2 = 9t^2$$

$$I_y = \frac{3t \cdot t^3}{12} + 2\frac{t(3t)^3}{12} = \frac{57}{12}t^4; \quad I_z = \frac{3t \cdot (5t)^3}{12} - 2\frac{t(3t)^3}{12} = \frac{321}{12}t^4 \qquad (1.75)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{57t^4}{12} \cdot \frac{1}{9t^2}} \approx 0,726t; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{321t^4}{12} \cdot \frac{1}{9t^2}} \approx 1,724t$$

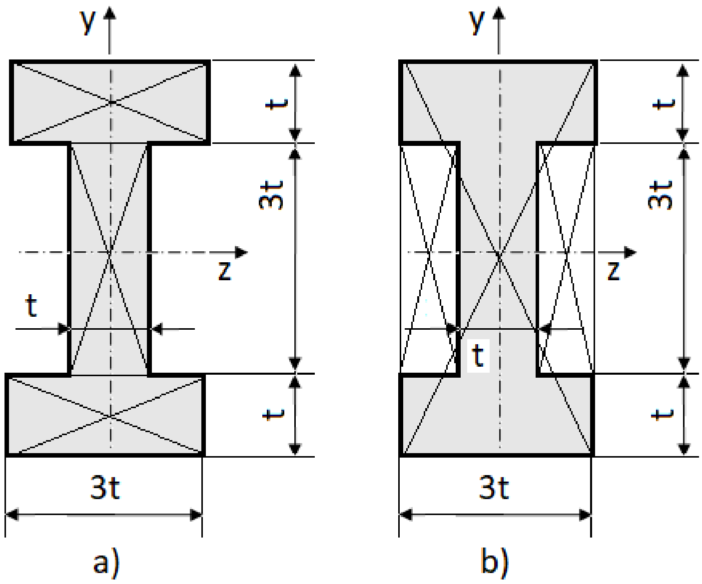


Fig. 1.35. Descompunerea secțiunii pentru calcul momentelor de inerție I_z (a) și respectiv I_y (b)

Coeficienții de zveltețe pentru flambajul în planul xOy (L_f=L) și respectiv xOz (L_f=L/2) sunt

$$\lambda_z = \frac{L_{f1}}{i_z} = \frac{L}{1,724t}; \quad \lambda_y = \frac{L_{f2}}{i_y} = \frac{L}{2\cdot 0,726t} = \frac{L}{1,452t}; \quad \lambda_y > \lambda_z \quad (1.76)$$

Forța critică minimă se obține pentru $\lambda_{max}=\lambda_y$, care corespunde flambajului în planul xOz. Pentru acest caz, în formula *Euler* se va considera momentul de inerție I_y.

Se calculează forța care acționează asupra pistonului

$$F = A_p \cdot p_{\max} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p_{\max}; \quad F = \frac{\pi 100^2}{4} \cdot 4 = 31416N$$
$$p_{\max} = 40bar = 40\frac{daN}{cm^2} = 40\frac{10N}{10^2 mm^2} = 4MPa \quad (1.77)$$

Flambaj în planul xOz

Se presupune că flambajul se produce în domeniul elastic ($\lambda>\lambda_0$) și se aplică relațiile lui Euler

$$F_{cr} = cF = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} \Rightarrow I = \frac{cFL_f^2}{\pi^2 E}; \quad I = \frac{5\cdot 31416\cdot 320^2}{\pi^2\cdot 2,1\cdot 10^5} = 7761 mm^4$$

$$I_y = I \Leftrightarrow \frac{57t^4}{12} = 7761 \Rightarrow t = \sqrt[4]{\frac{7761\cdot 12}{57}} \approx 6,36mm; \quad t_{ad} = 7mm \quad (1.78)$$

$$\lambda_y = \frac{L}{1,452t}; \quad \lambda_y = \frac{320}{1,452\cdot 7} \approx 31,48 < \lambda_0 = 86; \quad \lambda_1 = 0$$

Se continuă calculul în domeniul flambajului plastic (cu relațiile Tetmajer-Iașinski). Pentru oțel aliat cu 5% Ni, în tabelul 1.3 se indică coeficienții se flambaj a=470MPa și b=2,3MPa:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda; \quad \sigma_{cr} = 470 - 2,3\cdot 31,48 \approx 398MPa \quad (1.79)$$

Tensiunea normală pentru solicitarea la compresiune este

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad \sigma = \frac{31416}{9\cdot 7^2} = 71,24MPa \quad (1.80)$$

Se calculează coeficientul de siguranță

$$c = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma}; \quad c = \frac{398}{71,24} \approx 5,6 > c_{propus} = 5 \quad (1.81)$$

Deoarece s-a obținut un coeficient de siguranță cu puțin mai mare decât cel propus, calculul la flambaj este finalizat. S-ar putea obține un coeficient de siguranță mai apropiat de 5 dacă se adoptă pentru *t* o valoare între 6,36 și 7mm, dar acest lucru nu respectă standardul STAS 75-90 privind valorile dimensiunilor liniare.

Observații:

- Materialul bielei este rațional utilizat atunci când nu există o direcție preferențială de flambaj (flambajul se poate produce simultan în ambele plane, xOy și xOz);
- Datorită forțelor centrifuge biela este supusă la încoviere, fiind încărcată cu o forță liniar distribuită, care nu a fost considerată;

- Biela nu are o secțiune constantă pe lungime. Există metode analitice pentru calculul la flambaj a barelor de secțiune variabilă pe lungime [Buzdugan G., 1986] sau se poate utiliza AEF.

Problema 1.5

Să se determine creșterea de temperatură ΔT pentru care bara cu secțiune circulară (diametrul d=45mm) din figura 1.36, confecționată din aluminiu, începe sa flambeze (reazemul din dreapta va fi considerat articulație sferică). Se știe că Δ=2mm. Se consideră caracteristicile elastice și mecanice independente de temperatură, în intervalul ΔT.

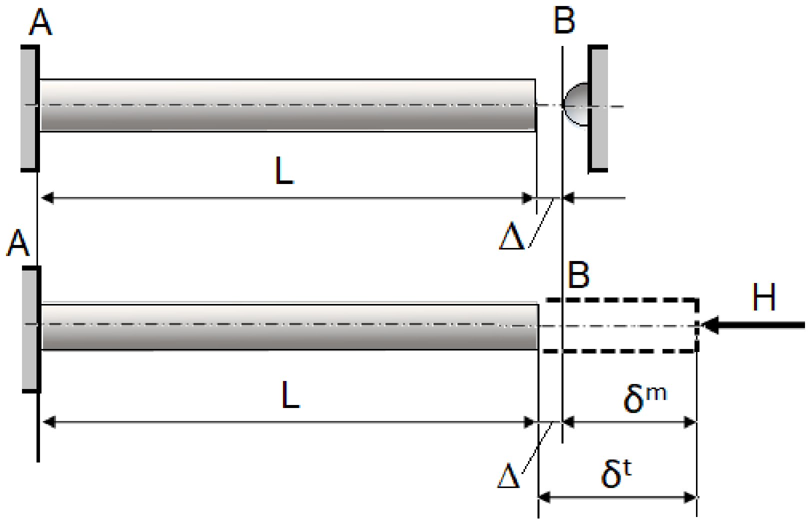


Fig. 1.36. Flambaj produs la dilatarea termică împiedicată

Rezolvare

După ce bara se dilată cu mai mult de 2mm, în reazeme apar reacțiunile H_A și H_B. Numărul necunoscutelor este NN=2. Se poate scrie o singură ecuație de echilibru, cea de proiecție a forțelor pe orizontală, de unde rezultă $H_A=H_B=H$. Problema este astfel simplu static nedeterminată. Se va ridica nedeterminarea prin metoda îndepartării reazemului. Prin îndepartarea reazemului din dreapta se permite dilatarea liberă a barei (fig. 1.36) și se pot scrie relațiile:

$$\delta^t = \delta^m + \Delta; \quad \delta^t = \delta^m + 2$$
$$\alpha L \Delta T = \frac{HL}{AE} + 2 \Rightarrow H = \left(\alpha L \Delta T - 2\right)\frac{AE}{L} \tag{1.82}$$

La apariția flambajului se poate scrie

$$F_{cr} = H \tag{1.83}$$

Se calculează apoi caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale și coeficientul de zveltețe λ

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$
$$\lambda = \frac{L_f}{i}; \quad \lambda = \frac{(0,7L) \cdot 4}{d}; \quad \lambda = \frac{2,8 \cdot 10^3}{45} = 62,2 > \lambda_0 = 60 \tag{1.84}$$

Deoarece $\lambda > \lambda_0$, flambajul se produce în domeniul elastic și pentru calculul forței critice se utilizează relațiile lui *Euler*

$$F_{cr} = H \Leftrightarrow \frac{\pi^2 E I_z}{L_f^2} = \left(\alpha L \Delta T - 2\right)\frac{AE}{L}$$
$$\frac{\pi^2 E}{\left(0,7L\right)^2} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \left(\alpha L \Delta T - 2\right)\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{E}{L}$$
$$\frac{\pi^2 d^2}{0,49 \cdot 16 \cdot L} = \left(\alpha L \Delta T - 2\right)\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{E}{L} \tag{1.85}$$
$$\Delta T = \frac{1}{23 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}\left(\frac{\pi^2 45^2}{7,84 \cdot 10^3} + 2\right) \approx 197,8°C$$

1.5.4. Metoda φ

În cazul construcțiilor metalice, pentru coeficienți de siguranță recomandați (c=1,7-2,4), se folosește o singură metodă, atât pentru flambajul în domeniul elastic, cât și pentru cel în domeniul elasto-plastic.

Se definește rezistența admisibilă la flambaj ca fiind

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{F_{cr}}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.86}$$

unde *F* este forța care încarcă bara și *A* aria secțiunii sale transversale. Astfel calculul la flambaj se reduce la un simplu calcul la compresiune

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_{af}} \tag{1.87}$$

unde

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c} \tag{1.88}$$

Atât σ_{af} cât și coeficientul de siguranța *c* depind de λ.
Se introduce noțiunea de *coeficient de flambaj*

$$\varphi = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}} < 1 \tag{1.89}$$

unde σ_{ac} este rezistența admisibilă la compresiune.
Pentru dimensionarea la flambaj se folosește relația

$$A_{nec} = \frac{F}{\varphi \sigma_{ac}} \tag{1.90}$$

iar pentru verificare

$$\sigma_{ef} = \frac{F}{\varphi A} \le \sigma_{ac} \tag{1.91}$$

Coeficientul de flambaj φ se găsește în tabele [Buzdugan G., 1986; Bia C., 1983], funcție de coeficientul de zveltețe λ. La dimensionare se alege un λ convenabil (de exemplu pe la mijlocul tabelului), funcție de care se determină φ și se aplică relația (1.89). După dimensionare se calculează λ și se reia calculul până când dimensiunile calculate tind să se stabilizeze de la o iterație la alta.
La verificare se calculează coeficientul λ, pentru care se găsește φ din tabel și se calculează cu relația (1.90).

1.5.5. Influența excentricității forțelor

Bara din figura 1.37 este articulată la capete și este spusă la compresiune cu forțele *F*, aplicate la distanța *e* față de axa geometrică a barei. Se va repeta raționamentul de la determinarea formulei lui *Euler* pentru flambaj longitudinal cu forțe centrice.

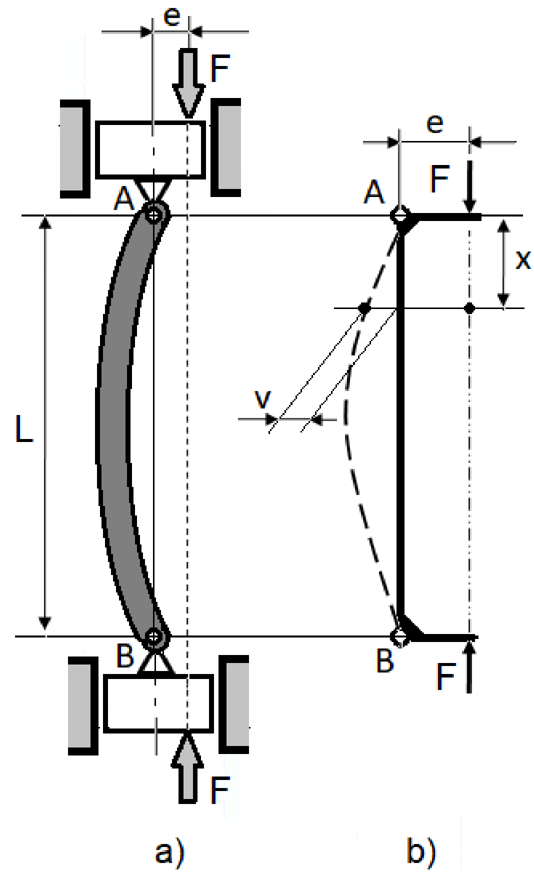


Fig. 1.37. Flambaj longitudinal sub acțiunea forțelor excentrice (a) și reprezentare schematizata (b)

Se presupune că s-a produs flambajul longitudinal în domeniul liniar-elastic. În cadrul teoriei de ordinul al doilea se scrie momentul încovoietor în secțiunea x și ecuația axei neutre deformate

$$M_z(x) = F(e+v); \quad EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Fe - Fv; \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{F}{EI}v = -\frac{F}{EI}e$$
$$\alpha^2 = \frac{F}{EI}; \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\alpha^2 e \tag{1.92}$$

Ecuația diferențială admite soluții de forma

$$v = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x) - e \tag{1.93}$$

Se determină constantele de integrare din condițiile de rezemare:

- În reazemul *A*: $x = 0$; $v = 0 \Rightarrow B = e$;
- În reazemul *B*: $x = L$; $v = 0$.

Înlocuind B=e în soluția (1.93) aceasta devine

$$v = A\sin(\alpha x) + e\cos(\alpha x) - e \tag{1.94}$$

Din condiția pentru reazemul *B* rezultă

$$0 = A\sin(\alpha L) + e\cos(\alpha L) - e \Rightarrow A = \frac{e\left[1-\cos(\alpha L)\right]}{\sin(\alpha L)} = e\cdot\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \tag{1.95}$$

Ecuația săgeții în secțiunea curentă este

$$v = e\left[\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x) - 1\right] \tag{1.96}$$

Săgeata maxima se produce la mijlocul barei, unde x=L/2

$$v_{\max} = e\left[\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - 1\right] = e\frac{1-\cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \tag{1.97}$$

Pentru

$$\frac{\alpha L}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v \to \infty \tag{1.98}$$

Săgeata tinde la infinit atunci când se produce cedarea prin flambaj.

Înlocuind expresia lui α din (1.92) în (1.98) rezultă

$$\frac{\alpha L}{2} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{\pi}{2} \tag{1.99}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.100)$$

Deoarece s-a obținut aceeași relație pentru F_{cr} ca la flambajul centric (1.10), rezultă că *excentricitatea **e** nu modifică forța critică de flambaj* [Buzdugan G., 1986].

O tratare mai dezvoltată a acestei probleme este prezentată în [Bia C., 1983], unde se determină variația raportului dintre forța critică de flambaj pentru compresiune centrică și respectiv excentrică $F_{cr}/F_{cr.e}$ funcție de raportul dintre săgeata maximă și excentricitate v_{max}/e . Această curbă are asimptota $F_{cr}/F_{cr.e} = 1$, care corespunde atingerii forței critice de flambaj. Acest rezultat concordă cu cel obținut mai sus.

Observații

Forța de compresiune (centrică sau excentrică) se aplică asupra unui profil laminat prin intermediul unei plăci rigide sudate la capătul acestuia (fig. 1.38)

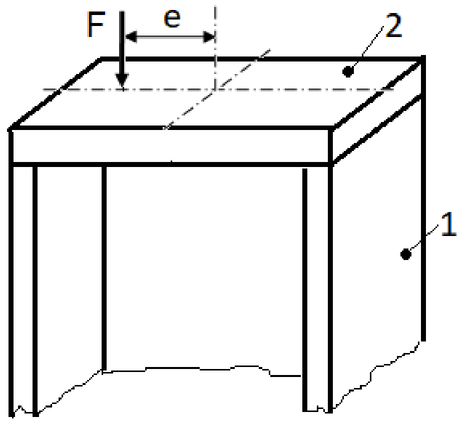


Fig. 1.38. Aplicarea forței asupra unui stâlp: profil laminat (1); placa rigidă (2)

Aplicarea forțelor de compresiune excentrice este uneori inevitabilă la construcții metalice sau în ingineria mecanică. În figura 1.39 se prezintă un stâlp metalic cu consolă, de la o hală industrială. Forța F_1 poate reprezenta o parte din greutatea acoperișului, iar forța F_2 o parte din greutatea podului rulant care este susținut de console.

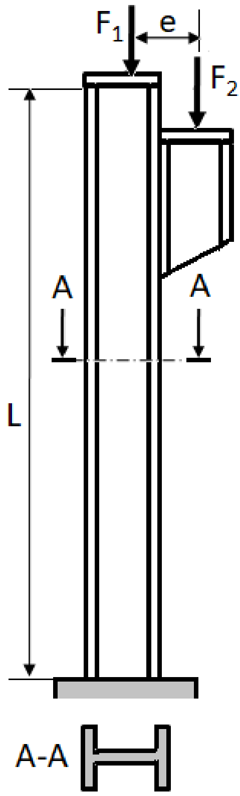


Fig. 1.39. Stâlp cu consolă de la o hală industrială

1.6. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Încercările la flambaj prezintă o dispersie mare a rezultatelor. Sunt încercate loturi de până la 20 profile și se verifică dacă rezultatele au o lege normală de distribuție de tip *Gauss*. De exemplu, la încercarea a *n* epruvete dintr-un lot se obțin tensiuni normale diferite:

$$\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_n \tag{1.101}$$

În cazul flambajului, acestea pot fi tensiuni critice sau de colaps. Tensiunea de colaps σ_{co} este tensiunea maximă care conduce la cedarea iremediabilă a barei.

Se definesc următoarele mărimi caracteristice:

- Tensiunea medie

$$\sigma_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \tag{1.102}$$

- Deviația standard a eșantionului

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_m - \sigma_i)^2} \tag{1.103}$$

- Tensiunea normală caracteristică σ_{car}

$$\sigma_{car} = \sigma_m - 2s \tag{1.104}$$

În figura 1.40 se prezintă diagrama σ_{co}-λ pentru loturi de cate 20 profile laminate IPE 160 (DIN 1025-5), numite și profile I economice . Înăltimea profilelor testate este h=160mm și ele au caracteristici relativ apropiate de profilul I16. Cu **+** s-a marcat valoarea medie σ_m iar cu un cerc mic (balustrare) tensiunea normală caracteristică σ_{car} pentru un lot de 20 epruvete. Distanţa dintre centrul cercului și cel al crucii arată mărimea dispersiei rezultatelor experimentale pentru un lot. Curba caracteristică σ-λ pentru profilul IPE 160 ar trebui sa treacă prin aceste cercuri.

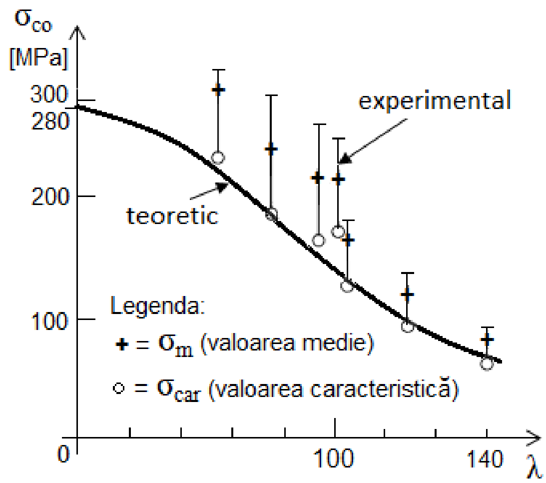


Fig. 1.40. Rezultate statistice pentru încercarea la flambaj a profilelor laminate IPE 160 (DIN 1025-5); intervalele pentru datele experimentale obținute la fiecare lot de 20 profile sunt figurate cu segmente verticale [Massonnet Ch., 1980]

Curba teoretică din figura 1.40 a fost trasată cu ajutorul calculatorului și ea ţine cont de micile imperfecțiuni ale profilelor testate, precum și de mărimea și distribuția tensiunilor remanente. Se remarcă asemănarea acestei curbe cu cea din figura 1.27 (σ_{cr}-λ).

1.7. DE CE AU CĂZUT TURNURILE *WTC*?

În articolul [Bazant Z., 2003] se consideră că turnurile WTC s-au prăbușit în mai multe etape:

1. În urma impactului cu avioanele combustibilul s-a împrăştiat pe suprafețe mari și s-a aprins. Astfel structura metalică a fost supusă timp îndelungat la temperaturi care au depășit 800°C;
2. Datorită temperaturii au scăzut mult modulul de elasticitate și tensiunea de curgere a oţelului [Buzdugan G., 1986] și astfel s-a inițiat flambajul în domeniul vâsco-elastic;
3. După producerea flambajului, porţiunea de clădire aflată deasupra incendiului s-a prăbușit aproape pe verticală și încărcarea dinamică uriașă a condus la colapsul întregii structuri.

1.8. CONCLUZII

- Flambajul se manifestă prin *modificarea formei* unor componente, sau chiar a întregii structuri *și a basculării de la un echilibru stabil la unul instabil*, la atingerea unei valori critice a încărcărilor*;*
- Nu se cunosc cu precizie cauzele producerii flambajului. Datorită acestui fapt și a dispersiei mari a rezultatelor experimentale, pentru calculul la flambaj se aleg coeficienți de siguranță mai mari decât la solicitari statice (c=1,7-2 pentru construcții metalice si 2-2,5 sau chiar mai mari, pentru construcția de mașini);
- Flambajul este un fenomen care poate să apară la diverse solicitări, în domeniul elastic, elasto-plastic sau vâsco-elastic. Se poate produce flambajul unei componente sau a întregii structuri [Bia C., 1983);
- Apariția flambajului este extrem de periculoasă pentru structuri, deoarece poate conduce rapid la pierderea capacității portante [Bia C., 1983].

CAP. 2

ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII




Pentru realizarea colajului din acest capitol s-au folosit sursele:

https://crowshead.com/products/penobscot

https://www.indiamart.com/proddetail/spiral-spring-8936604488.html

https://newscrewdriver.com/2018/05/26/sawppy-the-rover-emulates-wheel-of-mars-2020/

https://www.kern-liebers.com/en/product-groups/strip-springs/spiral-springs

Deși pentru colaj au fost selectate fotografii care sugerează deformații elastice evidente, trebuie avut în vedere faptul că în cadrul acestui capitol se admit ipotezele Teoriei Elasticității clasice, între care cea a deformațiilor elastice mici în raport cu dimensiunile corpurilor.

2. ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂŢII

2.1. INTRODUCERE

Teoria elasticității este știința care dezvoltă modele matematice ale deformării elastice a corpurilor solide.

Problema generală a Teoriei Elasticității o reprezintă determinarea stării de tensiuni, deformații și deplasări dintr-un corp elastic, atunci când se cunosc forma și dimensiunile acestuia, modul de încărcare și rezemare, precum și caracteristicile elastice ale materialului din care este confecționat.

Teoria Elasticității admite aceleași ipoteze simplificatoare ca Rezistența Materialelor: continuitatea materiei, omogenitatea, elasticitatea perfectă și izotropia materialelor, deformații elastice mici în raport cu dimensiunile corpurilor, proporționalitatea dintre tensiuni și deformații, principiul lui *Saint Vénant* și ipoteza stării naturale, cu excepția ipotezei lui *Bernoulli* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]. Aceasta din urmă nu este necesară din punct de vedere matematic și reprezintă o aproximare la care se poate renunța în unele cazuri (cum ar fi prezența forțelor distribuite), însă adoptarea ei în cadrul Rezistenței Materialelor determină reduceri semnificative ale volumului de calcul. Ipotezele de mai sus sunt adecvate comportării oțelului și altor materiale, în special metalice.

Teoria Elasticității este pe larg utilizată în ingineria mecanică și civilă, biomecanică, geologie etc. Ecuațiile diferențiale dezvoltate în cadrul acestei discipline pot fi abordate prin metode specifice mecanicii variaționale și computaționale. Soluțiile numerice furnizate de Metoda Elementelor Finite reprezintă un instrument de calcul extrem de puternic.

Cu ajutorul Teoriei Elasticității au putut fi rezolvate probleme care nu pot fi abordate de Rezistența Materialelor, cum ar fi:

- Studiul stării de tensiuni și deformații din zona concentratorilor de tensiuni;
- Starea de tensiuni de la vârful fisurilor (utilizată în Mecanica Ruperii);
- Starea de tensiuni la contactul dintre corpuri (Mecanica Contactului);
- Ecuațiile stabilite în cadrul acestei discipline stau la baza Metodei Elementelor Finite dedicată solidului continuu solicitat în domeniul liniar-elastic;
- Răsucirea barelor de secțiune necirculară;
- Tensiuni în vase de revoluție aflate sub presiune;
- Tensiuni în discuri aflate în rotație;
- Calculul plăcilor și învelișurilor etc.

2.2. TENSIUNI

Fie un corp elastic aflat în echilibru sub acțiunea încărcărilor și reacțiunilor. La acestea se pot adăuga forțele masice (volumice), care sunt distribuite în tot volumul corpului, cum ar fi: greutatea proprie $\overline{G}(X,Y,Z)$, forțe de inerție, forțe de atracție/respingere magnetică etc. Pentru corpul raportat la un sistem de coordonate rectangulare pot fi scrise cele șase ecuații de echilibru ale forțelor și momentelor

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \\ &\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

Prin secționarea cu un plan a unui corp aflat în echilibru se pun în evidență eforturile și tensiunile. Se notează cu *n* normala la planul de secționare. În jurul unui punct din acest plan se alege elementul de suprafață dA. În punctul respectiv acționează tensiunea totală (rezultantă) $\overline{p}$.

Tensiunea $\overline{p}\left(p_x,p_y,p_z\right)$ se poate descompune după un sistem triortogonal drept oarecare (fig. 2.1a). Dacă direcția normalei la planul de secționare coincide cu cea a unei axe (Ox, de exemplu) și celelalte două axe sunt în planul de secționare, atunci componentele lui $\overline{p}\left(\sigma_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz}\right)$ sunt o tensiune normală σ și două tensiuni tangențiale τ (fig. 2.1b).

Cei doi indici din notația tensiunilor normale și tangențiale au următoarea semnificație:

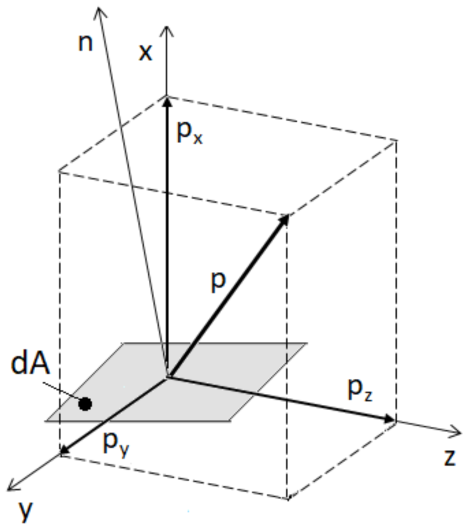
- Primul indice desemnează normala la planul de secționare și deci definește planul de secționare care trece prin punctul considerat;
- Al doilea indice reprezintă axa cu care componenta tensiunii este paralelă.

Se observă că în cazul tensiunii normale σ cei doi indici sunt întotdeauna identici. Pentru simplificare, unii autori notează tensiunea normală doar cu un singur indice, având în vedere faptul că acesta se dublează. Cele două notații sunt echivalente

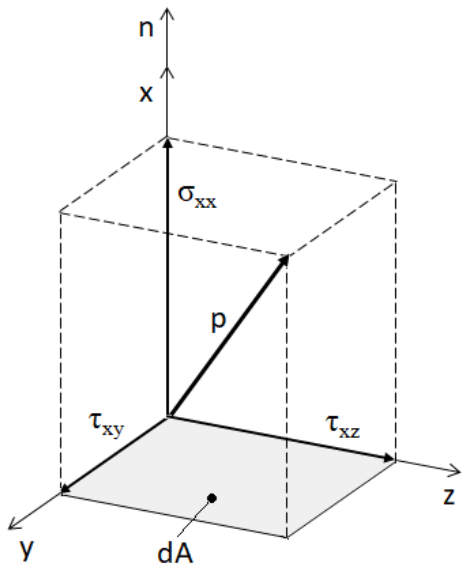
$$\sigma_x \equiv \sigma_{xx} \tag{2.2}$$

Se notează cosinușii directori ai normalei (cosinușii unghiurilor dintre normala *n* și axele de referință) astfel

$$\begin{aligned} &\cos\left(n,Ox\right)=l \\ &\cos\left(n,Oy\right)=m \\ &\cos\left(n,Oz\right)=n; \\ &l^2+m^2+n^2=1 \end{aligned} \tag{2.3}$$



a)



b)

Fig. 2.1. Componentele tensiunii p: normala n la planul de secționare nu coincide cu una dintre axele sistemului de referință (a); normala n coincide cu axa Ox

2.2.1. Regula de semn pentru tensiuni

Dintr-un corp solid elastic, aflat în echilibru sub acțiunea forțelor și momentelor, se decupează, prin secționarea cu șase plane, un paralelipiped elementar. Fațetelor acestui element de volum li se vor atribui semne, după cum urmează.

- Pe fiecare fațetă a paralelipipedului elementar se duce vectorul normalei, orientat spre exterior. Fațetele cu normala orientată în sensul pozitiv al unei axe sunt pozitive (acestea se văd în fig. 2.2);
- Fațetele cu normala orientată în sensul negativ al unei axe sunt considerate negative (nu se văd în fig. 2.2).

În figura 2.3a se văd doar fațetele pozitive, iar în figura 2.3b doar fațetele negative (vedere dinspre originea sistemului xOy).

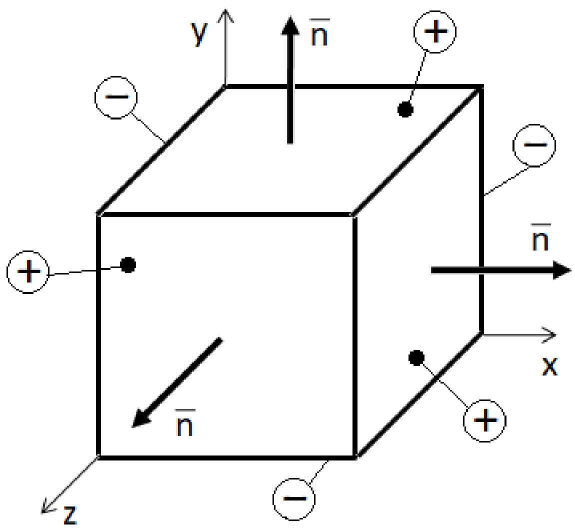


Fig. 2.2. Semnele fațetelor paralelipipedului elementar (fațetele care nu se văd sunt negative)

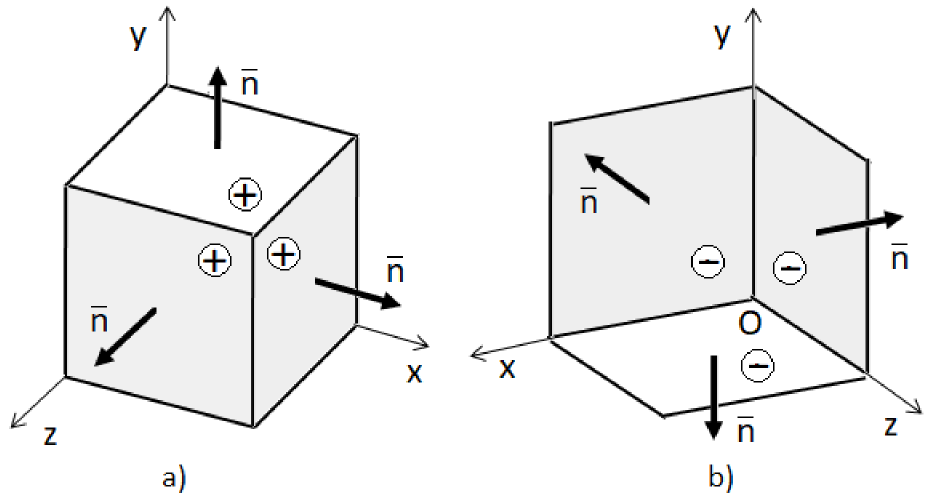


Fig. 2.3. Semnele fațetelor paralelipipedului elementar: vedere spre coltul în care se întâlnesc trei fațete pozitive (a) și respectiv spre originea sistemului de referință, unde se întâlnesc trei fațete negative

Pentru stabilirea direcției și sensului tensiunilor, se consideră că o tensiune este pozitivă dacă (tab. 2.1):

- Acționează pe o fațetă pozitivă și este orientată în sensul pozitiv al unei axe;
- Acționează pe o fațetă negativă și este orientată în sensul negativ al unei axe.

Tab. 2.1. Convenția de semn pentru tensiuni

Semnul fațetei	Tensiunea de pe fațetă este orientată în sensul pozitiv/negativ al unei axe	Semnul tensiunii de pe fațetă
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

Se observă că tensiunile normale pozitive sunt de tracțiune, iar cele negative de compresiune, conform regulii de semn adoptate la Rezistența Materialelor.

2.2.2. **Stare spațială de tensiuni**

Fie un corp elastic aflat în echilibru sub acțiunea forțelor și momentelor. Prin secționare cu șase plane se decupează din corp un paralelipiped elementar și se prezintă tensiunile pe fațete sale (fig. 2.4).

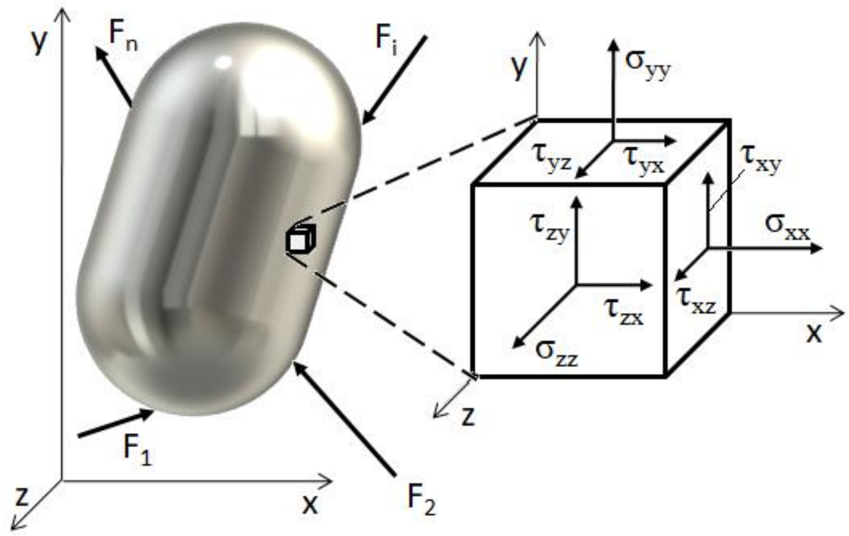


Fig. 2.4. Paralelipiped elementar aflat în stare spațială de tensiuni; pentru echilibru, pe fațetele care nu se văd există tensiuni egale și de sensuri contrare

În figurile 2.5a și 2.5b se prezintă tensiunile de pe fațetele pozitive și negative (toate tensiunile sunt pozitive). În figura 2.6c se prezintă tensiunile care acționează pe fațetele elementului de volum. Pentru simplificare se vor prezenta doar tensiunile de pe fațetele care se văd, având însă în vedere faptul că pe fațetele care nu se văd există tensiuni egale și de sensuri contrare (fig. 2.6c).

Observație

Perechi de tensiuni tangențiale converg sau diverg spre/dinspre muchia unghiului drept solid. Aceste tensiuni au indicii inversați și sunt egale [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001], așa cum se arată și în paragraful 2.5.1.

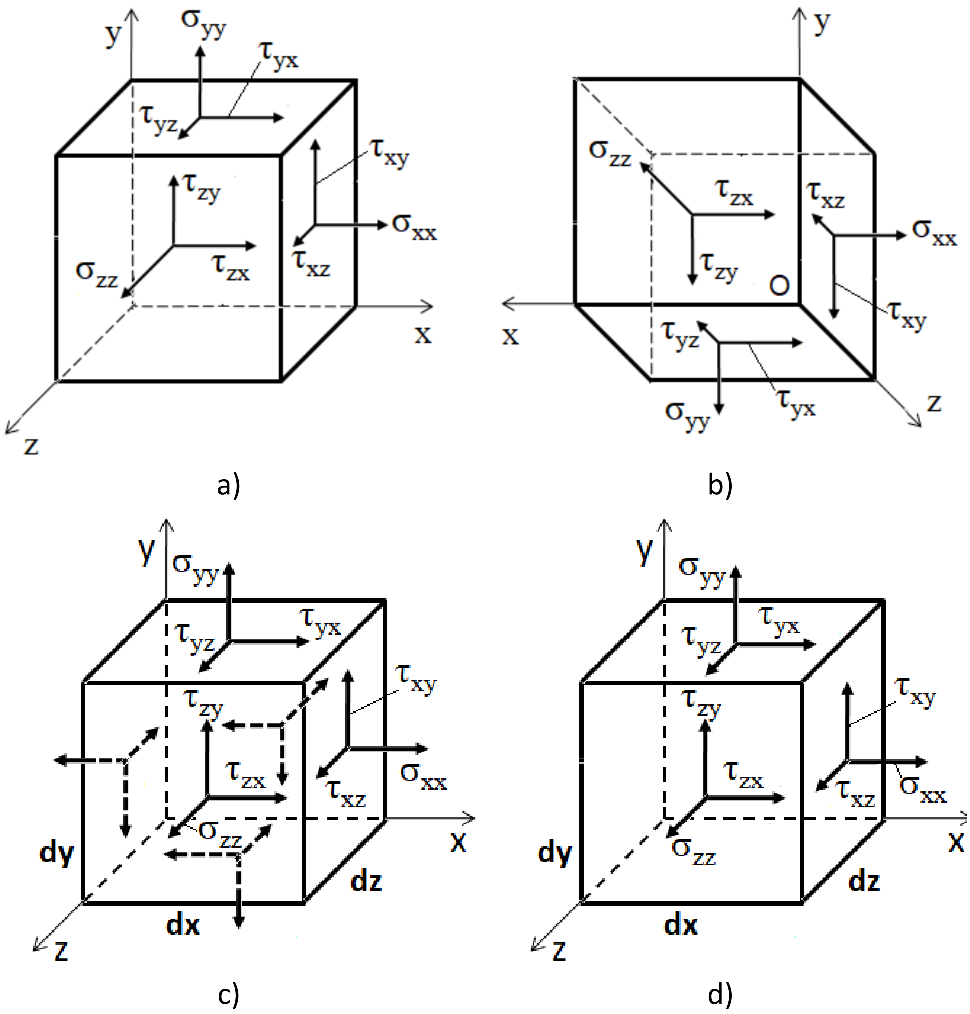


Fig. 2.5. Starea spațială de tensiuni: tensiunile de pe fațetele pozitive (a) și respectiv negative (b); figurarea tuturor tensiunilor (c) și respectiv numai a tensiunilor de pe fațetele pozitive (d)

Starea spațială de tensiuni prezentată este generală, deoarece toate celelalte stări de tensiuni sunt cazuri particulare ale acesteia.

Tensiunile dintr-un punct al corpului solid sunt caracterizate de aceleași mărimi ca vectorii (punct de aplicație, direcție, sens și modul), dar în plus depind și de direcția planului de secționare care trece prin acel punct. Tensiunile și deformațiile sunt mărimi tensoriale. Vectorii sunt tensori de ordinul întâi. Pentru starea generală de tensiuni componentele tensorului tensiunilor pot fi prezentate sub forma unei matrice pătrate

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Starea de tensiuni într-un punct al unui corp solid este determinată dacă se cunosc elementele matricei T_σ . Datorită dualității tensiunilor tangențiale (2.70) matricea este simetrică față de diagonala principală.

Din paralelipipedul elementar se izolează un colț, prin secționarea cu un plan înclinat având normala $\bar{n}$ (fig. 2.6). Tetraedrul astfel rezultat are suprafața BCD inclusă în planul de secționare. Laturile fațetelor triunghiulare sunt infiniți mici de ordinul întâi, iar suprafețele lor sunt infiniți mici de ordinul al doilea. Forțele volumice (masice) se neglijează, deoarece volumul este un infinit mic de ordinul al treilea.

Se notează suprafața triunghiului BCD cu *dA*. Suprafețele fațetelor cu normalele Ox, Oy și Oz sunt egale cu $dA \cdot l, dA \cdot m$ și respectiv $dA \cdot n$.

Se scriu primele trei ecuații de echilibru pentru acest tetraedru, adică suma proiecțiilor forțelor pe direcțiile axelor de coordonate

$$\begin{aligned} p_x \cdot dA &= \sigma_{xx} \cdot dA \cdot l + \tau_{yx} \cdot dA \cdot m + \tau_{zx} \cdot dA \cdot n \\ p_y \cdot dA &= \tau_{xy} \cdot dA \cdot l + \sigma_{yy} \cdot dA \cdot m + \tau_{zy} \cdot dA \cdot n \\ p_z \cdot dA &= \tau_{xz} \cdot dA \cdot l + \tau_{yz} \cdot dA \cdot m + \sigma_{zz} \cdot dA \cdot n \end{aligned} \tag{2.5}$$

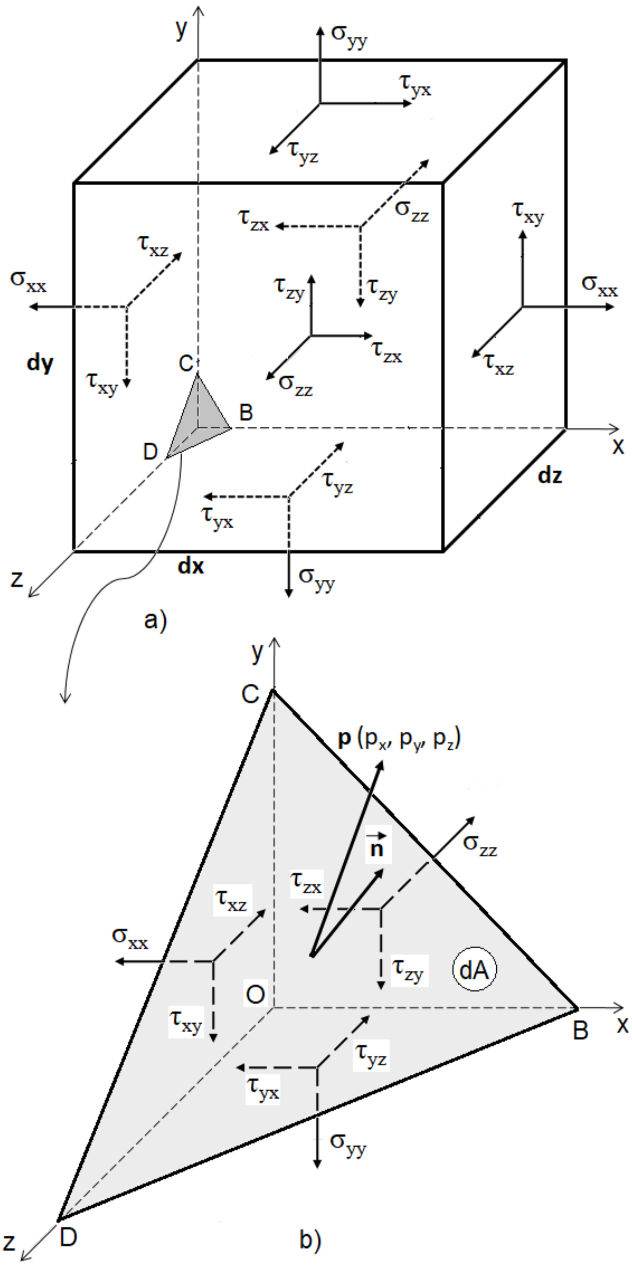


Fig. 2.6. Din paralelipipedul elementar (a) se izolează unui colț prin secționare cu un plan înclinat (b)

După simplificarea cu *dA*, din (2.5) rezultă

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xx} l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{zy} n \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n \end{aligned} \tag{2.6}$$

Între tensiunea rezultantă și componentele sale există relația

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \tag{2.7}$$

Tensiunea normală pe suprafața *dA* se notează cu σ. Ea este egală cu suma proiecțiilor tensiunilor p_x, p_y și p_z pe direcția normalei $\overline{n}$ la suprafață

$$\sigma = p_x l + p_y m + p_z n \tag{2.8}$$

Tensiunea tangențială de pe suprafața *dA* este

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2} \tag{2.9}$$

Tensiuni principale

În fiecare punct al unui corp există trei plane reciproc perpendiculare, în care tensiunile tangențiale sunt nule și pe care acționează numai tensiuni normale (*tensiuni principale*). Acestea sunt numite *plane principale* și intersecțiile lor reprezintă *direcțiile principale* (care sunt și direcțiile tensiunilor principale). Când planele de coordonate coincid cu planele principale tensiunile tangențiale se anulează [Ponomariov S.D., 1960] și expresiile tensiunilor se simplifica mult (fig. 2.7).

Dacă fațeta BCD a tetraedrului din fig 2.8 este într-un plan principal, atunci pe ea acționează numai tensiunea normală σ, iar tensiunea tangențială este nula $\tau = 0$. Proiecțiile tensiunii totale pe axele de coordonate sunt

$$p_x = \sigma l; \quad p_y = \sigma m; \quad p_z = \sigma n \tag{2.10}$$

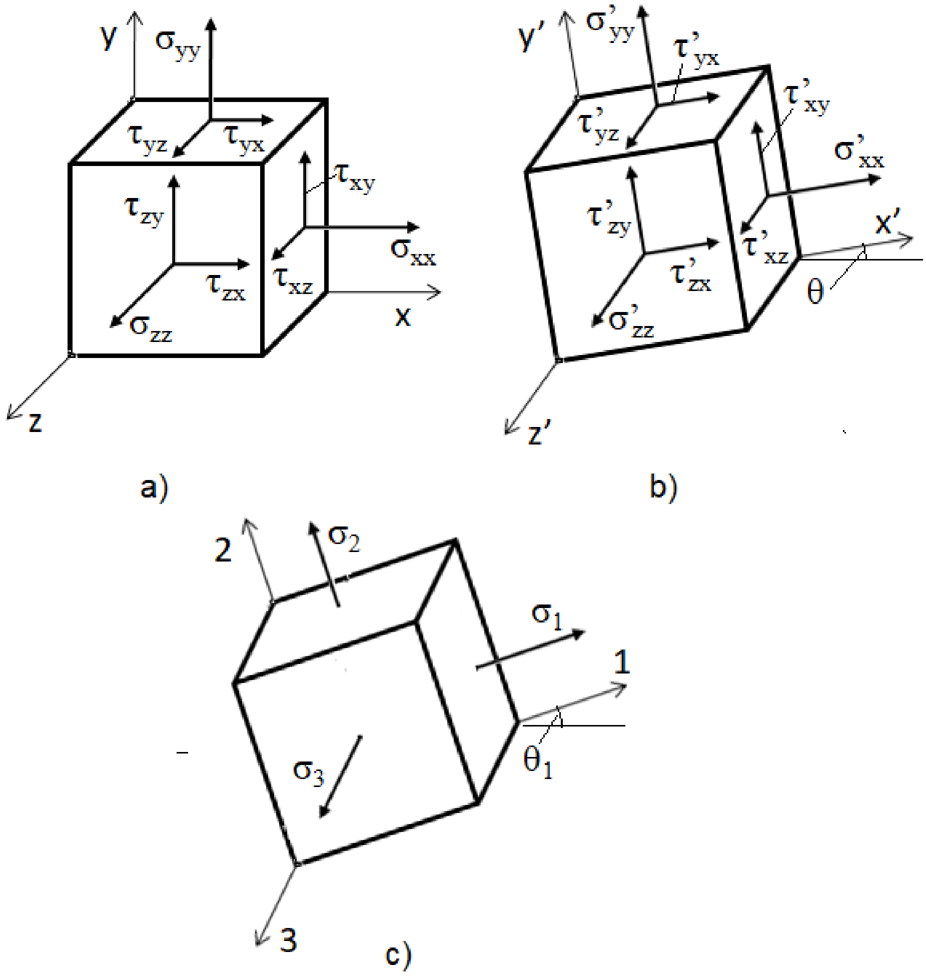


Fig. 2.7. Variația tensiunilor la rotirea paralelipipedului elementar (a,b) și starea de tensiuni principale (c)

Din (2.6) și (2.10) se obține

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx}-\sigma)l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=0\\ \tau_{xy}l+(\sigma_{yy}-\sigma)m+\tau_{zy}n=0\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_{zz}-\sigma)n=0\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Ultima dintre relațiile (2.3) arată că toți cosinușii directori nu se pot anula simultan.

Pentru ca sistemul de ecuații liniare omogene (2.11) să fie compatibil, determinantul principal trebuie sa fie nul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.12}$$

Dezvoltând determinantul se ajunge la o ecuație de gradul al treilea, numita *ecuația seculară*, ale cărei rădăcini sunt tensiunile principale

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2.13}$$

unde s-au notat coeficienții ecuației cu

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Se observă că I_3 este determinantul format din componentele tensorului T_σ în punctul considerat, I_2 este suma minorilor lui I_3 față de diagonala principală, iar I_1 este suma elementelor de pe diagonala principală a lui I_3.

Se poate demonstra că toate cele trei rădăcini ale ecuației (2.13) sunt reale, datorită simetriei determinatului Δ față de diagonala principală [Ponomariov S.D., 1960].

Convențional, cele trei tensiuni principale sunt notate astfel, *în ordine algebrică descrescătoare*:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{2.15}$$

Altfel spus, σ_1 este cea mai mare tensiune principală, iar σ_3 cea mai mică, în sens algebric.

Deoarece în orice punct al corpului există trei tensiuni principale, care reprezintă rădăcinile ecuației (2.13), rezultă că aceste rădăcini nu trebuie să depindă de sistemul de referință ales. În consecință, nici coeficienții ecuației seculare (2.13) nu depind de sistemul de referință. Altfel spus, I_1, I_2 și I_3 sunt *invarianți ai stării de tensiune* care nu depind de sistemul de referință ales. În cazul particular în care într-un punct cele trei tensiuni principale sunt egale între ele, atunci toate planele care trec prin acel punct sunt principale. Invarianții pot fi scriși funcție de tensiunile principale astfel

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{2.16}$$

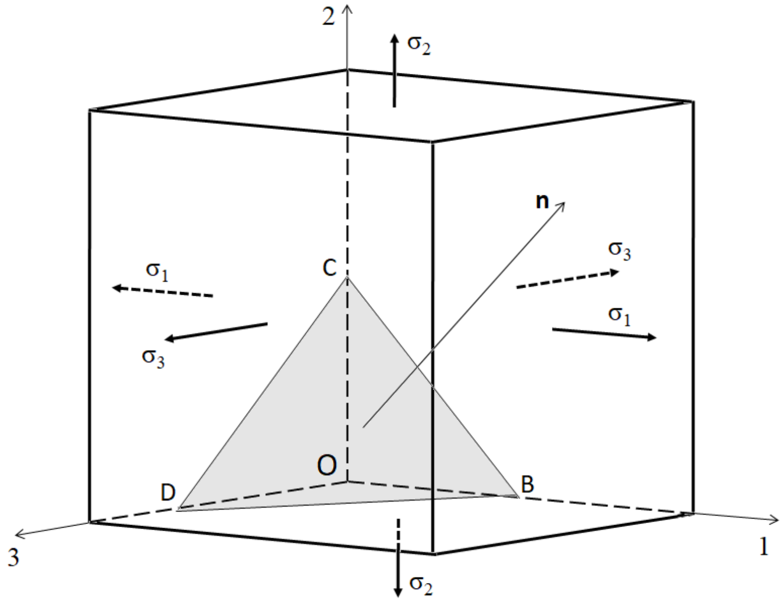
Cea mai simplă formă de prezentare a stării de tensiuni dintr-un punct este funcție de tensiunile principale. Direcțiile principale, care sunt cele ale tensiunilor principale, vor fi notate cu 1, 2 și 3 (fig. 2.8).

În practica inginerească se întâlnesc multe cazuri particulare ale stării generale de tensiuni.

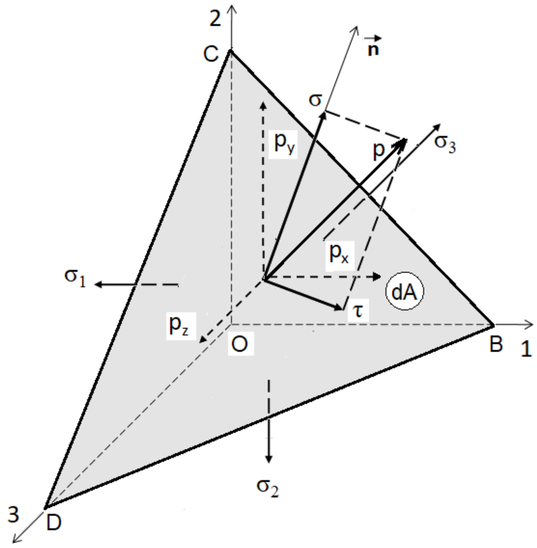
Când toate tensiunile principale sunt nenule, *starea de tensiuni* se numește *spațială sau triaxială* (3D). Stări triaxiale de tensiuni apar în mantaua cilindrilor hidraulici, în mecanica contactului (la rulmenți, roți dințate) etc.

Când o singură tensiune principală este nulă, *starea de tensiuni* se numește *plană sau biaxială* (2D). Stări biaxiale de tensiuni apar, de exemplu, în mantaua vaselor cu pereți subțiri, rețele de conducte cu pereți groși, discuri în mișcare de rotație.

În fine, când doar o singură tensiune principală este diferită de zero, avem o *stare de tensiuni liniară sau uniaxială* (1D), așa cum apare în cazul tracțiunii sau compresiunii unor bare.



a)



b)

Fig. 2.8. Raportare la axele principale: paralelipiped elementar (a); tetraedru (b)

Rădăcinile ecuației (2.13) sunt [Ugural A.C., 1995]:

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= 2S\cos\frac{\alpha}{3}+\frac{I_1}{3}\\
\sigma_b &= 2S\cos\left(\frac{\alpha}{3}+120^\circ\right)+\frac{I_1}{3}\\
\sigma_c &= 2S\cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^\circ\right)+\frac{I_1}{3}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

unde

$$\begin{aligned}
&S=\sqrt{\frac{R}{3}};\quad \alpha=\arccos\left(\frac{-Q}{2T}\right);\quad R=\frac{I_1^2}{3}-I_2;\\
&Q=\frac{1}{3}I_1I_2-I_3-\frac{2}{27}I_1^3;\quad T=\sqrt{\left(\frac{R}{3}\right)^3}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Tensiunile principale mai pot fi exprimate funcție de invarianți astfel [Barber J.R., 2010]

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{I_1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{I_1^2-3I_2}\cos\phi\\
\sigma_2 &= \frac{I_1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{I_1^2-3I_2}\cos\left(\phi+\frac{2\pi}{3}\right)\\
\sigma_3 &= \frac{I_1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{I_1^2-3I_2}\cos\left(\phi+\frac{4\pi}{3}\right)\\
\phi &= \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2I_1^3-9I_1I_2+27I_3}{2\left(I_1^2-3I_2\right)^{3/2}}\right)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Relațiile (2.19) pot fi utile pentru exprimarea funcție de invarianți a tensiunilor echivalente date de teoriile de stare limită, așa cum se va vedea în capitolul al treilea.

Ecuațiile (2.6)-(2.9) pot fi rescrise acum funcție de tensiunile principale

$$p_x = \sigma_1 l; \quad p_y = \sigma_2 m; \quad p_z = \sigma_3 n \tag{2.20}$$

$$p = \sqrt{(\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2} \tag{2.21}$$

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \tag{2.22}$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2\right)^2} \tag{2.23}$$

Din (2.20) se determină cosinusurile directoare

$$l = \frac{p_x}{\sigma_1}; \quad m = \frac{p_y}{\sigma_2}; \quad n = \frac{p_z}{\sigma_3} \tag{2.24}$$

Înlocuind (2.24) în ultima relație (2.3) rezultă

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1 \tag{2.25}$$

care reprezintă ecuația elipsoidului tensiunilor (elipsoidul lui *Lamé*), cu semiaxele σ_1, σ_2 și σ_3. Suprafața elipsoidului este locul geometric al vârfului vectorului care reprezintă tensiunea totală *p*, pentru toate planele care trec prin punctul considerat, aparținând corpului tensionat (fig. 2. 9).

Observații:

- Când două tensiuni principale sunt egale, elipsoidul este unul de revoluție;
- Când cele trei tensiuni principale sunt egale (stare echitriaxială de tensiuni) elipsoidul devine sferă.
- Dacă o tensiune principală este nulă, elipsoidul devine o elipsă;
- Când toate tensiunile sunt nule, elipsoidul degenerează într-un punct.

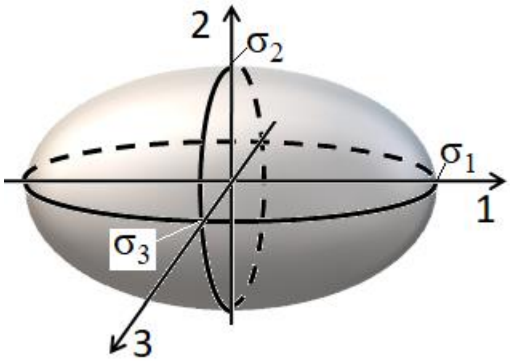


Fig. 2.9. Elipsoidul tensiunilor

Pentru starea de tensiuni principale tensorul tensiunilor este

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

2.2.3. Stare plană de tensiuni

Fie o placă de grosime constantă *t*, solicitată numai în planul sau median. Din placă se detașează un paralelipiped elementar de grosimea plăcii (fig. 2.10). Elementul de volum se află în stare plană de tensiuni (toate tensiunile cu indicele *z* sunt nule). În acest caz tensorul tensiunilor devine

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

O condiție necesară pentru starea plană de tensiuni este

$$I_3 = 0; \quad I_2 \neq 0 \tag{2.28}$$

În acest caz ecuația seculară (2.13) devine

$$\sigma\left(\sigma^2 - I_1\sigma + I_2\right) = 0 \tag{2.29}$$

având o rădăcină nulă.

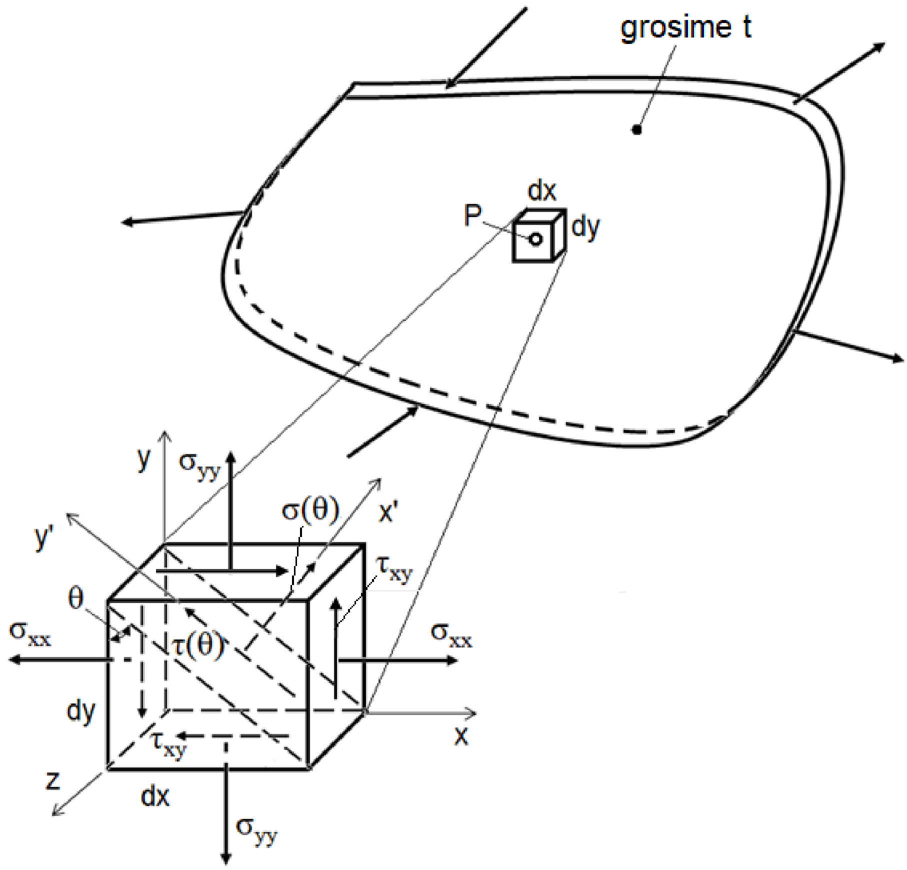


Fig. 2.10. Placă în stare plană de tensiuni și detașarea unui element de volum

În figura 2.11 se prezintă paralelipipedul elementar în starea biaxială (plană) de tensiuni, raportat la sistemul de referință oarecare (xOy), iar în figura 2.12 raportat la sistemul axelor principale.

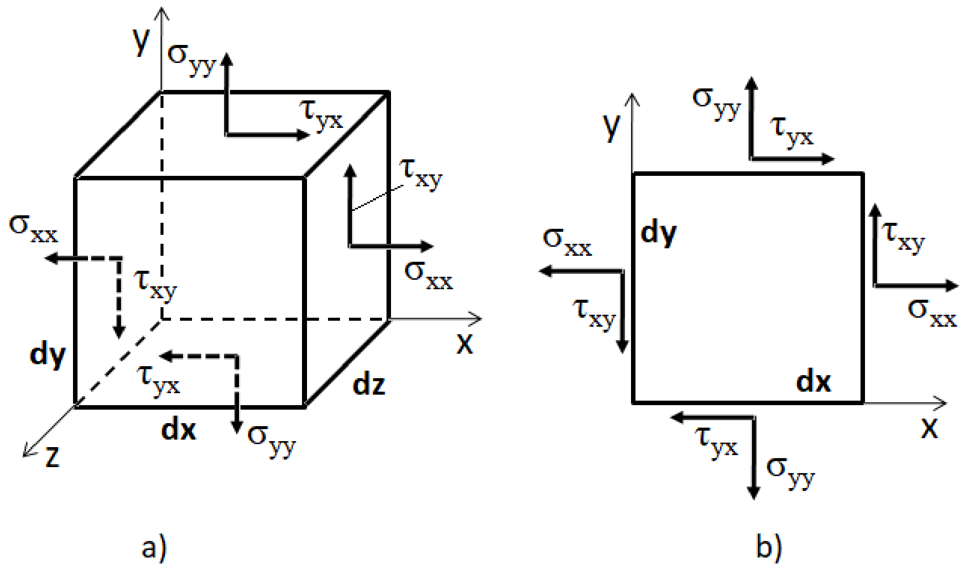


Fig. 2.11. Paralelipiped elementar aflat în stare plană de tensiuni (a) și vedere pe direcția axei Oz (b)

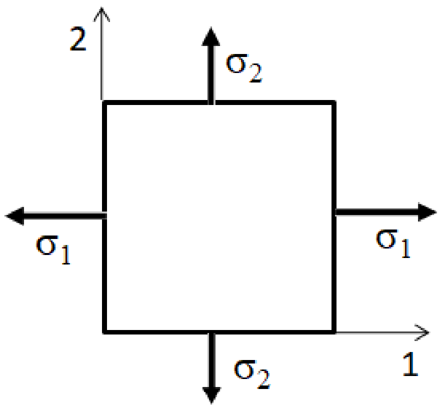


Fig. 2.12. Stare plană de tensiuni în sistemul axelor principale (vedere pe direcția axei 3)

Pentru starea plană de tensiuni principale tensorul T_σ este

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

2.2.4. Variația tensiunilor în jurul unui punct

Paralelipipedul elementar din fig. 2.10 se secționează cu un plan înclinat cu unghiul θ față de axa verticală Oy și prisma triunghiulară rezultată se studiază separat (fig. 2.13).

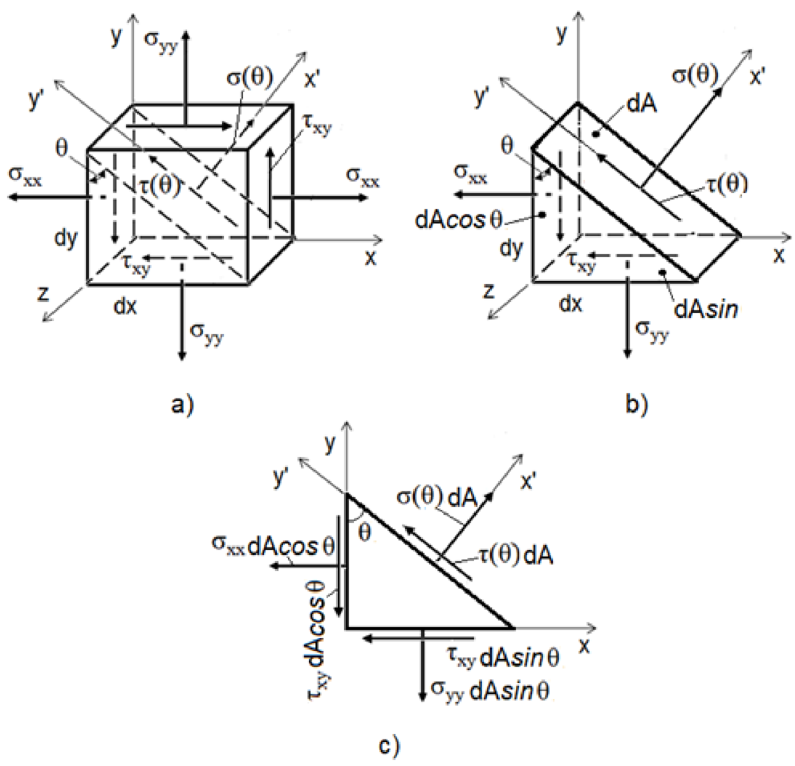


Fig. 2.13. Paralelipiped elementar detașat dintr-o placă aflată în stare plană de tensiuni (a); izolarea unei prisme triunghiulare (b); vedere pe direcția Oz (c)

În figura 2.13b s-a notat suprafața înclinată cu *dA* și s-a ținut cont de dualitatea tensiunilor tangențiale ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$). Se scriu ecuațiile de proiecție a forțelor pe direcțiile axelor x' și y'

$$\begin{aligned}
&\sum F_{x'} = 0 \Leftrightarrow \sigma(\theta)dA - \sigma_{xx}(dA\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(dA\cos\theta)\sin\theta - \\
&\sigma_{yy}(dA\sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(dA\sin\theta)\cos\theta = 0 \\
&\sum F_{y'} = 0 \Leftrightarrow \tau(\theta)dA + \sigma_{xx}(dA\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(dA\cos\theta)\cos\theta - \\
&\sigma_{yy}(dA\sin\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(dA\sin\theta)\sin\theta = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Simplificând cu *dA* se determină tensiunile pe fațeta înclinată

$$\begin{aligned}
&\sigma(\theta) = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
&\tau(\theta) = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Făcând transformările trigonometrice la unghiul dublu și notând tensiunile normale cu un singur indice, rezultă

$$\sigma(\theta) = \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta) \tag{2.33}$$

$$\tau(\theta) = \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{2\theta} \tag{2.34}$$

Se observă că (2.34) este derivata lui (2.33) funcție de 2θ. În consecință, între $\sigma(\theta)$ și $\tau(\theta)$ există relațiile dintre funcție și derivata sa: când $\tau(\theta) = 0$, $\sigma(\theta)$ are un punct de extrem. Aceste două relații pot furniza tensiunile dintr-un punct, atunci când planul de secționare are orice orientare, dată de unghiul θ. Altfel spus, ele dau *variația tensiunilor în jurul unui punct*.

Tensiunile normale extreme se obțin pentru valoarea nulă a derivatei, respectiv a tensiunii tangențiale. Punând condiția $\tau(\theta) = 0$ în (2.34), se rezolvă ecuația trigonometrică și se obține:

$$\tan\left(2\theta_p\right)=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{2.35}$$

Deoarece funcția tangentă are perioada π, pentru 2π radiani vor exista două soluții $2\theta_1$ și $2\theta_2$, decalate cu π. Rezultă că direcțiile principale determinate de unghiurile θ_1 și θ_2 sunt decalate cu $\pi/2$, adică sunt reciproc perpendiculare.

Ținând cont de relațiile trigonometrice

$$\sin^2\theta=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}; \quad cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta} \tag{2.36}$$

din (2.35) se obține

$$\sin\left(2\theta\right)=\pm\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}}; \quad \cos\left(2\theta\right)=\pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}} \tag{2.37}$$

Înlocuind (2.37) în (2.33) se obțin valorile tensiunilor principale pentru starea plană de tensiuni

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{2.38}$$

unde $\sigma_1=\sigma_{\max}, \sigma_2=\sigma_{\min}$ iar $\sigma_1\geq\sigma_2$ în sens algebric.

La același rezultat se poate ajunge urmând un alt raționament. Pentru starea plană de tensiuni rădăcinile ecuației (2.29) sunt

$$\sigma_{1,2}=\frac{I_1\pm\sqrt{I_1^2-4I_2}}{2} \tag{2.39}$$

Înlocuind invarianții pentru starea plană de tensiuni în (2.39) se obține (2.38).

Pentru a determina valorile extreme ale tensiunii tangențiale se anulează derivata relației (2.34):

$$\frac{d\tau(\theta)}{d(2\theta)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta) = 0 \tag{2.40}$$

de unde rezultă

$$\tan(2\theta_s) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan(2\theta_p)} \tag{2.41}$$

Din relația (2.41) rezultă că direcțiile determinate de unghiurile $2\theta_p$ și $2\theta_s$ sunt reciproc perpendiculare, adică între θ_p și θ_s este un unghi de 45°. În consecință, *tensiunile tangențiale au valori extreme la 45° față de direcțiile principale* (fig. 2.15). Din (2.41), (2.36) și (2.34) rezultă

$$\tau_{\max,\min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.42}$$

Deoarece direcțiile 1 și 2 sunt reciproc perpendiculare și perioada funcției tangentă este π, nu se poate ști dacă din (2.32) se obține direcția axei 1 (θ_1) sau a axei 2 (θ_2), după cum de vede în figura 2.14.

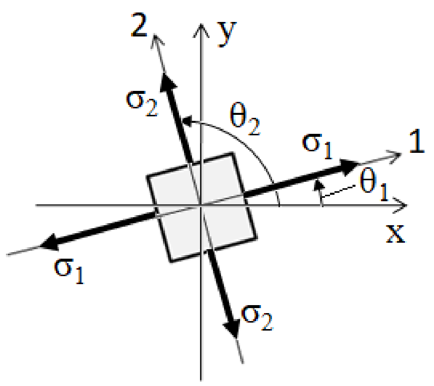


Fig. 2.14. Stabilirea direcțiilor principale

În figura 2.15 se prezintă starea plană de tensiuni în sistemul de referință oarecare xOy, sistemul direcțiilor principale 1O2 și sistemul de referință x'Oy' pentru tensiunile tangențiale extreme. Ultimele două sisteme de referință sunt rotite unul față de altul cu 45°.

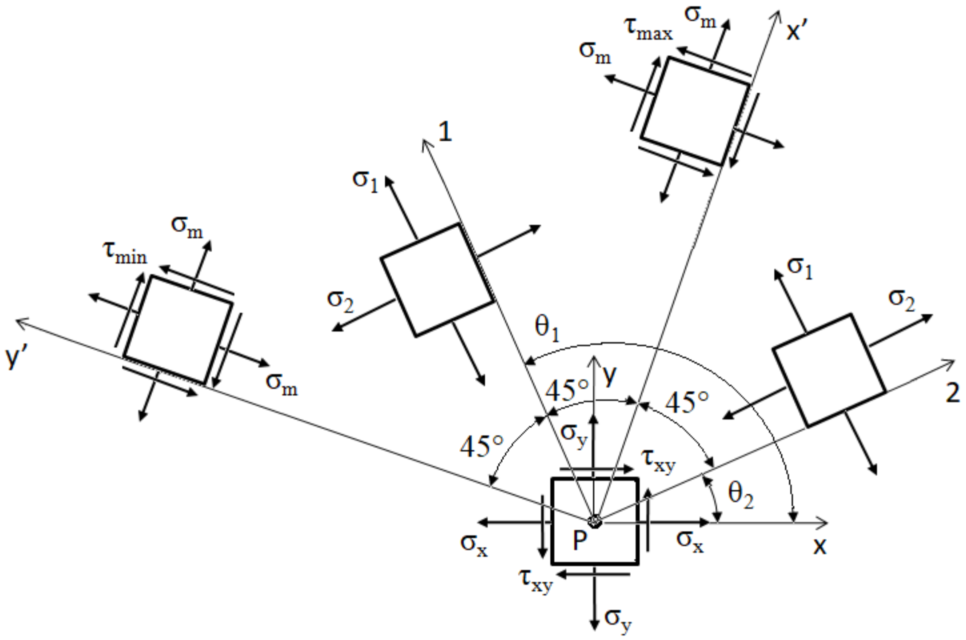


Fig. 2.15. Sistemul de referință oarecare (xOy), cel al direcțiilor principale (1O2) și cel pentru care tensiunile tangențiale au valori extreme (x'Oy')

2.2.5. **Stare uniaxială de tensiuni**

Pentru a ajunge la acest caz particular se anulează, de exemplu, toate tensiunile cu indice *z* și *y*. Rămâne numai tensiunea σ_{xx} nenulă, iar solicitarea poate fi tracțiune sau compresiune, după sensul forțelor și tensiunilor (fig. 2.16). Tensorul tensiunilor are o singura componentă:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

În cazul tracțiunii $\sigma_{xx} = \sigma_1 > 0$ iar pentru compresiune $\sigma_{xx} = \sigma_3 < 0$.

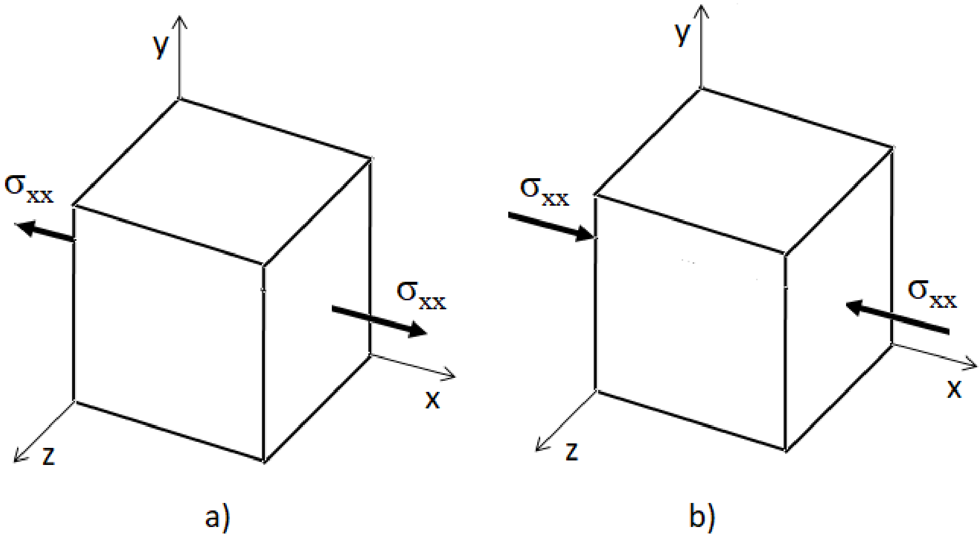


Fig. 2.16. Stare uniaxială de tensiuni: tracțiune (a); compresiune (b)

2.3. DEFORMAȚII

Distanța parcursă de un punct al unui corp se numește deplasare liniară și se măsoară în [mm]. Componentele vectorului deplasare în sistemul de referință *xyz* sunt funcții de coordonatele punctului și se notează

$$u = u(x,y,z); \quad v = v(x,y,z); \quad w = w(x,y,z) \tag{2.44}$$

În cazul în care corpul nu fisurează pe durata solicitării, *u, v* și *w* sunt funcții continue.

În [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001] s-au prezentat noțiunile de deformații liniare specifice sau *alungiri specifice* $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_x, \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon_y$ și $\varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_z$, care caracterizează intensitatea deformației liniare într-un punct al corpului. Alungirile specifice sunt pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune. Variațiile unghiurilor drepte se numesc *lunecări specifice* și se notează $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ etc. În mod convențional lunecările specifice sunt considerate pozitive când micșorează unghiul drept și negative când îl măresc (fig. 2.17).

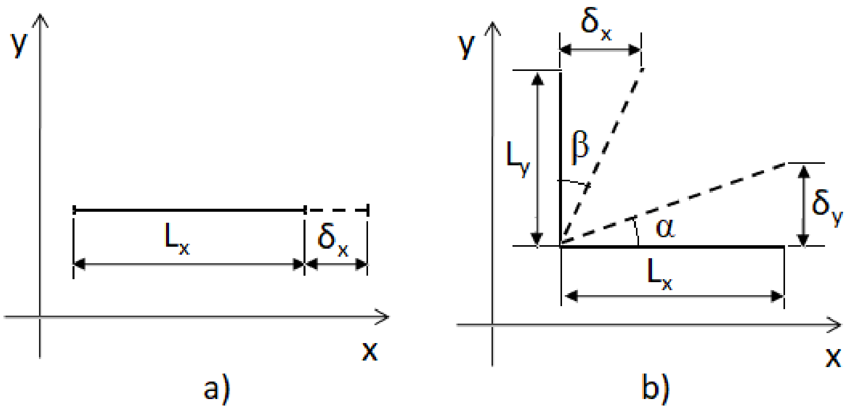


Fig. 2.17. Deformații specifice: lungire specifică (a) lunecare specifică

Alungirile specifice se vor numi lungiri specifice pentru tracțiune și scurtări specifice pentru compresiune.

Deformațiile specifice se definesc astfel pentru deformații mici (fig. 2.17)

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{L_x \to 0} \frac{\delta_x}{L_x} \tag{2.45}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{L_x, L_y \to 0} \left(\frac{\delta_y}{L_x} + \frac{\delta_x}{L_y} \right) = \lim_{L_x, L_y \to 0} (\tan\alpha + \tan\beta) \approx \lim_{L_x, L_y \to 0} (\alpha + \beta) \tag{2.46}$$

Un corp deformat în domeniul liniar-elastic poate să suporte atât alungiri specifice cât și lunecări. De la corpul nedeformat la cel deformat se poate ajunge pe oricare dintre cele trei căi prezentate în figura 2.18.

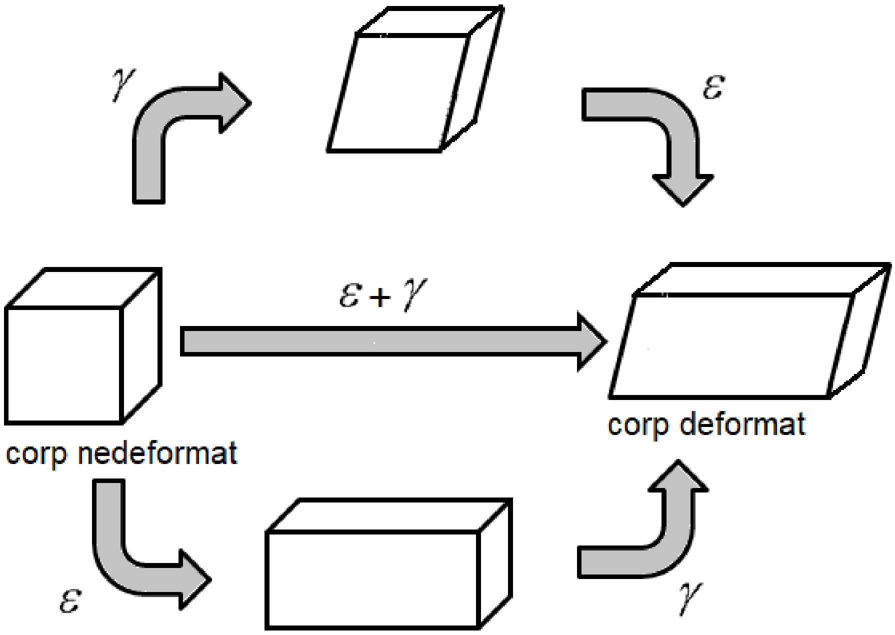


Fig. 2.18. La corpul deformat în domeniul liniar-elastic se poate ajunge pe oricare dintre cele trei căi

Starea de deformații poate fi spațială, plană sau uniaxială, însă nu există neapărat o corespondență cu starea de tensiuni cu același nume. De exemplu, în cazul stării de tensiuni axiale (tracțiune sau compresiune), apare o stare spațială de deformații.

Se studiază un element de volum aflat în stare plană de deformații, asupra căruia se aplică alungiri specifice, lunecări și rotirea sistemului de referință cu unghiul θ.

Se scriu relațiile geometrice între deformațiile mici $\gamma(\theta)$, ε_{xx}, ε_{yy} și γ_{xy} și se obține [Avril J., 1984]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\theta) = \varepsilon_{xx} cos^2\theta + \varepsilon_{yy} sin^2\theta + \gamma_{xy} sin\theta cos\theta \\ &\gamma(\theta) = -2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) sin\theta cos\theta + \gamma_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta) \end{aligned} \tag{2.47}$$

sau, trecând la funcțiile trigonometrice ale unghiului 2θ

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\theta) = \varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\theta) \\ &\frac{\gamma(\theta)}{2} = \frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos(2\theta) = \frac{d\varepsilon(\theta)}{2\theta} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Relațiile (2.47) sau (2.48) dau variația deformațiilor în jurul unui punct. Se observă că *alungirile specifice sunt extreme când lunecările sunt nule*.

Comparând (2.47) cu ecuațiile similare care dau variația tensiunilor în jurul unui punct (2.32), se observă că între termenii lor poate fi stabilită următoarea relație: *lui σ îi corespunde ε iar lui τ îi corespunde $\gamma/2$*. Având în vedere acest lucru, pentru starea spațială de deformații, tensorul deformațiilor specifice se scrie

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Pentru starea plană și respectiv uniaxială de deformații, tensorul deformațiilor specifice se pot scrie anulând, de exemplu, alungirile și lunecările specifice care conțin indicele *z* și respectiv indicii *z* și *y*

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Notarea alungirilor specifice se poate face cu unul sau doi indici, similară cu cea din cazul tensiunilor.

Stările plană și uniaxială de deformații se întâlnesc mult mai rar decât stările plană și uniaxială de tensiuni.

La fel ca în cazul tensiunilor, se pot stabili plane, direcții și alungiri specifice principale . Anulând derivata alungirii specifice, din (2.48) rezultă

$$\tan\left(2\theta_p\right) = \frac{2\dfrac{\gamma_{xy}}{2}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \tag{2.52}$$

Înlocuind în prima relație (2.48) rezultă alungirile specifice principale

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2.53}$$

Pentru materiale izotrope direcțiile principale ale tensiunilor și cele ale alungirilor specifice coincid [Avril J., 1984].

Anulând derivata celei de-a doua relații (2.48) se vor găsi, pentru $\theta_p + \pi/4$ lunecările specifice extreme

$$\frac{\gamma_{\max,\min}}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}^2}{2}\right)^2} \tag{2.54}$$

Se observă că direcțiile lunecărilor specifice extreme coincid cu cele ale tensiunilor tangențiale extreme.

2.4. CERCURILE LUI MOHR PENTRU TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII

2.4.1. Cercul lui Mohr pentru stare plană de tensiuni

Relațiile privind variația tensiunilor și deformațiilor în jurul unui punct depind de sinθ și cosθ și în consecință sunt funcții periodice. Ele pot fi reprezentate în coordonate carteziene, de exemplu pentru $\theta \in [0{,}360°]$. Datorită formei, aceste reprezentări grafice se numesc „tip undă”. O altă reprezentare poate fi făcută în coordonate polare, numita „tip rozetă” [Avril, J., 1984].

Se scriu relațiile (2.33) și (2.34) funcție de tensiunile principale

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos(2\theta)\\ \tau(\theta) &= \tau = -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin(2\theta)\end{aligned} \tag{2.55}$$

Se rescriu relațiile (2.55) sub forma

$$\begin{aligned}\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos(2\theta)\\ \tau &= -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin(2\theta)\end{aligned} \tag{2.56}$$

Ridicând la pătrat ambele relații (2.56), adunându-le membru cu membru și ținând cont că $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ rezultă

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \tag{2.57}$$

Relația (2.57) este de forma $(x-a)^2 + y^2 = R^2$, care reprezintă un cerc cu centrul pe Ox, de coordonate (a,0). În consecință, (2.57) reprezintă un cerc în sistemul de referință σ-τ. Aceasta este cea mai simplă reprezentare grafică a variației tensiunilor în jurul unui punct (fig. 2.19).

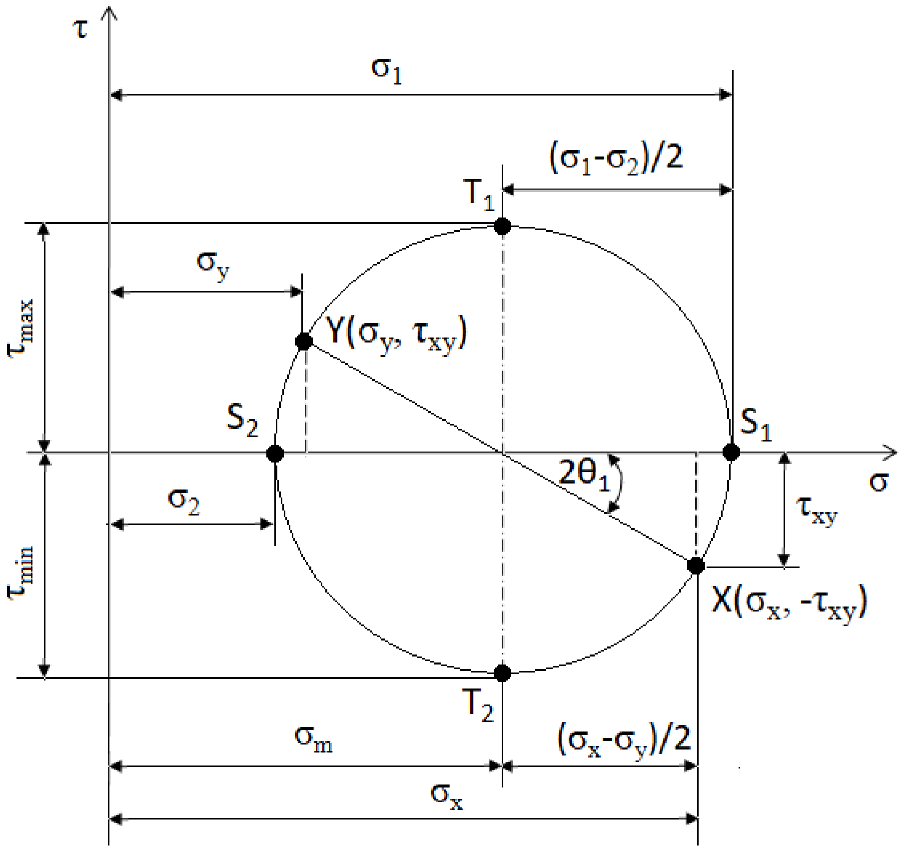


Fig. 2.19. Cercul lui Mohr pentru stare plană de tensiuni

În figura 2.19 se observă că:

- Diametrul cercului este σ_1-σ_2;
- Centrul cercului are coordonatele (σ_m,0), unde tensiunea medie este $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$;
- Tensiunile tangențiale sunt egale cu raza cercului $\tau_{\max.\min} = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$;
- Cercul intersectează axa absciselor în punctele $S_1(\sigma_1,0)$ și $S_2(\sigma_2,0)$;
- Punctele de pe diametrul vertical sunt $T_1(\sigma_m,\tau_{max})$ și $T_2(\sigma_m,\tau_{min})$;

- Unghiurile din figură sunt duble (2θ). Tensiunile normale principale se află pe diametrul orizontal, iar tensiunile tangențiale extreme pe cel vertical. În consecință, tensiunile tangențiale extreme se găsesc la $90^\circ/2 = 45^\circ$ față de tensiunile normale principale;
- La un unghi oarecare starea de tensiuni de pe fațetele reciproc perpendiculare ale elementului de volum este dată de coordonatele punctelor diametral opuse $X(\sigma_x, -\tau_{xy})$ și $Y(\sigma_y, \tau_{xy})$, ca în figura 2.20;
- Unghiul $\widehat{XS_2S_1} = \theta_1$.

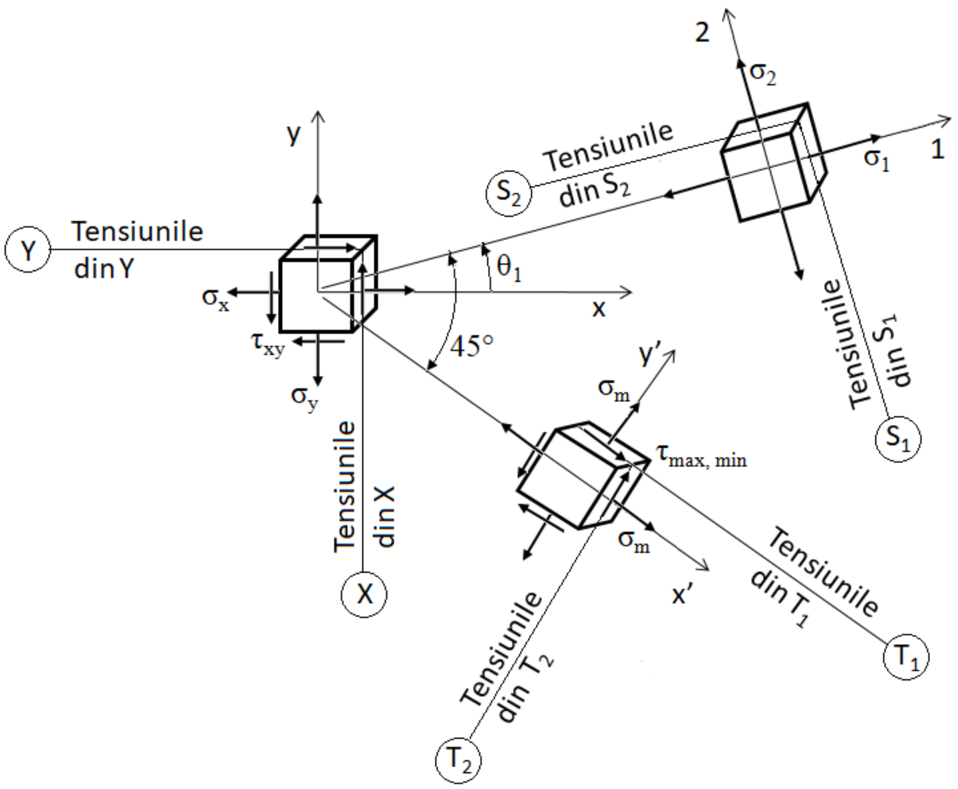


Fig. 2.20. Transpunerea stărilor de tensiuni din puncte diametral opuse (cercul Mohr) pe fațete reciproc perpendiculare ale elementului de volum (v. fig. 2.19)

Tot din figura 2.19 se observă că

$$\tau_{\max,\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (2.58)$$

În figura 2.21 se prezintă regula de semn pentru tensiunile reprezentate pe cercul lui *Mohr*, care au fost utilizată pentru a trece de la fig. 2.19 la fig. 2.20:

- Tensiunea normala este pozitiva pentru tracțiune;
- Tensiunea tangențială pozitiva rotește în sens invers trigonometric.

Regula de semn prezentată în figura 2.21 nu trebuie confundată cu cea stabilită în figura 2.3 și tabelul 2.1.

a) b)

Fig. 2.21. Regula de semn pentru tensiuni, utilizată la trecerea de la fig. 2.19 la fig. 2.20: (a) starea de tensiuni din punctul $Y(\sigma_y, \tau_{xy})$; (b) starea de tensiuni din punctul $X(\sigma_x, -\tau_{xy})$

În figura 2.22 se prezintă cercul lui *Mohr* și un detaliu cu triunghiul O'XD', din care rezultă relațiile (2.35) și (2.37). Se observă că unghiul $2\theta_p \in [0, 360°]$ și în consecință $\theta_p \in [0, 180°]$. Unghiul θ_p definește direcțiile principale 1 și 2. El are două valori care diferă cu 90° și în consecință cele doua direcții principale sunt reciproc perpendiculare.

Pentru a ști care dintre cele doua valoari θ corespunde direcției 1, se poate înlocui una dintre ele în relația lui $\sigma(\theta)$ și se verifică dacă se obține σ_1 sau σ_2, sau se găsește unghiul $\theta_{p1} = \theta_1$ care verifică ambele relații (2.37).

În continuare se vor prezenta câteva poziții particulare ale cercului *Mohr*. În figura 2.23 se prezintă cercul lui *Mohr* pentru solicitarea la tracțiune, în figura 2.24 pentru compresiune și în figura 2.25 pentru torsiune.

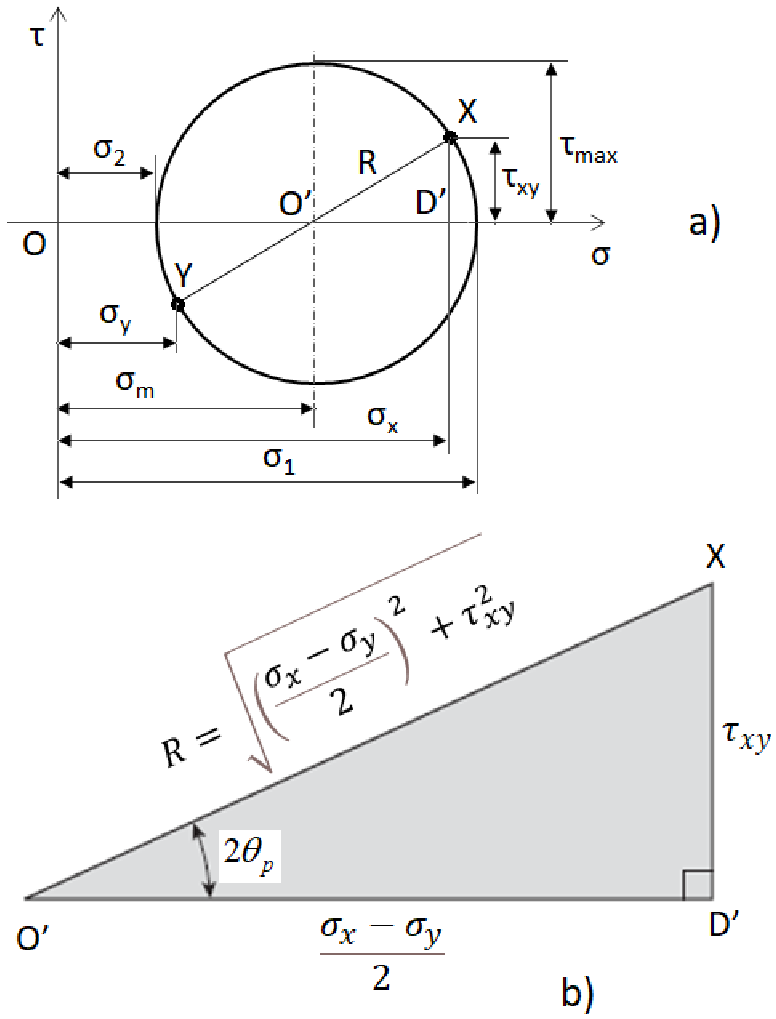


Fig. 2.22. Cercul lui Mohr pentru stare plană de tensiuni (a) și detaliu cu triunghiul O'XD' (b)

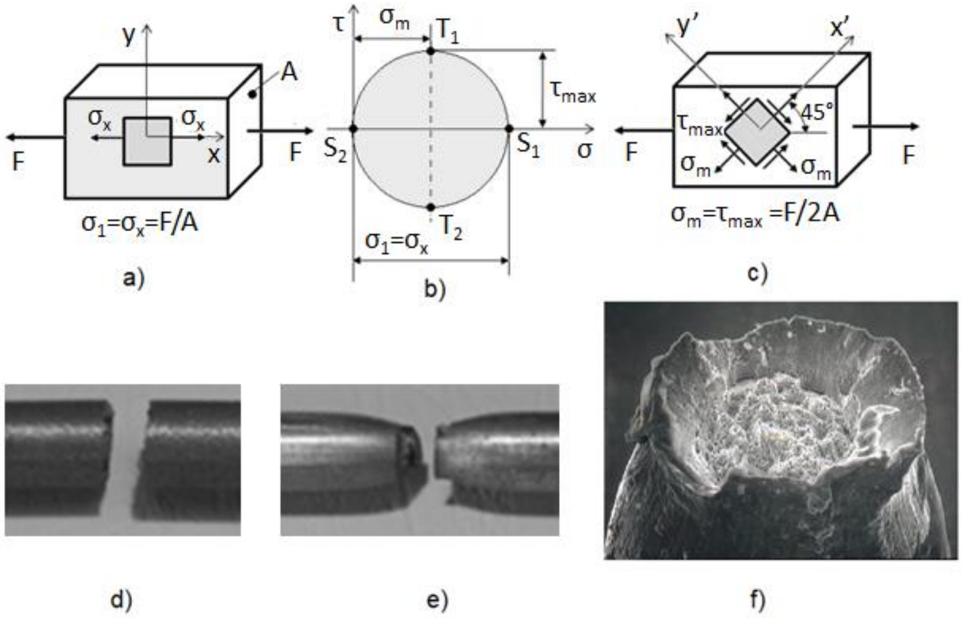


Fig. 2.23. Solicitarea la tracțiune: tensiuni principale (a); cercul lui Mohr (b); starea de tensiuni la 45° față de direcția forțelor (c); rupere fragilă (d); rupere ductilă (e); imagine SEM a secțiunii de rupere ductilă (f)

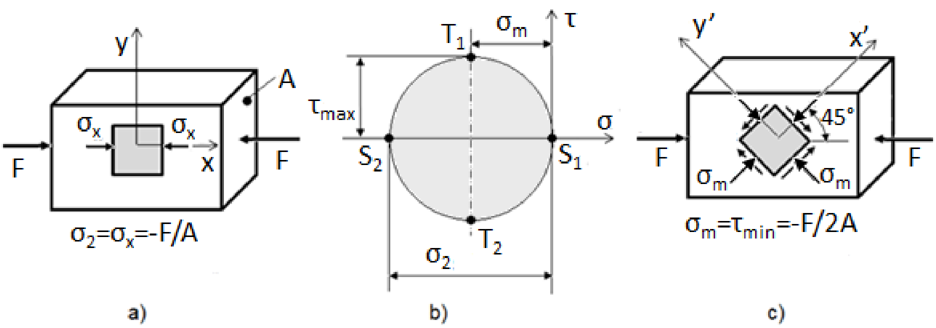


Fig. 2.24. Solicitarea la compresiune: tensiuni principale (a); cercul lui Mohr (b); starea de tensiuni la 45° față de direcția forțelor (c)

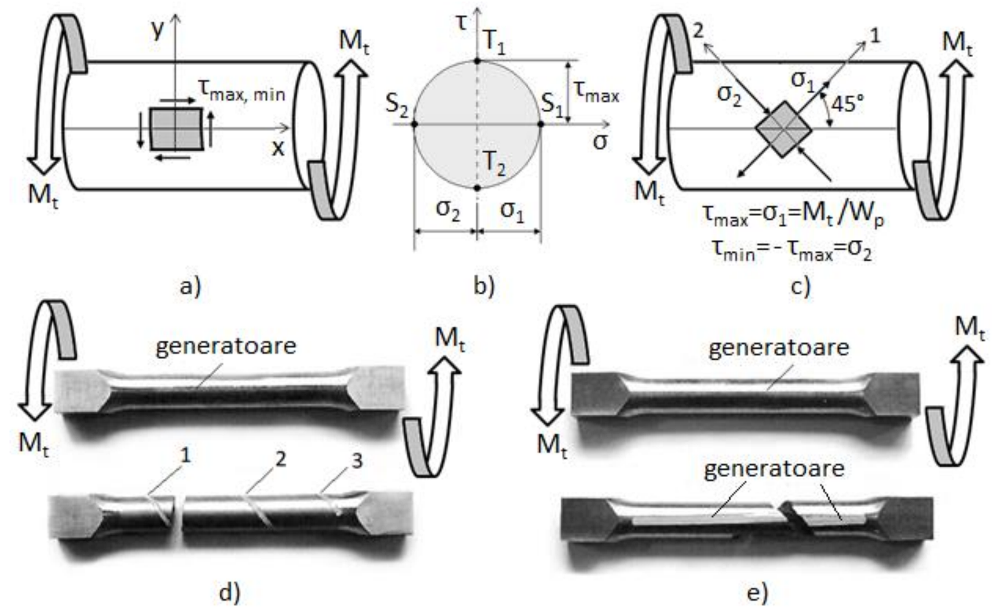


Fig. 2.25. Solicitarea la torsiune: forfecare pură (a); cercul lui Mohr (b); tensiuni principale (starea de tensiuni la 45° față de direcția lui τ_{max} (c); rupere ductilă (d); rupere fragilă (e)

Din figurile 2.23-2.25 se observă că pentru tracțiune cercul lui *Mohr* este tangent la axa τ în punctul S_2, pentru torsiune este cu centrul în originea sistemului de referință, iar pentru compresiune este tangent la axa τ în punctul S_1.

În cazul solicitării la compresiune nu se ajunge la rupere ductilă: încercarea se întrerupe dacă apar fisuri în epruvetă sau se atinge A_t=50% [ASTM E9-89A, rev. 2000]. Materialele cu un comportament foarte ductil nu fisurează la compresiune. În schimb ruperea fragilă se poate produce la compresiune (fig. 2.26). Parcurgând cercurile lui *Mohr* trasate pentru tracțiune spre compresiune, trecând prin alte solicitări simple (torsiune) și compuse, se observă că cercurile se deplasează către stânga.

La torsiune ruperea ductilă se produce pentru o stare de tensiuni corespunzătoare forfecării pure. Secțiunea de rupere este perpendiculară pe axa geometrică a epruvetei. Ruperea se produce după ce un capăt al epruvetei a efectuat câteva rotații complete (trei, în fig. 2.25d). Ruperea fragilă se produce după o elice la 45° față de axa geometrică a epruvetei (fig. 2.25e), la o rotire mică a capătului liber al epruvetei. Ruperea este produsă de tensiunea principală σ_1>0, care este orientată după normala la secțiunea de rupere (fig. 2.25c, e). Tensiunile normale pozitive (de tracțiune) tind să deschidă fisurile, favorizând ruperea. Din contra, tensiunile normale negative tind sa închidă fisurile, având un efect de frânare a ruperii.

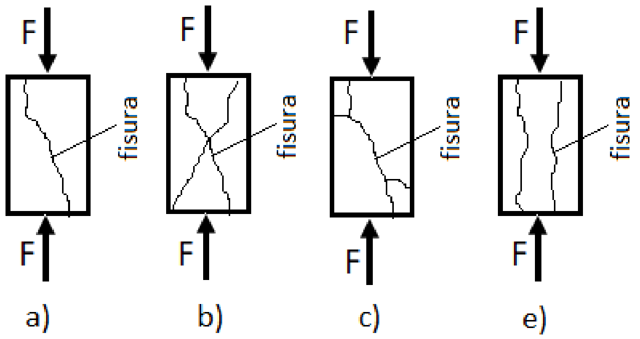


Fig. 2.26. Moduri de rupere fragilă la compresiune: forfecare după un plan (a); forfecare după două plane (b); rupere multiplă (c); despicare (d)

Problema 2.1

Se dă o stare de tensiuni caracterizată prin tensorul tensiunilor

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.59)$$

Să se determine tensiunile și direcțiile principale, starea de tensiuni corespunzătoare pentru τ_{max}, să se reprezinte pe cercul lui *Mohr* și să se figureze tensiunile pe fațetele elementului de volum. Tensiunile din (2.59) sunt exprimate în [MPa].

Rezolvare

Comparând (2.59) cu (2.27) se observă că este o stare plană de tensiuni, cu σ_x=50MPa, σ_y=-10MPa, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$=40MPa (fig. 2.27).

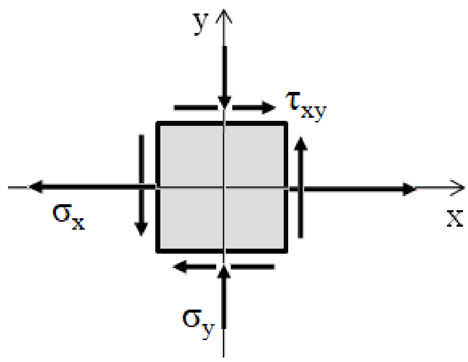


Fig. 2.27. Stare plană de tensiuni

În vederea reprezentării cercului *Mohr* se calculează tensiunea normală medie σ_m (abscisa centrului cercului, care se află pe axa Oσ) și raza R

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{I_1}{2} = \frac{50-10}{2} = 20MPa$$

$$R = \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50+10}{2}\right)^2 + 40^2} = 50MPa \qquad (2.60)$$

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = 20+50 = 70MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_m - R = 20-50 = -30MPa$$

Se trasează cercul lui *Mohr* pe care se reprezintă punctele caracteristice diferitelor stări de tensiuni (fig. 2.28):

- X și Y pentru starea de tensiuni indicată în problemă;
- S_1 și S_2 pentru starea de tensiuni principale;
- T_1 și T_2 pentru tensiuni tangențiale extreme (τ_{max}, τ_{min}).

Determinarea direcțiilor principale:

$$\tan 2\theta_{p,q} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{50+10} = 1,(3) \Rightarrow$$

$$2\theta_p \approx 53{,}13°; \quad \theta_p \approx 26{,}6° \tag{2.61}$$

$$2\theta_q \approx 180° + 53{,}13° = 233{,}13°; \quad \theta_q \approx 116{,}6°$$

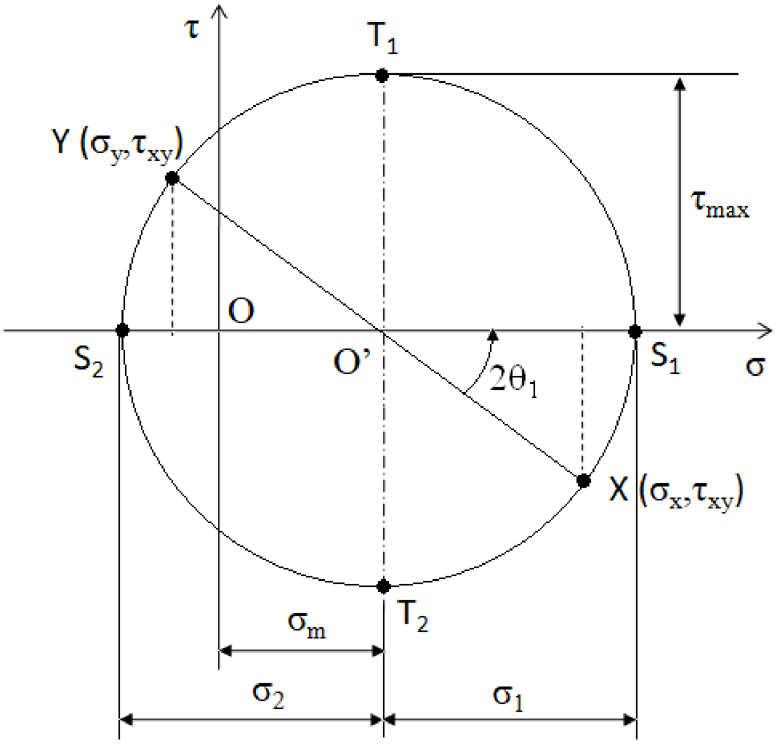


Fig. 2.28. Cercul lui Mohr pentru starea de tensiuni din Problema 2.1

Pentru a ști care dintre unghiurile θ_p și θ_q determină direcția tensiunii σ_1 și care a tensiunii σ_2, se poate înlocui unul dintre aceste unghiuri în relația (2.33), care dă variația tensiunii în jurul unui punct și se constată dacă se obține σ_1 sau σ_2:

$$\sigma(\theta) = \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\sigma_{x'} = \frac{50-10}{2} + \frac{50+10}{2}\cos 53{,}13° + 40\sin 53{,}13° = 70MPa = \sigma_1 \qquad (2.62)$$

$$\Rightarrow \theta_p = \theta_1$$

Se reprezintă în continuare stările de tensiuni de pe fațetele elementului de volum, aflat în situațiile caracteristice reprezentate pe cercul lui *Mohr* din fig. 2.28.

Pentru a realiza figura 2.29 se procedează astfel:

- Se pornește de la elementul de volum aflat în starea de tensiuni dată în problemă. Starea de tensiuni din punctele diametral opuse X și respectiv Y se prezintă pe două fațete alăturate (ortogonale). Starea de tensiuni reprezentată pe fațetele adiacente ale elementului de volum considerat sunt cele corespunzătoare literelor de pe cercul lui *Mohr* (fig. 2.28) care au fost încercuite în fig. 2.29;
- Se reprezentă apoi elementul de volum cu tensiunile principale. Pentru a suprapune punctul X peste S_1, în cercul lui *Mohr* se rotește X în sens direct trigonometric cu unghiul θ_p=θ_1. În același sens se rotește sistemul de referință xOy din fig. 2.28, cu unghiul θ_1=26,6°. Se determină astfel direcția principală 1, iar direcția principală 2 este normală pe aceasta ($\theta_2 = 116{,}6°$). Direcțiile principale 1 și 2 corespund direcțiilor tensiunilor principale σ_1 și σ_2. Pentru starea de tensiuni principale, pe fațeta din dreapta tensiunea reprezentată este cea din punctul $S_1(\sigma_1,0)$ de pe cercul lui *Mohr* iar pe fațeta de sus cea din punctul $S_2(\sigma_2,0)$;
- Tensiunile tangențiale extreme corespund punctelor T_1 și T_2 de pe cercul lui *Mohr*. Ele se raportează la sistemul de referință x'O'y', care este rotit cu 45° față de sistemul direcțiilor principale 1O2;
- Pe fațetele opuse ale elementului de volum se figurează tensiuni egale și de sensuri contrare, pentru satisfacerea condițiilor de echilibru;
- Se observă că unghiul $(\widehat{XS_2S_1}) = \theta_1$.

Ambele reprezentări, atât cercul lui *Mohr* (fig. 2.28), cât și cea cu elemente de volum (fig. 2.29) sunt utile în studiul stărilor de tensiuni din jurul unui punct.

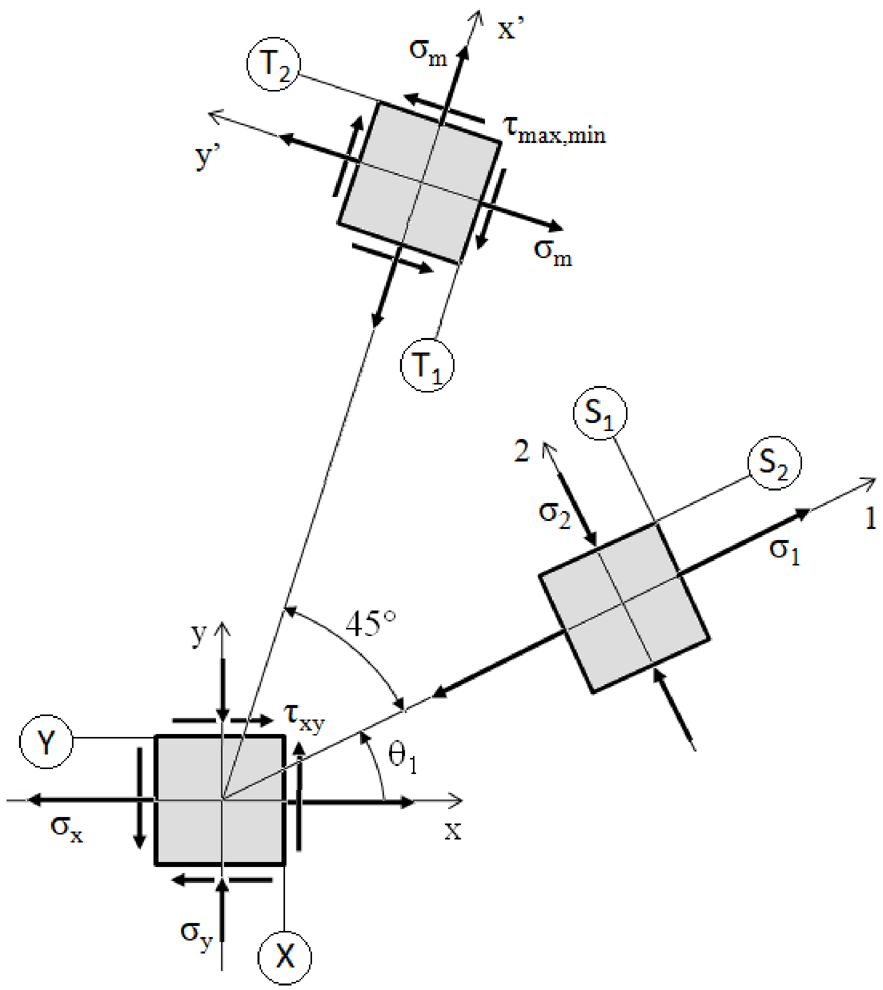


Fig. 2.29. Stările de tensiuni pentru punctele caracteristice de pe cercul lui Mohr (v. fig. 2.28).

2.4.2. Cercurile lui Mohr pentru stare spațială de tensiuni

Dacă în jurul punctului P se construiește elementul de volum aflat în stare spațială de tensiuni și se rotește elementul în jurul unei axe principale, atunci pe acea fațetă tensiunile tangențiale sunt nule iar tensiunea principală nu se modifică în timpul rotirii (fig. 2.30). Variația tensiunilor de pe celelalte fațete paralele cu axa în jurul căreia se face rotirea poate fi studiată cu ajutorul cercului *Mohr* pentru stare plană de tensiuni. Valorile extreme ale tensiunilor pe aceste fațete sunt celelalte două tensiuni principale, normale pe axa care se rotește. În figura 2.30, de exemplu, rotirea se face în jurul axei 1, iar variația tensiunilor de pe fațetele paralele cu această axă este descrisă de cercul lui *Mohr* cu diametrul $\sigma_2 - \sigma_3$ [Beer F., 2020].

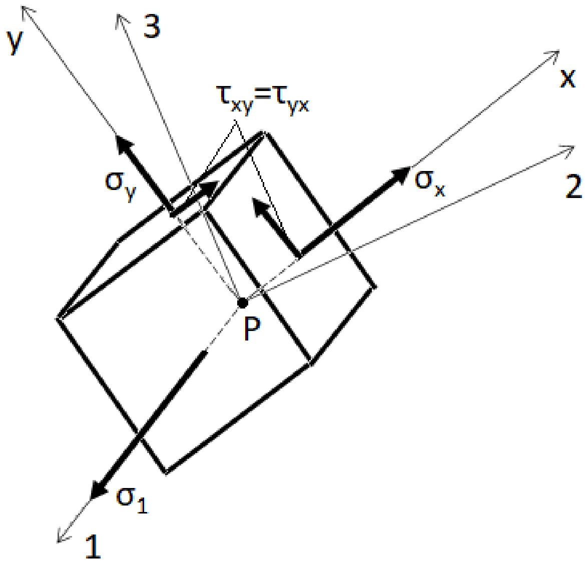


Fig. 2.30. Element de volum rotit în jurul axei principale 1

Repetând raționamentul pentru rotirea în jurul celorlalte axe principale, se obțin alte două cercuri, cu diametrele $\sigma_1 - \sigma_3$ (la rotirea în jurul axei 2) și respectiv $\sigma_1 - \sigma_2$ (la rotirea în jurul axei 3).

La aceiași rezultat se ajunge dacă se secționează cu un plan elementul de volum raportat la sistemul principal de axe și apoi fațeta înclinată a prismei triunghiulare rezultate se rotește în jurul unei axe principale cu unghiul variabil θ (fig. 2.31, 2.32, 2.33).

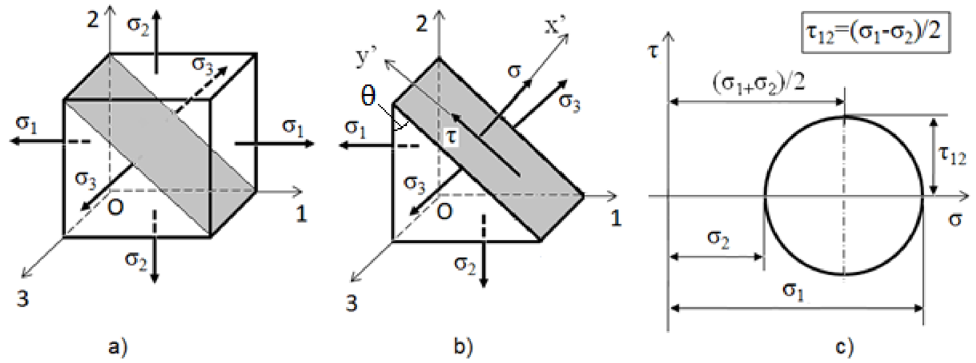


Fig. 2.31. Secționarea elementului de volum cu un plan paralel cu axa 3 (a); rotirea planului de secționare în jurul axei 3 (b); cercul Mohr pentru variația tensiunilor în planul de secționare (c)

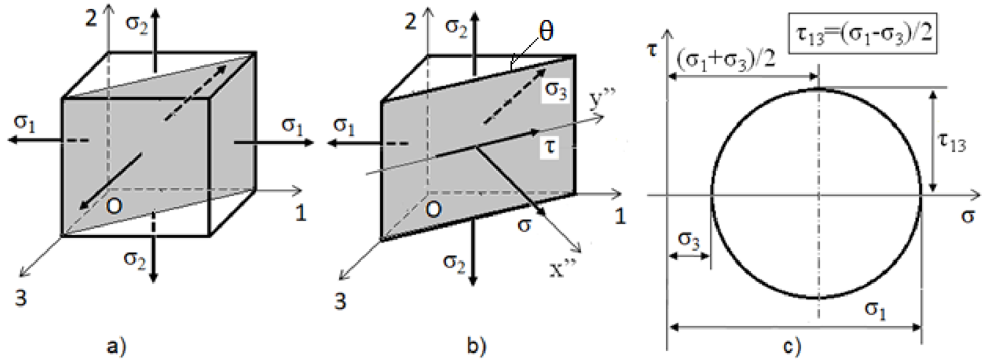


Fig. 2.32. Secționarea elementului de volum cu un plan paralel cu axa 2 (a); rotirea planului de secționare în jurul axei 2 (b); cercul Mohr pentru variația tensiunilor în planul de secționare (c)

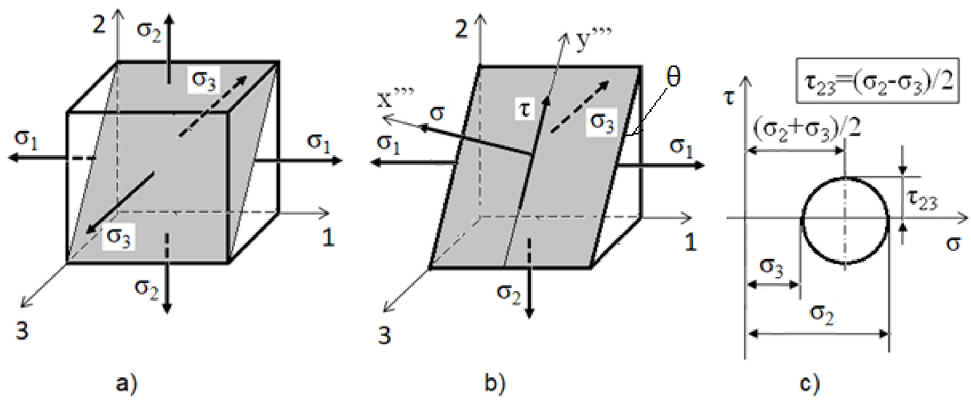


Fig. 2.33. Secționarea elementului de volum cu un plan paralel cu axa 1 (a); rotirea planului de secționare în jurul axei 1 (b); cercul Mohr pentru variația tensiunilor în planul de secționare (c)

Cele trei cercuri *Mohr* din figurile 2.31, 2.32 și 2.33 pot fi asamblate astfel încât să fie tangente două câte două (fig. 2.34). Acest ansamblu de trei cercuri *Mohr* caracterizează starea spațială de tensiuni din jurul unui punct: când planul de secționare se rotește în jurul punctului, atunci cosinușii directori se modifică astfel încât vârful tensiunii rezultante *p* descrie porțiunea din planul (σ, τ) cuprinsa între cercurile lui *Mohr,* respectiv zona marcată cu gri în figurile 2.34 și 2.35, astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2\geq\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\\
&\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2\leq\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2\\
&\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2\geq\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Zona dintre cercuri este locul geometric al punctelor care reprezintă tensiunile de pe elemente de suprafață înclinate față de planele principale pentru care toate cosinusurile directoare sunt nenule. Coordonatele unui punct aparținând zonei dintre cercuri sunt tensiunea normală σ și tensiunea tangențială τ de pe un element de suprafață cu normala $\overline{n}(l,m,n)$. [Ponomariov S.D., 1960].

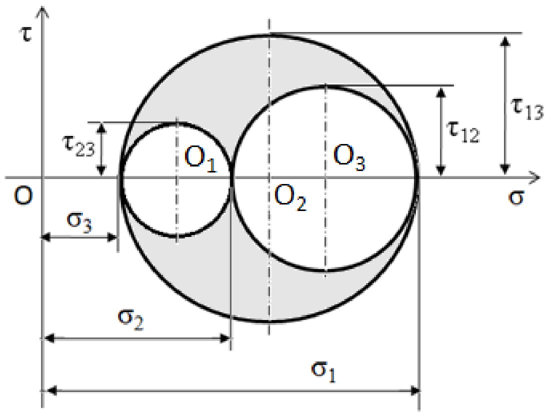


Fig. 2.34. Cercurile lui Mohr pentru starea spațială de tensiuni

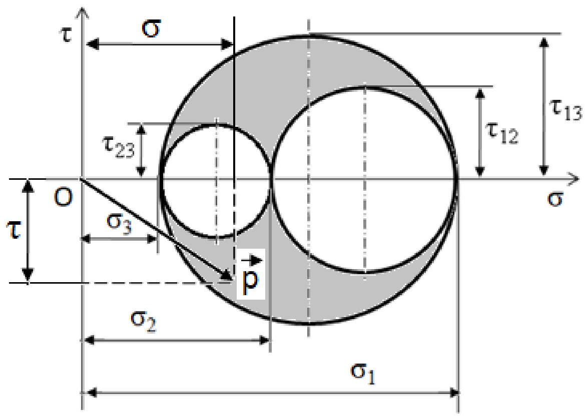


Fig. 2.35. Vârful tensiunii rezultante p descrie porțiunea cuprinsă între cercurile lui Mohr, respectiv zona marcată cu gri

Din figurile 2.31-2.35 se observă că tensiunile tangențiale extreme, corespunzătoare celor trei cercuri, luate în modul, sunt și razele cercurilor

$$
\begin{aligned}
\tau_{23} &= \pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \\
\tau_{13} &= \pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \tau_{\max,\min} \\
\tau_{12} &= \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Planele în care apar aceste tensiuni tangențiale extreme conțin o direcție principală și câte o bisectoare a unghiurilor drepte formate de celelalte două direcții principale. Pentru fiecare direcție principală există două asemenea plane (fig. 2.36).

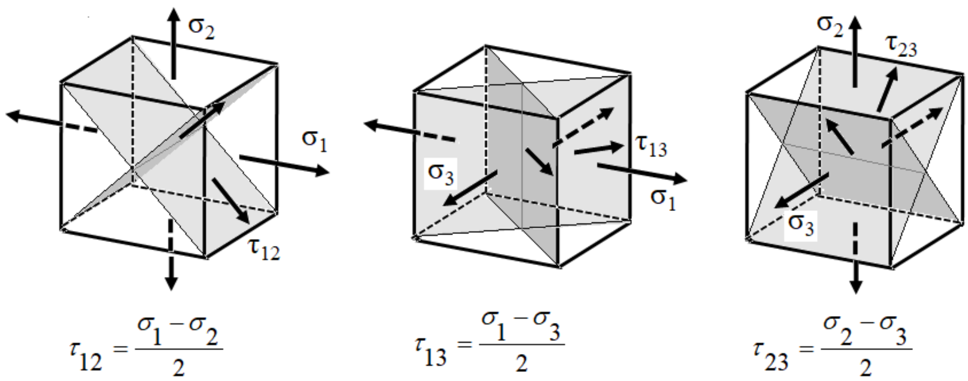


Fig. 2.36. Pentru fiecare direcție principală există două plane în care tensiunile tangențiale iau valori extreme. Se prezintă aceste plane pentru direcțiile principale 3, 2 și respectiv 1

Diagrama cercurilor lui *Mohr* permite evidențierea unor proprietăți importante ale stărilor de tensiuni spațiale din jurul unui punct, cum ar fi: arată că tensiunile principale au valori extreme; furnizează valorile tensiunilor tangențiale extreme și arată planele în care acestea apar etc.

Un alt avantaj important la diagramei cercurilor lui *Mohr* îl constituie simplitatea extremă a reprezentării grafice. Însă această reprezentare grafică este oarecum convențională, deoarece starea de tensiuni generală este spațială și nu plană. Acest lucru poate constitui uneori un dezavantaj.

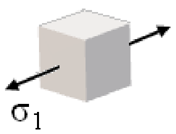
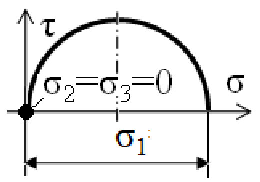
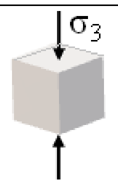
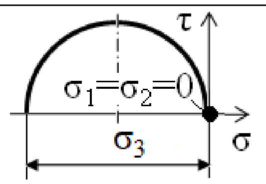
2.4.3. Cercurile lui Mohr pentru stări de tensiuni particulare

Din figura 2.34 se observă că:

- Pentru cazul particular în care, de exemplu, $\sigma_2 = \sigma_1$, atunci cercul cu centrul în O_3 degenerează într-un punct, iar cercurile cu centrele în O_1 și O_2 se suprapun;
- Pentru o stare echitriaxială de tensiuni toate tensiunile sunt egale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (tracțiune sau compresiune) și toate cele trei cercuri *Mohr* degenerează într-un punct;
- Din motive de simetrie, pentru diagrama cercurilor *Mohr* poate fi considerată doar porțiunea aflată deasupra axei σ.

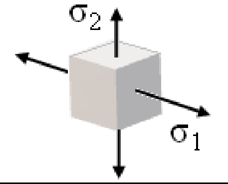
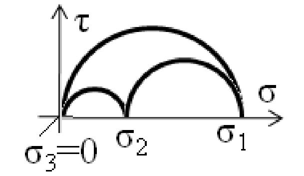
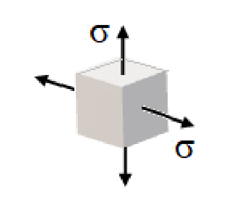
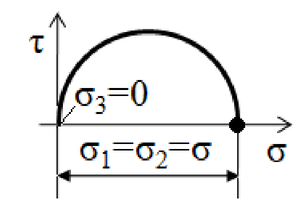
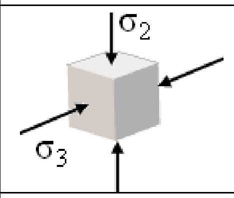
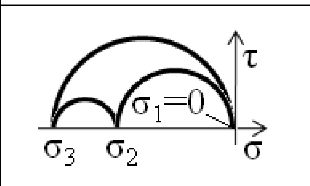
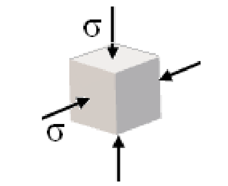
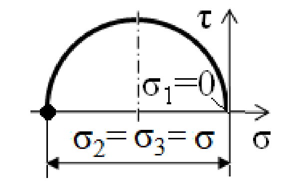
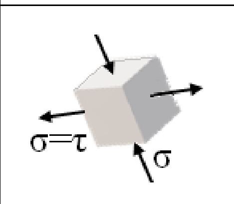
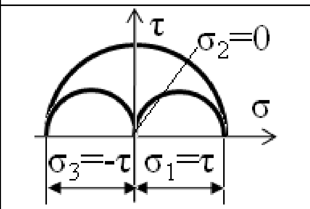
Aceste observații vor fi utilizate la prezentarea cercurilor lui Mohr în cazul unor stări de tensiuni particulare (tab. 2.2, 2.3 și 2.4).

Tab. 2.2. Cercurile lui Mohr pentru stări uniaxiale de tensiuni

<table>
<tr><th>Nr. crt.</th><th>Reprezentare</th><th>Cercurile lui Mohr (pe jumătate)</th><th>Tensorul tensiunilor T_σ</th><th>Solicitare (exemple)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>
</td><td>$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$</td><td>Tracțiune
$\sigma_1>0$
$\sigma_2=\sigma_3=0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>
</td><td>$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}$</td><td>Compresiune
$\sigma_1=\sigma_2=0$
$\sigma_3<0$</td></tr>
</table>

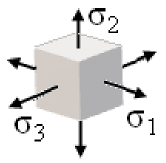
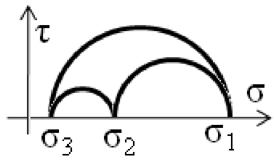
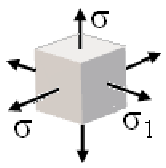
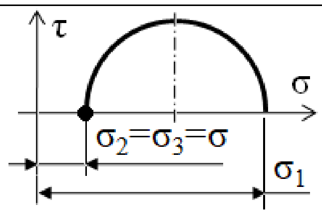
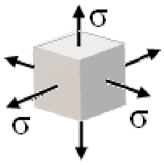
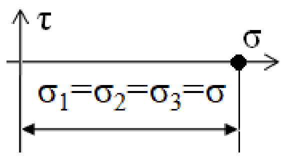
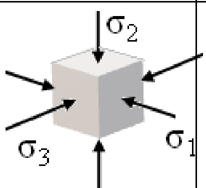
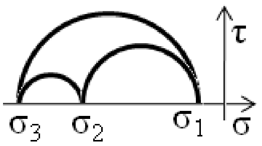
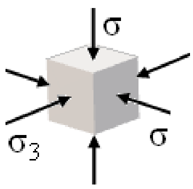
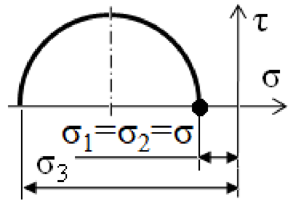
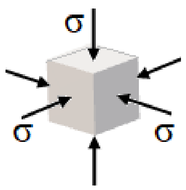
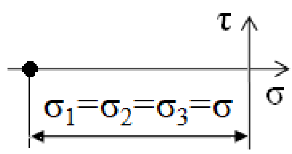
Observație: În tabel sunt câte două cercuri suprapuse iar al treilea devine punct.

Tab. 2.3. Cercurile lui Mohr pentru stări biaxiale de tensiuni

Nr.	**Reprezentare**	**Cercurile lui Mohr** (pe jumătate)	**Tensorul tensiunilor** T_σ	**Solicita-re** (exemple)
1			$\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	Tracțiune biaxiala (σ_3= 0)
2			$\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	Tracțiune echi-biaxială $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ $\sigma>0$
3			$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_3\end{bmatrix}$	Compresi-une biaxială (σ_1= 0)
4			$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma & 0\\ 0 & 0 & -\sigma\end{bmatrix}$	Compresi-une echi-biaxială $\sigma_2=\sigma_3=\sigma$ $\sigma<0$
5			$\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma\end{bmatrix}$	Forfecare pură $\sigma_1=\tau$; $\sigma_3=-\tau$ și $\sigma_2=0$

Observație: La pozițiile 2 și 4 sunt câte două cercuri suprapuse iar al treilea degenerează într-un punct.

Tab. 2.4. Cercurile lui Mohr pentru stări triaxiale de tensiuni

Nr.	**Reprezen-tare**	**Cercurile lui Mohr** (pe jumătate)	**Tensorul Tensiunilor** T_σ	**Solicitare** (exemple)
1			$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$	Tracțiune triaxială
2			$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$	Tracțiune triaxială cu σ_1 și $\sigma_2=\sigma_3=\sigma$
3			$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$	Tracțiune echi-triaxială $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$ $\sigma>0$
4			$\begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}$	Compresi-une triaxială
5			$\begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix}$	Compresi-une triaxială cu σ_3 și $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$
6			$\begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$	Compresi-une echi-triaxială (hidrosta-tică) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$ $\sigma<0$

Observații (tab. 2.4):

- La pozițiile 2 și 5 sunt câte două cercuri suprapuse iar al treilea degenerează într-un punct;
- La pozițiile 3 și 6 toate cele trei cercuri degenerează într-un punct.

2.4.4. Cercul lui Mohr pentru stare plană de deformații

Pentru materiale izotrope cercul lui *Mohr* pentru deformații poate fi trasat concentric cu cercul pentru tensiuni (fig. 2.37). Cu această reprezentare, intersecția cercurilor cu o dreaptă înclinată care trece prin centrul lor dă starea de tensiuni și deformații în planul desemnat de unghiul θ.

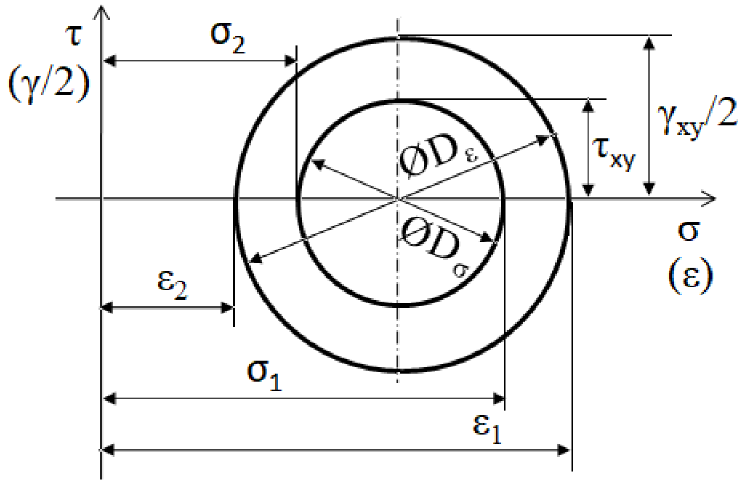


Fig. 2.37. Cercurile lui Mohr pentru tensiuni și deformații

Notând cu D_ε diametrul cercului deformațiilor și cu D_σ diametrul cercului tensiunilor, se poate demonstra că între ele există relația [Avril J., 1984]:

$$\frac{D_\varepsilon}{D_\sigma} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{2.65}$$

unde cu ν s-a notat coeficientul lui *Poisson*.

În mod similar cu diagrama cercurilor *Mohr* pentru stare spațială de tensiuni se poate construi diagrama cercurilor pentru stare spațială de deformații, în coordonate ε-$\gamma/2$ [Ponomariov S.D., 1960]. Punctele aflate în zona dintre cercuri (marcată cu gri în fig. 2.38) au coordonatele: alungirea specifică și jumătate din lunecarea pe direcții care nu sunt paralele nu axele principale. Se observă că pentru variația deformațiilor în jurul unui punct există valori maxime și minime, la fel ca în cazul tensiunilor.

Lunecările specifice maxime se produc pentru direcții aflate în plane care fac unghiuri de 45° cu axele principale. Din figura 2.38 se observă că aceste lunecări specifice sunt

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{aligned} \tag{2.66}$$

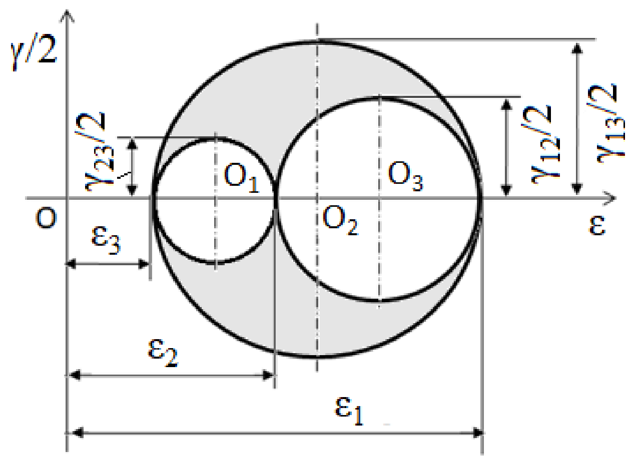


Fig. 2.38. Cercurile lui Mohr pentru stare spațială de deformații

2.5. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE ALE TEORIEI ELASTICITĂȚII

Pentru rezolvarea problemelor Teoria Elasticității dispune de trei grupuri de ecuații fundamentale:

1. *Ecuații de echilibru (Cauchy), care sunt* relații între tensiuni;
2. *Ecuații de geometrice* (relații între deformații și deplasări);
3. *Ecuații fizice (constitutive)* numite impropriu și *"legea lui Hooke generalizată".*

La acestea se mai adaugă condițiile care trebuie sa fie satisfăcute în toate punctele de pe suprafața corpului (*condiții pe contur*).

2.5.1. **Ecuații de echilibru (Cauchy)**

Tensiunile de pe fațetele pozitive ale elementului de volum aflat în echilibru (v. fig. 2.3 și fig. 2.5c) primesc o creștere infinit mică, ca în figura 2.39. Componentele forțelor masice (volumice) specifice se notează cu X, Y și Z [N/mm^3]. Pentru acest element de volum se vor scrie ecuațiile de echilibru (2.1), după cum se arată mai jos.

În figura 2.40 se prezintă doar componentele forțelor care dau proiecții pe axa Ox. Se procedează similar cu componentele forțelor care dau proiecție pe celelalte două axe și se obțin trei ecuații de proiecție a forțelor.
Proiecția forțelor pe axa Ox implică numai tensiunile care sunt paralele cu această axă (au al doilea indice *x*), ca în figura 2.40

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)\cdot dy\cdot dz-\sigma_{xx}\cdot dy\cdot dz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\cdot dx\cdot dz-\\&\tau_{yx}\cdot dx\cdot dz+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\cdot dx\cdot dy-\tau_{zx}\cdot dx\cdot dy+\\&X\cdot dx\cdot dy\cdot dz=0\end{aligned}\tag{2.67}$$

După reduceri și simplificări ecuația (2.67) se aduce la o formă mai simplă.

Similar se scriu apoi ecuațiile de proiecții pe celelalte două axe și se obține sistemul de ecuații (2.68).

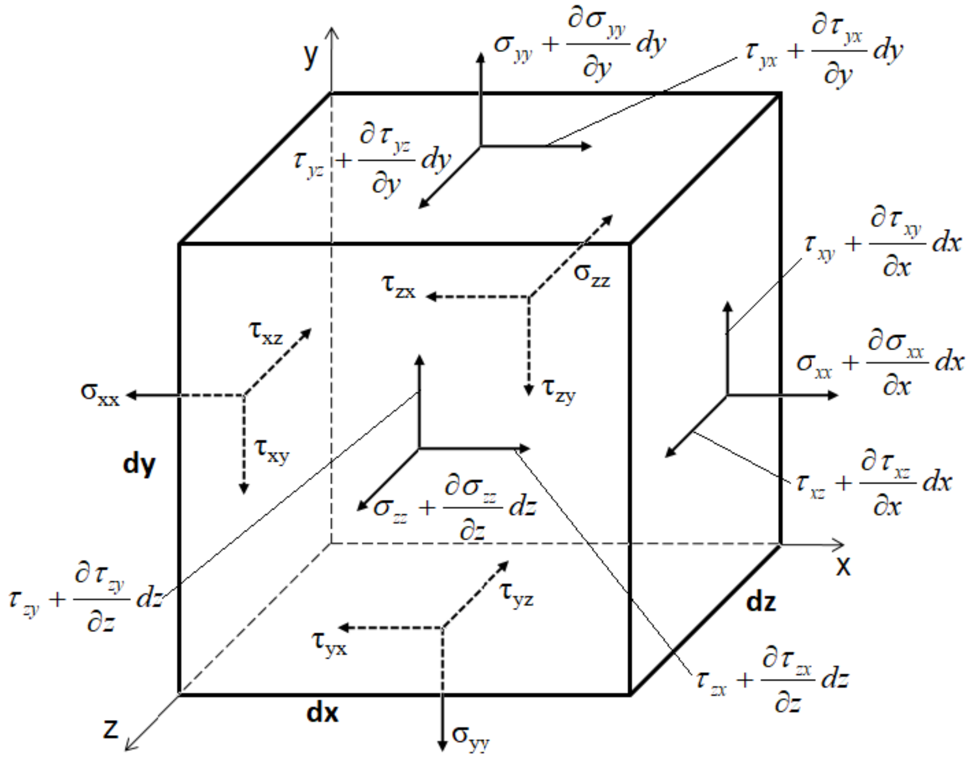


Fig. 2.39. Stare spațială de tensiuni (tensiunile de pe fațetele pozitive au primit creșteri infinit mici)

Ecuațiile de echilibru al proiecțiilor forțelor pe direcțiile axelor de coordonate sunt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

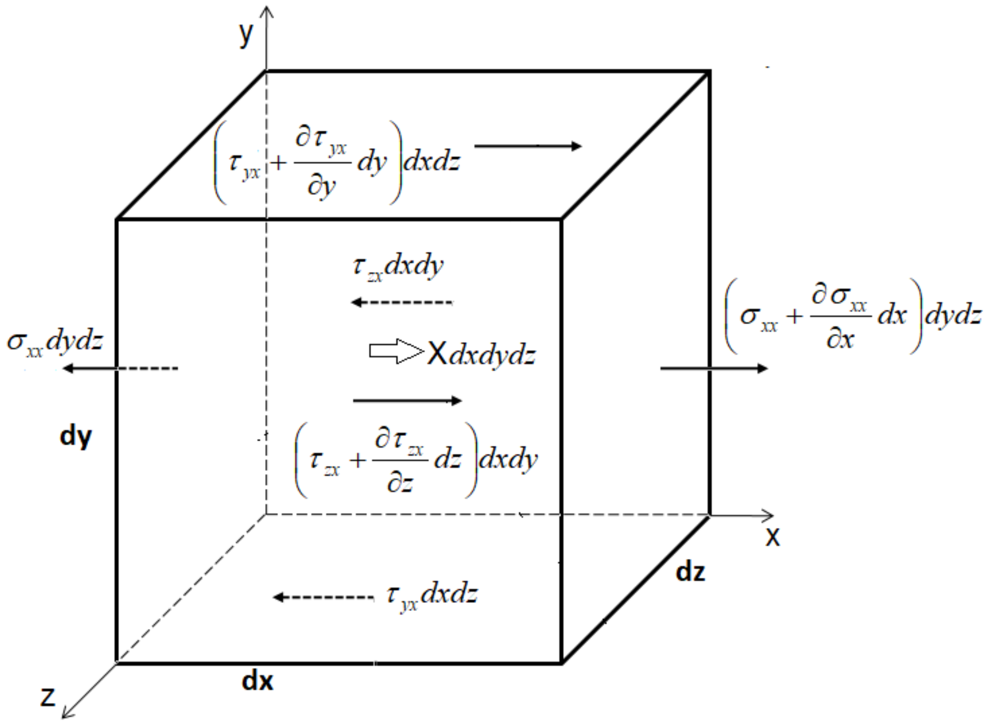


Fig. 2.40. Componentele forțelor care dau proiecții pe axa Ox.

În mod similar se scriu apoi ecuațiile de echilibru al momentelor față de cele trei axe. În acest scop se alege originea sistemului de referință în centru de greutate al elementului de volum. În figura 2.41 se prezintă numai forțele care dau momente față de axa Ox. Suma momentelor față de axa Ox este

$$\left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} - \tau_{yz} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0 \tag{2.69}$$

Se împarte apoi (2.69) la $dx \cdot dy \cdot dz$ și se neglijează infiniții mici rămași, rezultând astfel o formă mai simplă a ecuației (2.69).

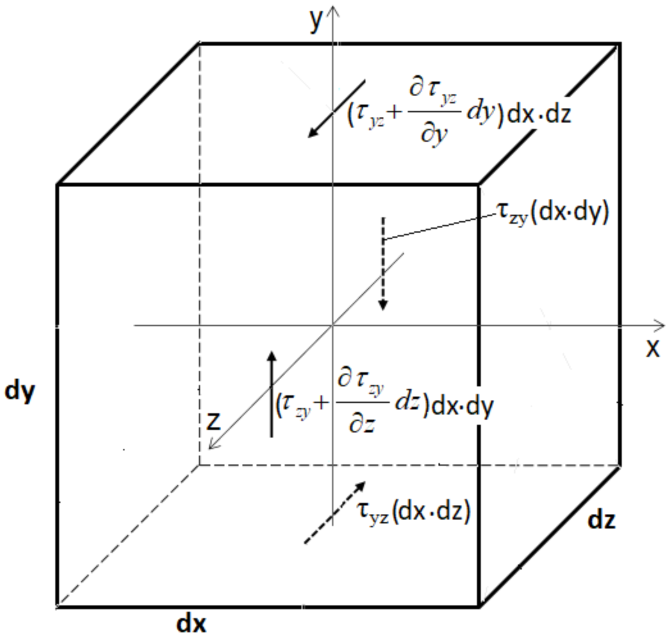


Fig. 2.41. Forțele care dau momente față de axa Ox

În mod similar se scriu ecuațiile de echilibru al momentelor față de celelalte axe și rezultă un alt grup de trei ecuații, numite *dualitatea tensiunilor tangențiale*

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \qquad (2.70)$$

Sistemul de ecuații (2.70) arată că tensiunile tangențiale care converg sau diverg față de muchia formată de intersecția a doua fațete reciproc perpendiculare sunt egale. În consecință, *tensorul tensiunilor T_σ este simetric față de diagonala principală*.

Relațiile (2.68) și (2.70) formează împreună un sistem de șase ecuații de echilibru, valabil pentru starea triaxială de tensiuni, care poate fi particularizat pentru stările biaxială și respectiv uniaxială de tensiuni. Pentru starea biaxială de tensiuni se pot anula, de exemplu, toate tensiunile cu indice *z* iar pentru starea uniaxială de tensiuni se pot anula, de exemplu, și tensiunile cu indice *y* (tab. 2.5).

Tab. 2.5. Particularizarea ecuațiilor de echilibru

Starea de tensiuni				
3D		2D		1D
$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0$ $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0$ $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X=0$ $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+Y=0$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+X=0$
$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ $\tau_{yz}=\tau_{zy}$	$\Rightarrow$	$\tau_{xy}=\tau_{yx}$		

2.5.2. *Ecuații geometrice*

Pentru început se studiază deformarea unei fațete a paralelipipedului elementar în plan, respectând ipotezele Teoriei Elasticității. În figura 2.42 este prezentată deformarea fațetei ABCD din planul xOy. Punctul A, de coordonate (x,y) are o deplasare în plan, ale cărei componente sunt *u(x,y)* și *v(x,y)*. Deoarece aici nu interesează poziția lui A în raport cu A', se suprapun cele două puncte prin translație. Aplicând teorema lui *Pitagora* în triunghiurile A'EB' și A'FD' (fig. 2.43) rezultă:

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2} \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$
$$A'D' = \sqrt{\left(dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2} \approx \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \tag{2.71}$$

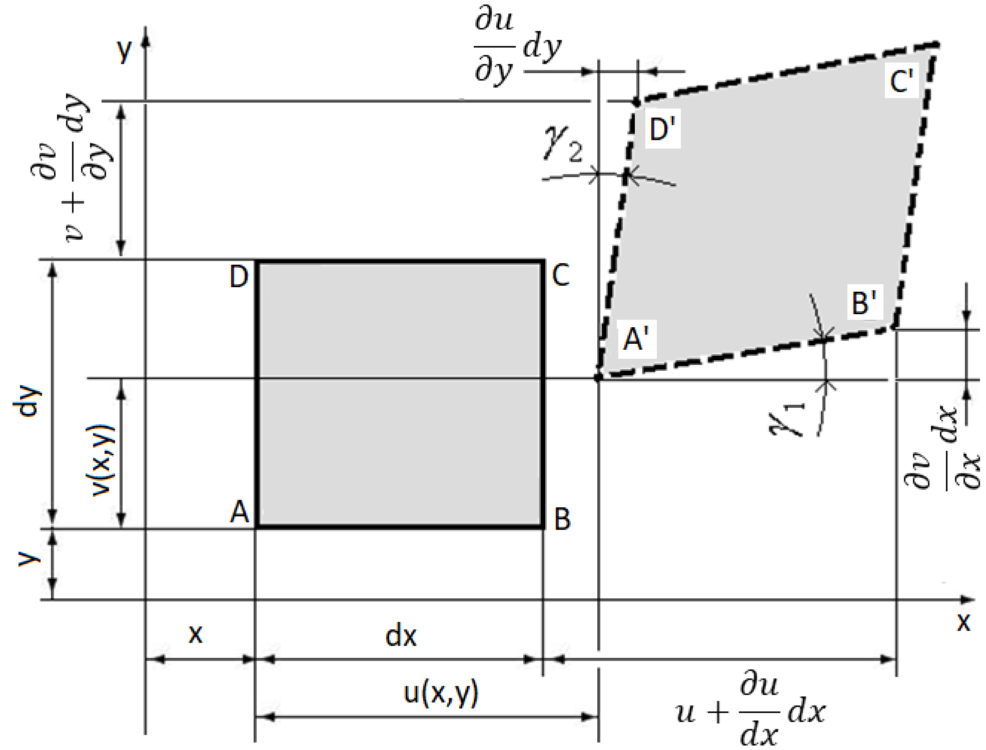


Fig. 2.42. Studiul deformațiilor în planul xOy

Se scriu alungirile specifice

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \frac{A'D' - AD}{AD} \tag{2.72}$$

Înlocuind (2.71) în (2.72) rezultă

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.73)$$

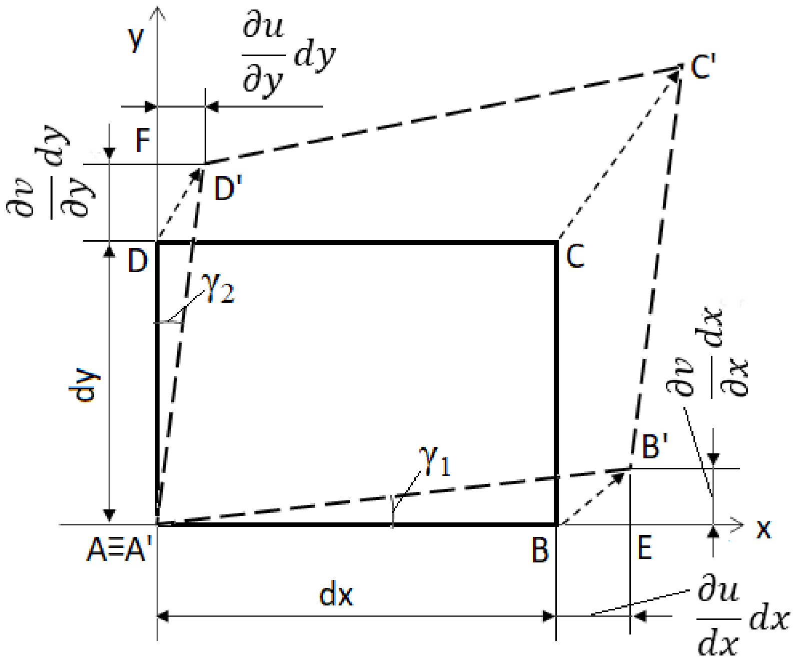


Fig. 2.43. Studiul deformațiilor în planul xOy: suprapunerea punctelor A și A' prin translație (cu săgeți s-au marcat pozițiile inițiale și finale ale punctelor)

Raționând similar pentru celelalte plane de referință se obțin trei relații între alungirile specifice și deplasări

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.74)$$

unde *u*, *v*, *w* sunt componentele deplasărilor pe direcțiile Ox, Oy și Oz.

Pentru lunecări mici se poate scrie

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2; \quad \tan\gamma_1 \approx \gamma_1; \quad \tan\gamma_2 \approx \gamma_2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.75}$$

Relații similare pot fi scrise în planele xOz și yOz și astfel se obțin trei ecuații

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.76}$$

Relațiile (2.74) și (2.76) formează un sistem de șase ecuații care sunt utilizate pentru a descrie starea triaxială de deformații. Aceste ecuații pot fi particularizate pentru stare biaxială sau uniaxială de deformații (tab. 2.6).

Tab. 2.6. Particularizarea relațiilor dintre deformații și deplasări

Starea de deformații				
3D		2D		1D
$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$
$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$	$\Rightarrow$	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$		

Observație: Stărilor biaxiale sau uniaxiale de tensiuni le corespunde o stare spațială de deformații.

2.5.3. **Ecuații constitutive (fizice)**

Primele doua grupe de ecuații fundamentale (de echilibru și respectiv geometrice) nu conțin caracteristici de material. În consecință, ele pot fi aplicate oricărui material care corespunde ipotezelor simplificatoare din Teoria Elasticității.

Ecuațiile constitutive se mai numesc *fizice* datorită faptului ca ele depind de caracteristicile elastice ale materialului (E, G și ν). Mai sunt numite impropriu și „legea lui *Hooke* generalizata”, deși *Robert Hooke* a studiat doar resorturi elicoidale și a observat că deformația lor este proporționala cu forța aplicată. Din acest motiv i s-a atribuit relația dintre tensiuni și alungiri specifice pentru solicitări axiale.

Se cunoaște legea lui *Hooke* pentru solicitări axiale și respectiv pentru forfecare [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{2.77}$$

$$\tau = G\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \tag{2.78}$$

Ecuațiile constitutive vor fi demonstrate prin suprapunerea efectelor, așa cum este ilustrat simbolic în figura 2.44, unde schematizarea sugerează faptul că, prin adunarea tensiunilor și a alungirilor specifice corespunzătoare tracțiunii pe direcția axelor de referință, pot fi obținute tensiunile și alungirile specifice corespunzătoare tracțiunii triaxiale. Raționamentul este valabil și pentru compresiune.

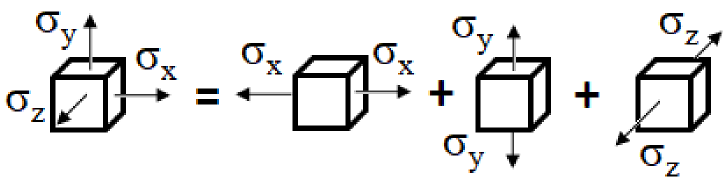
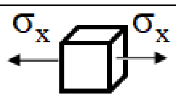
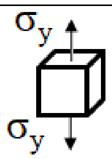
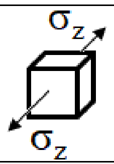
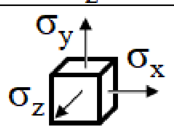


Fig. 2.44. Demonstrarea relațiilor constitutive prin suprapunerea efectelor

Ecuațiile constitutive pentru starea triaxiala de tensiuni sunt demonstrate cu ajutorul tabelului 2.7. În tabel alungirile specifice sunt notate cu doi indici, inferior și superior. Indicele superior semnifică cazul de încărcare uniaxială.

Tab. 2.7. Demonstrarea ecuațiilor constitutive pentru stare triaxială de tensiuni

Nr.	Starea de tensiuni	ε pe direcția:		
		Ox	Oy	Oz
1		$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_y^{(1)} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_z^{(1)} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$
2		$\varepsilon_x^{(2)} = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_z^{(2)} = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$
3		$\varepsilon_x^{(3)} = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_y^{(3)} = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$	$\varepsilon_z^{(3)} = \frac{\sigma_z}{E}$
4		$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} + \varepsilon_x^{(3)}$	$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(1)} + \varepsilon_y^{(2)} + \varepsilon_y^{(3)}$	$\varepsilon_z = \varepsilon_z^{(1)} + \varepsilon_z^{(2)} + \varepsilon_z^{(3)}$

Explicitând alungirile specifice pentru starea triaxială de tensiuni se obține

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{aligned} \tag{2.79}$$

Pentru forfecare se mai pot adaugă trei ecuații de forma (2.78) și se obține:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

Ecuațiile constitutive (2.79) și (2.80) dau relațiile între tensiuni și deformații pentru starea spațială de tensiuni. Această formă a ecuațiilor constitutive se numește *forma complianță* (modulul E apare la numitor), *format sistem* (ecuațiile pot fi prezentate și în format matriceal).

În tabelul 2.8 se prezintă particularizarea ecuațiilor constitutive pentru starea de tensiuni biaxială și uniaxială.

Tab. 2.8. Particularizarea ecuațiilor constitutive (forma complianță, format sistem)

Starea de tensiuni				
3D		2D		1D
$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$ $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$ $\gamma_{XY} = \tau_{XY}/G$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ $\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$ $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$
$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$ $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$	$\Rightarrow$	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$		

Ecuațiile constitutive pentru starea spațială de tensiuni pot fi scrise în *format matriceal* astfel

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.81}$$

Din ecuațiile constitutive (2.79) și (2.80) pot fi determinate tensiunile funcție de deformații. Un asemenea mod de prezentare a ecuațiilor constitutive se numește *forma rigiditate* (modulul E apare la numărător)*, format sistem*

$$\begin{gathered} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_z + \varepsilon_x\right)\right] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right] \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{gathered} \tag{2.82}$$

Având în vedere că pentru multe materiale $\nu \approx 0{,}3$, se poate considera $\nu^2 \approx 0$ și se poate aproxima numărătorul din relațiile (2.82) astfel

$$(1+\nu)(1-2\nu) \approx 1-\nu \tag{2.83}$$

Ținând cont de (2.83), prima dintre relațiile (2.82) degenerează în (2.77) pentru starea axială de tensiuni ($\sigma_x \neq 0; \sigma_y = \sigma_z = 0$).

Ecuațiile constitutive scrise în *forma rigiditate* pot fi exprimate în *format matriceal* astfel

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2.84}$$

Pentru simplitate, în (2.84) s-a înlocuit $G = E/2(1+\nu)$, relație care va fi demonstrată în paragraful 2.6. Ecuațiile (2.84) pot fi scrise simbolic astfel

$$\{\sigma_{ij}\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon_{ij}\} \tag{2.85}$$

unde între acolade s-au notat matricele coloană ale tensiunilor și deplasărilor, iar cu paranteze pătrate s-a notat *matricea de rigiditate*, care este pătrată. În tabelul 2.9 se sintetizează formele ecuațiilor constitutive pentru starea plană de tensiuni.

Se studiază *deformația volumică* a paralelipipedului elementar. Volumul său inițial și volumul paralelipipedului elementar deformat este

$$\begin{aligned} dV &= dx \cdot dy \cdot dz \\ dV + \Delta V &= dx(1+\varepsilon_x)dy(1+\varepsilon_y)dz(1+\varepsilon_z) \end{aligned} \tag{2.86}$$

Neglijând infiniții mici de ordin superior, din (2.86) se obține succesiv

$$\begin{aligned} dV + \Delta V &\approx dxdydz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \\ \Delta V &\approx dxdydz(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \end{aligned} \tag{2.87}$$

Se definește deformația volumică specifică:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{2.88}$$

Din (2.79) și (2.88) rezultă

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \tag{2.89}$$

Se notează tensiunea medie

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} \tag{2.90}$$

Din (2.90) și (2.89) rezultă ecuația lui *Poisson*, care are forma similară cu legea lui *Hooke*

$$\varepsilon_v = 3\frac{1-2\nu}{E}\sigma_m = \frac{\sigma_m}{K} \tag{2.91}$$

unde cu *K* s-a notat modulul de elasticitate cubică.

Tab. 2.9. Moduri scriere a ecuațiilor constitutive pentru stare plană de tensiuni

	FORMA SISTEM	FORMA MATRICEALĂ
FORMAT COMPLIANȚĂ	$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$ $\gamma_{XY} = \frac{\tau_{xy}}{G}$	$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0\\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$
FORMAT RIGIDITATE	$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & G\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$

2.5.4. Condiții pe contur

Cele trei grupuri de ecuații fundamentale (ecuații de echilibru, geometrice și constitutive), sunt utilizate pentru rezolvarea problemelor Teoriei Elasticității. Ele conțin ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Prin integrarea acestora se obțin constante, care trebuie sa fie calculate din condiții la limită (pe contur). Metodele numerice (cum ar fi Metoda Elementelor Finite) rezolvă aceste ecuații printr-un calcul aproximativ.

Ecuațiile de echilibru exprimă continuitatea tensiunilor din corp. Ele nu au sens pe suprafețele libere care mărginesc corpul și trebuie să fie redefinite pentru cazul unor forțe repartizate pe elemente de suprafață liberă. Din aceste motive se vor studia în continuare elemente de suprafață/volum aflate în vecinătatea frontierelor corpului.

Fie, de exemplu, cazul unei plăci de grosime constantă, aflată în stare plană de tensiuni. Din vecinătatea suprafeței se detașează un element de volum infinit mic (fig. 2.45). Deoarece elementul este infinit mic, arcul AB poate fi aproximat cu o dreaptă. Pe suprafața liberă acționează forța uniform distribuită cu rezultanta p, care are componentele p_x și p_y [MPa].

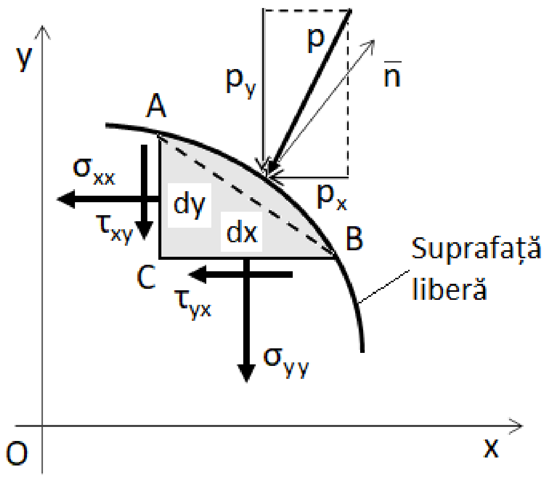


Fig. 2.45. Izolarea unui element de volum dintr-o placă

Se scrie echilibrul forțelor care acționează asupra elementului de volum

$$\begin{aligned} p_x[AB]t &= \sigma_{xx}[AC]t + \tau_{yx}[BC]t \\ p_y[AB]t &= \tau_{xy}[AC]t + \sigma_{yy}[BC]t \end{aligned} \tag{2.92}$$

unde între paranteze pătrate s-au notat lungimile segmentelor iar cu *t* grosimea plăcii.
Notând *cu l* și *m* cosinușii directori normalei $\overline{n}$ la ai direcția AB

$$l = \frac{[AC]}{[AB]}; \quad m = \frac{[BC]}{[AB]} \Rightarrow [AC] = [AB]l; \quad [BC] = [AB]m \tag{2.93}$$

După simplificări rezultă

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xx} l + \tau_{yx} m \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m \end{aligned} \tag{2.94}$$

În mod similar, pentru stări spațiale de tensiuni se izolează un tetraedru elementar, la care suprafața înclinată BCD (fig. 2.6b) se consideră că aparține suprafeței care delimitează corpul. Asupra ei acționează forța uniform distribuită $p(p_x, p_y, p_z)$. Scriind ecuațiile de echilibru pentru forțele care acționează asupra volumului elementar se obțin ecuațiile (2.6), care trebuie să fie satisfăcute în toate punctele suprafeței libere a corpului (pe "contur"). Pe conturul nesolicitat tensiunea normală este nulă și este tensiune principală deoarece tensiunile tangențiale sunt nule. Condițiile pe contur pot fi scrise și funcție de deplasări.

2.5.5. Unicitatea soluției

Se pune problema dacă problemele rezolvate în cadrul Teoriei Elasticității au soluție unică. Unicitatea soluției face obiectul unei teoreme care a fost demonstrată de *G.R. Kirchhoff*.

Teorema se demonstrează prin reducere la absurd. Se presupune că, sub acțiunea încărcărilor distribuite pe suprafață $p(p_x, p_y, p_z)$ și a forțelor masice G(X,Y,Z), care acționează asupra unui corp elastic, apar două stări de tensiune care trebuie sa satisfacă ecuațiile de echilibru și condițiile la limită (pe contur). În cele ce urmează se va scrie numai prima ecuație din fiecare grup (tab. 2.10). Scăzând ecuațiile celor două stări, în baza principiului suprapunerii efectelor se obține o a treia stare de tensiuni.

Tab. 2.10. Suprapunerea a două stări de tensiuni pentru demonstrarea unicității soluției (Kirchhoff)

Starea 1	Ec. echilibru	$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z}+X=0$
	Ec. pe contur	$p_x=\sigma'_{xx}l+\tau'_{yx}m+\tau'_{zx}n$
Starea 2	Ec. echilibru	$\frac{\partial \sigma''_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial'' \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z}+X=0$
	Ec. pe contur	$p_x=\sigma''_{xx}l+\tau''_{yx}m+\tau''_{zx}n$
Starea3 = Starea 1 - Starea 2	Ec. echilibru	$\frac{\partial\left(\sigma'_{xx}-\sigma''_{xx}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\tau'_{yx}-\tau''_{yx}\right)}{\partial y}+$ $\frac{\partial\left(\tau'_{zx}-\tau''_{zx}\right)}{\partial z}=0$
	Ec. pe contur	$\left(\sigma'_{xx}-\sigma''_{xx}\right)l+\left(\tau'_{yx}-\tau''_{yx}\right)m+$ $\left(\tau'_{zx}-\tau''_{zx}\right)n=0$

Se observă că în a treia stare de tensiuni nu există încărcări pe suprafață și nici forte masice.

În baza ipotezei stării naturale (nu există tensiuni în absența încărcărilor), rezultă că toate tensiunile din a treia stare trebuie să fie nule, adică trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\begin{gathered}\sigma'_{xx}-\sigma''_{xx}=0;\quad \sigma'_{yy}-\sigma''_{yy}=0;\quad \sigma'_{zz}-\sigma''_{zz}=0\\ \tau'_{xy}-\tau''_{xy}=0;\quad \tau'_{yz}-\tau''_{yz}=0;\quad \tau'_{zx}-\tau''_{zx}=0\end{gathered}\tag{2.95}$$

Rezultă că cele două stări de tensiuni admise inițial coincid $\sigma'_{xx}=\sigma''_{xx}$ *etc.* Rezultă că soluția este unică.

2.6. RELAȚII ÎNTRE CARACTERISTICILE ELASTICE

Pentru *materiale izotrope* s-au definit caracteristicile elastice E, G și ν. Între aceste mărimi exista o relație care poate fi demonstrată pe baza relațiilor geometrice între deformații [Buzdugan G., 1986] sau făcând apel la expresia energiei potențiale de deformare elastică pentru starea plană de tensiuni, care va fi demonstrată în paragraful 2.7. Se prezintă în continuare a doua demonstrație, care este mult mai simplă.

Energiile potențiale de deformare elastică înmagazinate în unitatea de volum a elementului supus la tracțiune cu compresiune U_1 și respectiv a elementului supus la forfecare (când elementul de volum este rotit cu 45°) U_1' sunt egale (fig. 2.46).

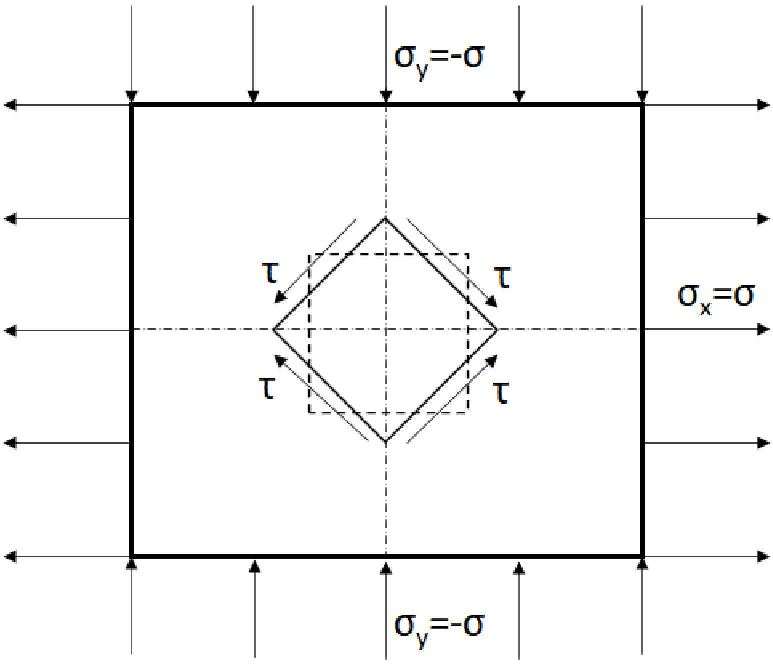


Fig. 2.46. Izolarea elementelor de volum dintr-o placă aflată în stare plană de tensiuni ($\sigma = \tau$)

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y\right); \quad \sigma_x = \sigma = \tau; \quad \sigma_y = -\sigma \Rightarrow$$

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{E}\left(1+\nu\right) \tag{2.96}$$

$$U_1' = \frac{\tau^2}{2G} \Rightarrow U_1' = \frac{\sigma^2}{2G}$$

$$U_1 = U_1' \Rightarrow G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{2.97}$$

Relația (2.97) arată că elasticitatea unui material izotrop este caracterizată de numai două caracteristici elastice independente.

2.7. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ

În [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001] s-au prezentat formule pentru calculul energiei potențiale de deformare elastică la solicitările simple. S-a arătat de asemenea că, în domeniul de proporționalitate, suprafața de sub curba caracteristică este numeric egală cu energia potențială de deformare elastică a unității de volum. Se vor determina în continuare expresiile energiei pentru starea spațială de tensiuni, precum și particularizările sale.

Pentru starea generală de tensiuni energia de deformare elastică înmagazinată în unitatea de volum este

$$U_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \tag{2.98}$$

Ținând cont de ecuațiile constitutive (2.79, 2.80) și de relația dintre caracteristicile elastice *E* și *G* (2.97), se poate scrie (2.98) funcție numai de tensiuni

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + 2\left(1+\nu\right)\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right] \tag{2.99}$$

Funcție de tensiunile principale (2.99) poate fi scrisă

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{2.100}$$

Ținând cont de faptul că

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 - 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) = I_1^2 - 2I_2 \tag{2.101}$$

relația (2.100) poate fi scrisă funcție de invarianți astfel

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[I_1^2 - 2\left(1+\nu\right)I_2\right] \tag{2.102}$$

ceea ce demonstrează că însăși energia U_1 este un invariant, așa cum era de așteptat de altfel.

Energia de deformare elastică U_1 înmagazinată în unitatea de volum a corpului are asupra acestuia următoarele efecte, care în majoritatea cazurilor apar simultan (v. fig. 2.18):

- Modificarea volumului;
- Modificarea formei.

Prin *modificarea volumului* măsura laturilor paralelipipedului elementar variază astfel încât raportul laturilor și unghiurile drepte nu se modifică.

Prin *modificarea formei* paralelipipedului se înțelege că raportul dintre laturile sale se modifică după deformare sau că variază unghiurile drepte, însă volumul rămâne constant.

Având în vedere aceste efecte, se poate spune în mod convențional că energia U_1 are doua componente:

- Energie modificatoare de volum, U_{1V};
- Energie modificatoare de formă, U_{1F}.

Între aceste componente există relația

$$U_1 = U_{1V} + U_{1F} \tag{2.103}$$

Pentru a avea numai variații de volum trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \tag{2.104}$$

Ținând cont de ecuațiile constitutive (2.79), din (2.104) rezultă

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \tag{2.105}$$

Rezulta că o stare de tensiuni echitriaxială nu modifică decât volumul corpului. Această stare de tensiuni mai poate fi numită și *hidrostatică*, ea putând fi negativă (compresiune) sau pozitivă (tracțiune).

Dacă însă apar numai variații ale formei, atunci volumul nu se modifică și alungirea specifică volumică trebuie să îndeplinească condiția

$$\varepsilon_v = 0 \tag{2.106}$$

Ținând cont de expresia deformației volumice exprimată funcție de tensiuni (2.89), din (2.106) rezultă

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = 0 \tag{2.107}$$

Funcție de tensiunile principale (2.107) poate fi scrisă

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{2.108}$$

Relația (2.107) caracterizează starea de tensiuni în care corpul prezintă numai *variații de formă*. Deformațiile din domeniul elasto-plastic, de exemplu, se efectuează la volum constant.

În figura 2.47 se prezintă simbolic descompunerea energiei U_1 în energie modificatoare de volum și energie modificatoare de formă. Se va demonstra valoarea presiunii hidrostatice pozitive care produce numai modificarea volumului, inițial fiind notată cu *p* (fig. 2.47b). Pentru a determina valoarea lui *p* se pune condiția ca în starea de tensiuni care modifică numai forma (fig. 2.47c) să nu existe variații de volum, adică $\varepsilon_v=0$

$$(\sigma_1 - p) + (\sigma_2 - p) + (\sigma_3 - p) = 0 \Rightarrow p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m = \frac{I_1}{3} \tag{2.109}$$

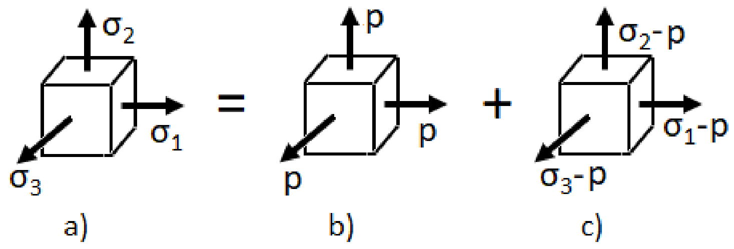


Fig. 2.47. Descompunerea energiei U_1 pentru starea de tensiuni 3D (a) în energie modificatoare de volum U_{1V} (b) și modificatoare de formă U_{1F} (c)

S-a demonstrat astfel că elementul de volum aflat în stare triaxială de tensiuni, având pe fiecare fațetă tensiunea medie σ_m, este supus numai la modificări de volum. Din acest motiv, în figura 2.48 s-a înlocuit *p* cu σ_m.

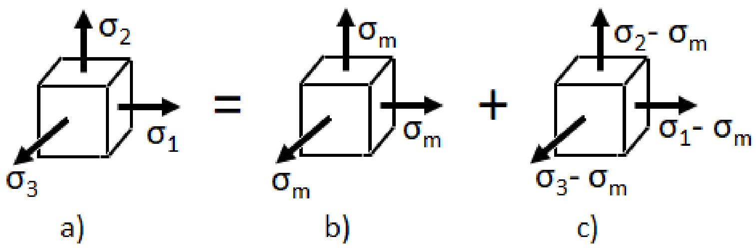


Fig. 2.48. Descompunerea energiei U_1 pentru starea de tensiuni 3D (a) în energie modificatoare de volum U_{1V} (b) și modificatoare de formă U_{1F} (c), după ce în fig. 2.47 s-a înlocuit p cu σ_m

Înlocuind $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$ în expresia energiei U_1 (2.100), rezultă energia potențială elastică modificatoare de volum

$$U_{1V} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 \tag{2.110}$$

Din (2.103) și (2.110) se calculează apoi energia modificatoare de formă

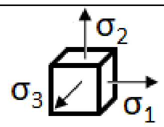
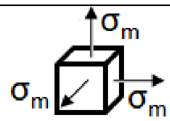
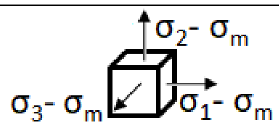
$$\begin{gathered} U_{1F} = U_1 - U_{1V} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right] \Leftrightarrow \\ U_{1F} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \end{gathered} \tag{2.111}$$

Componentele energiei U_1 pot fi scrise funcție de invarianți astfel

$$U_{1V} = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2$$
$$U_{1F} = \frac{1+\nu}{3E}\left(I_1^2 - 3I_2\right) \tag{2.112}$$

unde invarianții sunt scriși pentru starea inițială de tensiuni, cea din figura 2.48a. Din (2.112) rezultă că și energiile modificatoare de volum U_{1V} și respectiv de formă U_{1F} *sunt invarianți*. Toate tensiunile din figura 2.48 sunt principale, deoarece tensiunile tangențiale sunt nule. În tabelul 2.11 sunt calculați invarianții pentru stările de tensiuni care modifică volumul și respectiv forma. Acești invarianți sunt utilizați pe scară largă atât în Teoria Elasticității, cât și in Teoria Plasticității.

Tab. 2.11. Invarianți pentru stările de tensiuni care modifică volumul și respectiv forma

U_1	U_{1V}	U_{1F}
		
$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$I_1^V = 3\sigma_m = I_1$	$I_1^F = J_1 = I_1 - 3\sigma_m = 0$
$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$	$I_2^V = 3\sigma_m^2 = \frac{I_1^2}{3}$	$I_2^F = J_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{3}$
$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$I_3^V = \sigma_m^3 = \left(\frac{I_1}{3}\right)^3$	$I_3^F = J_3 = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + 2\left(\frac{I_1}{3}\right)^3$

În tabelul 2.12 sunt particularizate energiile potențiale de deformare U_1, U_{1F} și U_{1V} pentru stările biaxiale și uniaxiale de tensiuni, funcție de tensiunile principale. Pentru stările uniaxiale de tensiuni se regăsesc formulele stabilite la solicitări simple [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001].

Tab. 2.12. Particularizarea energiilor U_1, U_{1F} și U_{1V} pentru stările biaxiale și uniaxiale de tensiuni

U_1	3D	$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$
	2D	$U_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2\right)$
	1D	$U_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}$
U_{1F}	3D	$U_{1F} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$
	2D	$U_{1F} = \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\right)$
	1D	$U_{1F} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_1^2$
U_{1V}	3D	$U_{1V} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$
	2D	$U_{1V} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2$
	1D	$U_{1V} = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_1^2$

Observație: Formula energiei U_1 din tabelul 2.12, stabilită pentru starea (1D), este cea prezentată pentru solicitări uniaxiale în [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001].

Concluzii:

1. Energiile potențiale de deformare elastică U_1, U_{1V} și U_{1F} au fost exprimate funcție de invarianți. S-a arătat astfel că valoarea energiilor în diferite sisteme de referință este constantă;
2. S-a demonstrat că la descompunerea energiei potențiale de deformare elastică în modificatoare de volum și modificatoare de formă, modificarea volumului este produsă de tensiunea echitriaxială (hidrostatică) σ_m.

Problema 2.2

Să se determine starea de tensiuni și deformații dintr-o bară cilindrică de lungime L, suspendată pe verticală de un capăt și liberă la celălalt, încărcată cu greutatea proprie. Greutatea specifică a materialului este γ. Se consideră ca Ox coincide cu axa geometrică (fig. 2.49).

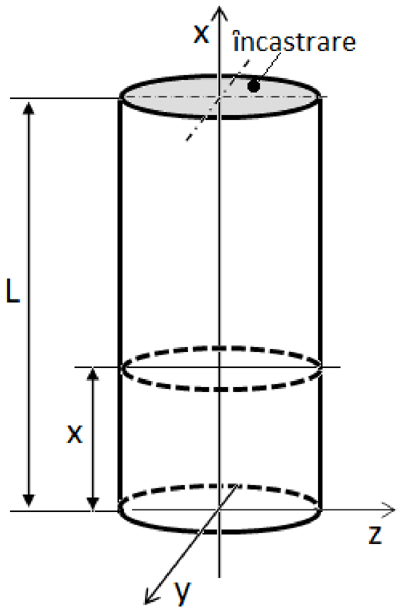


Fig. 2.49. Bară încastrată la partea superioară și încărcată cu greutatea proprie

Rezolvare

Forțele masice care încarcă bara sunt

$$X=\gamma;\quad Y=Z=0 \tag{2.113}$$

Se scriu tensiunile pentru secțiunea *x,* pornind de la capătul liber

$$\begin{aligned}&\sigma_x=\gamma Ax/A=\gamma x\\&\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\end{aligned} \tag{2.114}$$

Tensiunile verifică ecuațiile de echilibru (2.68) și (2.70), ținând cont că forța masică și tensiunea σ_x au sensuri contrare:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0 \Leftrightarrow \gamma - \gamma = 0 \tag{2.115}$$

Se scriu ecuațiile constitutive combinate cu ecuațiile geometrice (de deformații) și se obține

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma x}{E} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\
&\varepsilon_y = -\nu \frac{\gamma x}{E} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\
&\varepsilon_z = -\nu \frac{\gamma x}{E} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Integrând (2.116) se obține

$$u = \frac{\gamma x^2}{2E} + u_0(y,z) \tag{2.117}$$

Se introduce *u* în ecuațiile a patra și a șasea (2.116) și se obține:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{2.118}$$

Rezultă

$$v = -x\frac{\partial u_0}{\partial y} + v_0(y,z); \quad w = -x\frac{\partial u_0}{\partial z} + w_0(y,z) \tag{2.119}$$

Introducând (2.119) în ecuațiile a doua și a treia (2.116) se obține

$$\begin{aligned}
-x\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{\gamma x}{E} \\
-x\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\nu \frac{\gamma x}{E}
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Ecuațiile (2.120) sunt satisfăcute numai dacă

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = -\nu \frac{\gamma}{E} \tag{2.121}$$

Înlocuind v și w în a cincea ecuație (2.116) se obține

$$-2x\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial z}+\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}=0 \tag{2.122}$$

Ecuația (2.122) este satisfăcută dacă

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial z}=0;\quad \frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}=0 \tag{2.123}$$

Din (2.121) se vede că w_0 nu depinde de z și v_0 nu depinde de y, de unde rezultă ca sunt funcții de forma

$$w_0=ay+b;\quad v_0=cz+d \tag{2.124}$$

Din (1.124) și (2.123) se rezultă

$$a+c=0\Rightarrow\quad c=-a \tag{2.125}$$

Din a doua ecuație (2.121) se obține

$$u_0=-\frac{\gamma}{2E}(z^2+y^2)+ez+fy+g \tag{2.126}$$

Constantele de integrare a-g se determină din condițiile pe contur. Deoarece bara este încastrată la partea de sus, se poate scrie că în centrul de greutate al secțiunii încastrate deplasările sunt nule

$$\begin{gathered}x=L;\quad y=z=0\Rightarrow u=v=w=0\Rightarrow\\ \frac{\partial w}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial z}=0\end{gathered} \tag{2.127}$$

Astfel deplasările devin

$$\begin{gathered}u=\frac{\gamma x^2}{2E}+\frac{\nu\gamma}{2E}(y^2+z^2)+ez+fy+g\\ v=-\nu\frac{\gamma}{E}yx-fx-az+d\\ w=-\nu\frac{\gamma}{E}xz-ex-ay+b\end{gathered} \tag{2.128}$$

Din (2.128) și (2.127) rezultă

$$\begin{aligned} &-eL+b=0 \quad && e=0 \quad && b=0 \\ &-fL+d=0; \quad && f=0; \quad && d=0 \\ &\frac{\gamma L^2}{2E}+g=0 \quad && a=0 \quad && g=-\frac{\gamma L^2}{2E} \end{aligned} \tag{2.129}$$

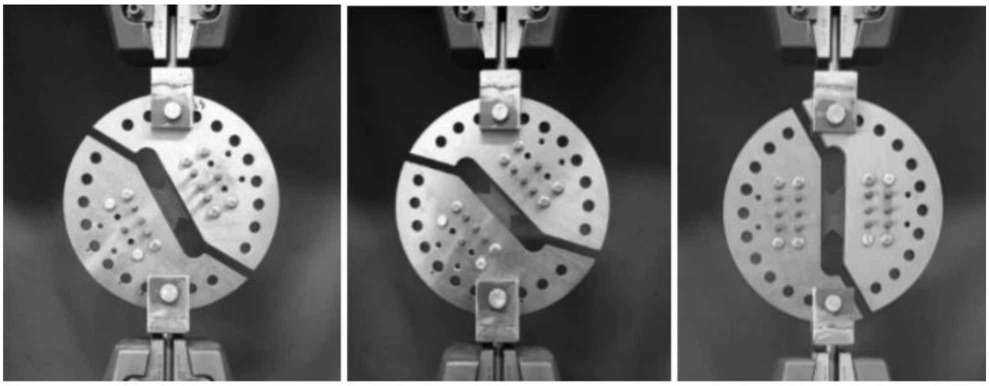
Înlocuind constantele de integrare în (2.128) se obține

$$\begin{aligned} u &= \frac{\gamma x^2}{2E}+\frac{\nu\gamma}{2E}(y^2+z^2)-\frac{\gamma L^2}{2E} \\ v &= -\nu\frac{\gamma}{2E}xy \\ w &= -\nu\frac{\gamma}{2E}xz \end{aligned} \tag{2.130}$$

Din prima ecuație (2.130) rezultă că punctele de pe axa geometrică a barei (y=z=0) au deplasări numai pe verticală

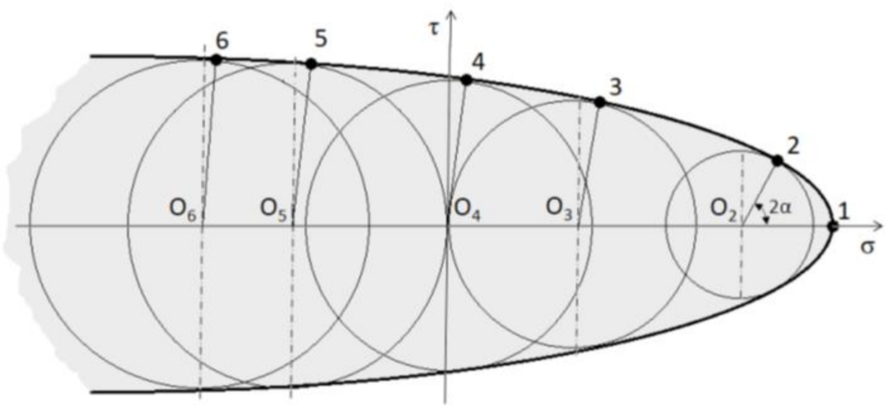
$$u=-\frac{\gamma}{2E}\left(L^2-x^2\right) \tag{2.131}$$

Celelalte puncte, cu excepția celor din încastrare, se deplasează atât pe verticală cât și pe orizontală, datorită fenomenului de contracție transversală. Deplasările *v* și *w* pot fi calculate cu (2.130).
Deși aceste calcule sunt mai elaborate, totuși cu ajutorul lor se prevede deplasarea corectă a tuturor punctelor, spre deosebire de calculul simplificat din Rezistența Materialelor, care consideră că deplasarea pe direcție radială este constantă pe lungimea barei.



CAP. 3

TEORII DE STARE LIMITĂ



Pentru colajul din acest capitol s-au folosit fotografii cuprinse în:

A.N. Dănilă, R. Steigmann, A. Savin, I. Blanari, P.D. Bârsănescu, *Arcan device employed in CFRP testing*, Proc. of Xth NDT in PROGRESS October 7–9, 2019, Prague, Czech Republic

Equation Section 3

3. TEORII DE STARE LIMITĂ

3.1. CEDAREA MATERIALELOR ȘI STRUCTURILOR

În ingineria mecanică este folosită o gamă largă de materiale, cum ar fi:

- Materiale metalice (oțeluri C și aliate, fonte, aliaje neferoase, superaliaje);
- Polimeri și elastomeri;
- Ceramice tehnice;
- Materiale compozite (cu matrice polimetrică, metalică sau ceramică, uzual ranforsate cu fibre și țesături de sticlă, C, B etc.);
- Cauciuc;
- Sticlă etc.

Se spune că un material a cedat atunci când caracteristicile sale inițiale sunt alterate și acesta nu își mai poate îndeplini funcțiile atribuite. Cedarea unui material se poate produce nu numai prin ruperea sau dezintegrarea acestuia, ci și prin alterarea proprietăților sale mecanice, micșorarea secțiunii transversale prin pierderea de masă etc.

Au fost identificate peste 20 de moduri de cedare ale materialelor și structurilor [Collins J., 1993]:

1. Rupere ductilă;
2. Rupere fragilă;
3. Apariția curgerii;
4. Strivire;

5. Rigiditate scăzută, apariția deformațiilor mari ca urmare a acțiunii forțelor și/sau temperaturii;
6. Oboseală (solicitări variabile);
7. Fluaj;
8. Relaxare termică;
9. Flambaj;
10. Flambaj vâscoelastic (flambaj și fluaj);
11. Rupere prin impact;
12. Coroziune;
13. Uzură;
14. Corodare în stare tensionată;
15. Oboseala ansamblurilor fretate;
16. Oboseală și coroziune;
17. Oboseală și fluaj;
18. Șoc termic;
19. Uzură și gripare;
20. Exfoliere;
21. Rezonanță;
22. Prezența radiațiilor etc.

În cele ce urmează vor fi studiate primele trei moduri de cedare, care se produc la solicitări statice. Cauzele primare ale cedării materialelor sunt:

- Alegerea inadecvată a materialului;
- Geometria piesei inadecvată (secțiune prea mică, raze mici de racordare etc.);
- Erori tehnologice și de fabricație;
- Erori de montaj;
- Control de calitate inadecvat;
- Utilizare / manipulare greșită;
- Condiții de exploatare neprevăzute (suprasarcini, mediu agresiv);
- Întreținere necorespunzătoare;
- Monitorizarea inadecvată a condițiilor de mediu etc.

Materialele metalice supuse la solicitări statice pot prezenta o rupere ductilă sau una fragilă [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]. Ruperea se produce atunci când tensiunea provenită din încărcări o depășește pe cea de rupere (rezistența la rupere). În consecință, acest tip cedare este produs de supraîncărcare.

Ruperea ductilă este produsă de tensiuni tangențiale și este precedată de deformații plastice mari, aspectul suprafeței de rupere fiind mat, fibros. Ruperea se produce transcristalin și are o viteză de propagare relativ mică. Testul la tracțiune uniaxială permite o bună caracterizare a ductilității. Dacă diagrama caracteristică prezintă o zonă de consolidare după ce a depășit o limită de curgere (reală sau *off-set*) și dacă materialul prezintă deformații mari în acea regiune, atunci se poate spune că are un comportament ductil. Se va da un exemplu privind implicarea tensiunilor tangențiale în ruperea ductilă. În fig. 2.23f se prezintă o imagine SEM a unei porțiuni de epruvetă ruptă prin tracțiune (rupere ductilă). Se observă că secțiunea de rupere prezintă două regiuni:

- Partea centrală a craterului are aspect granular și este perpendiculară pe axa geometrică a epruvetei, fiind ruptă prin tracțiune;
- Flancurile craterului au un aspect mat, cu rugozitate mică și fac un unghi de circa 45° cu axa geometrică a epruvetei. Această zonă este ruptă prin forfecare.

În zona de stricționare a epruvetei apare o stare spațială de tensiuni. Acest lucru explică prezența tensiunilor tangențiale în epruvete solicitate la tracțiune uniaxială. În cazul ruperilor foarte ductile la tracțiune (Au, Ag, Pb în condiții ambientale și solicitări statice simple), suprafața de rupere se poate reduce până la zero sub acțiunea tensiunilor tangențiale.

Următorii parametri pot fi corelați cu diagrama caracteristică astfel:

- *Tensiunea de rupere* σ_r *(rezistența* R) este corelată cu valoarea maximă a ordonatei [MPa];
- *Ductilitatea* este corelată cu dezvoltarea curbei pe direcția abscisei, adică ε_r, respectiv lungirea totală la rupere A_t [%];
- *Tenacitatea* este corelată mai degrabă cu suprafața diagramei de sub curbă [J/mm^3].

Însă comportamentul ductil este mai complex decât poate fi descris aici.

Ruperea fragilă este produsă de tensiunile normale și se mai numește *rupere prin smulgere* sau *prin clivaj.* Ruperea fragilă se produce după un plan perpendicular pe direcția tensiunii normale, fisura înaintează cu o mare viteză de propagare și ruperea nu este precedată de deformații plastice macroscopice (fig. 3.1, 3.2). Lungirea totală la rupere poate avea valori $A_t \geq 20\%$ pentru oțeluri cu rupere ductilă și $A_t \leq 7 \div 10\%$ pentru oțeluri cu rupere fragilă. Cu cât materialul este mai ductil, cu atât A_t și gâtuirea la rupere *Z* au valori mai mari. La unele ruperi fragile $A_t \leq 1\%$ și practic nu se observă o gâtuire a epruvetei înaintea ruperii. Anumite materiale prezintă o rupere fragilă în condițiile ambientale și solicitări statice simple (ceramice, sticla, unii polimeri, fonta, aliaje neferoase, compozite etc.).

În anumite condiții unele materiale pot prezenta o tranziție de la rupere ductilă la rupere fragilă. Principalii factori care determină această tranziție sunt:

- Încărcările dinamice;
- Solicitările compuse;
- Temperatura (scăzută);
- Prezența unor fisuri suficient de mari în material etc.

O rupere ductilă produsă într-o componentă a unei structuri metalice s-ar putea să aibă consecințe mai puțin grave decât o ruperea fragilă a aceleiași componente.

Pentru materiale metalice tenacitatea tinde să scadă cu creșterea rezistentei la rupere. Prin urmare, oțelurile cu o duritate ridicată (cum sunt majoritatea oțelurilor de scule, de exemplu) tind să aibă o tenacitate scăzută și în consecință sunt susceptibile la rupere fragilă dacă nu au fost supuse unui tratament termic adecvat. Mai trebuie reamintit faptul ca în cazul ruperii ductile apar deformații mari și diagrama caracteristică se dezvoltă mult în direcția abscisei. Din contra, în cazul ruperii fragile deformațiile sunt relativ mici și diagrama caracteristică se dezvoltă puțin în direcția abscisei. Deoarece suprafața de sub diagrama caracteristică reprezintă energia consumată pentru ruperea epruvetei raportată la volumul acesteia, energia consumată în cazul ruperii ductile este sensibil mai mare decât cea consumată în cazul ruperii fragile [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001].

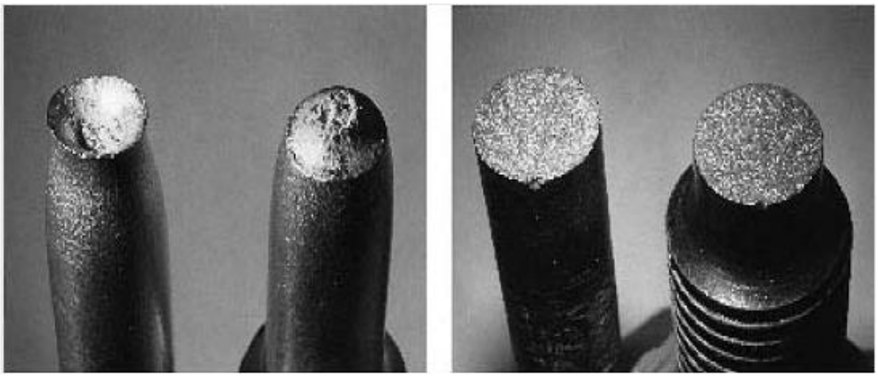


Fig. 3.1. Epruvete testate la tracțiune uniaxială: rupere ductilă (a); rupere fragilă (b), [2]

Atingerea limitei de elasticitate este periculoasă în construcția de mașini deoarece, pentru buna facționare a unui mecanism, între componentele sale există anumite ajustaje (cu joc sau cu strângere). Toleranțele sunt de ordinul de mărime al deformațiilor care apar la inițierea domeniului elasto-plastic. Din acest motiv, la depășirea domeniului de elasticitate se poate produce griparea sau se pot pierde strângerile și astfel buna funcționare a ansamblului este compromisă.

După cum se arată în [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001], determinarea limitei de elasticitate din diagrama caracteristică este dificilă. Din acest motiv, în locul limitei de elasticitate se poate utiliza *limita de curgere*, care este ușor de determinat în cazul materialelor care prezintă o zonă de curgere (inițierea curgerii poate fi considerată că se produce în punctul în care diagrama caracteristică coboară pentru prima dată), având grijă ca, prin alegerea unui coeficient de siguranță corespunzător, să se asigure faptul că depășirea limitei de elasticitate nu se produce. În cazul oțelurilor cu un conținut redus de carbon curgerea este inițiată la o alungire specifică $\varepsilon_c \approx 0,2\%$. În mod convențional, se consideră această valoare și pentru construirea limitei de curgere *off-set* la oțelurile care nu prezintă zonă de curgere și chiar la materiale metalice neferoase, cum ar fi diferite aliaje de aluminiu. Deși această alungire specifică de curgere este larg acceptată, totuși unii cercetători adoptă convențional un $\varepsilon_c \approx 0{,}1\%$.

În cazul structurilor la care componentele nu formează ajustaje, limita de curgere ar putea fi eventual depășită local, fără ca acest lucru să pericliteze semnificativ funcționarea ansamblului. În cazul prelucrării materialelor metalice prin deformare plastică (la rece sau la cald) se urmărește deliberat depășirea limitei de curgere.

În concluzie, se poate afirma că în cazul solicitărilor statice limitele periculoase pentru un material sunt:

- Tensiunea de curgere, pentru un comportament ductil;
- Rezistența (tensiunea) de rupere pentru un comportament fragil.

Materialul cedează atunci când se ating aceste limite periculoase la solicitări statice. Desigur, pentru siguranța în funcționare aceste limite nu trebuie să fie atinse. În cazul solicitărilor compuse acest lucru este asigurat prin utilizarea unor *teorii de stare limită* adecvate.

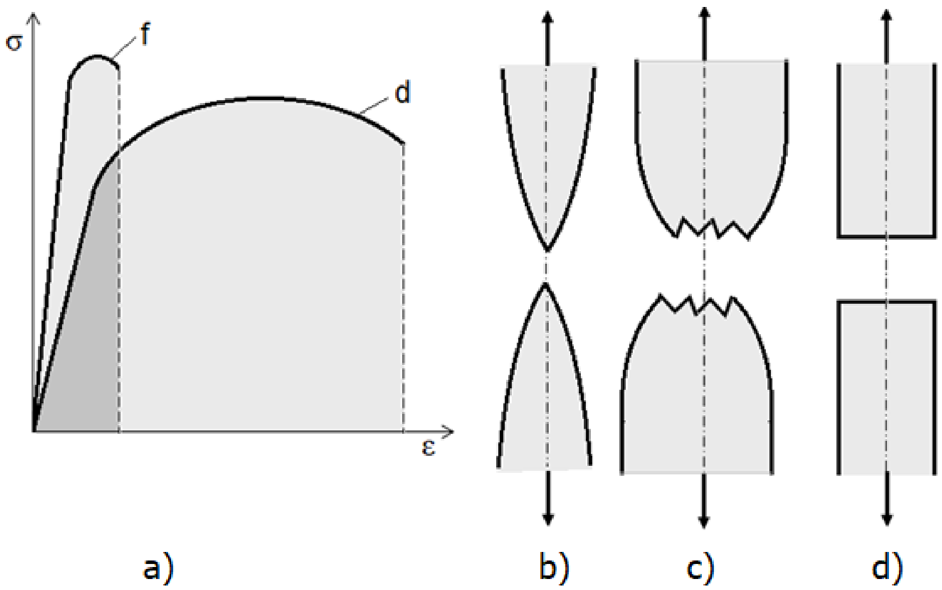


Fig. 3.2. Rupere ductilă și rupere fragilă: Diagrama caracteristică (a); zona de stricționare la o rupere foarte ductilă (b); rupere ductilă (c); rupere fragilă (d)

Se reamintește faptul că materialele cu comportament fragil rezistă mult mai bine la compresiune decât la tracțiune [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]. În figura 3.3. se prezintă diagrama caracteristică pentru încercarea la tracțiune (în cadranul 1, unde $\sigma > 0; \varepsilon > 0$) și respectiv la compresiune (în cadranul 3, unde $\sigma < 0; \varepsilon < 0$) pentru fontă cenușie. Ruperea la tracțiune se produce în punctul A, iar la compresiune în B. Tensiunea de rupere la tracțiune este σ_{rt}=152MPa iar cea de rupere la compresiune de σ_{rc}= -952MPa. Rezultă că tensiunea de rupere la compresiune în modul este de aproximativ 6,3 ori mai mare decât tensiunea de rupere la tracțiune $6{,}3\sigma_{LT} \approx |\sigma_{LC}|$ pentru fonta cenușie. În cazul unui comportament ductil se observă valori limită aproximativ egale în modul $\sigma_{LT} \approx |\sigma_{LC}|$.

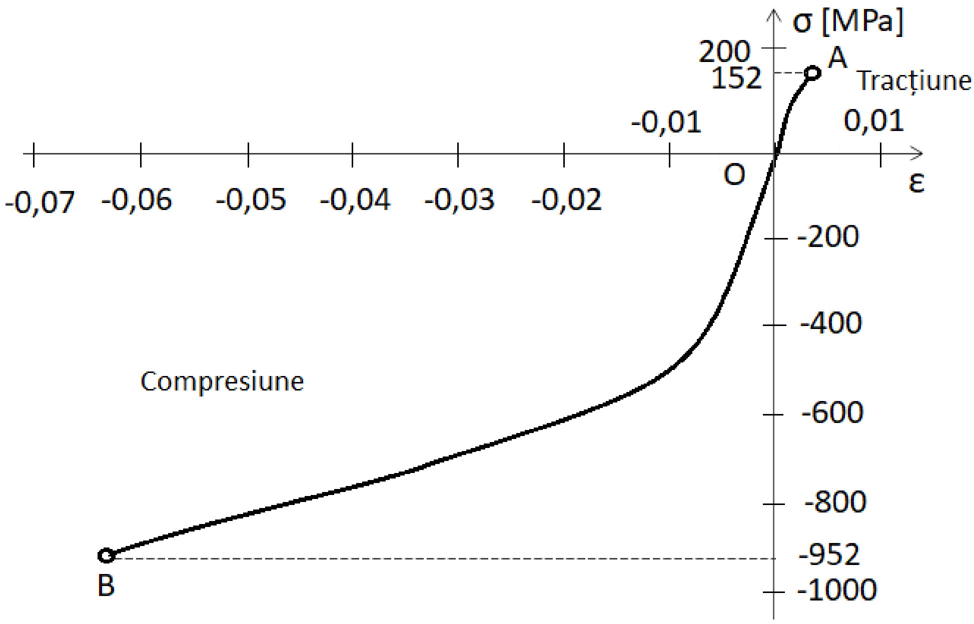


Fig. 3.3. Diagrama caracteristică la tracțiune și respectiv compresiune pentru fontă cenușie

3.2. ÎNCERCĂRI LA SOLICITĂRI COMPUSE

În [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001] s-au studiat numai solicitări simple. Prin aproximare se încadrează în această categorie și solicitările compuse la care o componentă a tensiunii este mult mai mare decât celelalte. În practica inginerească apar mai multe solicitări compuse decât solicitări simple și astfel sunt necesare teste la solicitări compuse și dezvoltări teoretice pe baza acestora. Testele la solicitări multiaxiale trebuie să îndeplinească cel puțin următoarele condiții:

- *Rapoartele dintre tensiunile principale propuse inițial trebuie menținute pe toată durata încercării. Aceste rapoarte trebuie să poată fi modificate în limite largi de la un test la altul;*
- Epruvetele utilizate pentru solicitări compuse trebuie să asigure o *stare cât mai uniformă de tensiuni în zona predeterminată de rupere* (fig. 3.4 și 3.5);
- Viteza de încărcare si eventual temperatura trebuie să poată fi modificate în intervale cât mai mari și să fie menținute constante pe durata încercărilor.

Testele la solicitări multiaxiale nu sunt ușor de realizat, din următoarele motive:

- Mașinile capabile să realizeze solicitări biaxiale sau triaxiale sunt sofisticate și scumpe. Din acest motiv se găsesc în număr redus. Se mai pot realiza încercări cu ajutorul unor dispozitive speciale atașate la mașinile universale de încercat. Acestea sunt de obicei proiectate și realizate de către utilizator. Principalele lor dezavantaje constau în faptul că, în general, nu pot realiza decât o gamă foarte restrânsă de rapoarte între tensiunile principale și nu pot menține aceste rapoarte riguros constante pe durata încercărilor;
- Pentru a realiza în zona de rupere o stare cât mai uniformă de tensiuni, epruvetele utilizate pentru solicitări multiaxiale pot avea forme complicate. Epruvetele pentru solicitări biaxiale, de exemplu, au o forma mai complicată decât cea prezentată în figura 3.4b și prezintă diverse racordări între brațe, o zonă centrală cu grosime mai

mică (variabila la periferie și constanta în centru), diverse canale și găuri în brațe etc. Realizarea epruvetei pentru solicitări triaxiale poate porni de la un cub cu latura de 100mm, în care se frezează canale înguste pe direcția laturilor, astfel înclinate încât să conțină bisectoarele unghiurilor drepte. În centru rămâne astfel un cub cu latura de cca. 10 mm, care reprezintă volumul de material testat (fig. 3.5). În același scop mai sunt utilizate epruvete tubulare cu presiune interioară, supuse la tracțiune uniaxială și/sau torsiune, epruvete cu concentratori de tensiuni etc.

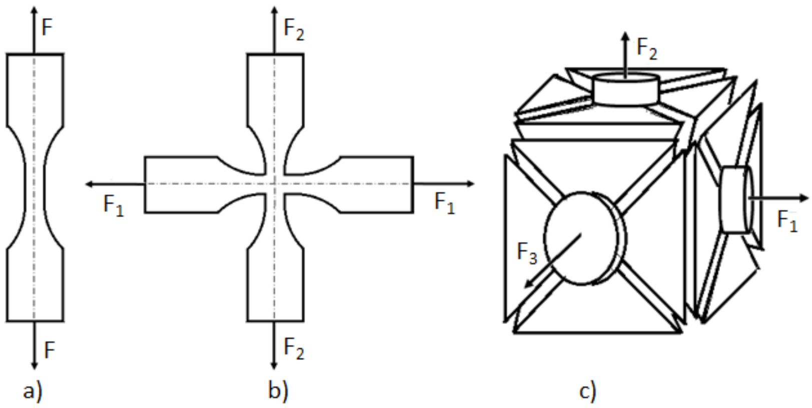


Fig. 3.4. Epruvete pentru solicitări uniaxiale (a), biaxiale (b) și triaxiale (c)

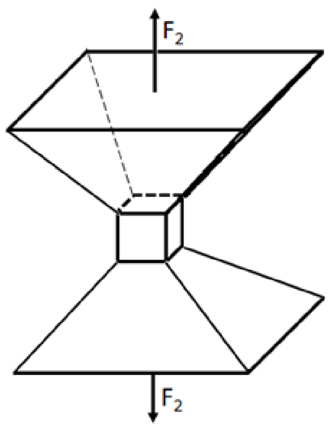


Fig. 3.5. Izolarea din epruveta pentru solicitări triaxiale a cubului central cu trunchiurile de piramidă utilizate pentru încărcare pe direcția forței F_2

3.3. TEORII DE STARE LIMITĂ

În cazul încercărilor la solicitări simple, tensiunea de curgere, reala sau convențională (*off-set*), poate fi determinată cu ușurință din diagrama caracteristică. În cazul încercărilor la solicitări biaxiale sau triaxiale se obțin două și respectiv trei diagrame, fiecare fiind influențată de toate încărcările aplicate epruvetei. Cum poate fi determinată în acest caz apariția curgerii? Experimental s-ar putea urmări, de exemplu, emisia acustică (ultrasonoră) din materialul epruvetei, care apare odată cu inițierea curgerii. Din păcate calculul la solicitări compuse nu este atât de intuitiv cum este cel utilizat în cazul solicitărilor simple. Solicitarea la tracțiune, efectuată pe un lot de epruvete din același material omogen și izotrop, furnizează diagrame caracteristice ușor diferite, cu o dispersie mică a datelor experimentale. La tracțiunea biaxială sau triaxială, dacă se schimbă rapoartele între tensiunile principale se obțin diagrame substanțial diferite. Cum există o infinitate de asemenea rapoarte, rezultă că la solicitări compuse ar fi necesar ca pentru fiecare stare de tensiuni particulară să se testeze un set de epruvete. Aceste teste ar furniza rezultate corecte, însă metoda nu este practică deoarece fiecare proiectant ar trebui să-și facă propriile seturi de teste. Pentru a evita acest inconvenient se apelează la teoriile de stare limită.

Prin *stare limită* se înțelege atingerea unei stări periculoase pentru materialul respectiv (curgerea sau ruperea). În cele ce urmează se va nota cu σ_{LT} tensiunea limită la tracțiune și cu σ_{LC} tensiunea limită la compresiune. Teoriile de stare limită sunt capabile să furnizeze rezultate suficient de precise pentru domenii mai largi. Desigur, rezultatele experimentale depind atât de starea de tensiuni cât și de materialul epruvetei, condițiile de mediu, viteza de încărcare etc. Din păcate nu există o teorie de stare limită care să fie universal valabilă. În prezent există peste 200 de teorii de stare limită și se propun mereu altele, însă fiecare teorie are un domeniu limitat de aplicare. Validarea oricărei teorii este făcută prin experiment. Aplicarea unei teorii pentru materiale sau pentru stări de tensiuni pentru care nu a fost testată poate genera un risc de cedare major. Proiectantul, indiferent dacă lucrează cu metode analitice sau numerice, este cel care trebuie să decidă care teorie este mai potrivita pentru materialul și starea de tensiuni din diverse organe de mașini sau componente structurale. În continuare vor fi prezentate teoriile clasice (în ordinea cronologică a formulării lor) precum și câteva teorii moderne. Desigur, această prezentare nu poate fi una exhaustivă.

3.3.1. Tensiune echivalentă

Apariția curgerii la tracțiune uniaxială poate fi constatată atunci când un anumit parametru caracteristic atinge o valoare critică. Acest parametru poate fi tensiunea normală σ, alungirea specifică ε (cca. 0,2%), energia potențială de deformare elastică U_1 (proporțională cu suprafața de sub curba caracteristică) sau o componentă a sa (energia modificatoare de formă U_{1F}), tensiunea tangențială τ (care este maximă la 45° față de direcția de tracționare) etc. Multe teorii de stare limita consideră, pe baza unui singur parametru dintre cei enumerați mai sus, că o stare de triaxială de tensiuni sau o stare biaxială de tensiuni este *echivalent de periculoasă* ca o stare de tensiuni uniaxială (tracțiune cu σ *echivalent*, notat σ_{ech}). În baza acestei concepții materialul cedează atunci când parametrul ales atinge o valoare critică. Altfel spus, aceste teorii presupun că între starea limită dintr-un material supus la solicitări compuse și cea de la solicitarea la tracțiune uniaxială există o funcție de legătură, pe care încearcă să o stabilească (fig. 3.6). Avantajul acestei abordări îl reprezintă faptul că solicitarea la tracțiune este uzuală și există baze mari de date privind încercarea la tracțiune a diferitelor materiale. Principalul dezavantaj constă în faptul că nu există o bază teoretică privind stabilirea acestei echivalențe. Cu alte cuvinte, nu există o abordare teoretică care să permită corelarea stării limită de tensiuni triaxiale sau biaxiale cu starea limită de tensiune uniaxială. Din acest motiv *teoriile de stare limită sunt relații empirice, care însă trebuie să fie în bună concordanță cu determinările experimentale*. Teoriile de stare limită stabilesc un domeniu închis (în spațiul σ-τ sau σ_1-σ_2), în general convex, care definește o zonă considerată sigură. *Pe conturul domeniului începe cedarea* (coeficientul de siguranță c=1), în exterior este zona periculoasă (c<1), iar la interior este zona sigură (c>1). Deoarece echivalența se stabilește cu starea de tensiuni de la tracțiune uniaxială, dimensionarea și verificarea se vor face la tracțiune

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a \tag{3.1}$$

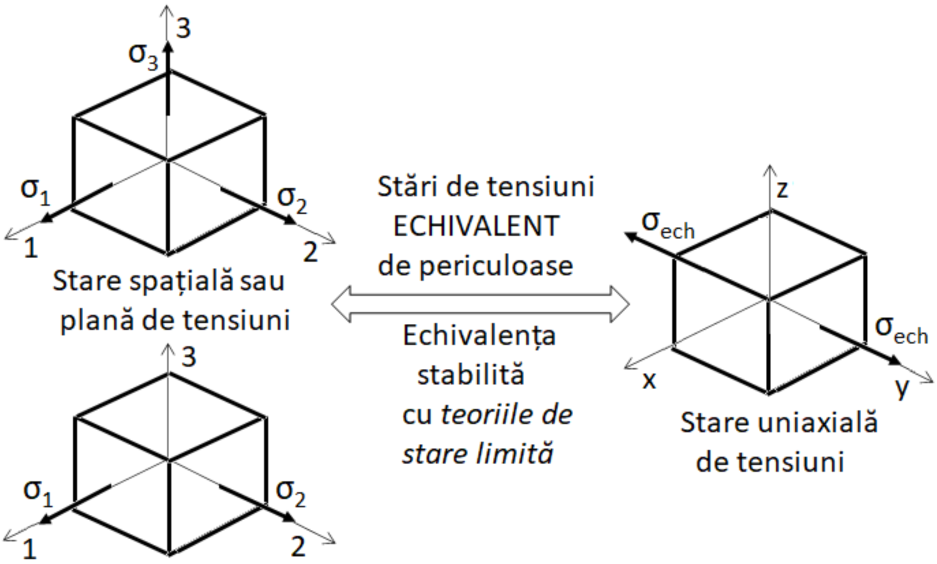


Fig. 3.6. Stări de tensiuni considerate echivalent de periculoase

3.3.2. Teorii clasice

Teoria tensiunii normale maxime σ_{max} (Rankine)

Această teorie, care se bazează pe monitorizarea tensiunii normale, a fost sugerată prima oară de către *Galilei* și a fost verificată de *Rankine*. Se admite că într-un punct al unui corp se atinge starea limită atunci când:

- tensiunea normală maximă pozitivă (σ_1>0) devine egală cu tensiunea limită la tracțiune uniaxială σ_{LT}

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 = \sigma_{LT} \tag{3.2}$$

- sau tensiunea normală minimă negativă (σ_{LC}<0) devine egală cu tensiunea limită la compresiune uniaxială σ_{LC}:

$$\sigma_{ech} = |\sigma_3| = |\sigma_{LC}| \tag{3.3}$$

Pentru starea plană de tensiuni în sistemul xOy se ține cont de (2.38) și se scrie

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3.4}$$

În figurile 3.7 și 3.8 se prezintă domeniul delimitat de condițiile (3.2) și (3.3) pentru ruperea ductilă și respectiv fragilă în stare plană de tensiuni. Materialul începe sa cedeze pe contur (c=1) și nu cedează în zona gri (c>1). În figura 3.7 s-a notat σ_L tensiunea limită la tracțiune uniaxială, care poate fi σ_c sau σ_r. Se observă că pătratul este simetric față de axele de referință iar în figura 3.8 el a suferit o translație din cadranul 1 către cadranul 3, pe direcția bisectoarei principale. Pentru starea triaxială de tensiuni domeniul limită al teoriei *Rankine* este un cub [Bia C., 1983]. În figurile 3.7 și 3.8 se prezintă domeniul delimitat de condițiile (3.2) și (3.3) pentru ruperea ductilă și respectiv fragilă în stare plană de tensiuni. Materialul începe sa cedeze pe contur (c=1) și nu cedează în zona gri (c>1). În figura 3.7 s-a notat σ_L tensiunea limită la tracțiune uniaxială, care poate fi σ_c sau σ_r. Se observă că în figura 3.7 pătratul este simetric față de axele de referință iar în figura 3.8 el a suferit o translație din cadranul 1 către cadranul 3, pe direcția diagonalei principale. Pentru starea triaxială de tensiuni domeniul limită al teoriei *Rankine* este un cub [Bia C., 1983].

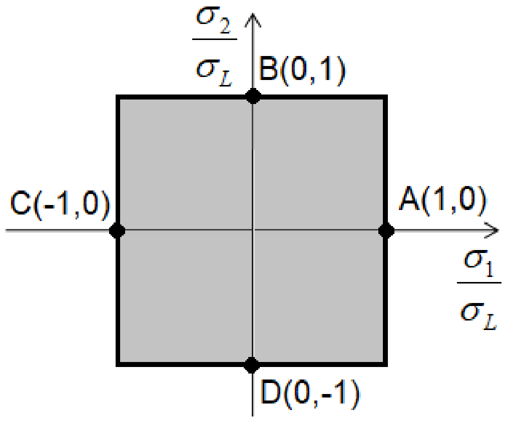


Fig. 3.7. Domeniul teoriei Rankine pentru rupere ductilă (pe contur c=1)

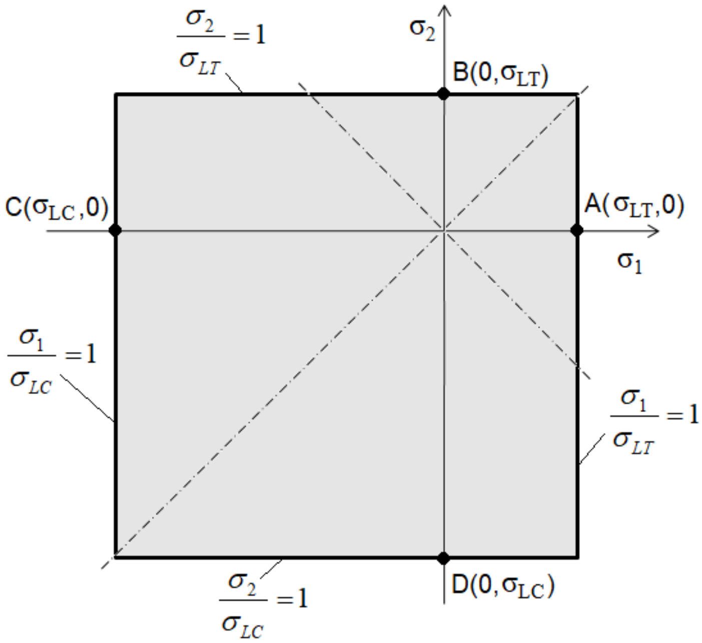


Fig. 3.8. Domeniul teoriei Rankine pentru rupere fragilă (pe contur c=1)

Pentru solicitarea la forfecare pură tensiunile principale sunt $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$ Conform teoriei *Rankine* materialul cedează când

$$\sigma_1 = |\sigma_2| = \tau_L = \sigma_L \tag{3.5}$$

Însă experimentele arată că multe materiale cedează la forfecare când se atinge $\tau_L \approx \sigma_L/2$ și astfel teoria eșuează pentru solicitarea la forfecare pură.

Teoria *Rankine* prezintă următoarele *deficiențe*:

- Neglijează două dintre tensiunile principale;
- Contrar previziunilor acestei teorii, materialele rezistă la tensiuni mult mari la compresiune hidrostatică, comparativ cu compresiunea uniaxială;
- Nu poate fi aplicată pentru forfecare pură.

Aceasta teorie se aplică în special pentru *ruperi fragile*. Poate fi utilizată împreună cu alte teorii: *Rankine* pentru cadranele 1 și 3, iar o altă teorie pentru cadranele 2 și 4.

Teoria alungirii specifice maxime ε_{max} (St. Venant)

Teoria, propusă și dezvoltată de către E. Mariotte și St. Venant, consideră alungirea specifică maximă drept criteriu pentru atingerea stării de tensiune limită.

Pentru starea spațială de tensiuni cu $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ se poate scrie

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_L \tag{3.6}$$

unde cu ε_L s-a notat lungirea specifică limită pentru tracțiune uniaxială.

Se egalează alungirile specifice pentru starea spațială de tensiuni din ecuațiile constitutive (2.79) și respectiv pentru tracțiune uniaxială

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \frac{\sigma_{ech}}{E} \tag{3.7}$$

Rezultă

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \tag{3.8}$$

Pentru o stare plană de tensiuni cu $\sigma_3 = 0$ relația (3.8) devine

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 \tag{3.9}$$

În sistemul xOy se exprimă σ_1 și σ_2 funcție de σ_x, σ_y, τ_{xy} și rezultă formula lui *Saint Venant*

$$\sigma_{ech} = \frac{1-\nu}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{3.10}$$

Conform acestei teorii, domeniul în care materialul nu cedează este delimitat de patru drepte

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_{ech}; \quad \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma_{ech}; \\ &\sigma_2 - \nu\sigma_1 = \sigma_{ech}; \quad \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \sigma_{ech} \end{aligned} \tag{3.11}$$

În figura 3.9 se prezintă acest domeniu, pentru comportament ductil, comparativ cu cel propus de teoria *Rankine*. Materialul începe sa cedeze pe conturul domeniului (c=1) iar la interiorul domeniului este zona sigură (c>1).

Pentru starea spațială de tensiuni domeniul este mărginit de o prismă oblică [Bia C., 1983].

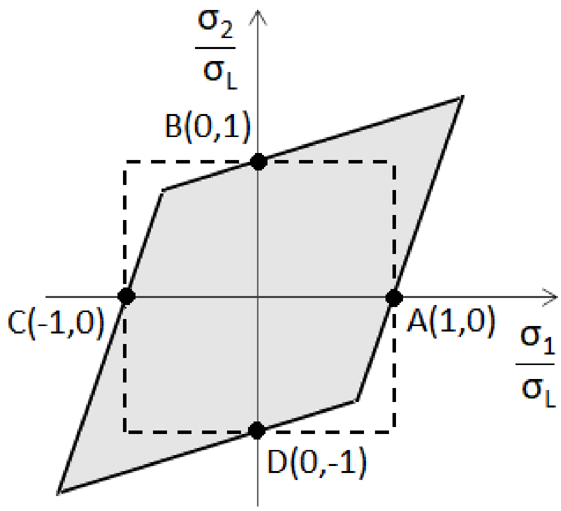


Fig. 3.9. Domeniile în care materialul nu cedează, conform teoriilor St. Venant (linie plină) și Rankine (linie întreruptă), pe contur c=1

Pentru solicitarea la forfecare pură ($\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$), din (3.9) rezultă

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 = (1+\nu)\tau \tag{3.12}$$

De unde, conform teoriei *St. Venant*, materialul cedează la forfecare pentru

$$\tau_L = \frac{\sigma_L}{1+\nu} \tag{3.13}$$

Pentru multe materiale $\nu \approx 0,3$ și cu această valoare din (3.13) se obține

$$\tau_L \approx 0,77\sigma_L \tag{3.14}$$

Teoria poate fi aplicată în cazul unor ruperi fragile ale materialelor de construcții (beton, cărămidă) solicitate la compresiune, cum ar fi cazul de cedare prezentat în figura 2.26e. De asemenea, teoria ar putea fi eventual aplicată la materiale pentru care condiția (3.14) este îndeplinită, cum ar fi cazul unor materiale compozite. În prezent această teorie este totuși puțin utilizată.

Teoria tensiunii tangențiale maxime τ_{max} (Tresca)

Teoria a fost propusa de *Coulomb* și a fost dezvoltată și verificată de *Tresca* și *Guest*. Ea admite drept criteriu de stare limită tensiunea tangențială maximă. Tensiunile tangențiale maxime pentru starea spațială și respectiv plană de tensiuni sunt date de (2.64). Pentru solicitarea la tracțiune uniaxială cu σ_{ech} tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{ech}}{2} \tag{3.15}$$

Egalând tensiunea tangențială maximă din (2.64) cu cea dată de (3.15) se obține pentru starea spațială de tensiuni

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{ech}}{2} \tag{3.16}$$

iar pentru starea plană de tensiuni cu $\sigma_3 = 0$:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{ech}}{2} \tag{3.17}$$

După simplificare rezultă, pentru starea spațială și respectiv plană de tensiuni (cu $\sigma_3 = 0$):

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_2 \tag{3.18}$$

Înlocuind tensiunile principale cu cele date de (2.38) se poate trece la sistemul de referință general xOy. Astfel, pentru starea plană de tensiuni se obține

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{3.19}$$

În figura 3.10 se prezintă domeniul de siguranță propus de către teoriile *Tresca* și *Rankine* pentru starea plană de tensiuni. În cadranele 2 și 4 domeniul este delimitat de două drepte inclinate având ecuațiile derivate din (3.18), marcate cu linie întreruptă în figura 3.10:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_L} - \frac{\sigma_2}{\sigma_L} = 1; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_L} - \frac{\sigma_1}{\sigma_L} = 1 \tag{3.20}$$

Pentru cadranele 1 și 3 teoria *Tresca* adoptă modelul *Rankine* și rezultă astfel un domeniu hexagonal neregulat.

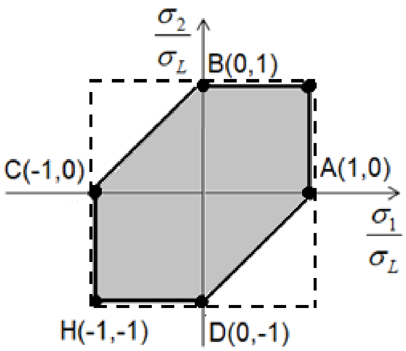


Fig. 3.10. Domeniile în care materialul nu cedează, conform teoriilor Tresca (linie plină) și Rankine (linie întreruptă); pe contur c=1

Pentru cazul stării spațiale de tensiuni suprafața de cedare este suprafața laterală a unei prisme hexagonale regulate a cărei axă de simetrie este egal depărtată de cele trei axe de coordonate σ_1, σ_2 și σ_3 (*axa hidrostatică*). Secționând prisma cu un plan perpendicular pe axa hidrostatică (*planul π*) se obține un hexagon regulat (fig. 3.11), iar la secționarea cu un plan de referință se obține un hexagon neregulat, ca cel din figura 3.10. Aceasta este reprezentarea *Becker-Westergaard*. In punctele aflate pe suprafața laterală a prismei începe cedarea materialului (c=1) iar la interiorul prismei este zona sigură, în care materialul nu cedează (c>1).

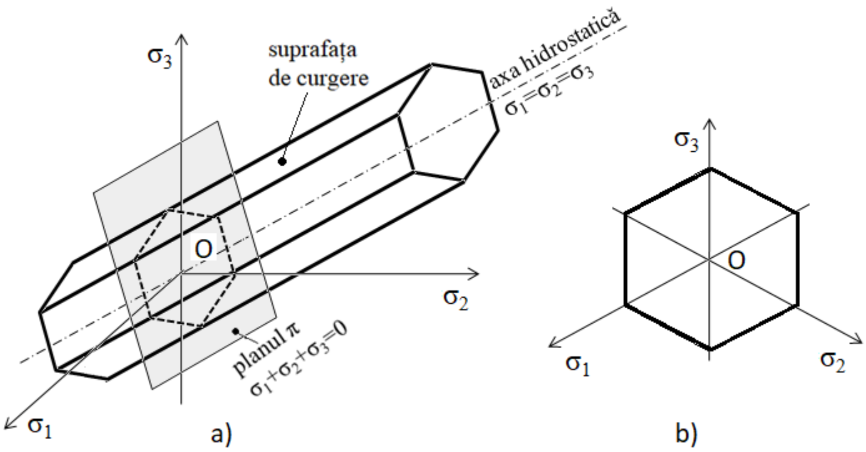


Fig. 3.11. Reprezentarea Becker-Westergaard a suprafeței de cedare Tresca (a) și secțiunea cu planul π, perpendicular pe axa hidrostatică (b)

În cazul solicitării la forfecare pură, din (3.15) rezultă

$$\tau_L = \frac{\sigma_L}{2} \tag{3.21}$$

Această relație a fost verificată experimental, de către *Bauschinger* și alții, pe mai multe materiale metalice cu cedare ductilă. S-a demonstrat astfel că teoria *Tresca* poate fi aplicată pentru cedarea ductilă. Pentru întregul domeniu materialul nu cedează atunci când

$$|\sigma_1| < \sigma_c; \quad |\sigma_2| < \sigma_c; \quad |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_c \tag{3.22}$$

Sigur că la proiectare se va ține cont de coeficientul de siguranță adoptat.

Un dezavantaj al teoriei constă în neglijarea unei tensiuni principale în cazul stării spațiale de tensiuni. Altă deficiență importantă o reprezintă faptul ca în cazul solicitărilor echitriaxială și echibiaxială teoria prezice în mod eronat că nu se produce ruperea, indiferent de valoarea tensiunilor principale, deoarece $\sigma_{ech} = 0$. Teoria nu poate fi utilizată pentru aceste stări de tensiuni.

Teoria energiei potențiale de deformare elastică maximă U_{1max} (Beltrami)

Teoria a fot propusă de *E. Beltrami* și la dezvoltarea ei au contribuit *Haigh* și alții. Ea presupune că pentru un material dat energia potențială specifică de deformare elastică U_1 este aceeași, indiferent de starea de tensiuni. Pentru o solicitare compusă se ajunge la starea limită de tensiuni într-un punct atunci când energia U_1 atinge valoarea sa limită pentru solicitarea la tracțiune uniaxială. Pentru starea spațială de tensiuni energia U_1 este dată de (2.100) iar pentru solicitarea la tracțiune uniaxială în tabelul 2.12. Egalând tensiunea de la solicitarea la tracțiune pentru $\sigma_1 = \sigma_{ech}$ cu cea pentru stare spațială de tensiuni se obține succesiv

$$\frac{\sigma_{ech}^2}{2E} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{3.23}$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)} \tag{3.24}$$

Pentru starea plană de tensiuni (cu $\sigma_3 = 0$) tensiunea echivalentă devine

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2} \tag{3.25}$$

În reprezentarea *Becker-Westergaard* suprafața de cedare pentru starea spațială de tensiuni este cea a unui elipsoid de rotație în jurul axei hidrostatice [Bia C., 1983]. Pentru o stare plană de tensiuni (cu $\sigma_3 = 0$) curba limită a domeniului de siguranță este

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_L^2 \tag{3.26}$$

Aceasta este o elipsă cu axa mare orientată pe direcția bisectoarei principale (prin cadranele 1 și 3). Rotind sistemul de referință astfel încât sa coincidă cu direcția bisectoarelor se pot determina semiaxele elipsei [Tripa M., 1967]:

$$\frac{\sigma_L}{\sqrt{1-\nu}}; \quad \frac{\sigma_L}{\sqrt{1+\nu}} \tag{3.27}$$

În figura 3.12 se prezintă, în coordonate σ_1/σ_L, σ_2/σ_L , elipsa *Beltrami-Haigh* și hexagonul *Tresca*. Se observă că ambele domenii au aceleași intersecții cu axele. Însă pe direcția diagonalei principale dimensiunea elipsei este mai mică decât a hexagonului, în timp ce pe direcția diagonalei secundare dimensiunea elipsei este mai mare.

Pentru solicitarea la forfecare pură se înlocuiește în (3.25) $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$ și rezultă

$$\tau_L = \frac{\sigma_L}{\sqrt{2(1+\nu)}} \tag{3.28}$$

Pentru $\nu = 0,3$, din (3.28) se obține

$$\tau_L = 0,62\sigma_L \tag{3.29}$$

Teoria *Beltrami-Haigh* este destinată cedării ductile a unor materiale metalice precum oțel cu un conținut redus de C, aliaje de aluminiu etc. În prezent această teorie este mai puțin utilizată.

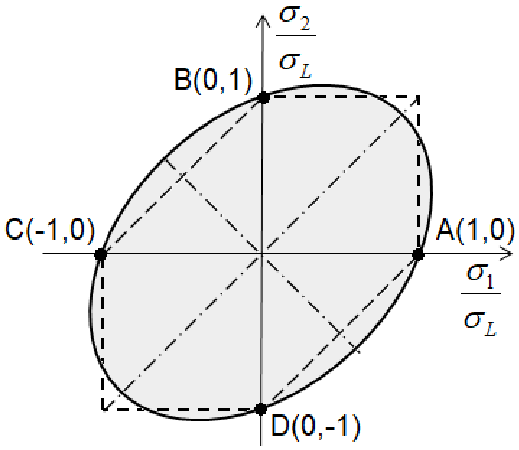


Fig. 3.12. Domeniul teoriei Beltrami (linie plină) și respectiv Tresca (linie întreruptă); pe conturul elipsei începe cedarea materialului (c=1)

Teoria energiei potențiale de deformare elastică modificatoare de formă $U_{1F.max}$ (von Mises)

Teoria a fost propusă de *Huber* și dezvoltata de *Richard von Mises* și *Henkey*. Pentru simplificare va fi numită în continuare *Teoria energiei modificatoare de formă* sau *Teoria von Mises*. Ea se bazează pe ipoteza că pentru un material dat energia potențială specifică de deformare elastică modificatoare de formă U_{1F} este aceeași, indiferent de starea de tensiuni. Spre deosebire de teoria *Beltrami*, teoria *von Mises* consideră numai o parte din energia potențială de deformare și anume fracțiunea care produce modificarea formei. Pentru starea spațială, plană și uniaxială de tensiuni energia U_{1F} este dată în tabelul 2.12. Pentru starea uniaxială de tensiuni cu $\sigma_1 = \sigma_{ech}$ energia modificatoare de formă devine

$$U_{1F} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_{ech}^2 \tag{3.30}$$

Egalând energia potențială modificatoare de formă dată de (3.30) cu energia pentru starea spațială de tensiuni din tabelul 2.12 se obține

$$\frac{1+\nu}{3E}\sigma_{ech}^2 = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{3.31}$$

de unde rezultă

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)} \tag{3.32}$$

sau

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2} \tag{3.33}$$

Pentru starea plană de tensiuni din spațiul σ_1-σ_2 relația (3.32) devine

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \tag{3.34}$$

Înlocuind tensiunile principale cu cele din (2.38) se obține tensiunea echivalentă pentru sistemul de referință general xOy, starea spațială și respectiv plană de tensiuni

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} \tag{3.35}$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Domeniul de siguranță al teoriei *von Mises* îl reprezintă elipsa rotită la 45°

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_L^2 \tag{3.36}$$

Rotind sistemul de referință astfel încât să coincidă cu direcția bisectoarelor se pot determina semiaxele elipsei [Tripa M., 1967]:

$$\sqrt{2}\sigma_L; \quad \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_L \tag{3.37}$$

În figura 3.13 se prezinta domeniul de siguranță *von Mises* (marcat cu gri) în comparație cu domeniile *Rankine* și *Tresca*. Se observă că cele trei domenii au comune punctele de intersecție cu axele și cu bisectoarea principală.

Pentru forfecare pură se înlocuiește în (3.36) $\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = -\tau$ și se obține

$$\tau_L = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_L \approx 0,577\sigma_L \tag{3.38}$$

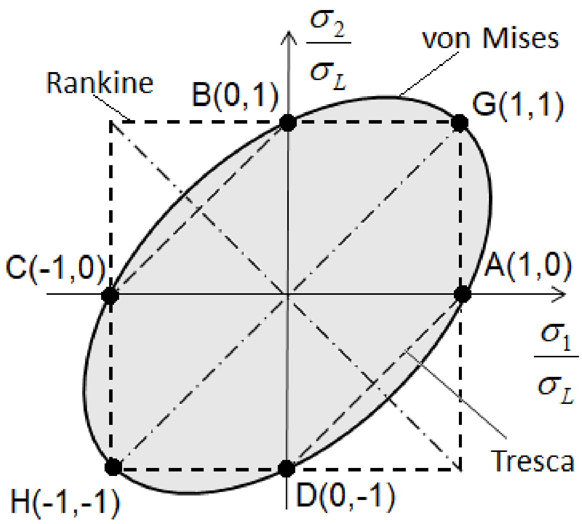


Fig. 3.13. Domeniul teoriei von Mises (linie plină), respectiv Rankine și Tresca (linie întreruptă); pe conturul elipsei începe cedarea materialului (c=1)

Valoarea tensiunii tangențiale limită dată de (3.38) este confirmată de determinările experimentale efectuate pe mai multe materiale metalice cu cedare ductilă la solicitări statice și la temperatura mediului.

În reprezentarea *Becker-Westergaard* suprafața de cedare a teoriei *von Mises* este suprafața laterală a unui cilindru având drept axă, la fel ca prisma hexagonală *Tresca*, axa hidrostatică. Secționând cilindrul cu un plan perpendicular pe axa hidrostatică (*planul* π) se obține un cerc (fig. 3.14). Secționarea cilindrului cu un plan de referință dă o elipsă rotită la 45°, similară cu cea din figura 3.13.

Teoria *von Mises* este probabil cea mai utilizată pentru cazul cedărilor ductile. Ea este în bună concordanță cu rezultatele experimentale obținute pentru mai multe materiale metalice (oțel cu un conținut redus de C, aliaje de Al, Cu etc.). În plus prezintă avantajul că limita sa de cedare este o curbă continuă și astfel se poate lucra cu o singură ecuație. Cu toate acestea, așa cum se va arăta mai jos, are un domeniu limitat de utilizare, la fel ca toate celelalte teorii.

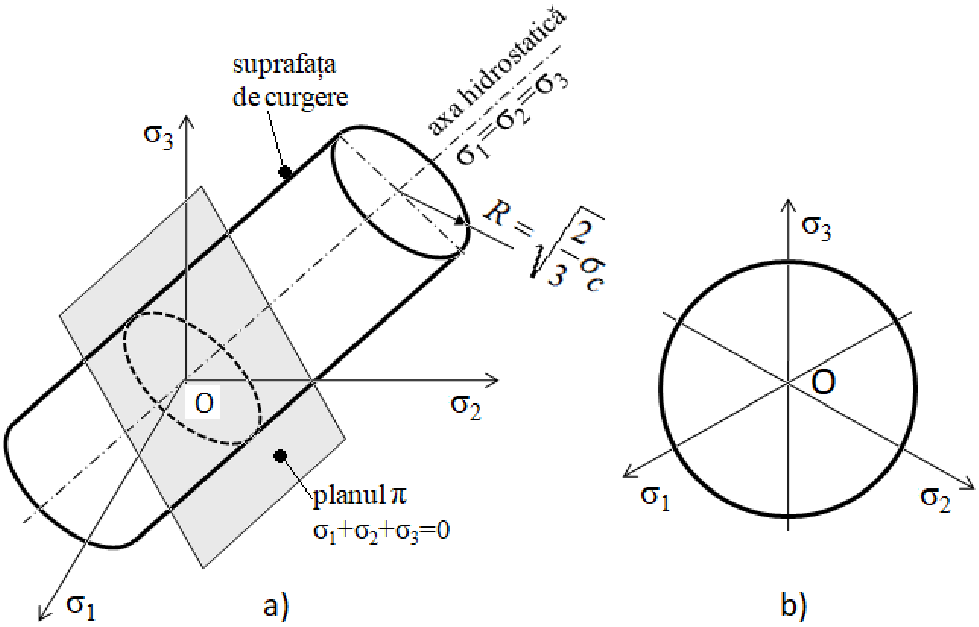


Fig. 3.14. Reprezentarea Becker-Westergaard a suprafeței de cedare von Mises (a) și secțiunea cu planul π, perpendicular pe axa hidrostatică (b)

Teoria Mohr-Coulomb

Aceasta teorie are la bază un concept diferit față de teoriile prezentate mai sus. Ea nu consideră o echivalență între două stări de tensiuni, ci se bazează cercurile lui *Mohr* pentru diferite stări de tensiuni limită în care începe să se producă cedarea materialului. În figura 3.15 sunt mai multe cercuri *Mohr* pentru diverse stări limită de tensiuni. În general se observă o creștere a diametrului cercurilor la trecerea de la tracțiunea biaxială sau triaxială la compresiune. *Christian Otto Mohr* postulează că există o înfășurătoarea a tuturor cercurilor de stare limită și cedările ar urma să se producă pentru o combinație dintre tensiunile normare σ și tangențiale τ dată de coordonatele punctului in care cercul pentru starea limită de tensiuni este tangent la înfășurătoare. *Coulomb* a fost primul care a observat că un material cedează la o anumită combinație între tensiunile normale și cele tangențiale. Ecuația înfășurătorii cercurilor de stare limită (numită și *curbă intrinsecă*) poate fi determinată pentru un număr finit, dar suficient de mare de cercuri de stare limită, trasate pe baza datelor experimentale. Odată cunoscută ecuația înfășurătorii, se poate afirma că o stare oarecare de tensiuni va fi una limită dacă cercul lui *Mohr* care ii corespunde este tangent la aceasta, iar dacă intersectează curba intrinsecă, atunci materialul cedează. Pentru o stare de tensiuni oarecare se poate prezice la ce combinație σ-τ va ceda materialul. Știind unghiul 2α (fig. 3.15) s-ar putea prezice chiar și ce unghi face suprafața de rupere cu axa epruvetei, însă fără a putea generaliza. Astfel, în cazul încercării la torsiune secțiunea de rupere poate fi la 90° sau la 45°, funcție de natura cedării (ductilă sau fragilă), după cum se vede în fig. 2.25, deși cercul limită pentru torsiune este unul singur, cel cu centrul in origine.

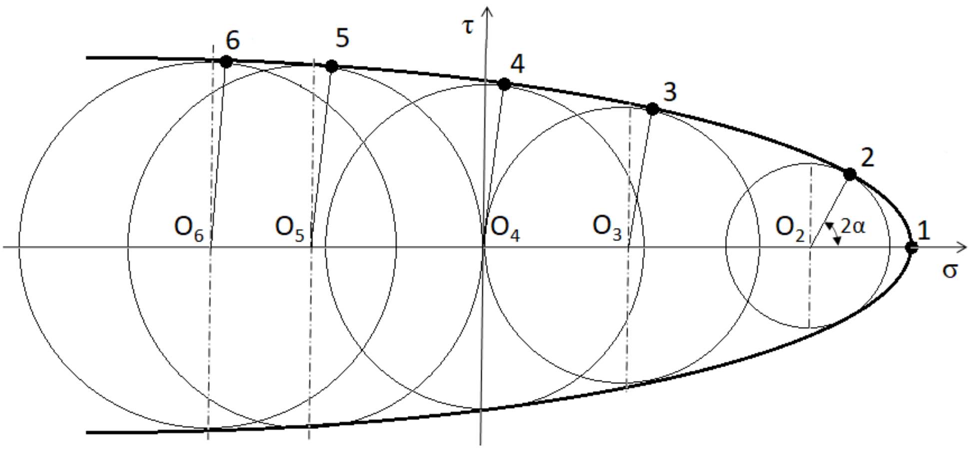


Fig. 3.15. Trasarea înfășurătorii cercurilor de stare limită: cercul Mohr pentru tracțiune echibiaxială degenerează în punctul 1; cercul cu centrul în O_2 este pentru tracțiune biaxială; O_3 - tracțiune uniaxială; O_4 - forfecare; O_5 – compresiune uniaxială; O_6 - compresiune biaxială

Conform teoriei *Mohr*, pe curba intrinsecă materialul începe să cedeze (c=1). La interiorul curbei se află zona sigură iar la exterior cea în care materialul cedează (c<1). La interiorul curbei intrinseci pot fi trasate alte curbe pentru coeficienți de siguranță constanți. Cu cât punctele din zona sigură sunt mai îndepărtate de curba intrinsecă, cu atât coeficientul de siguranță este mai mare, așa cum se arată în figura 3.16.

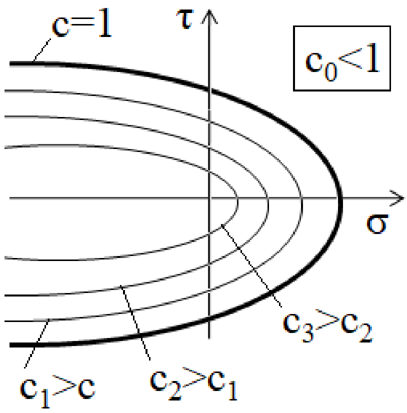


Fig. 3.16. Materialul începe să cedeze pe curba intrinsecă (c=1); la interiorul curbei intrinseci se află zona sigură, în care materialul nu cedează

Se pune întrebarea dacă domeniul delimitat de curba intrinsecă este unul închis, așa cum au fost domeniile celorlalte teorii, delimitate de curbele de stare limită. În capitolul 2 s-a arătat că pentru starea echitriaxială de tensiuni (tracțiune sau compresiune) cercurile lui *Mohr* degenerează în puncte. La tracțiunea echitriaxială ruperea este întotdeauna fragilă [Christensen R., 1967]. Pentru compresiunea echitriaxială comportamentul materialelor este întotdeauna ductil, dar nu s-a putut realiza încă la o presiune suficient de mare pentru a produce fisurarea [Dieter G., 1988.]. Rezultă că punctul de cedare în care degenerează cercurile lui *Mohr* la compresiune echitriaxială se află pe semiaxa negativă σ, dar la o distanță foarte mare de origine. Deoarece domeniul mărginit de curba intrinsecă trebuie să treacă prin aceste două puncte de pe axa Oσ, însemnă că el este totuși unul închis.

Pentru cazul stărilor triaxiale de tensiuni este clar ca înfășurătoarea nu poate fi tangentă decât la cercul *Mohr* cel mai mare, cu diametrul $\sigma_1 - \sigma_3$ numit și *cerc determinant*. Astfel influența tensiunii principale intermediare σ_2 este neglijată, ceea ce constituie o deficiență a teoriei. Cu toate acestea, experiențele arată că influența tensiunii principale intermediare este limitată. Pentru fontă [Ponomariov S.D., 1960] apreciază că eroarea introdusă prin neglijarea lui σ_2 nu depășește 15%, însă mai sunt necesare cercetări în domeniu. Alți cercetători consideră că această eroare poate atinge chiar 15÷33% [Yu M-H, 2018].

Un important dezavantaj al acestei teorii o reprezintă dificultatea determinării curbei intrinseci, datorită volumului mare de date experimentale necesare, obținute pentru o gamă largă de stări de tensiuni. Pentru simplificare, *Ludwig Prandtl* a propus aproximarea unor porțiuni din curba intrinsecă cu semidrepte. Această aproximare a condus la o utilizare pe scară largă a teoriei *Mohr-Coulomb*. În figura 3.17 se prezintă înlocuirea porțiunii de înfășurătoare dintre stările de tensiuni de tracțiune și respectiv compresiune uniaxială cu segmente din dreptele tangente la cele două cercuri de stare limită. În acest caz sunt necesare numai două tipuri de experimente pentru a determina cercurile limită: la tracțiune și respectiv compresiune uniaxială.

În figura 3.17 s-a mai trasat (cu linie întreruptă) un cerc pentru starea limită de tensiuni cu tensiunile principale σ_1, σ_2. Segmentele de dreaptă [O_1B], [O_2C] și [O_3D] unesc centrele cercurilor cu punctele de tangență ale celor două drepte iar dreptele O_1C' și BC sunt paralele. Din asemănarea triunghiurilor O_1O_3D' și O_1O_2C' rezultă

$$\frac{[O_3D']}{[O_2C']}=\frac{[O_1O_3]}{[O_1O_2]}\Rightarrow\frac{[O_3D]-[O_1B]}{[O_2C]-[O_1B]}=\frac{[OO_1]-[OO_3]}{[OO_1]+[OO_2]} \tag{3.39}$$

Înlocuind mărimea segmentelor cu tensiunile din figura 3.17 se obține

$$\frac{(\sigma_1-\sigma_2)-\sigma_{LT}}{|\sigma_{LC}|-\sigma_{LT}}=\frac{\sigma_{LT}-(\sigma_1-\sigma_2)}{\sigma_{LT}+|\sigma_{LC}|} \tag{3.40}$$

de unde rezultă

$$\sigma_1-\frac{\sigma_{LT}}{|\sigma_{LC}|}\sigma_2=\sigma_{LT} \tag{3.41}$$

Notând raportul constant

$$k=\frac{\sigma_{LT}}{|\sigma_{LC}|} \tag{3.42}$$

și în membrul drept $\sigma_{LT}=\sigma_{ech}$, rezultă relația lui *Mohr-Coulomb* pentru stare plană de tensiuni (cu $\sigma_3=0$):

$$\sigma_{ech}=\sigma_1-k\sigma_2 \tag{3.43}$$

Pentru starea triaxială de tensiuni se neglijează influența tensiunii intermediare σ_2 și (3.43) devine

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - k\sigma_3 \tag{3.44}$$

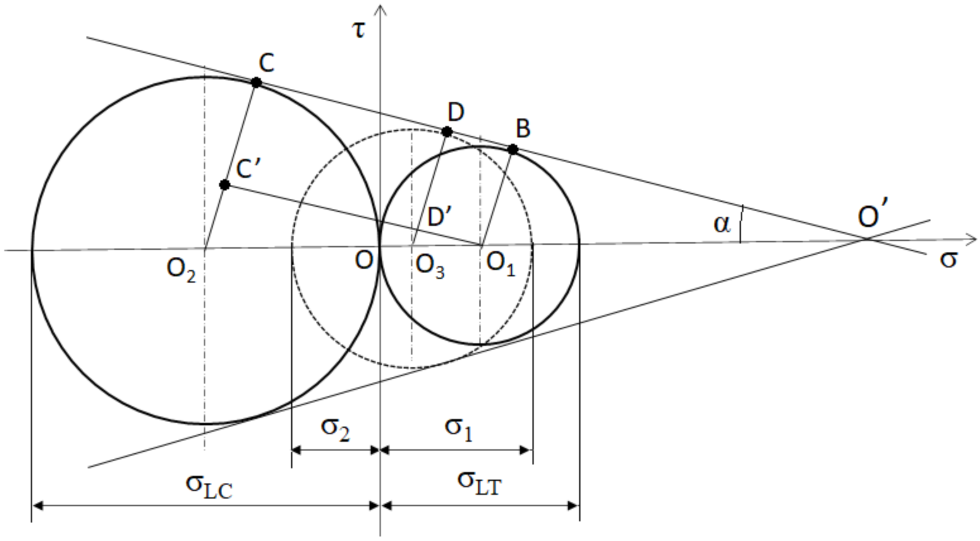


Fig. 3.17. Teoria Mohr-Coulomb: înlocuirea unei porțiuni de curbă intrinsecă cu segmente din dreptele tangente la cercurile limită pentru tracțiune și respectiv compresiune

Pentru cazul particular în care

$$\sigma_{LT} = |\sigma_{LT}| \Rightarrow k = 1 \tag{3.45}$$

Această situație se întâlnește la cedarea ductilă, când relația (3.43) devine (3.18) și teoria *Mohr-Coulomb* degenerează în teoria *Tresca*, așa cum se arată în fig. 3.18. Se observă că cercurile limită la tracțiune și compresiune uniaxială au același diametru, deoarece în acest caz tensiunile limită sunt cele de curgere la tracțiune și respectiv compresiune și sunt aproximativ egale între ele $\sigma_{LT} = \sigma_{ct} = |\sigma_{LC}| = |\sigma_{cc}| = \sigma_c$. Dreptele tangente la cele două cercuri, care înlocuiesc curba intrinsecă, devin astfel paralele.

Se observă că teoria *Mohr-Coulomb* poate fi aplicată atât pentru cedarea fragilă cât și pentru cea ductilă, caz în care degenerează în teoria *Tresca* (fig. 3.18).

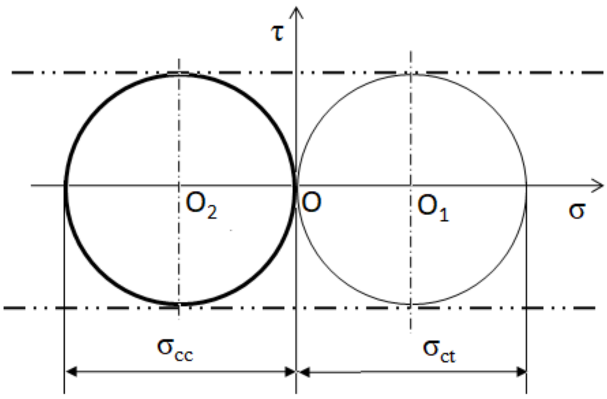


Fig. 3.18. Ilustrarea teoriei Mohr-Coulomb pentru cedarea ductilă ($\sigma_{ct}=\sigma_{cc}=\sigma_c$)

În spațiul σ_1-σ_2 ecuația (3.43) reprezintă o dreaptă. La deducerea ei s-au folosit cercurile *Mohr* pentru starea limită la tracțiune și compresiune. În spațiul $\sigma_1-\sigma_2$ aceste stări de tensiuni se găsesc în cadranele 2 și 4. Pentru cadranele 1 și 3 adoptă teoria *Rankine*. Astfel domeniul de siguranță al teoriei *Mohr-Coulomb* devine un hexagon neregulat (fig. 3.19).

În figura 3.20 se arată reprezentarea *Backer-Westergaard* a ecuației (3.44), considerată pentru perechi succesive de tensiuni principale. Suprafața de cedare *Mohr-Coulomb* este suprafața laterală a unei piramide hexagonale, cu axa hidrostatică. La interiorul piramidei se află domeniul de siguranță (c>1).

Pentru solicitarea la forfecare pură se înlocuiește în (3.43) $\sigma_1=\tau_L;\sigma_2=-\tau_L;\sigma_{ech}=\sigma_L$ și rezultă

$$\tau_L=\frac{\sigma_L}{1+k} \tag{3.46}$$

Pentru cedarea ductilă $k=1$ și se obține $\tau_L=\sigma_L/2$, la fel ca la teoria *Tresca*.

În spațiul σ-τ ecuația dreptelor tangente la cercuri (fig. 3.17) poate fi scrisă astfel

$$\tau=\sigma\tan\alpha+c \tag{3.47}$$

unde $\tan\alpha$ este panta dreptei, α este *unghiul de frecare internă* iar coeficientul *c* se numește *coeziune*.

Pentru $\alpha = 0°$ teoria *Mohr-Coulomb* degenerează în teoria *Tresca* iar pentru $\alpha = 90°$ se reduce la teoria *Rankine*. Ecuațiile (2.55) pot fi rescrise funcție de unghiul α (complementul lui θ) și expresia teoriei *Mohr-Coulomb* mai poate fi scrisă

$$\tau_m = \sigma_m \sin\alpha + c \cdot \cos\alpha \tag{3.48}$$

unde

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{3.49}$$

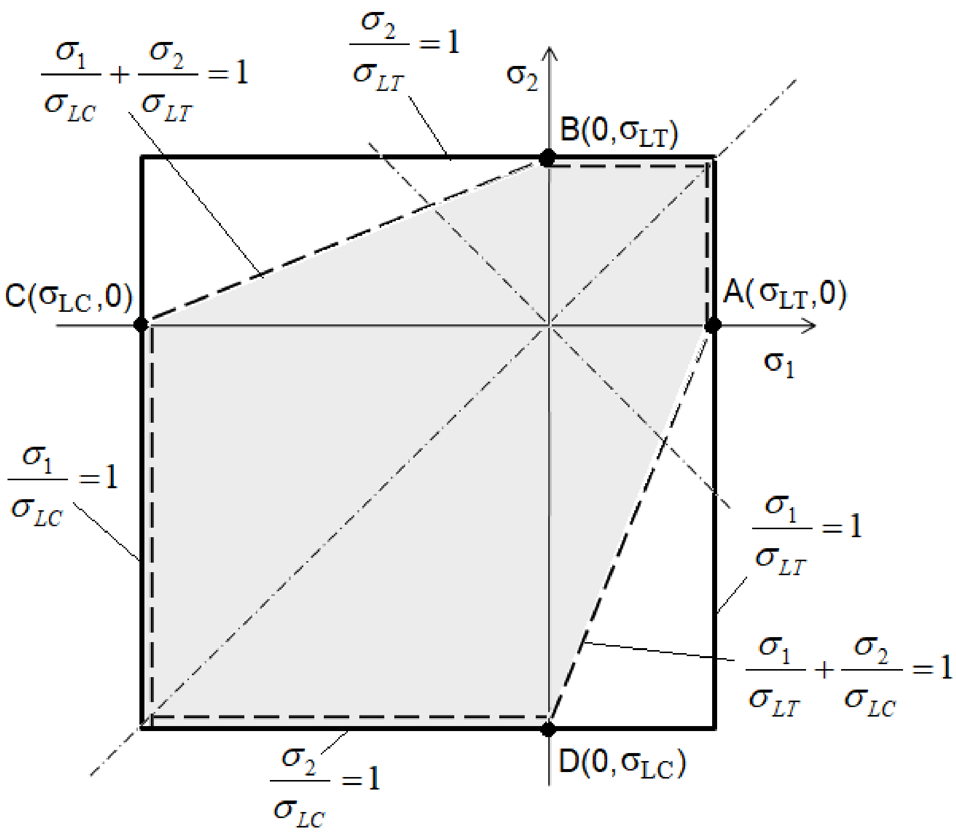


Fig. 3.19. Domeniul de siguranță al teoriei Mohr-Coulomb (delimitat cu linie întreruptă, c=1) și domeniul Rankine (linie plină)

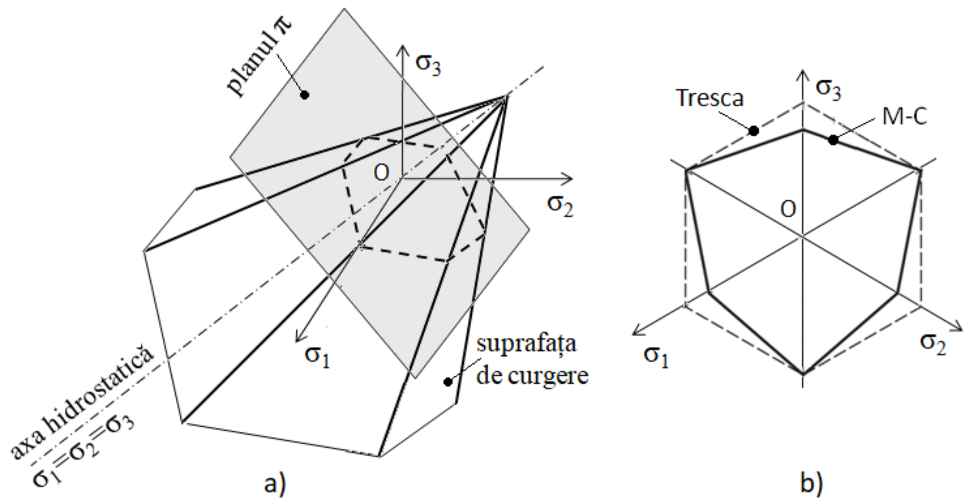


Fig. 3.20. Reprezentarea Becker-Westergaard a suprafeței de cedare Mohr-Coulomb (a) și secțiunea cu planul π, perpendicular pe axa hidrostatică (b)

Validarea experimentală a teoriilor de stare limită

Așa cum s-a arătat mai sus, toate teoriile de stare limită trebuie sa aibă o solidă confirmare experimentală pentru a fi acceptate. În continuare se vor prezenta câteva experimente ale căror rezultate vor fi comparate cu predicțiile date de diferite teorii de stare limită.

În figura 3.21 se prezintă rezultatele testelor efectuate de *Taylor* și *Quinney* pe epruvete din oțel ductil, aluminiu și cupru, supuse la solicitări compuse, comparativ cu predicțiile teoriilor *Tresca* și *von Mises*. Se observă că teoria *von Mises* concordă mult mai bine cu rezultatele experimentale. Valorile tensiunii tangențiale de curgere funcție de cea normală sunt de asemenea mai bine prezise de teoria *von Mises*, așa cum se poate constata din relațiile (3.21), (3.38) și figura 3.21.

În figura 3.22 sunt prezentate rezultatele experimentale obținute pentru unele oțeluri, aliaje de aluminiu și fontă cenușie, comparativ cu domeniile de siguranță ale teoriilor *Rankine*, *Tresca* și *von Mises*. Se constată din nou că teoria *von Mises* modelează mai bine cedarea ductilă iar teoria *Rankine* cedarea fragilă a fontei cenușii.

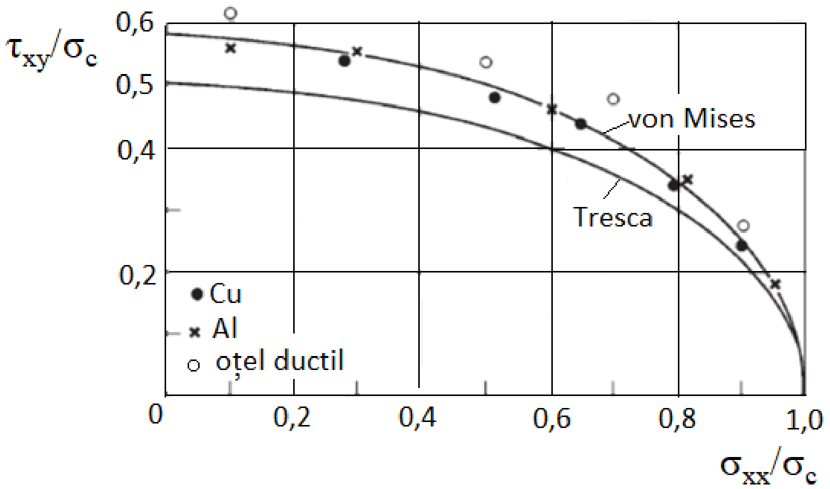


Fig. 3.21. Predicțiile teoriilor Tresca și von Mises comparativ cu rezultate experimentale pentru unele materiale cu cedări ductile [Taylor G.I., Quinney H., 1931]

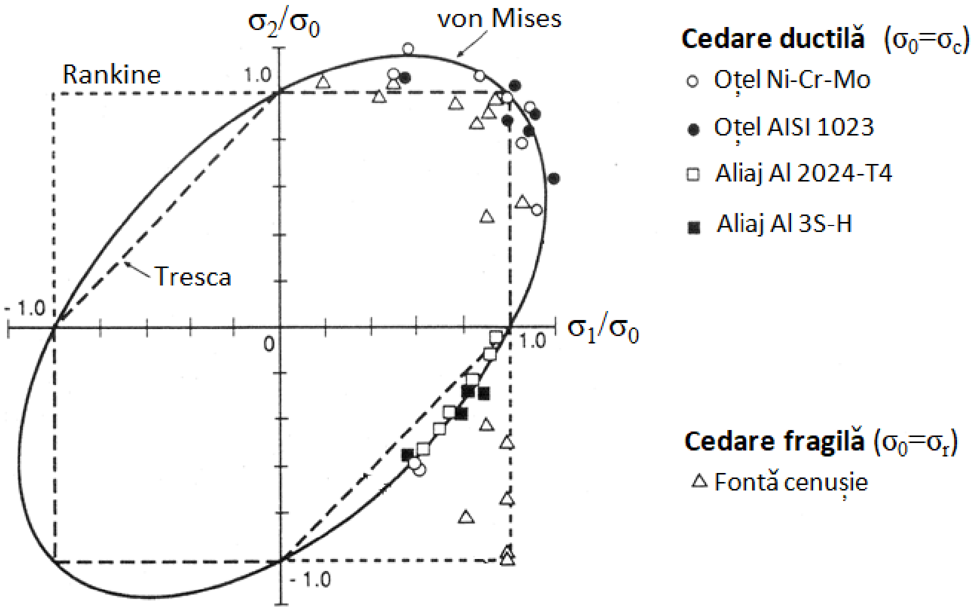


Fig. 3.22. Rezultate experimentale pentru unele materiale cu cedări ductile și fragile, comparativ cu domeniile de siguranță date de teoriile Rankine, Tresca și von Mises [Dowling N.E., 1999]

În figura 3.23 se prezintă rezultatele testelor la solicitări compuse efectuate pe epruvete din materiale cu cedări ductile și fragile, comparativ cu domeniile de siguranță ale tuturor teoriilor prezentate mai sus, cu excepția teoriei *Mohr-Coulomb*. Se constată din nou că teoria *von Mises* modelează mai bine cedarea ductilă iar teoria *Rankine* pe cea fragilă.

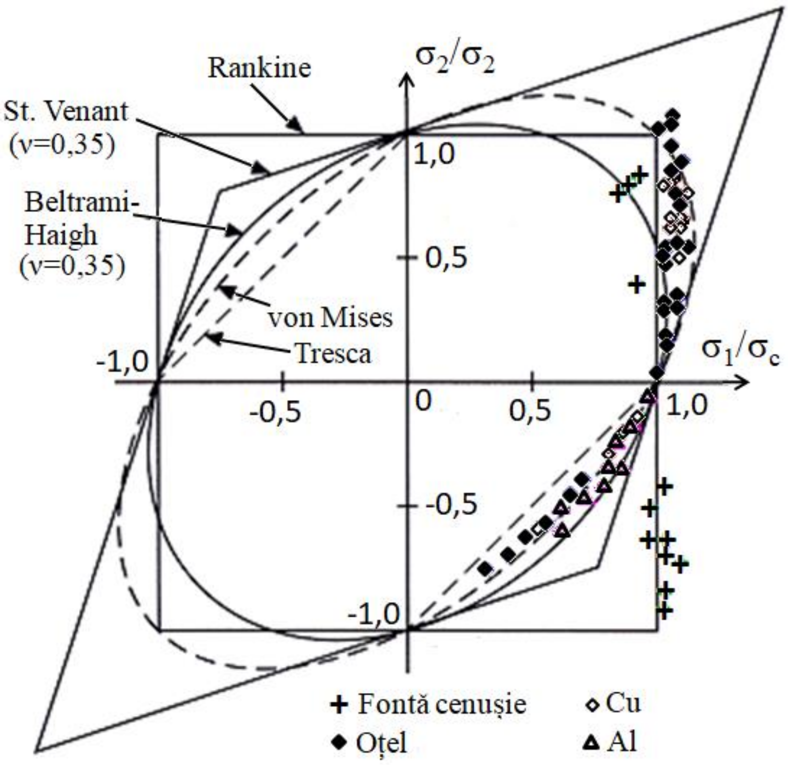


Fig. 3.23. Rezultate experimentale pentru unele materiale cu cedări ductile și fragile, comparativ cu domeniile de siguranță date de diverse teorii de stare limită [3] (reprodus prin amabilitatea Vishay Measurments Group GmbH)

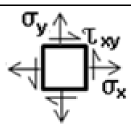
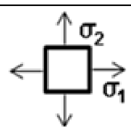
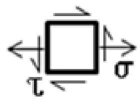
Din cele prezentate mai sus reiese ca teoria *von Mises* are o confirmare experimentală mai bună în comparație cu teoriile *Tresca*, *St. Venant* și *Beltrami-Haigh* în cazul cedărilor ductile. Din acest motiv, în prezent ea tinde să înlocuiască celelalte teorii pentru cazul cedărilor ductile. Cu toate acestea, celelalte teorii s-ar putea să dea rezultate mai bune pentru anumite categorii de materiale și anumite stări de tensiuni și în consecință nu vor fi abandonate.

Recomandări privind utilizarea teoriilor clasice

Condiția pentru ca materialul sa atingă o stare limită poate fi exprimată cu ajutorul unei ecuații de forma $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, care poate fi reprezentată printr-o suprafață limită în spațiul tridimensional, având drept coordonate tensiunile principale, unde funcția f este dată de teoriile de stare limită. Această suprafață delimitează domeniul de siguranță pentru un material, așa cum s-a arătat mai sus. Teoriile de stare limită se bazează implicit pe ipoteza că există un factor care are o influență determinantă asupra rezistenței materialului supus la solicitări compuse.

În tabelul 3.1 s-au sintetizat câteva dintre formulele stabilite mai sus pentru tensiunea echivalentă în stare biaxială de tensiuni. Formulele au fost particularizate pentru starea de tensiuni $(\sigma_x = \sigma; \sigma_y = 0; \tau_{xy} = \tau)$, care se întâlnește la arbori de transmisie. Se observă că relațiile în sistemul de referință xOy sunt generale, celelalte fiind cazuri particulare ale acestora. În tabelul 3.2 sunt prezentate câteva recomandări privind utilizarea teoriilor de stare limită.

Tab. 3.1. Tensiuni echivalente pentru stare plană de tensiuni

Teoria	STAREA DE TENSIUNI / TENSIUNEA ECHIVALENTĂ		
	 Caz general (xOy)	 Tensiuni principale (1O2)	 Încovoiere cu torsiune etc.
$\sigma_{\max}$	$\sigma_{ech} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	$\sigma_{ech} = \sigma_1$	$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$
$\tau_{\max}$	$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{ech} = \lvert\sigma_1 - \sigma_2\rvert$	$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
$U_{1F.\max}$	$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$	$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

Tab. 3.2. Recomandări privind utilizarea teoriilor de stare limită

Teoria	Recomandări privind utilizarea:
$\sigma_{\max}$ (*Rankine*)	• Pentru cedare fragilă; • Când tensiunile normale sunt mari în raport cu cele tangențiale; • Uneori este utilizată doar pentru simplitatea sa, însă în situații neadecvate (pentru materiale cu cedare tenace etc.).
$\tau_{\max}$ (*Tresca*)	• Pentru cedare ductilă; • Nu se recomandă atunci când tensiunile tangențiale sunt mici în raport cu cele normale; • Nu poate fi folosită în cazul tracțiunii/compresiunii echibiaxiale sau echitriaxiale (hidrostatică).
$U_{1F.\max}$ (*von Mises*)	• Pentru cedare ductilă; • În cazul tracțiunii/compresiunii echibiaxiale dă aceleași rezultate ca teoria σ_{max}; • Nu poate fi aplicată în cazul tracțiunii/compresiunii echitriaxiale (hidrostatică).
Mohr-Coulomb	• Pentru cedare ductilă sau fragilă; • Utilizarea este condiționată de obținerea curbelor intrinseci; • Nu poate fi folosită în cazul tracțiunii/compresiunii echibiaxiale sau echitriaxiale (hidrostatica), la rupere ductilă.

3.3.3. Alte teorii de stare limită

Teoria Hosford

În 1972 *Hosford* a propus o generalizare a teoriei *von Mises* pentru materiale izotrope astfel

$$\sigma_{ech} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|^n + \left|\sigma_2 - \sigma_3\right|^n + \left|\sigma_3 - \sigma_1\right|^n\right]} \tag{3.50}$$

unde $n \in [1, \infty)$ este o constantă de material.

Când n=1 teoria *Hosford* degenerează în teoria *Tresca* iar când n=2 devine identică cu teoria *von Mises*. Pentru alte valori ale lui *n* (care nu sunt neapărat numere întregi) teoria *Hosford* dă pentru tensiunea echivalentă valori intermediare între teoriile *Tresca* și *von Mises*.

Pentru starea plană de tensiuni cu $\sigma_3 = 0$ relația (3.50) devine

$$\sigma_{ech} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|^n + \left|\sigma_2\right|^n + \left|\sigma_1\right|^n\right]} \tag{3.51}$$

În figura 3.24 se prezintă domeniile de siguranță pentru n=1 (*Tresca*), n=2 (*von Mises*) și respectiv n=10.

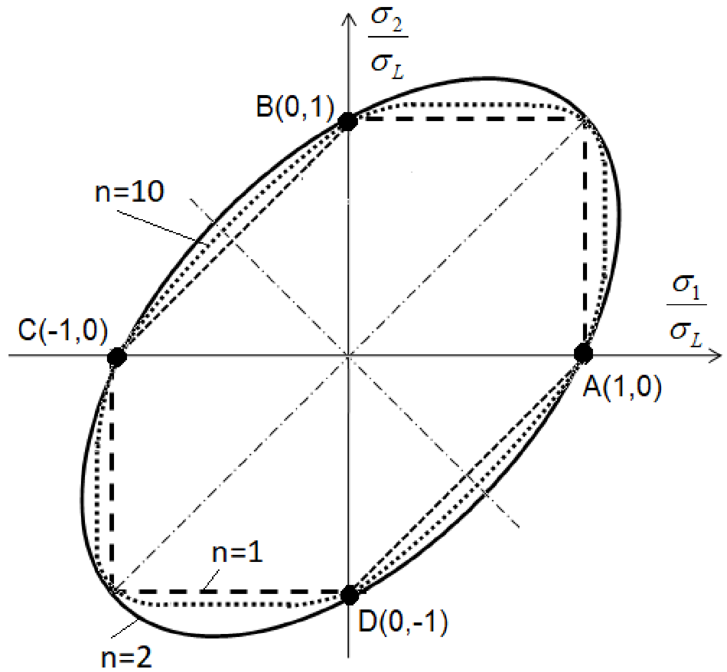


Fig. 3.24. Domeniul de siguranță al teoriei Hosford variază între cel al teoriei Tresca (n=1) și respectiv von Mises (n=2); se dă un exemplu pentru n=10 (cu linie punctată)

Se observă că teoria *Hosford* poate asigura o trecere de la modelul *Tresca* (n=1) la modelul *von Mises* (n=2). În figura 3.25. se prezintă suprafețele de curgere pentru testele la tracțiune biaxială efectuate pe un oțel cu 0,02% C și 0,15% Mn, laminat la rece. Se observă că teoria *von Mises* modelează bine inițierea curgerii ($\varepsilon = 0,2\%$) în timp ce teoria *Hosford* concordă bine cu rezultatele experimentale chiar și la alungiri specifice de zece ori mai mari, putând fi folosită pentru calcule în domeniul elasto-plastic. Aceste calcule sunt necesare, de exemplu, pentru tehnologiile de deformare plastică la rece. Flexibilitatea teoriei *Hosford* îi permite să se adapteze ușor la o gamă variată de materiale izotrope cu cedare ductilă.

Teoria a fost dezvoltată și pentru materiale anizotrope, acest model matematic fiind denumit *Logan-Hosford*. Pentru materiale anizotrope pot fi utilizate și alte teorii: *Hill* 1993, Yld2000 (dezvoltată de către *Barlat*) etc. Aceste teorii pot fi aplicate la o gamă mai largă de materiale, cum ar fi polimeri, unele compozite sau unele materiale metalice. Produsele laminate la rece, de exemplu, suferă un proces de ecruisare și în consecință nu sunt izotrope.

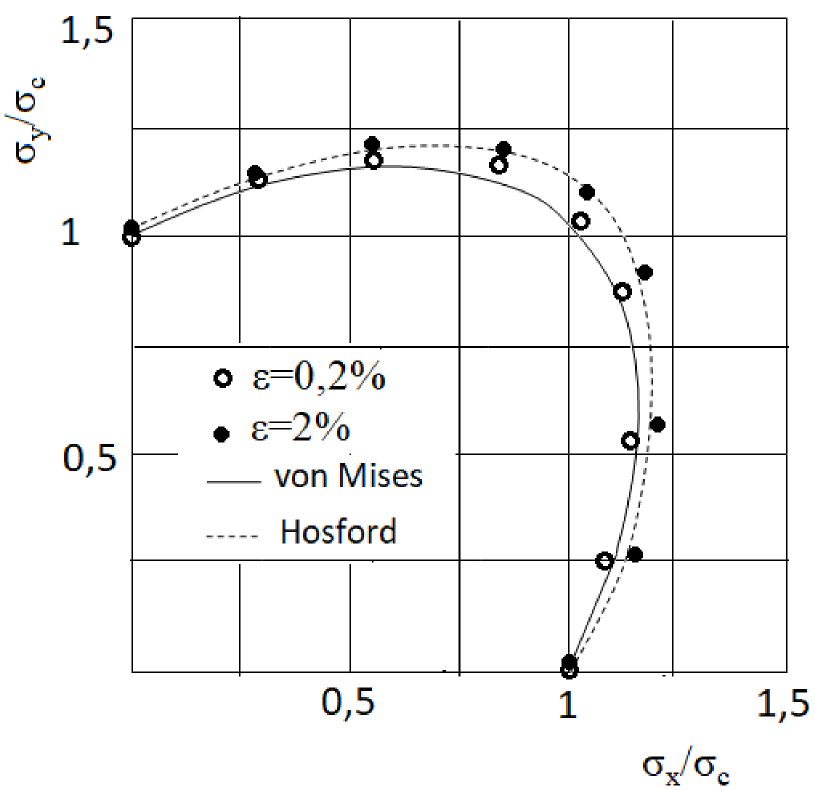


Fig. 3.25. Rezultatele testelor la tracțiune biaxială a unui oțel (0,02% C, 0,15% Mn) laminat la rece [4]

Teoria Christensen

Pentru materiale izotrope *Christensen* a dezvoltat o altă generalizare a teoriei *von Mises*, valabilă atât pentru cedări ductile, cât și fragile. Teoria cuprinde două subcriterii separate care țin cont de mecanismul de cedare și pot fi exprimate astfel [Christensen R., 2013]:

$$0 \le \frac{\sigma_{LT}}{\sigma_{LC}} \le 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_{LT}} - \frac{1}{\sigma_{LC}}\right)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{2\sigma_{LT}\sigma_{LC}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \le 1$$

$$0 \le \frac{\sigma_{LT}}{\sigma_{LC}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_1 \le \sigma_{LT}; \quad \sigma_2 \le \sigma_{LT}; \quad \sigma_3 \le \sigma_{LT}; \tag{3.53}$$

Pentru $\sigma_{LT} = \sigma_{LC}$ cedarea este ductilă și teoria *Christensen* se reduce la teoria *von Mises*. În reprezentarea *Becker-Westergaard* suprafața de cedare dată de criteriul (3.52) este un paraboloid. Criteriul (3.53), aduce corecții pentru cedarea fragilă și secționează paraboloidul cu trei plane, în domeniul tracțiunii triaxiale, tăind mici felii, care se îndepărtează. Pe paraboloid rămân trei suprafețe plate eliptice. În figura 3.26 se prezintă domeniul de siguranță al teoriei *Christensen* (stare plană de tensiuni). Se observă că domeniul mărginit de criteriul (3.52) pentru stare plană de tensiuni, la fel ca la teoria *von Mises*, este o elipsă rotită la 45°, dar translată pe direcție bisectoarei principale, spre cadranul 3. Criteriul (3.53), care corijează domeniul eliptic, este reprezentat pentru o cedare fragilă, cu $\sigma_{LT}/\sigma_{LC} = 0,3$ și este figurat cu două drepte trasate cu linie punct. Domeniul cuprins între aceste drepte și porțiunea elipsei trasată cu linie întreruptă se îndepărtează. Teoria a fost verificată experimental pe mai multe materiale, de la unele cu cedare ductilă până la unele cu fragilă. Ea prezice o tensiune de cedare la forfecare

$$\tau_L = \sqrt{\frac{\sigma_{LT} \cdot |\sigma_{LC}|}{3}} \tag{3.54}$$

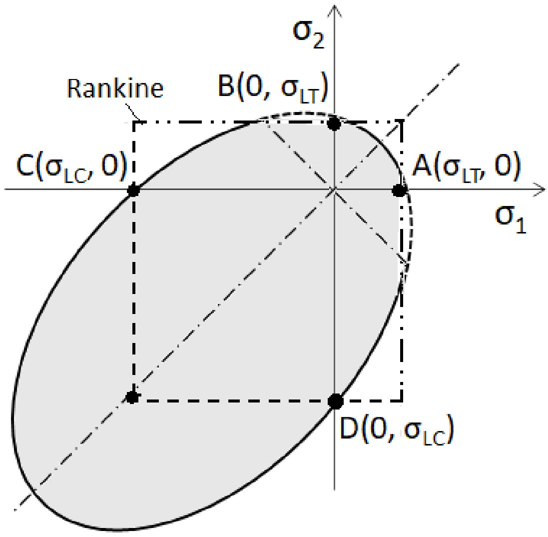


Fig. 3.26. Domeniile de siguranță ale teoriilor Christensen și Rankine (σ_3=0)

Teoria perechii de tensiuni tangențiale (YU Mao-Hong)

Aceasta teorie a fost propusă de *YU Mao-Hong* în 1961. A fost dezvoltată treptat, ajungând să fie considerată în prezent o teorie unificatoare a mai multor alte teorii. Notând

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}; \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.55}$$

se observă că

$$\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}; \quad \tau_{12} = \tau_{13} + \tau_{32}; \quad \tau_{23} = \tau_{21} + \tau_{13} \tag{3.56}$$

Teoria poate fi formulată astfel

$$\begin{cases} \sigma_1 - \alpha \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \le \sigma_{LT}; \quad \sigma_2 \le \dfrac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \\ \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \alpha\sigma_3 \le \sigma_{LT}; \quad \sigma_2 \ge \dfrac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \end{cases} \tag{3.57}$$

unde

$$\alpha = \frac{\sigma_{LT}}{\sigma_{LC}} \tag{3.58}$$

Pentru cedare ductilă $\alpha = 1$ și (3.56) devine

$$\begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \le \sigma_c; \quad \sigma_2 \le \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 \le \sigma_c; \quad \sigma_2 \ge \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \end{cases} \tag{3.59}$$

Având în vedere relațiile (2.64), precum și ecuațiile teoriilor *Tesca* (3.18) și *von Mises* (3.33), *YU Mao-Hong* numește aceste teorii ca făcând apel la o tensiune tangențială și respectiv trei tensiuni tangențiale și formulează recomandări privind domeniul lor de aplicabilitate (tab. 3.3).

Tab. 3.3. Domenii de aplicabilitate ale unor teorii de stare limită [Yu M.-H., 2002]

τ_L / σ_L	Teorie de stare limită recomandată
0,31-0,41	-
0,48-0,53	O singură tensiune tangențială (*Tresca*)
0,54-0,62	Trei tensiuni tangențiale (*von Mises*)
0,67-0,71	Două tensiuni tangențiale (*Yu*)

Teoria *Yu* poate fi aplicată atât pentru cedări fragile cât și pentru cedări ductile și prezice următoarea relație între tensiunile tangențiale și cele normale

$$\tau_L = 0.667\sigma_{LT} \tag{3.60}$$

În reprezentarea *Becker-Westergaard* suprafața de cedare a teoriei unificate este cea a unei piramide cu baza un dodecagon. Teoria unificatoare *Yu* reunește teoriile *Rankine*, *Tresca*, v*on Mises*, *Sokolovski*, *Schmidt-Ișlinski*, *Mohr-Coulomb*, *Sdobirev* și *Pisarenko-Lebedev*.

Teoria Mohr-Coulomb liniară modificată

Deși teoria *Mohr-Coulomb* poate fi folosita atât pentru cedări fragile cât și pentru cedări ductile, totuși în prezent ea este utilizată în special pentru cedări fragile ale unor materiale geotehnice sau de construcții, fontă, ceramici tehnice etc. Pentru domeniul cedărilor ductile ea degenerează în teoria *Tresca*, care tinde să fie înlocuită de teoria *von Mises*. Pentru o mai bună potrivire cu datele experimentale s-au propus unele modificari ale teoriei clasice. În figura 3.27 se prezintă domeniile teoriilor *Rankine*, *Mohr-Coulomb* (clasică și modificată), pentru un material cu comportament fragil. Dreptele din cadranele 2 și 4 sunt trasate între punctele C(σ_{LC},0) și D(0,σ_{LC}) de intersecție cu axele și respectiv punctele L(-σ_{LT}, σ_{LT}) și M(σ_{LT},-σ_{LT}) de pe axa forfecării, care este bisectoarea unghiurilor drepte din cadranele 2 și 4 (pe această dreaptă tensiunile normale sunt egale în modul și de semne contrare, așa cum se întâlnește la forfecare). În figura 3.28 se prezintă aceleași domenii, împreună cu rezultate experimentale pentru fonta cenușie. Se observă că teoria *Mohr-Coulomb* modificată modelează bine rezultatele experimentale și în consecință această modificare este acceptată.

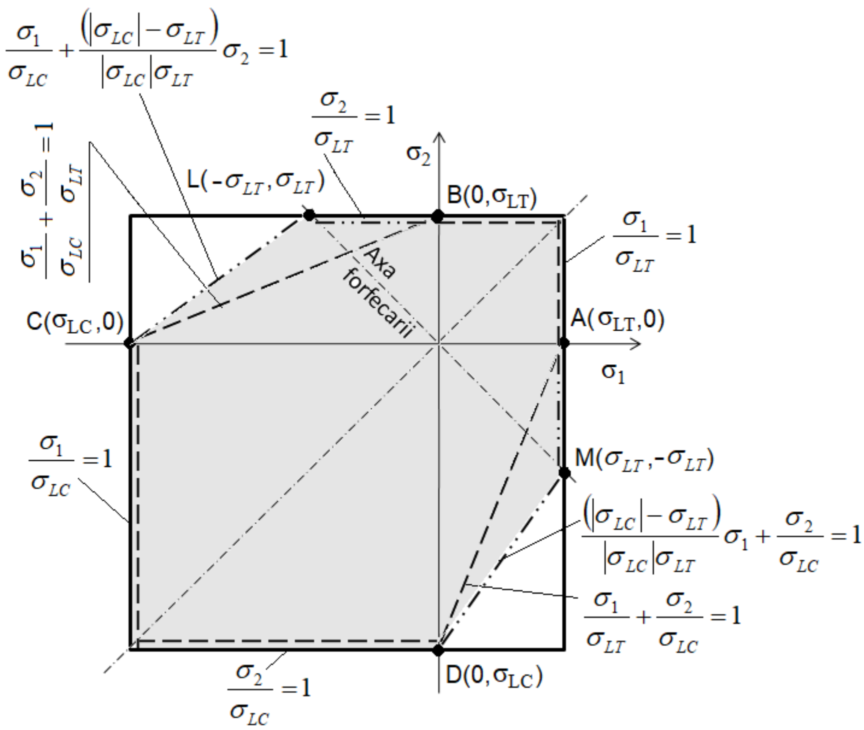


Fig. 3.27. Domeniile de siguranță ale teoriilor Rankine (linie plină), Mohr-Coulomb clasică (linie întreruptă) și Mohr-Coulomb modificată (linie-două puncte și linie întreruptă)

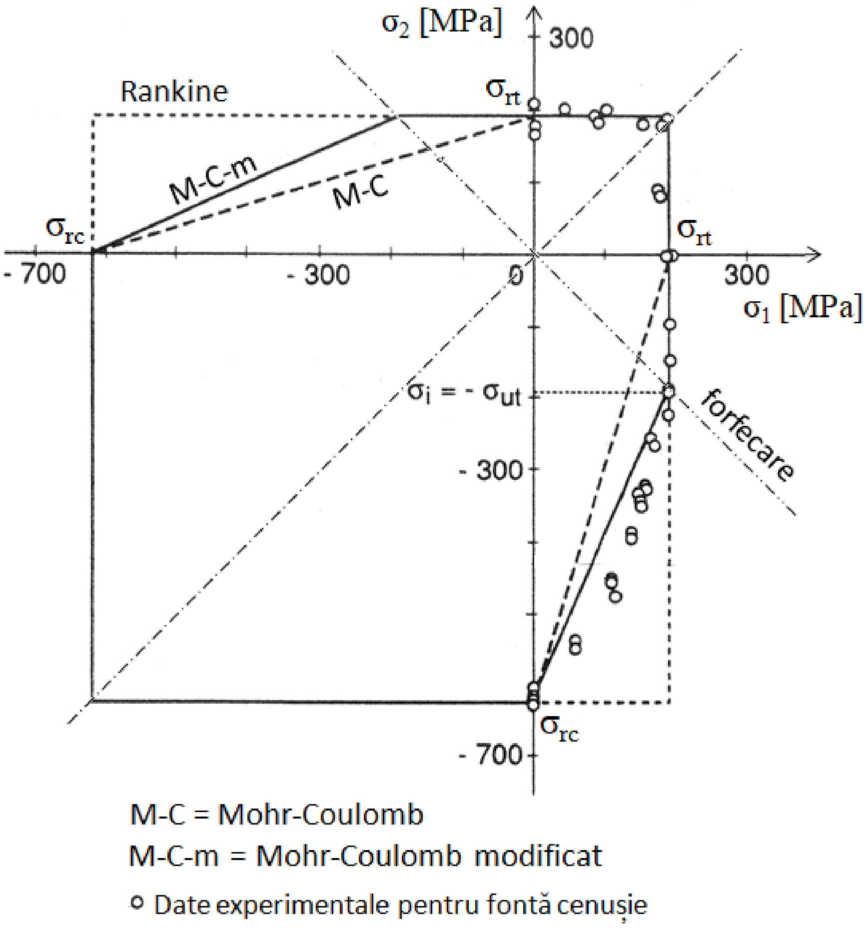


Fig. 3.28. Unele domenii de siguranță și rezultate experimentale pentru fonta cenușie [Dowling N.E., 1999]

Această modificare a teoriei *Mohr-Coulomb* poate fi interpretată ca o modelare a unei porțiuni din curba intrinsecă cu segmente din dreptele tangente la cercurile limită pentru compresiune și forfecare (fig. 3.29), în loc de dreptele tangente la cercurile limită pentru compresiune și tracțiune, așa cum s-a procedat la teoria *Mohr-Coulomb* clasică.

Din figura 3.28 se observă că teoria modificată modelează mai bine rezultatele experimentale în cadranele 2 și 4, pentru fonta cenușie.

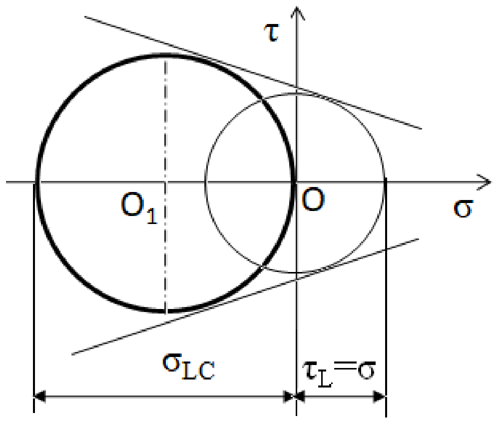


Fig. 3.29. Modelarea unei porțiuni din curba intrinsecă cu drepte tangente la cercurile limită pentru tracțiune și forfecare

Teoria Mohr-Coulomb cu înfășurătoare circulară

Aceasta teorie propune înlocuirea unei porțiuni din curba intrinsecă cu un arc de cerc (C) tangent la cercurile limită pentru tracțiune, forfecare și compresiune, în punctele T_C, T_F și respectiv T_T. În figura 3.30 se prezintă cazul unei cedări fragile [Bârsănescu P.D., 2018].

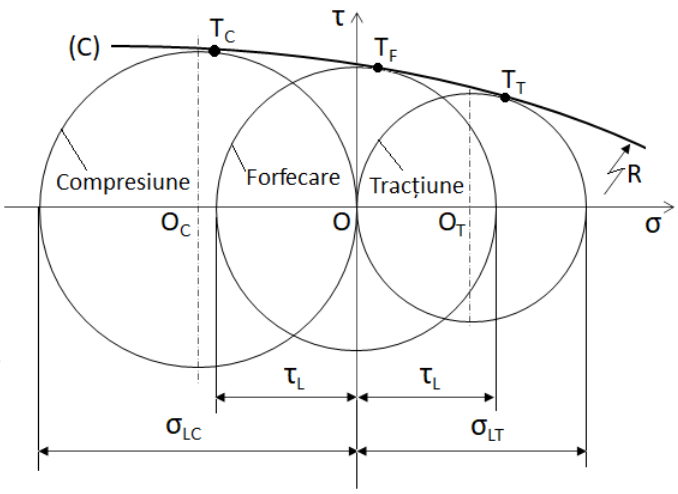


Fig. 3.30. Înlocuirea unei porțiuni din curba intrinsecă cu un arc de cerc tangent la cercurile limită pentru tracțiune, forfecare și compresiune

Pentru stare plană de tensiuni, tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1 - k\sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + k^2\sigma_2^2 - 2\frac{2-2k_{ST}\left(1+k\right)+k\cdot k_{ST}^2}{k_{ST}^2}\sigma_1\sigma_2}\right] \tag{3.61}$$

unde

$$k = \frac{\sigma_{LT}}{\left|\sigma_{LC}\right|}; \quad k_{ST} = \frac{\tau_L}{\sigma_{LT}} \tag{3.62}$$

În spațiul $\sigma_1 - \sigma_2$ zona considerată sigură este mărginită de două segmente de hiperbolă. Pe conturul zonei sigure materialul începe să cedeze (c=1). Cazul particular $\sigma_{LT} = \sigma_{LC}$ corespunde cedării ductile, când k=1 și (3.61) devine

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\frac{2-4k_{ST}+k_{ST}^2}{k_{ST}^2}\sigma_1\sigma_3}\right) \tag{3.63}$$

Teoria *Mohr* are un domeniu larg de aplicabilitate. Totuși, în forma *Mohr-Coulomb* ea este utilizată în special pentru materiale cu cedare fragilă, datorită faptului că pentru cedarea ductilă ea degenerează în teoria *Tresca*, care este înlocuită tot mai mult cu teoria *von Mises*. Teoria *Mohr* cu înfășurătoare circulară înlătură acest dezavantaj si de aceea poate fi aplicată atât pentru cedarea fragila, cât și pentru cea ductilă.

În figurile 3.31÷3.35 sunt prezentate domeniile de siguranță pentru teoria *Mohr-Coulomb* cu înfășurătoare circulară și alte teorii clasice, pentru câteva materiale metalice și nemetalice. Se observă că teoria cu înfășurătoare circulară concordă destul de bine cu rezultatele experimentale. Pentru $k_{ST} \to 1$ teoria *Mohr-Coulomb* cu înfășurătoare circulară degenerează în teoria *Rankine* (fig. 3.35).

Teoria poate fi utilizată pentru cedări ductile și fragile, dovedind o bună adaptabilitate la o gamă largă de materiale. Pentru unele materiale această teorie ar putea fi utilizată doar în cadranele 2-4, iar teoria *Rankine* în cadranele 1-3. O situație similară se întâlnește în cazul teoriei *Tresca*, combinată cu teoria *Rankine*.

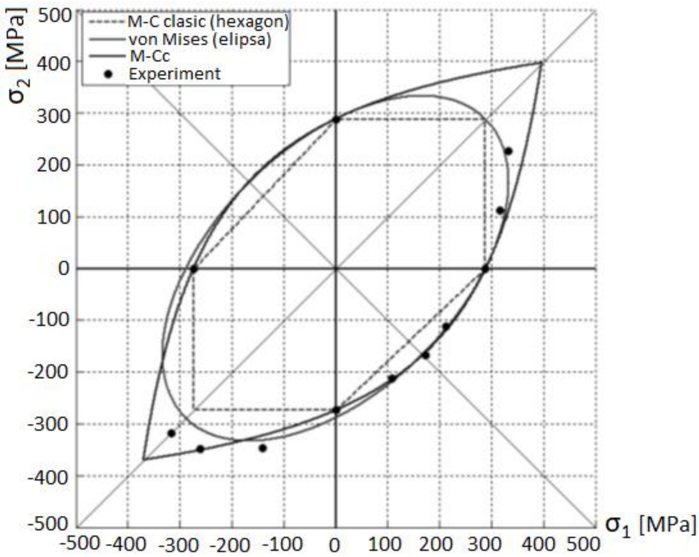


Fig. 3.31. Domeniile de siguranță pentru unele teorii și determinări experimentale pentru aliaj de Al 6061-T6, k=1,053 (M-C = Mohr-Coulomb; M-Cc = M-C cu înfășurătoare circulară)

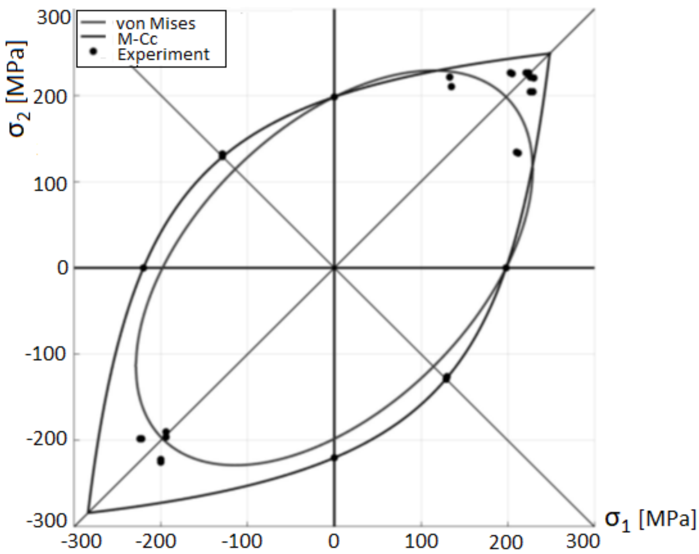


Fig. 3.32. *Domeniile de siguranță pentru unele teorii și determinări experimentale pentru oțel inoxidabil austenitic TRIP,* k=0,9 *(von Mises = elipsă; M-Cc = M-C cu înfășurătoare circulară)*

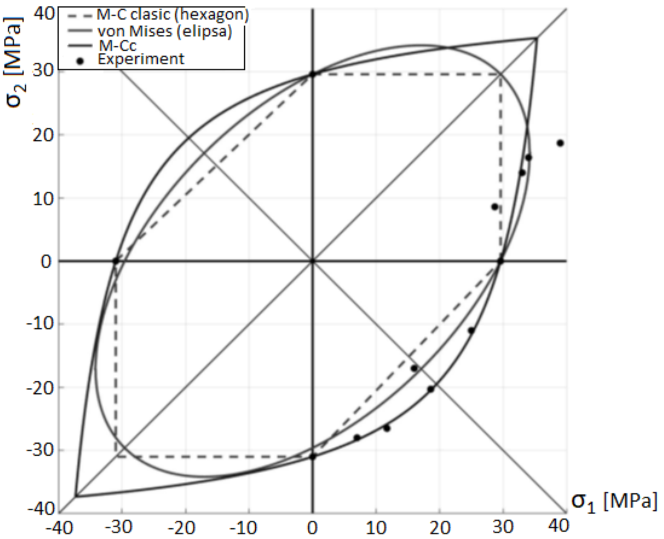


Fig. 3.33. *Domeniile de siguranță pentru unele teorii și determinări experimentale pentru Nylon, k=0,955 (M-C = Mohr-Coulomb; M-Cc = M-C cu înfășurătoare circulară)*

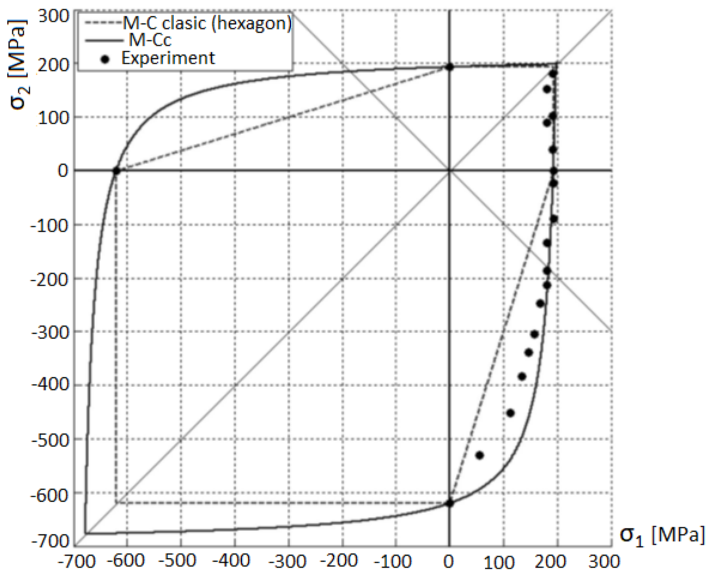


Fig. 3.34. Domeniile de siguranță pentru unele teorii și determinări experimentale pentru fontă cenușie, k=0,311 (M-C = Mohr-Coulomb; M-Cc = M-C cu înfășurătoare circulară)

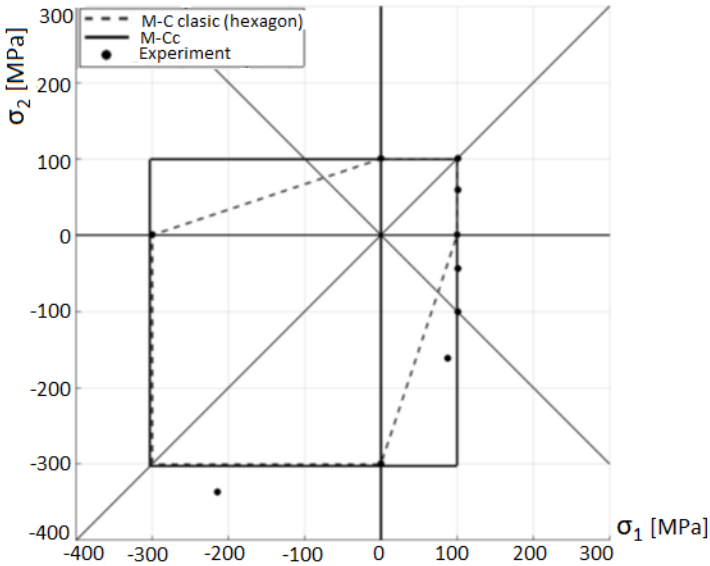


Fig. 3.35. Domeniile de siguranță pentru unele teorii și determinări experimentale pentru fontă cenușie grafitică, k=0,33 (M-C = Mohr-Coulomb; M-Cc = M-C cu înfășurătoare circulară); când $k_{ST} \to 1$ *teoria M-Cc degenerează în teoria Rankine*

Pentru o mai bună concordanță cu rezultatele experimentale, teoria *Mohr-Coulomb* cu înfășurătoare circulară poate fi combinată cu teoria *Rankine*: prima se folosește în cadranele 1 și 3, iar a doua în cadranele 2 și 4 (fig. 3.36), la fel cum se procedează cu teoriile *Tresca* și *Mohr-Coulomb* liniară.

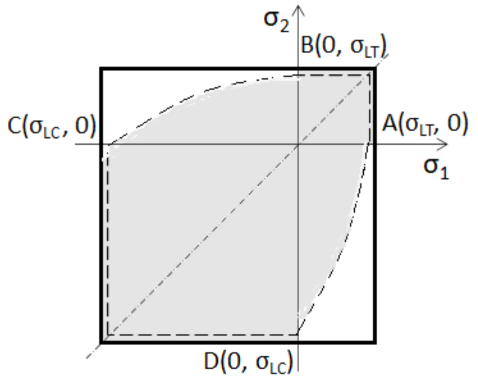


Fig. 3.36. Domeniul de siguranță pentru teoria Rankine (cadranele 1 și 3) combinat cu domeniul teoriei Mohr-Coulomb cu înfășurătoare circulară (cadranele 2 și 4)

Teoria Mohr-Coulomb cu considerarea tensiunii principale intermediare

Se observă că o stare de tensiuni este cu atât mai periculoasă cu cât cercurile lui *Mohr* care o reprezintă se apropie mai mult de curba intrinsecă, pe conturul căreia materialul începe să cedeze. Altfel spus, o stare de tensiuni este cu atât mai periculoasă cu cât cercul lui *Mohr* asociat ei are un diametru mai mare sau se apropie mai mult de starea de tensiuni echitriaxială, zonă în care cele două ramuri ale curbei intrinseci sunt mai apropiate (figurile 3.15 și 3.16).

O deficiență importantă a teoriei clasice *Mohr-Coulomb* o reprezintă faptul că nu poate lua în considerare tensiunea principală intermediară, deoarece curba intrinsecă este înfășurătoarea cercurilor limită exterioare. Pentru a considera și influența tensiunii principale intermediare, aceasta teorie modificată utilizează tot cercurile *Mohr* exterioare (determinante), însă modificate funcție de tensiunea principală σ_2. Cercul determinant reprezintă o stare plană de tensiuni, care este presupusă a fi la fel de periculoasă ca starea spațială de tensiuni inițială, în următoarele două situații [Comănici A.M., Bârsănescu P.D., 2018]:

- Diametrul cercului se modifică (crește sau scade, după caz) și aceasta fost denumită *ipoteza inflației*;
- Cercul se deplasează pe axa tensiunilor normale (spre dreapta sau spre stânga, după caz) și aceasta fost denumită *ipoteza translației*.

Atât prin creșterea diametrului cercului determinant, cât și prin translarea sa către valori pozitive ale tensiunii normale (adică către punctul de tracțiune echitriaxială) starea de tensiuni plană devine mai periculoasă. Cele două ipoteze sunt prezentate schematic în figura 3.37.

Egalând energiile potențiale modificatoare de formă pentru stările de tensiuni considerate echivalent de periculoase (tab. 2.12) se obține

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{6}\left[-3(\sigma_1-\sigma_3)+\sqrt{9(\sigma_1-\sigma_3)^2+12\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)}\right] \\ \delta &= \frac{1}{2}\left[-(\sigma_1+\sigma_3)+\sqrt{(\sigma_1+\sigma_3)(\sigma_1+\sigma_3-4\sigma_2)+4\sigma_2^2}\right] \end{aligned} \qquad (3.64)$$

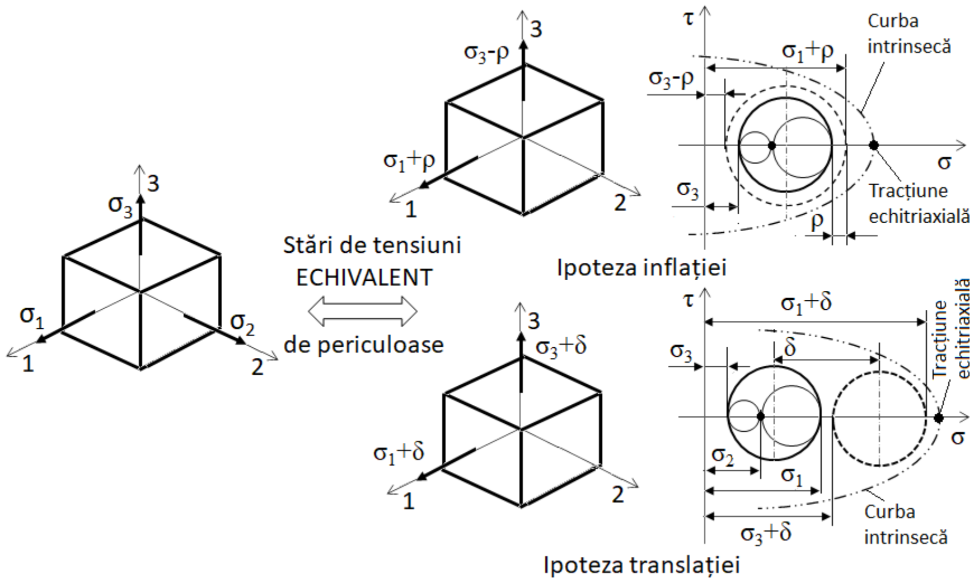


Fig. 3.37. Stări de tensiuni considerate echivalent de periculoase: ipoteza inflației (raza cercului determinant creste sau scade cu ρ) și ipoteza translației (centrul cercului determinant translează în stânga sau în dreapta cu δ)

Astfel această modificare a teoriei clasice *Mohr-Coulomb* face apel și la energia modificatoare de formă.

Ipotezele de mai sus au fost validate prin prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale obținute pentru fontă cenușie aflată în stări de tensiuni triaxiale. Pentru datele experimentale disponibile ambele ipoteze au furnizat rezultate mai precise decât teoriile clasice *Rankine* și *Mohr-Coulomb*. Totuși, cele mai bune rezultate au fost obținute pentru media aritmetică a datelor furnizate de cele două ipoteze.

Teoria cu trecere continuă de la energia totală la cea modificatoare de formă

Un dezavantaj al teoriei *von Mises* îl reprezintă faptul că nu poate fi utilizată pentru stări echitriaxiale (hidrostatice) de tensiuni. Acest lucru este consecința faptului că energia modificatoare de volum este neglijată, iar la solicitările echitriaxiale are loc numai o variație a volumului.

Așa cum s-a arătat mai sus, teoria *Beltrami-Haigh* consideră întreaga energie potențială de deformare elastică, în timp ce teoria *von Mises* consideră numai energia de modificare a formei. Cu toate că teoria *von Mises* este în prezent mult mai utilizată, în figura 3.23 se observă că există rezultate experimentale între elipsa *Beltrami-Haigh* și elipsa *von Mises*. Pentru a putea modela și aceste rezultate, s-a propus un model matematic care asigură o trecere continuă între cele două teorii [Bârsănescu P.D., Comănici A., 2017].

Tensiunile echivalente date de teoriile *Beltrami-Haigh* și *von Mises* pot fi scrise funcție de invarianți astfel

$$\sigma_{ech} = \sqrt{I_1^2 - 2(1+\nu) I_2} \tag{3.65}$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \tag{3.66}$$

Pentru a asigura trecerea continuă între cele două teorii se propune următoarea formă a tensiunii echivalente

$$\sigma_{ech} = \sqrt{I_1^2 - (2+k_w) I_2} \tag{3.67}$$

unde coeficientul k_w este

$$k_W = \frac{U_{1F} + 2\nu U_{1V}}{U_1} \tag{3.68}$$

Deoarece

$$U_1 = U_{1F} + U_{1V} \tag{3.69}$$

rezultă următoarele situații extreme:

- când se neglijează energia modificatoare de volum ($U_{1V} = 0$) rezultă $k_w = 1$ și (3.67) degenerează în relația *von Mises* (3.66);
- când se neglijează energia modificatoare de formă ($U_{1F} = 0$) rezultă $k_w = 2\nu$ și (3.67) degenerează în relația *Beltrami* (3.65).

Rezultă că acest coeficient ia valori în intervalul $k_w \in [2\nu, 1]$.

Coeficientul k_w poate fi scris funcție de tensiunile principale astfel

$$k_w = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{2\nu(1-\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (1+\nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}\right] \tag{3.70}$$

În figura 3.38 se prezintă domeniile de siguranță pentru valorile extreme ale coeficientului k_w și pentru valoarea intermediară $k_w = 0,8$. S-a realizat astfel o tranziție continuă între teoriile *von Mises* și *Beltrami*, zonă în care se găsesc valori experimentale pentru unele materiale (fig. 3.23). Teoria modelează cedări ductile și a fost validată cu rezultate experimentale.

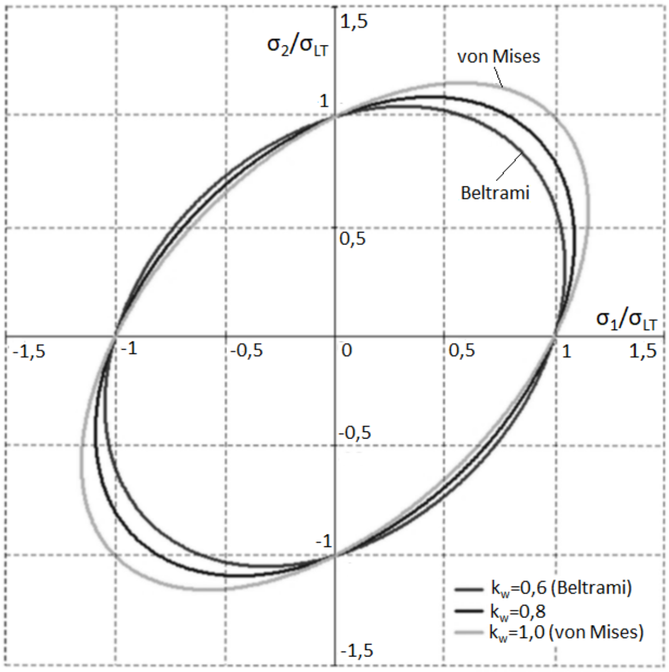


Fig. 3.38. Domeniile de siguranță pentru diferite valori ale coeficientului k_w

3.4. CALCULUL LA SOLICITĂRI COMPUSE

Spre deosebire de solicitările simple, în cazul solicitărilor compuse apar mai multe tensiuni simultan. Calculul analitic permite determinarea stării de tensiuni din corpuri cu o geometrie relativ simplă, care au simetrii. Însă cu ajutorul Metodei Elementelor Finite pot fi determinate tensiunile în orice nod al rețelei de discretizare a unor corpuri cu geometrie simplă sau complexă. Indiferent dacă se lucrează cu metode analitice sau numerice, proiectantul este cel care decide cum se vor face calculele pentru starea complexă de tensiuni din punctul cel mai solicitat al corpului sau al structurii.

Aceste tensiuni trebuie sa fie *combinate* într-un anumit mod pentru dimensionarea și verificarea organelor de mașini și a elementelor structurale. Însă alegerea metodei de calcul în cazul solicitărilor compuse poate fi dificilă în unele situații și implică multă responsabilitate. Această alegere trebuie să fie făcută pe baza unei cunoașteri aprofundate a caracteristicilor materialului și a metodelor de calcul. Experiențele au arătat că tensiunea rezultantă nu poate fi utilizată pentru calcule de rezistență decât în cazuri particulare, când tensiunile acționează pe aceeași fațetă și au aceeași direcție. Asemenea situații de întâlnesc la solicitări compuse cum ar fi: încovoiere cu solicitări axiale, torsiune cu forfecare, solicitări axiale excentrice, încovoiere oblică etc. În toate celelalte cazuri calculul de rezistență se face pe baza teoriilor de stare limită. Pe baza acestor teorii, calculul la stări de tensiuni multiaxiale se reduce la unul pentru solicitări axiale

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_L}{c} \tag{3.71}$$

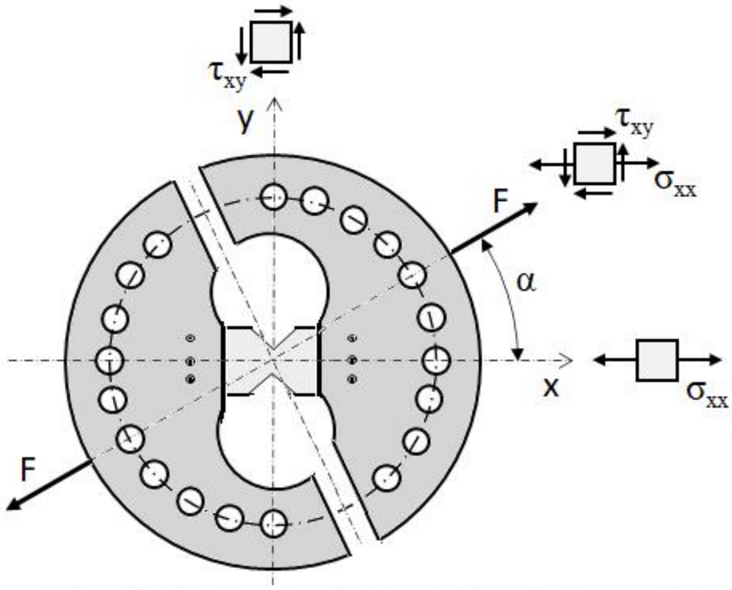
Tensiunea σ_L poate fi o limită periculoasă (curgere sau rupere) pentru solicitarea la tracțiune sau compresiune. Coeficientul de siguranță *c* trebuie sa fie mai mare decât în cazul solicitărilor simple. Recomandări privind alegerea coeficientului de siguranță se găsesc în literatură [Buzdugan G., 1986]. În tabelul 3.4 se sintetizează principiile de calcul la solicitări compuse.

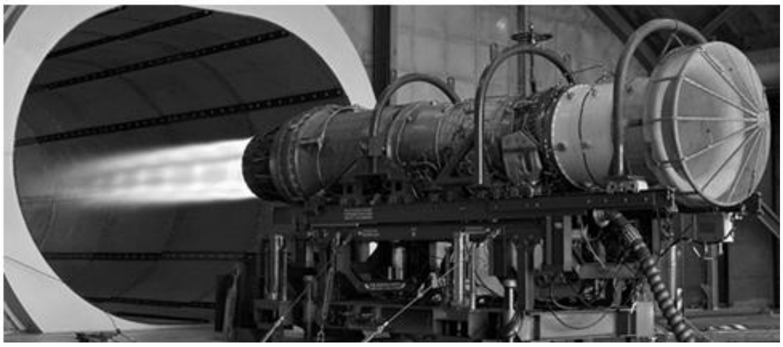
Tab. 3.4. Calculul la solicitări compuse

Nr.	Starea de tensiuni	Indicații și formule	Solicitări (exemple):
1	Tensiuni care acționează pe aceeași fațetă a elementului de volum și au aceeași direcție	Se calculează o TENSIUNE REZULTANTĂ, prin sumare algebrică $\sigma_{rez} = \sum_i \sigma_{ii}; \quad \sigma_{rez} \leq \sigma_a$ $\tau_{rez} = \sum_{i,j} \tau_{ij}; \quad \tau_{rez} \leq \tau_a$	-Încovoiere cu solicitări axiale; -Torsiune cu forfecare; -Încovoiere oblică; -Solicitări axiale excentrice etc.
2	Stări de tensiuni multiaxiale (alte cazuri decât cele de la nr. 1)	Se calculează o TENSIUNE ECHIVALENTĂ, pe baza unei teorii de stare limită $\sigma_{ech} \leq \sigma_a$	-Torsiune cu încovoiere; -Solicitări multiaxiale.

CAP. 4

SOLICITĂRI COMPUSE





Colajul din acest capitol a fost realizat parțial cu ajutorul:

https://www.comtesfht.com/unique-equipment-for-multiaxial-loading-multiaxial

https://tgadvisers.com/steam-turbine-last-stage-free-standing-blade-cracking/

4. SOLICITĂRI COMPUSE

4.1. ÎNCOVOIERE CU SOLICITĂRI AXIALE

Atât la încovoiere cât și la solicitări axiale apar tensiuni normale. Când acestea acționează pe aceeași fațetă a paralelipipedului elementar se calculează tensiunea rezultantă, prin sumarea lor algebrică. Se prezintă în continuare câteva probleme de acest tip.

Problema 4.1
Să se dimensioneze grinda din figura 4.1 știind că are secțiunea pătrată, L=3m, q=5kN/m, σ_a=150MPa și α=30°.

Rezolvare
Se descompune încărcarea uniform distribuită *q* după direcțiile axelor Ox și Oy, componentele fiind și ele uniform distribuite

$$q_x = q\sin\alpha; \quad q_y = q\cos\alpha \tag{4.1}$$

Se calculează reacțiunile din ecuațiile de echilibru. Se ține cont de faptul că reacțiunile pe direcția axei Oy sunt egale, datorită simetriei (fig. 4.2 și 4.3):

$$\begin{gathered}\sum F_x = 0 \Leftrightarrow X_2 - q_x L = 0 \Rightarrow X_2 = qL\sin\alpha \\ \sum M_{(1)} = 0 \Leftrightarrow YL - q_y L\cdot\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow Y = \frac{qL}{2}\cos\alpha\end{gathered} \tag{4.2}$$

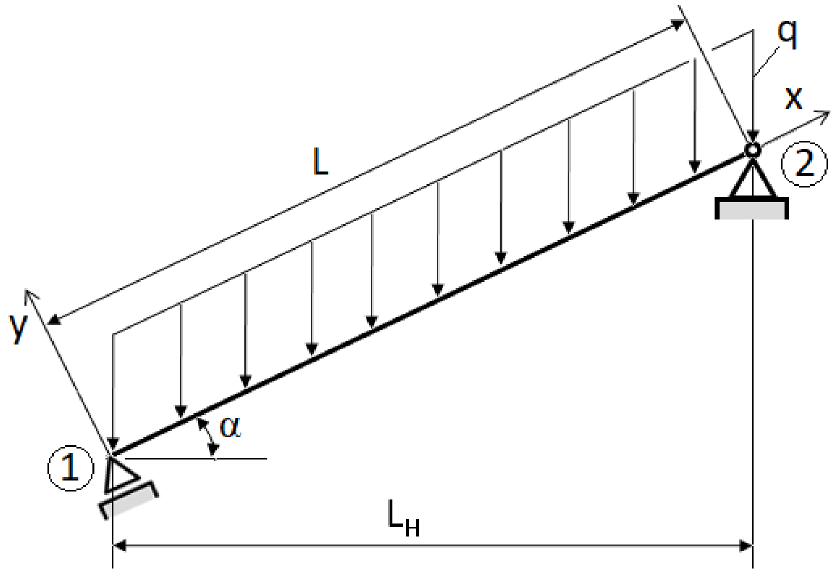


Fig. 4.1. Grindă înclinată, încărcată cu o forță uniform distribuită pe verticală

În figura 4.2 se prezintă forța axială q_x (săgețile indică direcția și dreptunghiul arată că repartiția forței este uniformă). Se scrie forța axială în secțiunea *x*

$$\begin{aligned} &N(x) = q_x \cdot x; \quad N(x) = qx\sin\alpha; \quad x \in [0, L] \\ &N(0) = 0; \quad N(L) = qL\sin\alpha \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se observă că forța axială are o variație liniară, cu valoarea maximă în reazemul 2.

Forța tăietoare în secțiunea *x* este

$$\begin{aligned} &T_y(x) = Y - q_y x; \quad T_y(x) = \frac{1}{2}qL\cos\alpha - qx\cos\alpha; \quad T_y \in [0, L] \\ &T_y(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Deoarece forța tăietoare este derivata momentului, rezultă că momentul încovoietor are un punct de extrem la jumătatea deschiderii *L*.

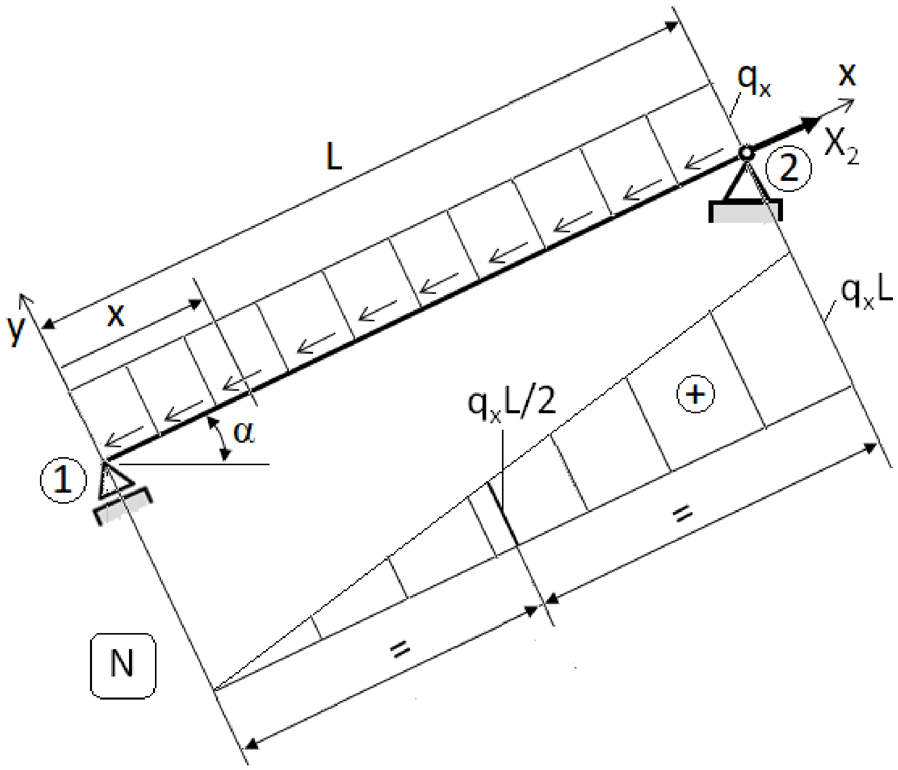


Fig. 4.2. Forța axială q_x și diagrama N

Momentul încovoietor în secțiunea x este un vector orientat pe direcția axei Oz (direcția lui este stabilită cu regula burghiului drept) și din acest motiv va fi notat M_z. Se scrie momentul în secțiunea x (fig. 4.3):

$$
\begin{aligned}
&M_z(x) = Yx - q_y x \cdot \frac{x}{2};\, M_z(x) = \left(\frac{q_y L}{2}\right)x - q_y\frac{x^2}{2};\, M_z \in [0, L] \\
&M_z(x) = \frac{q_y}{2}\left(Lx - x^2\right); \quad M_z(x) = \frac{q}{2}\left(Lx - x^2\right)\cos\alpha
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Variația momentului este parabolică, cu un punct de extrem la jumătatea deschiderii. Se observă că momentul se anulează la capetele grinzii, ceea ce reprezintă o verificare. Momentul încovoietor maxim este

$$M_{z.\max} = M_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_y L^2}{8} = \frac{qL^2}{8}\cos\alpha \tag{4.6}$$

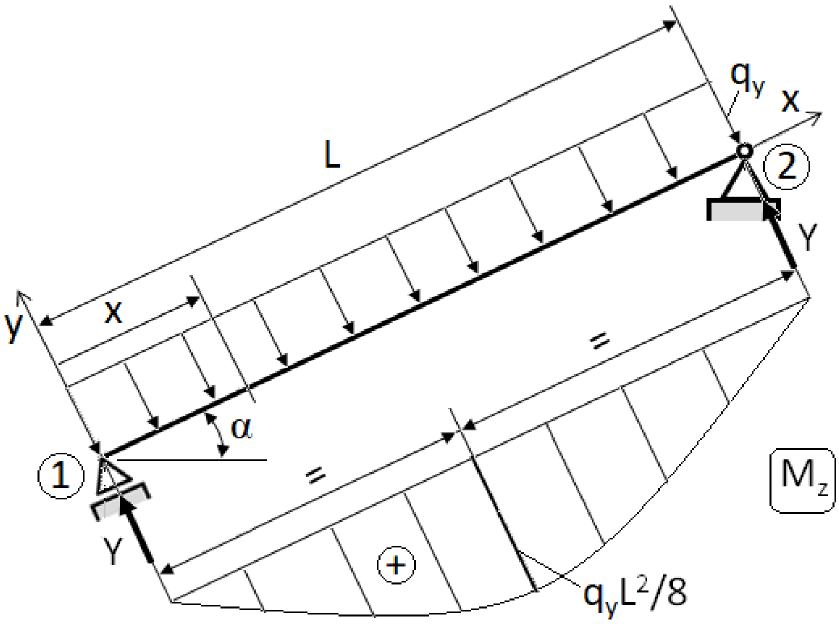


Fig. 4.3. Componenta forței uniform distribuită pe verticală și diagrama momentului încovoietor

Deoarece tensiunea produsă la încovoiere este de regulă mult mai mare decât cea de la solicitări axiale, se va face dimensionarea cu tensiunea rezultantă în secțiunea în care momentul încovoietor este maxim, x=L/2. Forța axială în această secțiune este

$$N\left(\frac{L}{2}\right) = q_x\frac{L}{2} = \frac{qL}{2}\sin\alpha \tag{4.7}$$

Notând cu *a* latura secțiunii pătrate, tensiunea normală produsă de tracțiune în secțiunea periculoasă este:

$$\sigma_x^{(t)} = N\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\frac{1}{A} = \frac{qL\sin\alpha}{2a^2} \tag{4.8}$$

Tensiunea produsă la încovoiere în secțiunea periculoasă se determină cu formula lui *Navier*

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{M_{\text{z.max}}}{W_z} = \frac{qL^2\cos\alpha}{8}\cdot\frac{6}{a^3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{qL^2\cos\alpha}{a^3} \tag{4.9}$$

Cele două tensiuni acționând pe aceeași fațetă a elementului de volum și având aceeași direcție, se calculează tensiunea rezultantă maximă prin sumare algebrică

$$\begin{aligned}\sigma_{rez.\max} &= \sigma_x^{(t)} + \sigma_x^{(i)} = \frac{qL\sin\alpha}{2a^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{qL^2\cos\alpha}{a^3}\\ \sigma_{rez.\max} &= \frac{qL}{2a^2}\left(\sin\alpha + \frac{3}{2}\cdot\frac{L}{a}\cos\alpha\right)\end{aligned} \tag{4.10}$$

Pentru dimensionare se pune condiția

$$\sigma_{rez.\max} \le \sigma_a \Leftrightarrow \frac{qL\sin\alpha}{2a^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{qL^2\cos\alpha}{a^3} \le \sigma_a \tag{4.11}$$

Se ajunge la rezolvarea unei ecuații de gardul al treilea. Deoarece L>>a se observă că tensiunea produsă de încovoiere este mult mai mare decât cea introdusă de tracțiune. Pe de altă parte, nu ne interesează să aflăm rădăcinile ecuației cu precizie, deoarece valorile lui *a* vor fi oricum rotunjite conform cu recomandările STAS 75-90.

Din aceste motive se va evita rezolvarea ecuației de gradul al treilea și se face mai întâi o predimensionare la încovoiere, urmată de o majorare a valorii găsite și apoi de verificarea tensiunii la solicitarea compusă.

Se va lucra cu unitățile de măsură [N], [mm] și [MPa].

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{qL^2\cos\alpha}{a^3}\le\sigma_a\Rightarrow a\ge\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{qL^2\cos\alpha}{\sigma_a}}$$
$$a\ge\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{5\cdot3000^2\cdot0,866}{150}}\approx57,97mm \tag{4.12}$$

Se majorează latura pătratului la valoarea a=60mm și se verifică pentru solicitarea compusă

$$\sigma_{rez.\max}=\frac{qL}{2a^2}\left(\sin\alpha+\frac{3}{2}\cdot\frac{L}{a}\cos\alpha\right)$$
$$\sigma_{rez.\max}=\frac{5\cdot3000}{2\cdot60^2}\left(0,5+\frac{3}{2}\cdot\frac{3000}{60}\cdot0,866\right)\approx136,4MPa<\sigma_a \tag{4.13}$$

Deoarece tensiunea maximă este cu puțin mai mică decât tensiunea admisibilă și dimensiunea de 60mm este cuprinsă în STAS 75-90, se adoptă această valoare finală pentru latura pătratului.

În figura 4.4 se prezintă repartiția tensiunilor în secțiune. Se observă că la solicitarea compusă la tracțiune cu încovoiere axa neutră se deplasează și nu mai coincide cu axa geometrică. Deplasarea axei neutre *y* se determină anulând tensiunea rezultantă σ_{rez}. Ecuația poate fi scrisă pentru secțiunea curentă *x*, însă în cele ce urmează s-a considerat numai secțiunea în care momentul încovoietor este maxim

$$\sigma_{rez}(x,y)=\sigma_x^{(t)}+\sigma_x^{(i)}\Leftrightarrow\frac{N(x)}{A}+\frac{M_z(x)\cdot y}{I_z}=0$$
$$\sigma_{rez}(y)=\frac{qL\sin\alpha}{2a^2}+\frac{qL^2\cos\alpha}{8}\cdot\frac{12}{a^4}y=0\Rightarrow \tag{4.14}$$
$$y=-\frac{a^2}{3L}\tan\alpha$$

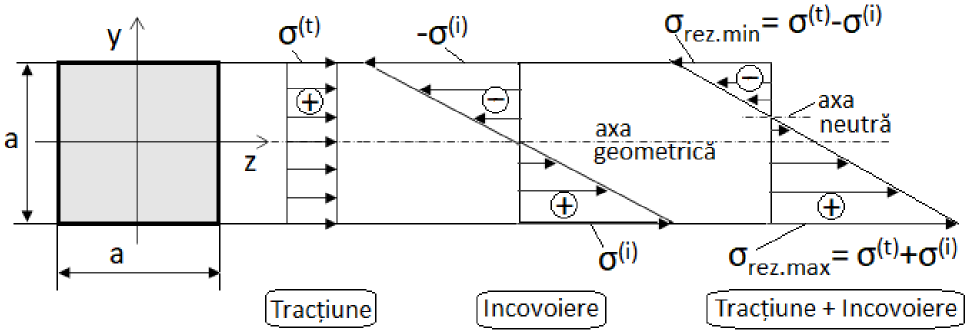


Fig. 4.4. Repartiția tensiunilor normale la problema 4.1

4.2. TORSIUNE CU FORFECARE

Această solicitare apare, de exemplu, la arcurile elicoidale cu pas mic. Arcurile elicoidale sunt utilizate pentru stocarea/redarea energiei, absorbirea șocurilor sau menținerea unei forțe între corpuri aflate în contact. Ele sunt utilizate la suspensiile vehiculelor, pentru închiderea supapelor la motoare cu ardere internă (fig. 4.5) etc. Arcurile elicoidale cu pas mic sunt solicitate în special la torsiune cu forfecare. Ambele solicitări dau tensiuni tangențiale care, în acest caz, se pot suma algebric.

Fig. 4.5. Arc elicoidal de compresiune

În figura 4.6 s-a notat cu α unghiul elicei. Funcție de acest unghi eforturile care apar în spirele unui arc elicoidal pot fi scrise

$$N = F\sin\alpha;\quad T = F\cos\alpha;\quad M_x = FR\cos\alpha;\quad M_z = FR\sin\alpha \quad (4.15)$$

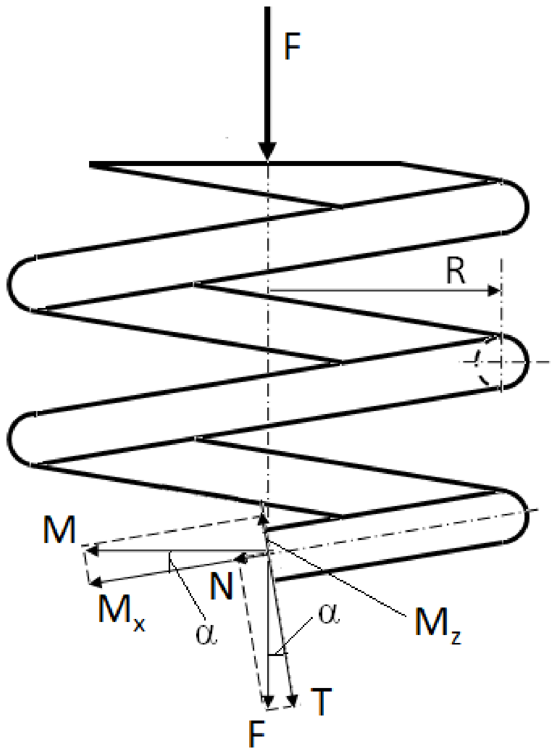


Fig. 4.6. Eforturile care apar în spirele unui arc elicoidal

Într-o primă aproximare, la arcurile cu pas mic se pot neglija forțele axiale N și momentul încovoietor M_z. Rămân momentul de torsiune M_x și forța tăietoare T. Ambele eforturi dau tensiuni tangențiale τ.

Dacă pasul resortului este mic (α<14°), se neglijează efortul axial N și momentul încovoietor M_z, care depind de sinα (sin14°≈0,242; cos14°≈0,970) [Miroliubov I., 1973]. În aceste condiții se consideră doar eforturile moment de torsiune M_x și forță tăietoare T, care depind de cosα.

În figura 4.7 se prezintă spira unui arc elicoidal cu pas mic, comprimat cu forța *F*, care acționează centric (pe axa arcului). Forța poate fi redusă la centrul spirei O (F=T; M_t=FR). În figura 4.8 se vede repartiția tensiunilor tangențiale τ′, provenită din torsiune (b) și τ″, provenită din forfecare (c) în secțiunea spirei.

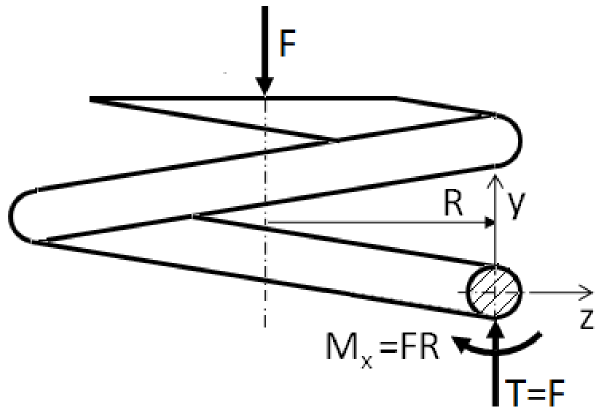


Fig. 4.7. Reducerea forței la centrul spirei

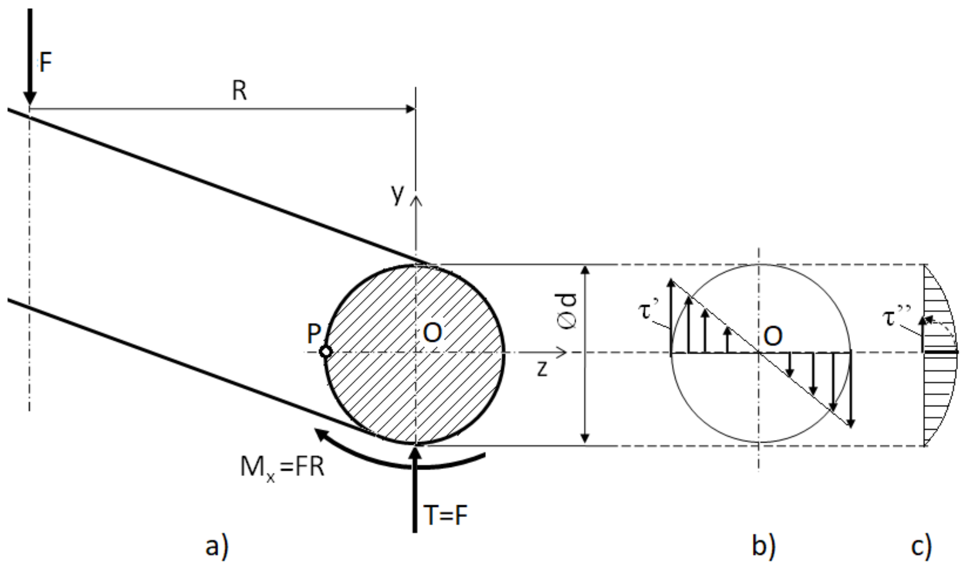


Fig. 4.8. Eforturile din spira arcului (a), tensiunea provenită din torsiune (b) și cea provenită din forfecare (c)

Tensiunea tangențială maximă apare în punctul P (fig. 4.8), în care cele două tensiuni tangențiale se sumează algebric, deoarece acționează pe aceeași fațetă și sunt orientate pe aceeași direcție. Tensiunea de forfecare τ” se calculează cu formula lui *Juravski* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$\begin{aligned}\tau_{rez.\max} &= \tau' + \tau'' = \frac{FR}{W_p} + \frac{4}{3}\cdot\frac{F}{A}\\ \tau_{rez.\max} &= \frac{16FR}{\pi d^3} + \frac{16}{3}\cdot\frac{F}{\pi d^2} = \frac{16F}{\pi d^2}\left(\frac{D}{2d}+\frac{1}{3}\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

Arcurile cu pas mic, la care D/d>10, se calculează numai la torsiune [Miroliubov I., 1973], deoarece

$$\tau' >> \tau'' \tag{4.17}$$

Predimensionarea arcurilor elicoidale se face din condiția de rezistență

$$\tau_{rez.\max} \le \tau_a \tag{4.18}$$

Pentru oțelurile de arc se recomandă τ_a=400-600MPa [Buzdugan G., 1986]. Dimensionarea arcurilor este mai complicată și trebuie să țină cont de solicitările variabile, eventuala posibilitate de apariție a flambajului etc.

Calculul săgeții f (deplasarea punctului de aplicare a forței *F*) se poate face egalând lucrul mecanic exterior cu energia potențială de deformare elastică acumulată în arc. Contribuția forfecarii la această energie este mică și poate fi neglijată. În cazul arcurilor elicoidale cu pas mic lungimea totală a sârmei *l* din care este confecționat arcul poate fi aproximată ca fiind lungimea unei spire (considerată a fi cea a unui cerc) înmulțită cu numărul de spire *n*. Pentru un arc confecționat din sârmă cu secțiunea circulară se poate scrie succesiv

$$\begin{aligned}&L = \frac{Ff}{2};\quad U = \frac{M_x^2 l}{2GI_p} = \frac{16M_x^2 l}{\pi G d^4};\quad l \approx 2\pi Rn\\ &U = \frac{32F^2R^3n}{Gd^4};\quad L = U \Rightarrow\\ &f = \frac{64FR^3n}{Gd^4}\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3. ÎNCOVOIERE DUBLĂ (OBLICĂ)

Încovoierea oblică sau dublă se produce atunci când vectorul moment încovoietor nu acționează după direcția unei axe principale de inerție a secțiunii transversale a grinzii (fig. 4.9).

Barele cu secțiuni circulare sau circulare inelare nu sunt supuse la încovoiere oblică deoarece în acest caz orice dreaptă suport care trece prin centrul de greutate este o axă de simetrie și deci și axă principală de inerție.

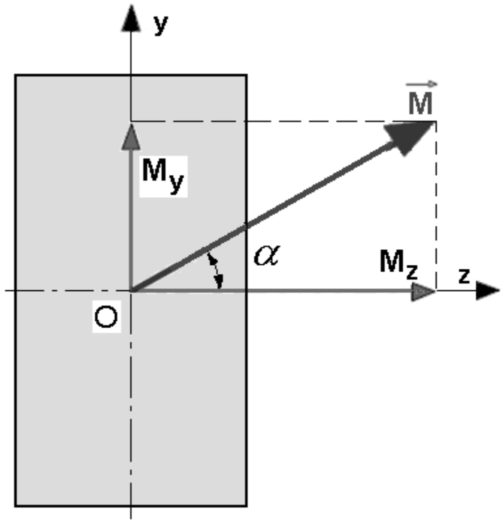


Fig. 4.9. Încovoiere dublă (oblică): direcția vectorului moment încovoietor $\overline{M}$ *nu coincide cu o axă principală de inerție*

Componentele momentului încovoietor după direcțiile axelor sunt

$$M_z = M\cos\alpha$$
$$M_y = M\sin\alpha \qquad (4.20)$$
$$\tan\alpha = M_y / M_z$$

Fiecare dintre aceste componente ar produce o încovoiere simplă, dacă ar acționa singură. Tensiunile introduse de fiecare componentă a momentului încovoietor se calculează cu formula lui *Navier*

$$\sigma'_x = \frac{M_z y}{I_z}; \quad \sigma''_x = \frac{M_y z}{I_y} \qquad (4.21)$$

Cele două tensiuni acționează pe aceeași fațetă și direcție și în consecință se sumează algebric

$$\sigma_{rez} = \sigma'_x + \sigma''_x = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.22}$$

Să ne imaginăm un burghiu drept orientat pe direcția și în sensul momentului încovoietor. Pentru a înainta în sensul momentului se aplică asupra burghiului un cuplu de forțe: o forță iese din plan și cealaltă intră în plan. Forțele care ies din planul secțiunii dau tracțiune și sunt considerate pozitive, iar cele care intră în planul secțiunii dau compresiune și sunt considerate negative. Astfel dreapta suport a momentului încovoietor împarte planul secțiunii transversale în doua semiplane, unul pozitiv și unul negativ (fig. 4.10). Axa neutră împarte și ea planul în două semiplane, unul pozitiv și unul negativ. În mod similar, când burghiul drept înaintează pe direcția axei neutre, atunci el indică de care parte a axei vor fi tensiuni pozitive și respectiv negative. În cazul încovoierii simple direcția vectorului $\vec{M}$ și cea a axei neutre coincid.

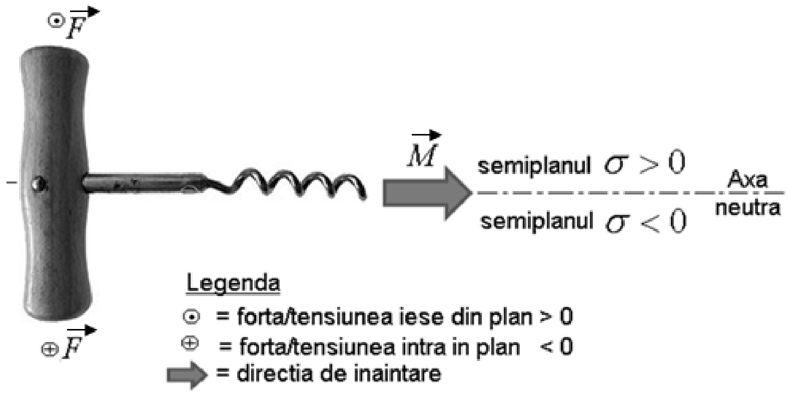


Fig. 4.10. Înaintarea burghiului drept pe direcția axei neutre și împărțirea planului în două semiplane, unul pozitiv și unul negativ

Se aplică regula de mai sus pentru M_z și M_Y și din figura 4.9 se observă că în primul cadran cele două tensiuni au semne diferite. Pe axa neutră a încovoierii oblice tensiunile rezultante sunt nule și se poate scrie

$$\sigma_{rez} = 0 \Leftrightarrow \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} = 0 \Rightarrow y = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} z = \tan(\alpha) \frac{I_z}{I_y} z \qquad (4.23)$$

unde α este unghiul pe care îl face momentul încovoietor *M* cu abscisa iar *tan*α este dată de (4.20). Aceasta este ecuația unei drepte care trece prin origine, având panta

$$m = \tan\beta = \frac{I_z}{I_y} \tan\alpha \qquad (4.24)$$

Se observă că panta axei neutre are același semn cu *tan*α. În consecință, *axa neutră trece prin cadranul în care se află momentul rezultant M*.

Observație:

- Când $I_z > I_y \Rightarrow \tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow \beta > \alpha$;
- Când $I_z < I_y \Rightarrow \tan\beta < \tan\alpha \Rightarrow \beta < \alpha$.

Ca o consecință a observației de mai sus, se poate afirma că axa neutră este întotdeauna cuprinsă între direcția momentului încovoietor rezultant *M* și axa principală față de care momentul de inerție este minim (fig. 4.11).

Conform formulei lui *Navier*, tensiunile normale maxime se află în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră, respectiv B și D în figura 4.12. Din aceste puncte de duc paralele la axa neutră și apoi o normală la acestea. Față de această normală se reprezintă variația tensiunii normale rezultante σ_{rez}.

Notând tensiunea maximă în modul

$$\sigma_{max} = \max\left\{\sigma_{rez.\max}, \left|\sigma_{rez.\min}\right|\right\} \qquad (4.25)$$

dimensionarea se face din condiția

$$\sigma_{\max} \le \sigma_a \qquad (4.26)$$

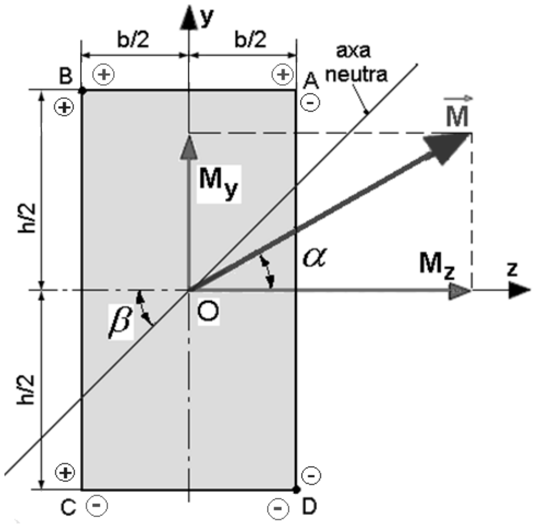


Fig. 4.11. Axa neutră și momentul încovoietor rezultant M trec prin același cadran. Axa neutră se află cuprinsă între direcția lui M și axa față de care momentul de inerție este minim.

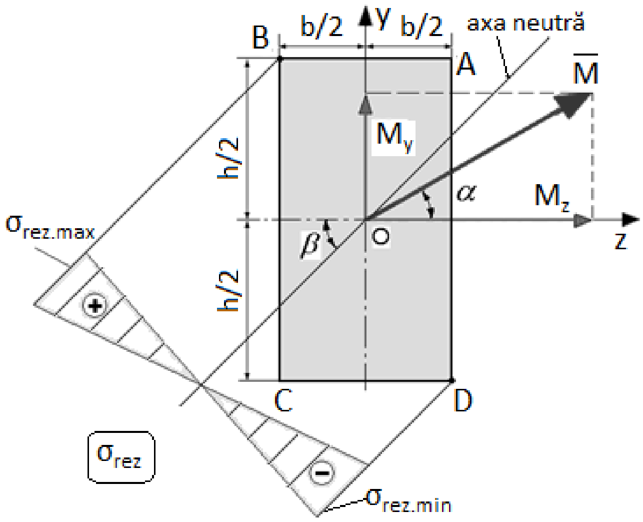


Fig. 4.12. Repartiția tensiunilor rezultante

Problema 4.2

Bara de oțel cu secțiunea din figura 4.13 este încărcată cu momentul încovoietor M=3,5kNm. Știind că α=30°, să se determine tensiunea normală maximă din bară și unghiul β pe care îl face axa neutră cu orizontala.

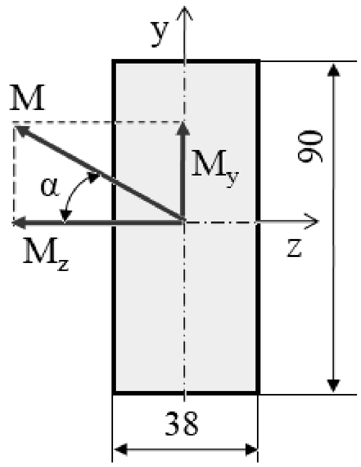


Fig. 4.13. Secțiunea grinzii și momentul încovoietor M

Rezolvare

Componentele momentului încovoietor *M* sunt

$$
\begin{aligned}
M_z &= M\cos 30°; \quad M_z \approx 3,03kNm = 3,03\cdot 10^6\,Nmm \\
M_y &= M\sin 30°; \quad M_y \approx 1,75kNm = 1,75\cdot 10^6\,Nmm
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Se calculează momentele de inerție și modulele de inerție axiale

$$
\begin{aligned}
I_z &= \frac{38\cdot 90^3}{12} \approx 2,31\cdot 10^6 mm^4; W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{2,31\cdot 10^6}{45} \approx 5,13\cdot 10^4 mm^3 \\
I_y &= \frac{90\cdot 38^3}{12} \approx 4,12\cdot 10^5 mm^4; W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{4,12\cdot 10^5}{19} \approx 2,17\cdot 10^4 mm^3
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Tensiunea rezultantă maximă este

$$
\sigma_{rez.\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \sigma_{rez.\max} = \frac{3,03\cdot 10^6}{5,13\cdot 10^4} + \frac{1,75\cdot 10^6}{2,17\cdot 10^4} \approx 139,71MPa \tag{4.29}
$$

Tensiunea rezultantă minimă este $\sigma_{rez.min}$=-139,71MPa.

Se calculează unghiul β pe care îl face axa neutră cu orizontala și se trasează diagrama tensiunilor normale (fig. 4.14):

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha; \quad \tan\beta = \frac{2,31\cdot 10^6}{4,12\cdot 10^5}\tan 30° \approx 3,237 \Rightarrow \beta \approx 72,83° \qquad (4.30)$$

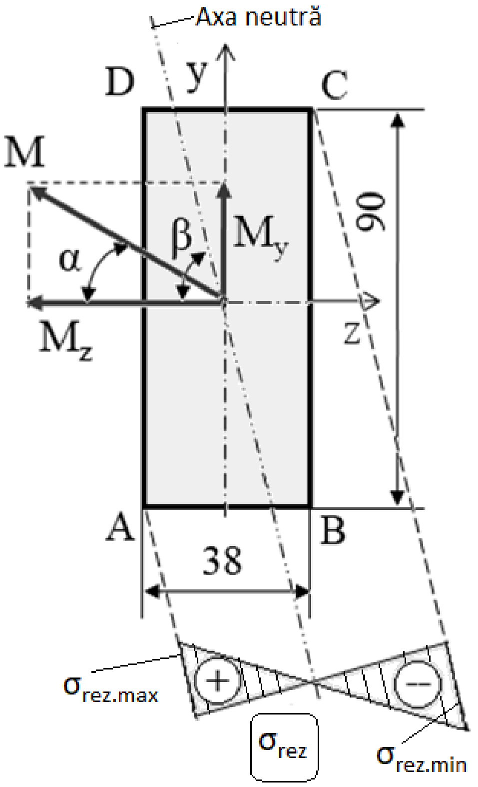


Fig. 4.14 Trasarea axei neutre și a diagramei tensiunilor normale rezultante

În figura 4.15 se prezintă repartiția tensiunilor rezultante pe întreaga secțiune. Se observă că există un plan [*abcd*] care conține vârfurile tensiunilor de tracțiune și respectiv originile tensiunilor de compresiune, reprezentate ca vectori.

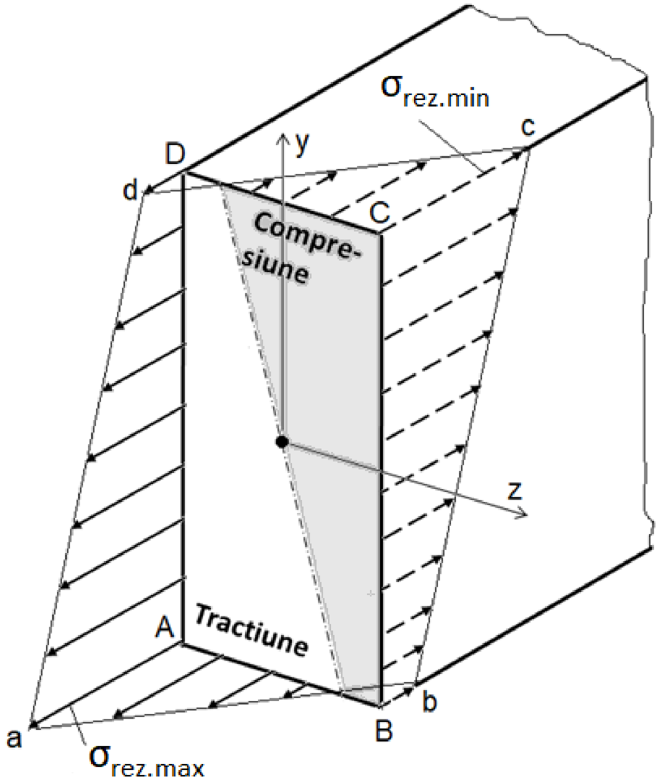


Fig. 4.15. Repartiția tensiunilor rezultante în secțiunea transversală

4.3.1. Calculul deplasărilor

Se consideră că fiecare componentă a momentului încovoietor acționează independent. Aceste componente produc săgețile f_z și f_y, care pot fi compuse vectorial, ca în figura 4.16 și astfel poate fi determinată săgeata rezultantă *f*.

Săgețile pot fi calculate cu relații din RM [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]. Ele sunt proporționale cu raportul dintre componentele momentului și momentul de inerție axial corespunzător

$$f_y = -c\frac{M_z}{I_z}; \quad f_z = c\frac{M_y}{I_y} \tag{4.31}$$

unde s-a considerat pozitivă deplasarea în sensul unei axe.

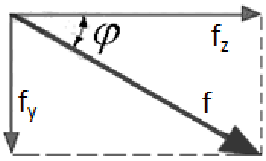


Fig. 4.16. Săgeata totală se obține prin compunerea vectorială a săgeților date de componentele momentului încovoietor M

Săgeata rezultantă și panta direcției sale sunt date de

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{f_y}{f_z} = -\frac{I_y}{I_z}\cdot\frac{M_z}{M_y} = -\frac{I_y}{I_z}\cdot\frac{1}{\tan\alpha} \qquad (4.32)$$

Deoarece

$$\tan\varphi\tan\beta = -1 \qquad (4.33)$$

rezultă că direcția săgeții rezultante și direcția axei neutre sunt reciproc perpendiculare, așa cum se vede în figura 4.17.

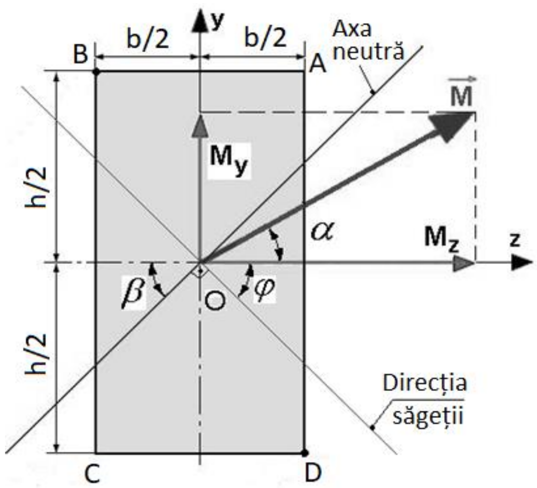


Fig. 4.17. Axa neutră și direcția săgeții sunt reciproc perpendiculare

4.4. SOLICITĂRI AXIALE EXCENTRICE

În practica inginerească apar frecvent cazuri în care forțele axiale nu pot fi aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale. În figura 4.18 forța *F*, paralelă cu axa Ox, nu este aplicată în centrul de greutate O al secțiunii, ci în polul P(z_0,y_0). În aceste situații apar solicitări suplimentare față de tracțiunea sau compresiunea centrică și anume încovoiere dublă cu tracțiune.

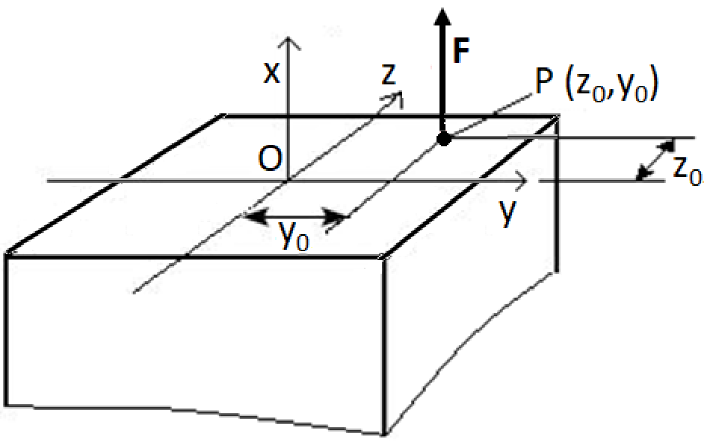


Fig. 4.18. Solicitare axial excentrică (O este identic cu centrul de greutate al secțiunii transversale)

$$\sigma_{rez} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_{rez} = \frac{F}{A} + \frac{F y_0}{I_z} y + \frac{F z_0}{I_y} z$$

$$\sigma_{rez} = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_0 y}{\frac{I_z}{A}} + \frac{z_0 z}{\frac{I_y}{A}}\right) \tag{4.34}$$

$$\sigma_{rez} = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2}\right)$$

Ecuația axei neutre se determină din condiția ca tensiunea rezultantă să fie nulă

$$1+\frac{y_0 y}{i_z^2}+\frac{z_0 z}{i_y^2}=0$$

$$\frac{z}{-\frac{i_y^2}{z_0}}+\frac{y}{-\frac{i_z^2}{y_0}}=1 \qquad (4.35)$$

Aceasta este ecuația dreptei prin tăieturi (fig. 4.19). Tăieturile cu axele sunt

$$a=-\frac{i_y^2}{z_0}; \quad b=-\frac{i_z^2}{y_0} \qquad (4.36)$$

Ele au semne contrare coordonatelor punctului P (z_0, y_0) de aplicare a forței și în consecință axa neutră trece prin cadranul opus celui în care acționează forța *F*.

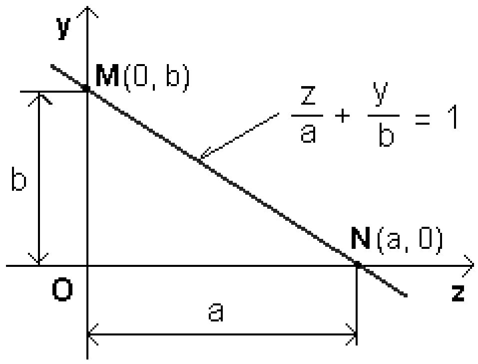


Fig. 4.19. Tăieturile dreptei

Proprietățile axei neutre:

- Se observă că atunci când punctul de aplicare a forței se îndepărtează de centrul de greutate al secțiunii transversale (originea sistemului de axe), axa neutră se apropie de originea O. Axa neutră trece prin origine atunci când

$$z_0 \to \infty \Rightarrow a \to 0; \quad y_0 \to \infty \Rightarrow b \to 0 \qquad (4.37)$$

- Invers, când punctul de aplicare a forței se află în originea O(0,0), axa neutră taie axele de referință la infinit

$$z_0 \to 0 \Rightarrow a \to \infty; \quad y_0 \to 0 \Rightarrow b \to \infty \tag{4.38}$$

  și bara este solicitată numai la tracțiune sau compresiune centrică (funcție de sensul forței);
- Dacă punctul P de aplicare a forței este situat pe o axă centrală de inerție, atunci axa neutră este perpendiculară pe acea axă;
- Când punctul de aplicare a forței se mișcă pe frontiera sâmburelui central, axa neutră se mișcă tangentă pe frontiera secțiunii;
- Dacă punctul de aplicare a forței se mișcă pe o dreapta oarecare, atunci axa neutră se rotește în jurul unui punct numit *antipolul dreptei* [Tripa M., 1967];
- Axa neutră împarte secțiunea în două: de o parte există numai tensiuni normale pozitive, iar de cealaltă parte negative;
- Centrul de greutate al secțiunii transversale se află între punctul de aplicare a forței și axa neutră;
- Cunoscând punctul de aplicare a forței P(z_0, y_0), cu ajutorul ecuațiilor de mai sus se poate determina axa neutră. Reciproc, cunoscând ecuația axei neutre se pot determina coordonatele punctului de aplicare a forței P(z_0, y_0) pentru o secțiune dată.

Pentru stabilirea punctelor cele mai solicitate ale secțiunii se procedează la fel ca la încovoierea dublă. Pentru tracțiune excentrică (N>0) tensiunile în aceste puncte sunt

$$\sigma_{x.\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \sigma_{x.\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} \tag{4.39}$$

În cazul materialelor cu cedare tenace, la care tensiunea de curgere la tracțiune este aproximativ egală cu tensiunea de curgere la compresiune, condiția de rezistență este

$$\sigma_{x.\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le \sigma_a \tag{4.40}$$

Rezultă o ecuație de gradul al treilea, ale cărei rădăcini vor fi rotunjite la valori liniare admise de STAS 75-90. Din acest motiv, ecuația se rezolvă aproximativ astfel:

1. Se neglijează în primă fază efectul forței axiale (care uzual introduce tensiuni normale relativ mici comparativ cu încovoierea) și se face o predimensionare la încovoiere oblică;
2. Se majorează dimensiunile secțiunii astfel obținute și se face verificarea condiției de rezistență (4.40). Se modifică prin încercări dimensiunile secțiunii, până când se obține un coeficient de siguranță cu puțin mai mare decât cel propus.

În cazul comportamentului fragil, între tensiunea de rupere la compresiune σ_{rc} și cea de rupere la tracțiune σ_{rt} există relația $\sigma_{rc} \gg \sigma_{rt}$ și condițiile de rezistență sunt

$$\begin{aligned} &\sigma_{x.\max} \leq \sigma_{at}; \quad \sigma_{x.\max} > 0 \\ &|\sigma_{x.\min}| \leq |\sigma_{ac}|; \quad \sigma_{x.\min} < 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.4.1. Sâmbure central

Sâmburele central reprezintă o zonă care include centrul de greutate al secțiunii transversale, având proprietatea că frontiera sa este locul geometric al punctelor de aplicare ale forțelor normale, determinate astfel încât axa neutră se deplasează tot timpul tangentă la secțiune și în consecință tensiunile normale au același semn pe toata secțiunea. Atunci când forța normală se apropie de centrul de greutate, axa neutră se îndepărtează de secțiune. Când forța normală este aplicată înafara sâmburelui central, axa neutră taie secțiunea și de o parte a sa există tensiuni normale pozitive, iar de cealaltă tensiuni normale negative.

În cazul materialelor cu cedare fragilă, care rezistă mult mai bine la compresiune decât la tracțiune (fontă, beton etc.), este important să se evite tensiunile normale pozitive. Pentru a realiza acest lucru, încărcarea la compresiune trebuie sa fie aplicată în zona sâmburelui central.

Se vor da câteva exemple privind determinarea sâmburelui central.

Problema 4.3

Să se determine sâmburele central pentru o bară cu secțiunea circulară, având diametrul D=2R.

Rezolvare

Se determină momentele de inerție axiale și razele de inerție

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}; \quad A = \frac{\pi D^2}{4}; \quad i_z^2 = i_y^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi D^2} = \frac{D^2}{16} \qquad (4.42)$$

Se trasează axa neutră tangentă la secțiunea circulară, de exemplu în punctul A(0,R), ca în figura 4.20. Ecuația tangentei în A (fig. 4.20) este

$$y = R \Leftrightarrow \frac{y}{R} = 1 \qquad (4.43)$$

Tăieturile cu axele ale acestei drepte sunt $a \to \infty; b = R = D/2$.

Cu (4.36) se determină coordonatele punctului de aplicare a forței

$$\begin{aligned} &a = -\frac{i_y^2}{z_0} \Rightarrow z_0 = -\frac{i_y^2}{a}; \quad a \to \infty \quad \Rightarrow z_0 \to 0 \\ &b = -\frac{i_z^2}{y_0} \Rightarrow y_0 = -\frac{i_z^2}{b}; \quad -i_z^2 \cdot \frac{2}{D}; \quad y_0 = -\frac{D^2}{16} \cdot \frac{2}{D} = -\frac{D}{8} = -\frac{R}{4} \end{aligned} \qquad (4.44)$$

Coordonatele punctului de aplicare a forței sunt P(0,-R/4). Când axa neutră se rotește tangentă pe conturul cercului de rază *R* se obține sâmburele central, care este un cerc de rază r=R/4 (fig. 4.20).

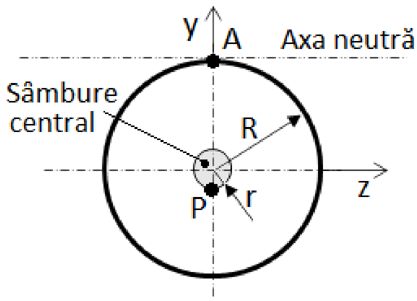


Fig. 4.20. Sâmburele central al unei bare cu secțiunea circulară

Problema 4.4

Să se traseze sâmburele central pentru profilul I din figura 4.21.

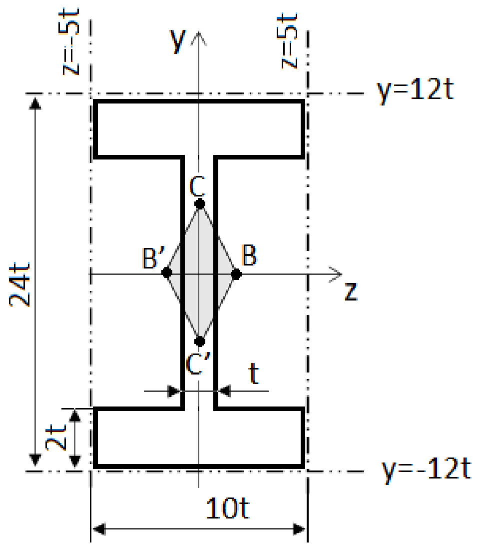


Fig. 4.21. Trasarea sâmburelui central al unui profil I nestandardizat

Rezolvare

Centrul de greutate al secțiunii se află la intersecția axelor de simetrie, care sunt și axe principale de inerție. Deoarece secțiunea profilului are două axe de simetrie, sâmburele său central va avea și el dublă simetrie. Pentru determinarea sâmburelui central se vor parcurge etapele de mai jos:

1. Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale

$$A = 60t^2; \quad I_z = 5520t^4; \quad I_y = 335t^4$$
$$i_z^2 = I_z / A = 92t^2; \quad i_y^2 = I_y / A \approx 5,6t^2 \tag{4.45}$$

2. Se trasează pozițiile extreme ale axei neutre tangentă la profil, respectiv perechile de drepte paralele cu axele z=5t; z=-5t; y=12t; y=-12t. Aceste ecuații pot fi rescrise sub forma dreptei prin tăieturi și datorită dublei simetrii se vor utiliza numai două poziții ale axei neutre

$$\frac{z}{-5t} = 1; \quad \frac{y}{-12t} = 1 \tag{4.46}$$

Din (4.35), (4.36) și (4.46) rezultă pentru cele două drepte

$$a=-\frac{i_y^2}{z_0}-5t \Rightarrow z_0=\frac{i_y^2}{5t}=\frac{5,6t^2}{5t}=1{,}12t; \quad b=-\frac{i_z^2}{y_0}\to\infty \Rightarrow y_0\to 0$$
$$b=-\frac{i_z^2}{y_0}=-12t \Rightarrow y_0=\frac{i_z^2}{12t}=\frac{92t^2}{12t}=7,(6)t; \; a\to\infty \Rightarrow z_0\to 0 \tag{4.47}$$

Celor doua poziții ale axei neutre le corespund punctele de aplicare a forței B(1,12t;0) și C(0;7,(6)t). Se trasează punctele simetrice B' și C', care corespund celorlalte două poziții extreme ale axei neutre. În baza celei de-a treia proprietăți a axei neutre (prezentată mai sus) se unesc aceste puncte cu segmente de dreaptă, trasând astfel frontiera sâmburelui central. Când forța este aplicată în B, ecuația axei neutre este z=-5t. Când forța este aplicată în C, ecuația axei neutre este y=-12t. Când punctul de aplicare a forței se deplasează de la B la C, axa neutră se rotește în jurul colțului din stânga-jos al secțiunii (fig. 4.22), care este antipolul dreptei. Pentru aplicarea forței în zonele sâmburelui central care depășesc conturul profilului se sudează placi masive la capetele stâlpului, perpendiculare pe axa acestuia.

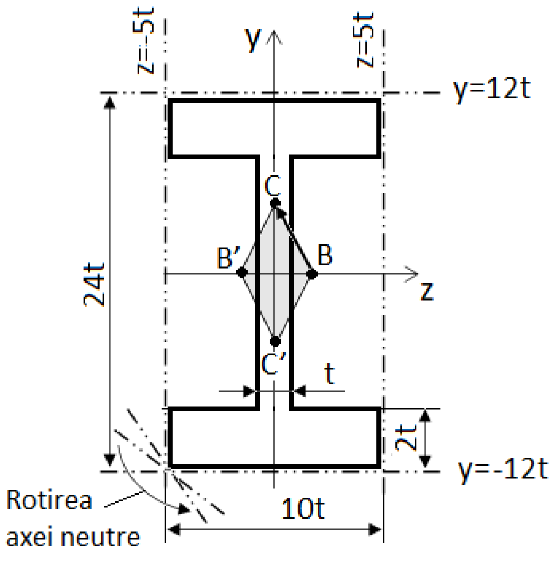


Fig. 4.22. Rotirea axei neutre când forța se deplasează de la B la C

4.5. TORSIUNE CU ÎNCOVOIERE

La toate solicitările compuse prezentate până acum în acest capitol s-au studiat doar cazuri în care tensiunile sunt pe aceeași fațetă și au aceeași direcție. În consecință, s-a calculat o tensiune rezultantă, prin sumare algebrică și s-a pus condiția ca ea să fie mai mică decât tensiunea admisibilă.

În continuare vor fi prezentate cazuri în care tensiunile nu îndeplinesc condițiile de mai sus și din acest motiv se va calcula o *tensiune echivalentă*, cu ajutorul unei teorii de stare limită. Tensiunea echivalentă trebuie să fie mai mică decât tensiunea admisibilă.

Starea de tensiuni care apare la solicitarea la torsiune cu încovoiere este prezentată în figura 4.23. Ca urmare a solicitării la torsiune apar tensiuni tangențiale τ, iar la încovoiere tensiuni normale σ. Este o solicitare frecvent întâlnită în construcția de mașini, cum ar fi în cazul arborilor de transmisie. Se observă că la această solicitare apare o stare plană de tensiuni, pentru care se găsesc câteva relații de calcul a tensiunii echivalente în tabelul 3.1 și recomandări de utilizare în tabelul 3.2. Se vor prezenta în continuare câteva exemple de rezolvare a unor probleme care implică această solicitare.

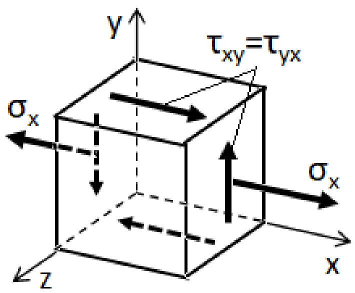


Fig. 4.23. Starea de tensiuni la solicitarea la torsiune cu încovoiere

Problema 4.5

Fie bara cotită din figura 4.24a, formată din două bare reciproc perpendiculare, cuplate în nodul rigid 2 și având secțiunea circulară, cu diametru *d*. Forța *F* este perpendiculară pe planul barei. Se cere să se traseze diagramele de eforturi, să se calculeze tensiunea echivalentă și deplasarea punctului de aplicare a forței *F* pe direcția forței. Materialul cedează ductil.

Rezolvare

Pentru o bară în consolă se vor face secțiuni pornind de la capătul liber, pentru a evita calculul reacțiunilor. Pentru fiecare bară s-a ales un sistem de referință ortogonal drept (x'y'z' și x''y''z'') cu axa *x* orientată în lungul barei.

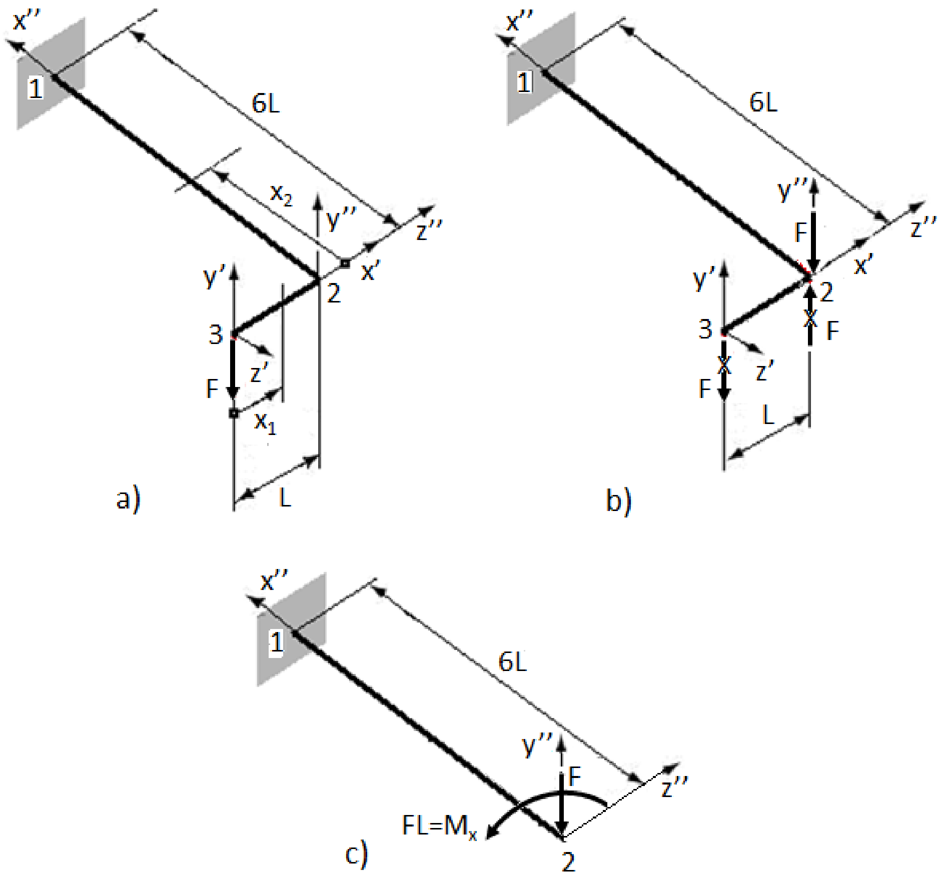


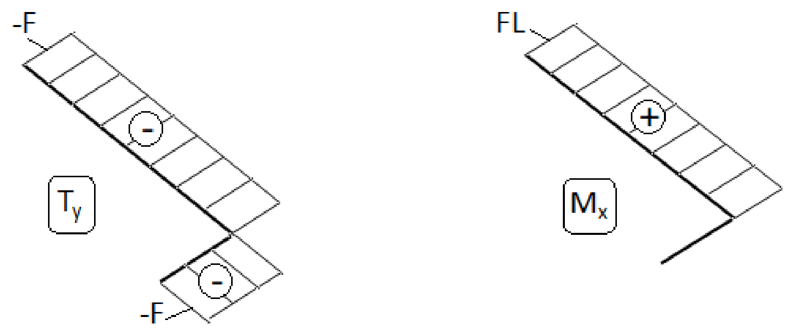
Fig. 4.24. Bară cotită (cadru) încărcată cu forța F (a) și reducerea forței la nodul 2 (b), (c)

Pentru bara 3-2 se alege sistemul de referință x'y'z' (cu originea în 3), se face secțiunea x_1 și se scriu eforturile în secțiune.

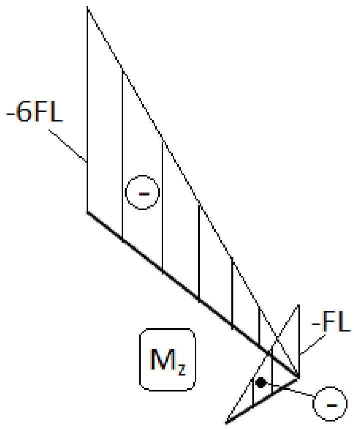
Se va explica în continuare cum se adoptă sistemul de referință x"y"z" pentru bara 2-1 (cu originea în 2). Deoarece axa *x* se alege convențional în lungul barei, ne imaginăm că sistemul x'y'z' este translat în lungul axei Ox', până ajunge cu originea în 2. Se rotește apoi sistemul de referință în jurul axei normale la planul cadrului (y'), pe drumul cel mai scurt, până când una dintre axe se suprapune cu bara 2-1. Această axă se notează cu x'' iar axa y' devine y''. Se verifică dacă axa rămasă (z'') formează cu celelalte două un sistem triortogonal drept. Se face apoi secțiunea x_2. Pentru estimarea mai facilă a eforturilor din bara 2-1 se face reducerea forței *F* la nodul 2, adăugând și scăzând *F*, ca în figura 4.24b. Cele două forțe de sensuri contrare (marcate cu X) formează un cuplu de forțe M_x= FL, orientat după axa barei 1-2. Bara încărcată cu acest cuplu (care produce torsiune) și cu forța F (care produce încovoiere și forfecare) poate fi apoi izolată, ca în figura 4.24c. Cu M_z se notează momentul încovoietor dirijat după axa Oz' sau Oz". Astfel eforturile din barele 3-2 și 2-1 sunt

$$\begin{aligned} &N(x_1)=0;\quad T_y(x_1)=-F;\quad M_z(x_1)=-Fx_1;\quad x_1\in[0,L] \\ &N(x_2)=0;\quad T_y(x_2)=-F;\quad M_z(x_2)=-Fx_2;\quad M_x(x_2)=FL \end{aligned} \tag{4.48}$$

Se trasează diagramele de eforturi (fig. 4.25). În mod convențional diagrama de moment încovoietor se reprezintă în planul în care are loc deplasarea (săgeata).



a) b)



c)

Fig. 4.25. Diagramele de forță tăietoare (a), moment de torsiune (b) și moment încovoietor (c)

Efectul forței tăietoare este neglijabil în cazul barelor lungi. Rezultă că secțiunea periculoasă se află în încastrare, unde momentul încovoietor are valoarea maximă în modul. În secțiunea periculoasă cele două momente au valorile

$$M_{z.\max} = |-6FL|; \quad M_x = FL \tag{4.49}$$

Se calculează tensiunile din secțiunea periculoasă

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M_z}{W_z}; \quad \tau_{xy} = \tau = \frac{M_x}{W_p} \tag{4.50}$$

Secțiunea circulară are caracteristicile geometrice

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \Rightarrow W_p = 2W_z \tag{4.51}$$

Pentru cedare ductilă se calculează tensiunea echivalentă cu teoria *Tresca*:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{z.\max}}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{z.\max}^2 + M_x^2}}{W_z} \tag{4.52}$$

Dimensionarea barelor cadrului se face din condiția de rezistență

$$\begin{aligned} &\sigma_{ech} \le \sigma_a \Rightarrow \\ &\sigma_{ech} = \frac{\sqrt{(6FL)^2 + (FL)^2}}{W_z} = \frac{32\sqrt{37}\cdot FL}{\pi d^3} \le \sigma_a \Rightarrow \\ &d \ge \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{37}\cdot FL}{\pi\sigma_a}} \end{aligned} \tag{4.53}$$

Calculul deplasării punctului de aplicare a forței se poate face cu metoda *Maxwell-Mohr* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]. În acest scop se adaugă o forță unitară (1N) fictivă în punctul și pe direcția în care se calculează deplasarea. În cazul de față este suficient să facem F=1N și se scriu apoi momentele fictive

$$\begin{aligned} m_z(x_1) &= -1\cdot x_1 = -x_1 \\ m_z(x_2) &= -1\cdot x_2 = -x_2 \\ m_x(x_2) &= 1\cdot L = L \end{aligned} \tag{4.54}$$

Săgeata în punctul 3, pe direcția forței *F*, se calculează astfel

$$\begin{aligned} f_3 = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^L M_z(x_1)m_z(x_1)dx_1 + \int_0^{6L} M_z(x_2)m_z(x_2)dx_2\right] + \\ + \frac{1}{GI_p}\int_0^{6L} M_x(x_2)m_x(x_2)dx_2 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Înlocuind și efectuând, rezultă

$$f_3 = FL^3\left(\frac{37}{3}\cdot\frac{1}{EI_z} + 6\cdot\frac{1}{GI_p}\right) \tag{4.56}$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 2I_z; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.57}$$

Pentru ν=0,3 se obține

$$f_3 = \frac{FL^3}{EI_z}(12,3+7,8) = 20,1\frac{FL^3}{EI_z} \tag{4.58}$$

Primul termen din paranteză reprezintă efectul încovoierii, iar al doilea pe cel al torsiunii. *Rotirea* unei secțiuni se poate determina în mod similar, adăugând un moment unitar (1Nmm) în planul rotirii care trece prin secțiunea respectivă.

Problema 4.6

Să se dimensioneze bara de secțiune circulară din figura 4.26 știind că F=4,5kN, a=200mm, L=150mm. Bara poate fi confecționată din două materiale:

- *Fontă cenușie* Fc300, cu tensiunile de rupere la compresiune și respectiv la tracțiune σ_{rc}=1130MPa și σ_{rt}=360MPa;
- *Aliaj de aluminiu* Al 2024-T4, cu tensiunea de curgere σ_c=320MPa.

Se cere:

- Să se dimensioneze bara confecționată din cele două materiale;
- Să se determine starea de tensiuni din încastrare, în punctele A, B, C și D.

Rezolvare

La fel ca la problema 4.5, secțiunea periculoasă se află în încastrare, unde eforturile sunt

$$\begin{aligned} T_y &= F = 4,5kN \\ M_x &= Fa = 4,5\cdot 200 = 900kNmm \\ M_z &= FL = 4,5\cdot 150 = 675kNmm \end{aligned} \tag{4.59}$$

Tensiunile corespunzătoare solicitărilor simple sunt prezentate mai jos.

Forfecare (formula lui *Juravski*):

$$\tau'_{xy} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{A}; \quad \tau'_{xy} = \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{\pi d^2} \tag{4.60}$$

Torsiune:

$$\tau''_{xy} = \frac{M_x}{W_p}; \quad \tau''_{xy} = 16 \frac{Fa}{\pi d^3} \tag{4.61}$$

Încovoiere (formula lui *Navier*):

$$\sigma_x = \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma_x = 32 \frac{FL}{\pi d^3} \tag{4.62}$$

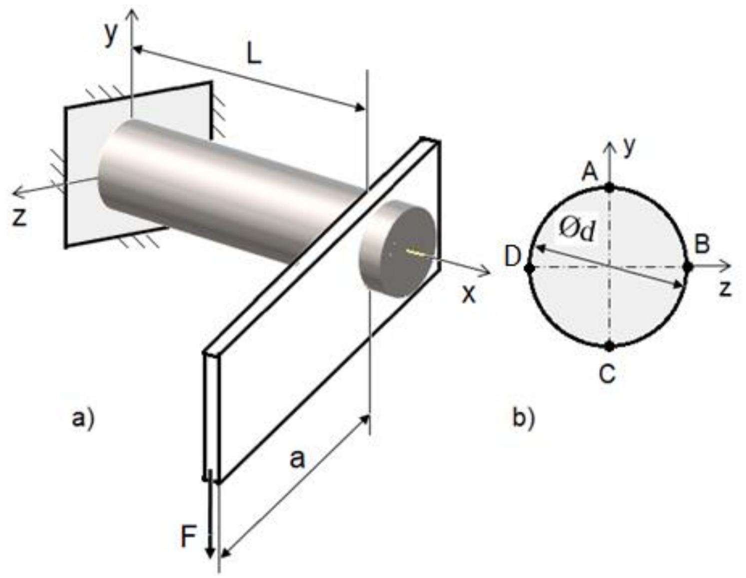


Fig. 4.26. Bara cotită (a) și secțiunea transversală din încastrare (b)

Dimensionare

1. *Bara confecționată din Fc300*

Pentru cedarea fragilă se adoptă teoria tensiunii normale maxime (*Rankine*).

Pentru solicitări statice și cedare fragilă se alege un coeficient de siguranță c=3,3 [Buzdugan G., 1986] și se calculează tensiunea admisibilă

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{rt}}{c}; \quad \sigma_a = \frac{360}{3,3} \approx 110MPa \tag{4.63}$$

Tensiunea normală maximă este

$$\sigma_{\max} = \frac{32FL}{\pi d^3} \le \sigma_a \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{32FL}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4500 \cdot 150}{110\pi}} = 39,69mm \tag{4.64}$$

Pentru bara confecționată din Fc300 se adoptă diametrul d=40mm (STAS 75-90).

2. *Bara confecționată din Al 2024-T4*

Pentru solicitări statice și cedare ductilă se alege un coeficient de siguranță c=1,8 [Buzdugan G., 1986] și se calculează tensiunea admisibilă

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}; \quad \sigma_a = \frac{320}{1,8} \approx 179MPa \tag{4.65}$$

Pentru cedarea ductilă se adoptă mai întâi teoria tensiunii tangențiale maxime (*Tresca*) și se calculează tensiunea echivalentă (se neglijează tensiunea tangențială provenită din forfecare):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{W_p}\right)^2} \tag{4.66}$$

Pentru secțiunea circulară plină se înlocuiește $W_p=2W_z$ și se obține

$$\begin{aligned} \sigma_{ech} &= \frac{\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{W_z} = \frac{32\sqrt{(FL)^2 + (Fa)^2}}{\pi d^3} = \frac{32F\sqrt{L^2 + a^2}}{\pi d^3} \le \sigma_a \\ &\Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{32F\sqrt{L^2 + a^2}}{\pi\sigma_a}}; \ d \ge \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4500\sqrt{150^2 + 200^2}}{179\pi}} \approx 40,0mm \end{aligned} \tag{4.67}$$

Pentru bara confecționată din Al 2024-T4 se adoptă tot diametrul d=40mm.

Se dimensionează acum bara pe baza teoriei energiei modificatoare de formă maxime (*von Mises*):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{W_p}\right)^2} = \frac{\sqrt{4M_z^2 + 3M_x^2}}{2W_z}$$

$$\sigma_{ech} = \frac{16F\sqrt{4L^2 + 3a^2}}{\pi d^3} \le \sigma_a \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{16F\sqrt{4L^2 + 3a^2}}{\pi \sigma_a}} \tag{4.68}$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4500\sqrt{4 \cdot 150^2 + 3 \cdot 200^2}}{179\pi}} \approx 38,9mm$$

Se adoptă tot d=40mm, dimensiune admisă de STAS 75-90.

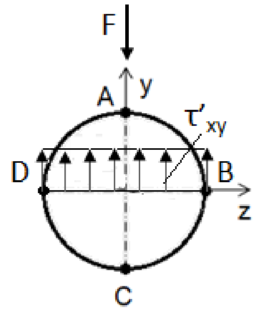
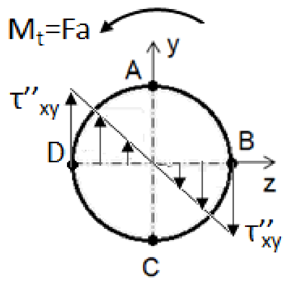
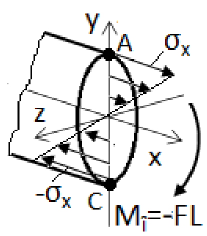
Observații:

- Bara confecționată din Al 2024-T4 a fost dimensionată pe baza teoriilor *Tresca* și *von Mises* și au rezultat valori apropiate. Ținând cont de recomandările STAS 75-90 s-a adoptat aceeași valoare pentru diametrul *d* la dimensionarea cu ambele teorii;
- Deși barele confecționate din Fc300 și Al 2024-T4 au același diametru, prima cedează fragil și are c=3,3 (față de σ_{rt}) iar a doua cedează ductil și are c=1,8 (față de σ_c).

Tensiunea normală provenită din încovoiere este nulă pe axa Oz, maximă în A (tracțiune) și minimă în C (compresiune). Tensiunea tangențială provenită din forfecare este maximă pe axa Oz și nulă în A și C (conform formulei lui *Juravski*) și se opune forței exterioare *F*. Tensiunea tangențială provenită din torsiune este maximă la periferia cercului, tangentă la acesta și creează un cuplu contrar momentului de torsiune care încarcă bara (tab. 4.1). Având în vedere cele de mai sus, se calculează tensiunile în punctele solicitate.

În tabelul 4.1 se prezintă tensiunile tangențiale provenite din forfecare și respectiv torsiune și apoi se calculează tensiunile rezultante. Tensiunile provenite din solicitările simple au fost calculate mai sus.

Tab. 4.1. Tensiuni în încastrare (Problema 4.6)

<table>
<tr><td rowspan="2">Solicitare</td><td colspan="5">Tensiuni</td></tr>
<tr><td>Repartiție</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>Forfecare</td><td>
</td><td>0</td><td>τ'_{xy}</td><td>0</td><td>τ'_{xy}</td></tr>
<tr><td>Torsiune</td><td>
</td><td>τ''_{xy}</td><td>τ''_{xy}</td><td>τ''_{xy}</td><td>τ''_{xy}</td></tr>
<tr><td>Încovoiere</td><td>
</td><td>σ_x</td><td>0</td><td>$-\sigma_x$</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tensiuni la solicitarea compusă</td><td>τ''_{xy}
σ_x</td><td>$\tau'_{xy} - \tau''_{xy}$</td><td>τ''_{xy}
$-\sigma_x$</td><td>$\tau'_{xy} + \tau''_{xy}$</td></tr>
</table>

Se calculează tensiunile tangențiale rezultante maxime din punctul D

$$\tau_{rez} = \tau''_{xy} + \tau'_{xy} = \frac{M_x}{W_p} + \frac{4}{3}\cdot\frac{T_y}{A} = \frac{16Fa}{\pi d^3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{4F}{\pi d^2} = \frac{16F}{\pi d^2}\left(\frac{a}{d} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\tau_{rez} = \frac{16\cdot 4500}{\pi\cdot 40^2}\left(\frac{200}{40} + \frac{1}{3}\right) = \frac{45}{\pi}(5 + 0{,}33) \approx 76{,}4 MPa \qquad (4.69)$$

Problema 4.7

La bara din figura 4.24a se adaugă forța F/3, care acționează pe direcția barei 3-2 (fig. 4.27). Să se traseze diagramele de eforturi pentru această încărcare. Barele au secțiune circulară.

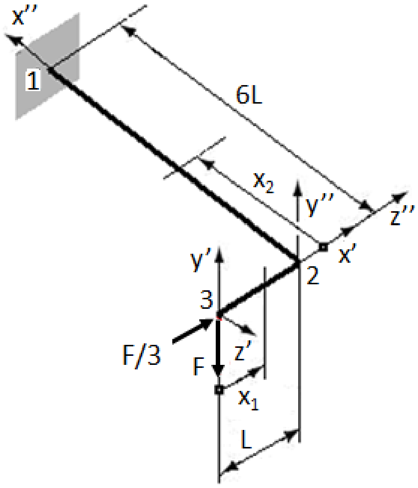


Fig. 4.27. *Bară cotită (cadru) încărcată cu forțele F și F/3*

Rezolvare

Eforturile din bare sunt

$$
\begin{aligned}
&N(x_1) = -\frac{F}{3}; \quad T_y(x_1) = -F; \quad M_z(x_1) = -Fx_1; \quad x_1 \in [0, L] \\
&N(x_2) = 0; \quad T_y(x_2) = -F; \quad T_z(x_2) = -\frac{F}{3}; \quad x_2 \in [0, 6L] \qquad (4.70) \\
&M_z(x_2) = -Fx_2; \quad M_y(x_2) = -\frac{F}{3}x_2; \quad M_x(x_2) = FL
\end{aligned}
$$

Indicele arată direcția după care este orientat efortul respectiv. M_z și M_y sunt momente încovoietoare, iar M_x moment de torsiune. Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 4.28. Diagramele de moment încovoietor sunt prezentate în planul în care are loc deplasarea.

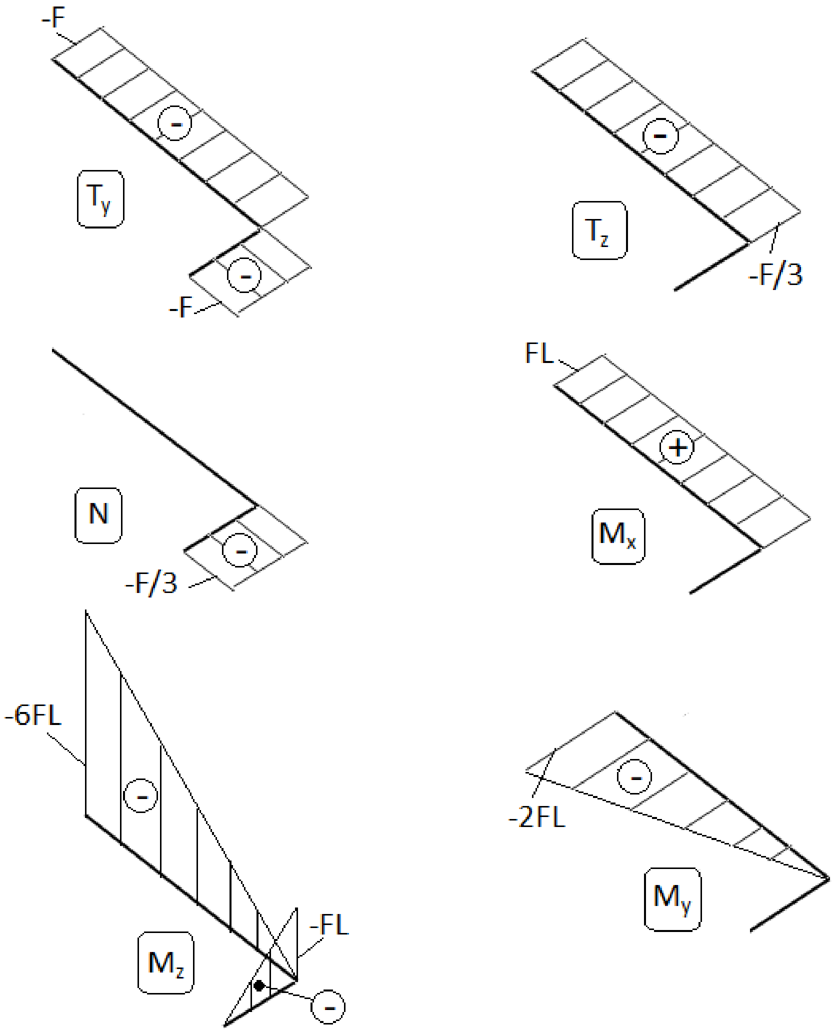


Fig. 4.28. Diagramele de eforturi pentru bara din fig. 4.27

Deoarece barele de secțiune circulară nu sunt supuse la încovoiere oblică, diagramele M_z și M_y se compun vectorial în fiecare punct și astfel se obține diagrama de moment încovoietor rezultant M_{rez} (fig. 4.29). Momentul rezultant maxim se determina cu teorema lui *Pitagora:*

$$M_{rez.\max} = \sqrt{(-2FL)^2 + (-6FL)^2} = \sqrt{40}FL \approx 6,325FL \tag{4.71}$$

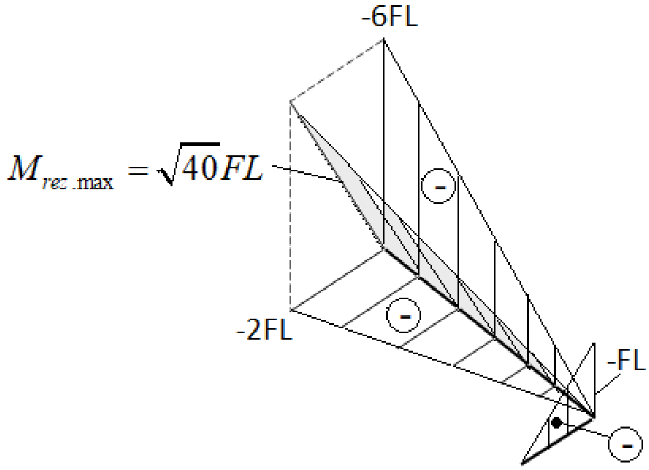


Fig. 4.29. Trasarea diagramei M_{rez}
(M_z este în plan vertical, M_y în plan orizontal)

Calculul de rezistență se face pentru solicitarea la încovoiere cu torsiune, cu momentul încovoietor rezultant maxim și momentul de torsiune.

4.5.1. Calculul arborilor de transmisie

Arborii de transmisie au rolul de transmitere a puterii, prin intermediul roților dințate, a lanțurilor cu role (cazul bicicletei) sau a curelelor de transmisie.

Calculul arborilor prezentat aici este unul de predimensionare. Dimensionarea se face la disciplina Organe de Mașini și mai cuprinde calcule la solicitări variabile, la vibrații, de rigiditate, ține cont de alte influențe etc.

Se prezintă mai jos calculul unui arbore intermediar de transmisie dintr-o cutie de viteze. Arborele OD este rezemat pe doua lagăre, B și D. Pentru simplificare roțile dințate au fost prezentate în figura 4.30 prin suprafețele lor de rostogolire.

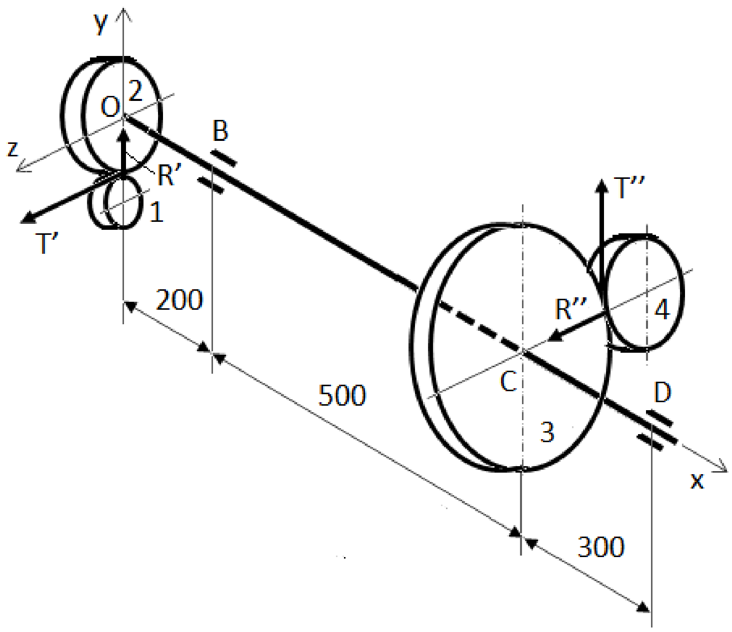


Fig. 4.30. Arbore intermediar dintr-o cutie de viteze

Arborele primește mișcarea de la pinionul 1, care angrenează (în planul xOy) cu roata dințată 2, cu raza R_2=100mm. Pe arbore se mai află roata 3, cu raza R_3=200mm, care angrenează (în planul xOz) cu roata 4, căreia îi transmite mișcarea de rotație. Toate roțile au dantura dreaptă. În cazul angrenajelor cu dantura înclinată apar și forțe axiale (fig. 4.31). Tensiunea admisibilă este σ_a=200MPa. Se cunosc P=3kW, n=95,5rot/min. Din ecuația de echilibru a momentelor de torsiune se determină forțele tangențiale T’ și T” care apar în angrenări. Componentele pe direcție radială se determină știind unghiul de angrenare α=20°. Pentru calculul lui M_t se utilizează unitățile de măsura: M_t [Nm]; P[W]; n[rot/min]:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{3000}{95,5} \approx 300\,Nm$$
$$T' \cdot R_2 = T'' \cdot R_3 = M_t; \quad R' = T' \cdot \tan\alpha; \quad R'' = T'' \cdot \tan\alpha \tag{4.72}$$

Înlocuind rezultă: $T' \approx 3kN$; $T'' \approx 1{,}5kN$; $R' \approx 1kN$; $R'' \approx 0{,}5kN$.

Fig. 4.31. Arbore de transmisie cu roți dințate cu dantură înclinată

Pentru calculul reacțiunilor lagărele B și D se înlocuiesc cu reazeme simple în cele doua plane (xOy și xOz). Diagramele de eforturi în cele doua plane sunt prezentate în figura 4.32.

Din ecuațiile de echilibru se calculează reacțiunile

$$\begin{aligned} V_B &= -1812{,}5N; \quad V_D = -687{,}5N \\ H_B &= -3937{,}5N; \quad H_D = -437{,}5N \end{aligned} \tag{4.73}$$

Se trasează apoi diagramele de momente încovoietoare M_z, M_y și de moment de torsiune M_x.

Deoarece secțiunile cele mai solicitate sunt B și C, s-au determinat momentele încovoietoare rezultante numai în aceste secțiuni. În continuare se va lucra numai cu momentul încovoietor rezultant maxim (cel din secțiunea B) și momentul de torsiune (fig. 4.33)

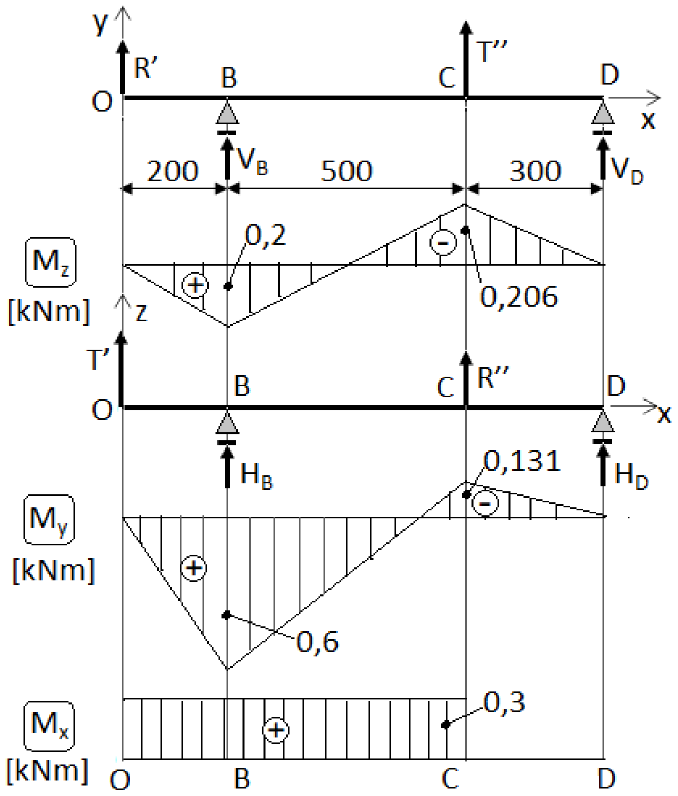


Fig. 4.32. Diagramele de eforturi pentru arborele din fig. 4.30

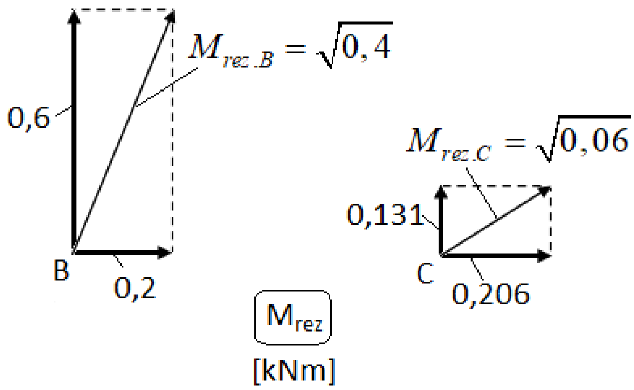


Fig. 4.33. Determinarea momentelor încovoietoare rezultante

Secțiunea periculoasă este în C, unde momentul încovoietor rezultant este maxim și există un moment de torsiune. Utilizând teoria de stare limită *Tresca* (τ_{max}) se poate scrie

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_{rez.\max}^2 + M_x^2}}{W_z} \le \sigma_a$$

$$\sqrt{M_{rez.\max}^2 + M_x^2} = \sqrt{0,4 + 0,3^2} = 0,7kNm = 7 \cdot 10^5\, Nmm$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \tag{4.74}$$

$$\frac{32 \cdot 7 \cdot 10^5}{\pi d^3} \le 200 \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{224 \cdot 10^5}{200\pi}} \Rightarrow d \ge 32,9mm$$

Se adoptă valoarea standardizată d=34mm (STAS 75-90).

Concluzii:

- Din motive constructive arborii nu au o secțiune constantă pe toată lungimea și diametrul lor variază în trepte (pe tronsoane);
- Dimensiunile finale ale tronsoanelor arborilor vor fi stabilite în urma calculului la *rigiditate*, *oboseală* și la *vibrații*;
- Calculul la oboseală ține cont de materialul și volumul arborelui, calitatea suprafețelor și prezența concentratorilor de tensiuni (canale de pană, raze de racordare între tronsoane, rulmenți presați pe arbore etc.);
- Mai sus s-au prezentat numai elemente de bază pentru calculul de predimensionare a arborilor. Calculul complet este fundamentat la disciplina de *Organe de mașini*, unde se utilizează și diferiți coeficienți de influență stabiliți experimental.

4.6. PROBLEME RECAPITULATIVE

Problema 4.8

Să se dimensioneze bara cu secțiunea circulară din figura 4.34, știind că F=6kN, L=350mm și σ_a=190MPa.

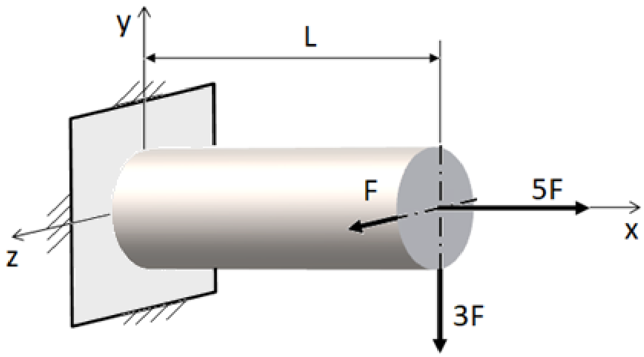


Fig. 4.34. Bară în consolă încărcată cu trei forțe

Rezolvare

Deoarece la barele cu secțiune circulară nu apare încovoierea oblică, se determină forța rezultantă $R = \sqrt{10}F$ (fig. 4.35). Această forță produce un moment încovoietor care este maxim în încastrare. Rămâne forța 5F care solicită bara la tracțiune. Se calculează unghiul α

$$\tan\alpha = \frac{3F}{F} = 3 \Rightarrow \alpha \approx 71,565° \tag{4.75}$$

Se trasează apoi diagramele de eforturi (fig. 4.36).

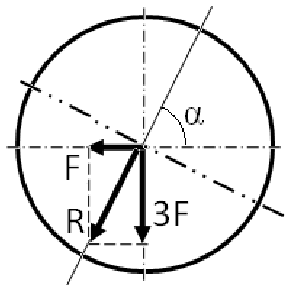


Fig. 4.35. Compunerea forțelor care dau moment încovoietor

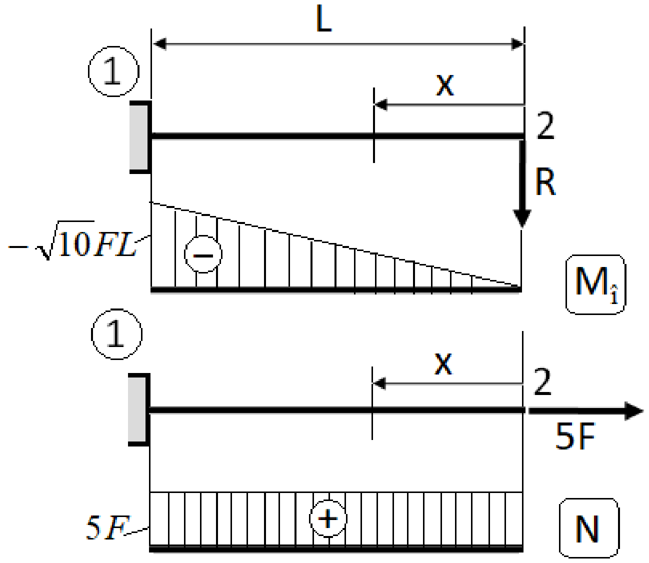


Fig. 4.36. Diagramele de eforturi pentru bara din fig. 4.34

De la încovoiere cu tracțiune rezultă tensiuni normale pe aceeași fațetă și cu ajutorul lor se calculează tensiunea rezultantă în încastrare, unde momentul încovoietor este maxim.

$$\sigma_{rez.\max} = \sigma_x^{(t)} + \sigma_x^{(i)} = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_z} \le \sigma_a$$

$$\sigma_{rez.\max} = 5F \cdot \frac{4}{\pi d^2} + \sqrt{10}FL \cdot \frac{32}{\pi d^3} \le \sigma_a \tag{4.76}$$

$$\sigma_{rez.\max} = \frac{4F}{\pi d^2}\left(5 + 8\sqrt{10}\,\frac{L}{d}\right) \le \sigma_a$$

Deoarece L>>d, tensiunile provenite din încovoiere sunt sensibil mai mari decât cele provenite din tracțiune. În acest caz se poate evita rezolvarea unei ecuații de gardul al treilea făcând o predimensionare la încovoiere, urmată de majorarea diametrului și de o verificare la solicitarea compusă.

$$32\sqrt{10}FL\cdot\frac{1}{\pi d^3}\le\sigma_a\Rightarrow d\ge\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{10}FL}{\pi\sigma_a}}$$
$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32\sqrt{10}\cdot 6000\cdot 350}{190\pi}}\approx 70,87mm \tag{4.77}$$

Se majorează diametrul la d=72mm și se verifică la solicitarea compusă

$$\sigma_{rez.\max}=\frac{4F}{\pi d^2}\left(5+8\sqrt{10}\,\frac{L}{d}\right)$$
$$\sigma_{rez.\max}=\frac{4\cdot 6000}{\pi\cdot 72^2}\left(5+8\sqrt{10}\,\frac{350}{72}\right)\approx 188,6MPa\le\sigma_a=190MPa \tag{4.78}$$

Verificarea fiind făcută, se adoptă d=75mm, din STAS 75-90.

În figura 4.37 se prezintă variația tensiunilor în secțiunea din încastrare. Tensiunea rezultantă minimă se calculează scăzând din tensiunile de la tracțiune pe cele de la încovoiere

$$\sigma_{rez.\min}=\frac{4F}{\pi d^2}\left(5-8\sqrt{10}\,\frac{L}{d}\right);\quad \sigma_{rez.\min}\approx -173,86MPa \tag{4.79}$$

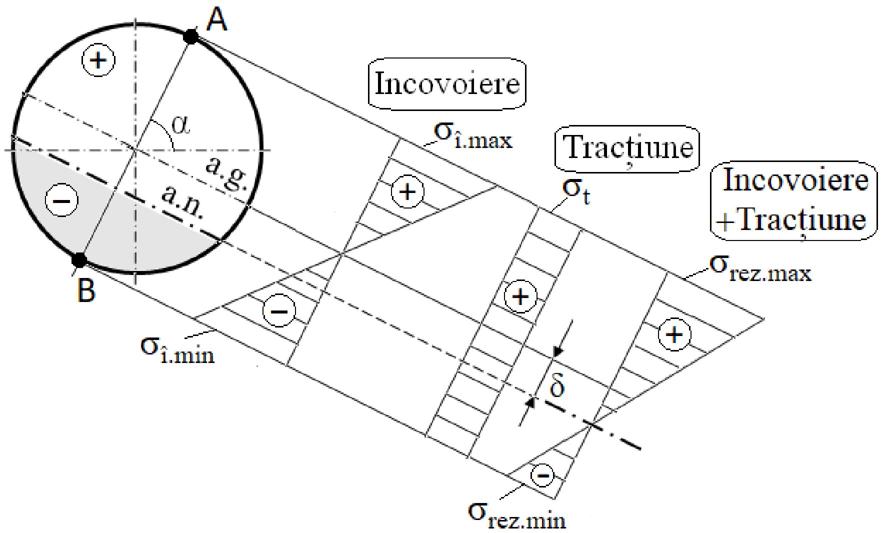


Fig. 4.37. Variația tensiunilor în secțiunea infinit vecină încastrării (a.g.=axa geometrică; a.n.=axa neutră)

Problema 4.9

Fie bara de oțel încastrată la bază și încărcată cu forțele F_1=50kN, F_2=60kN și F_3=25kN, ca în figura 4.38. Să se determine tensiunile și direcțiile principale, precum și tensiunile tangențiale extreme în punctul P.

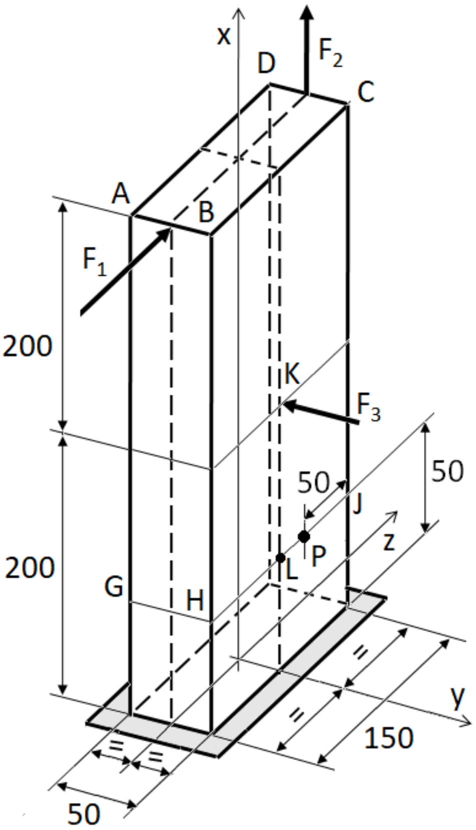


Fig. 4.38. Bară încastrată și solicitată cu forțe care acționează în planele de simetrie

Rezolvare

Se scriu eforturile în secțiunea care conține punctul P și se reprezentă în figura 4.39. Momentele sunt considerate pozitive când burghiul drept înaintează în sensul pozitiv al unei axe de referință. Pentru a evita încărcarea figurii cu notații, în cele ce urmează brațul momentului poate fi desemnat și printr-un segment paralel și congruent. Cu toate acestea, definiția momentului trebuie avută permanent în vedere. În figura 4.39 s-a reprezentat și un element de volum construit în jurul punctului P.

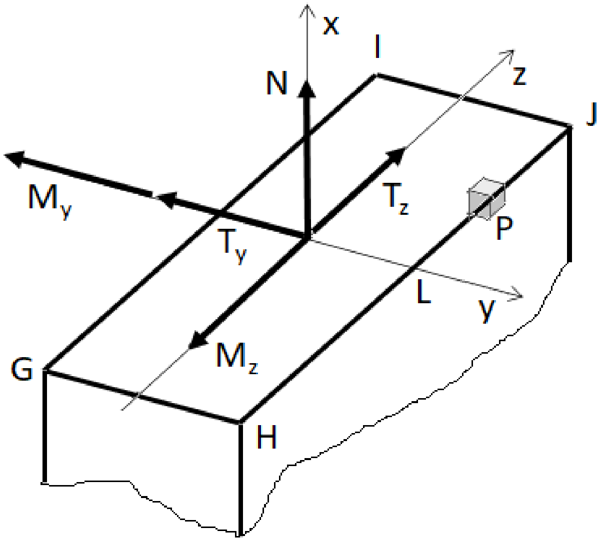


Fig. 4.39. Eforturi în secțiunea care conține punctul P

Eforturile au următoarele valori

$$
\begin{aligned}
&N = F_2 = 60kN; \quad T_y = F_3 = 25kN; \quad T_z = F_1 = 50kN \\
&M_z = -F_3 \frac{[KL]}{2} = -25 \cdot 0,15 = -3,75kNm \\
&M_y = F_2 \frac{[AD]}{2} - F_1 [AG] \\
&M_y = 60 \cdot 0,075 - 50 \cdot 0,35 = -13kNm
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

Caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale sunt

$$
\begin{aligned}
&A = 150 \cdot 50 = 7500mm^2 = 7,5 \cdot 10^{-3} m^2 \\
&I_y = \frac{50 \cdot 150^3}{12} = 14,1 \cdot 10^6 mm^4 = 14,1 \cdot 10^{-6} m^4 \\
&I_z = \frac{150 \cdot 50^3}{12} \approx 1,56 \cdot 10^6 mm^4 = 1,56 \cdot 10^{-6} m^4
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Se calculează apoi tensiunile din punctul P (fig. 4.40).

Tensiunile normale sunt

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{|M_z| y_P}{I_z} - \frac{|M_y| z_P}{I_y}$$
$$\sigma_x = \frac{6 \cdot 10^4}{50 \cdot 150} + \frac{3,75 \cdot 10^6 \cdot 25}{1,56 \cdot 10^6} - \frac{13 \cdot 10^6 \cdot 25}{14,1 \cdot 10^6} \approx 45 MPa \tag{4.82}$$

Tensiunile tangențiale din punctul P se calculează cu formula lui *Juravski* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} = \frac{T_z \left(A_1 z_{G1}\right)}{[GH] I_y}; \quad \tau_{xz} = \frac{5 \cdot 10^4 \left(50^3\right)}{50 \cdot 14,1 \cdot 10^6} \approx 8.87 MPa \tag{4.83}$$

Forța tăietoare T_y nu produce tensiuni în punctul P deoarece acesta se află pe o suprafață liberă ($\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$).

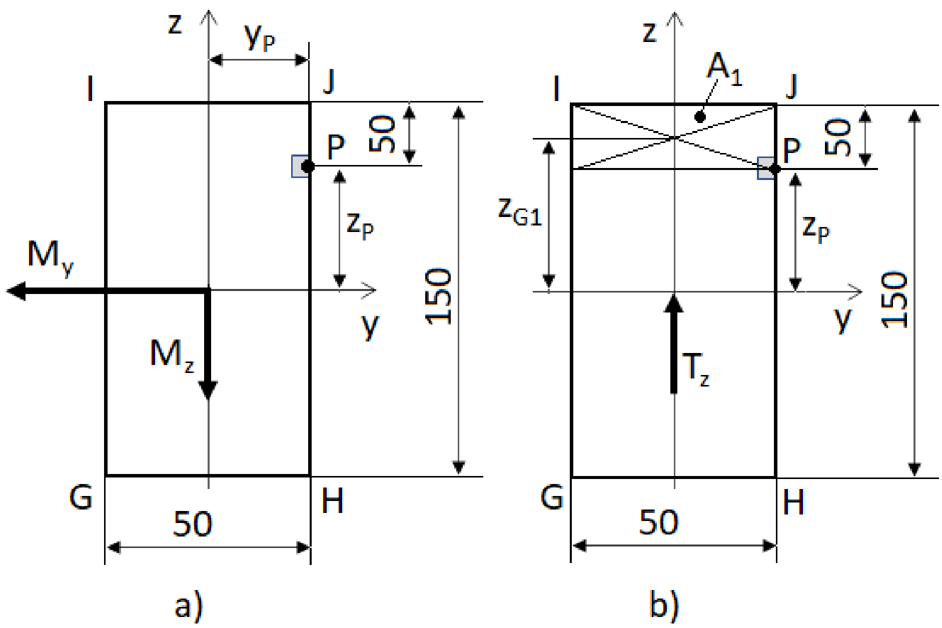


Fig. 4.40. Scheme pentru calculul tensiunii normale (a) și tangențiale (b) în punctul P

Se trasează cercul lui *Mohr* pentru starea de tensiuni din P (fig. 4.41).

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2};\quad \sqrt{22,5^2+8,87^2}\approx 24,2MPa$$

$$\sigma_1=[OS_1]=[OO_1]+R;\quad \sigma_1=22,5+24,2=46,7MPa \qquad (4.84)$$

$$\sigma_2=[OS_2]=[OO_1]-R;\quad \sigma_2=22,5-24,2=-1,7MPa$$

$$\tau_{\max}=R=24,2MPa;\quad \tau_{\max}=-R=-24,2MPa;$$

Se calculează tensiunea *von Mises* în punctul P și unghiul θ_p

$$\sigma_{ech}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{ech}=\sqrt{46,7^2+(-1,7)^2-46,7(-1,7)}\approx 47,6MPa \qquad (4.85)$$

$$\tan(2\theta_p)=\frac{8,87}{22,5}\approx 0,394\Rightarrow \theta_p\approx 10,76° \qquad (4.86)$$

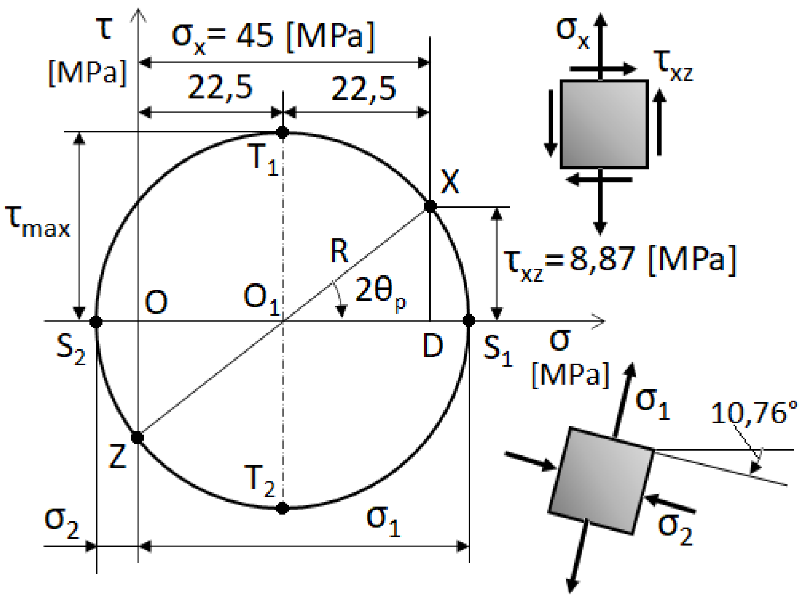


Fig. 4.41. Cercul lui Mohr pentru starea de tensiuni din punctul P (sunt figurate tensiunile în sistemul xOz și în sistemul 1O2)

4.7. CONCLUZII:

1. Calculul la solicitări compuse se desfășoară după una dintre cele două modalități, funcție de starea de tensiuni:
    - Când exista doar tensiuni care acționează pe aceeași fațetă și aceeași direcție se calculează prin sumare algebrică o tensiune rezultantă care nu trebuie să o depășească pe cea admisibilă;
    - Pentru toate celelalte cazuri se calculează o tensiune echivalentă, cu ajutorul unei teorii de stare limită. Tensiunea echivalentă trebuie sa fie mai mică sau egală cu tensiunea admisibilă;
2. Succesul calculului la solicitări compuse, fie că starea de tensiuni multiaxială este determinată analitic sau numeric (cu Metoda Elementelor Finite), depinde în bună măsura de alegerea unei teorii de stare limită corespunzătoare materialului și stării de tensiuni cu care se lucrează. Această alegere nu este întotdeauna ușor de făcut, întrucât există în prezent peste 200 de astfel de teorii. Totuși, doar o parte dintre aceste teorii sunt frecvent utilizate.
3. În capitolele următoare vor fi prezentate și alte calcule la solicitări compuse. Acestea vor fi dedicate unor anumite categorii de corpuri (bare curbe, vase sub presiune etc.).

CAP. 5

CADRE

Colajul de la acest capitol a fost realizat cu ajutorul:

https://bikefair.org/blog/guide-how-to-choose-the-right-bike-size

https://www.indiamart.com/proddetail/gantry-cranes-1202337097.html

5. CADRE

În practică se întâlnesc frecvent structuri plane sau spațiale formate din bare drepte cu diverse direcții, îmbinate între ele prin *noduri*. În mod convențional nodurile sunt considerate rigide, adică nu permit deplasări liniare sau rotiri ale unei bare față de alta. Asemenea structuri se numesc *bare cotite* sau *cadre*. Spre deosebire de mecanisme, cadrele permit numai deplasări elastice.

La fel ca barele drepte, cadrele pot fi static determinate sau static nedeterminate. În barele cadrelor apar solicitări compuse, în special din categoria solicitări axiale cu încovoiere. În cazul cadrelor cu bare lungi supuse la compresiune trebuie făcut un calcul la flambaj și de obicei acesta furnizează dimensiunile finale ale barelor. Totuși flambajul structurilor este o problemă mai complicată, care depășește cadrul acestei prezentări. Problema flambajului cadrelor poate fi rezolvată fie analitic (pornind de la studiul formei deformate a cadrului) fie numeric, prin Metoda Elementelor Finite. În continuare se va prezenta, cu ajutorul unor exemple, trasarea diagramelor de eforturi la cadre.

5.1. CADRE STATIC DETERMINATE

Regulile de semn pentru trasarea diagramelor la cadre sunt aceleași ca la bare drepte, cu excepția faptului că la trasarea diagramei de moment încovoietor se dublează conturul cadrului cu o fibră punctată. Dacă bara se deformează astfel încât fibra punctată se află la exteriorul curburii (este tracționată) momentul este considerat pozitiv. Când bara se deformează astfel încât fibra punctată află la interiorul curburii (este comprimată) momentul este considerat negativ. În figura 5.1 se observă că eforturile moment și forță normală sunt *simetrice* față de o axă, iar forțele tăietoare sunt simetrice față de un punct sau *antisimetrice*. Acest lucru are consecințe asupra calculului reacțiunilor și a trasării diagramelor de eforturi astfel:

- Structurile simetrice, cu rezemări și încărcări simetrice au reacțiunile simetrice, diagramele de moment încovoietor și forțe axiale simetrice și diagrama de forțe tăietoare antisimetrică;
- Structurile simetrice cu încărcări antisimetrice au recțiunile antisimetrice, diagramele de moment încovoietor și forțe axiale antisimetrice și diagrama de forțe tăietoare simetrică.

Trebuie menționat faptul că simetria în Rezistența Materialelor implică și *simetria deformațiilor. Pentru realizarea acestui lucru barele simetrice trebuie sa aibă aceeași secțiune transversală și să fie confecționate din același material*.

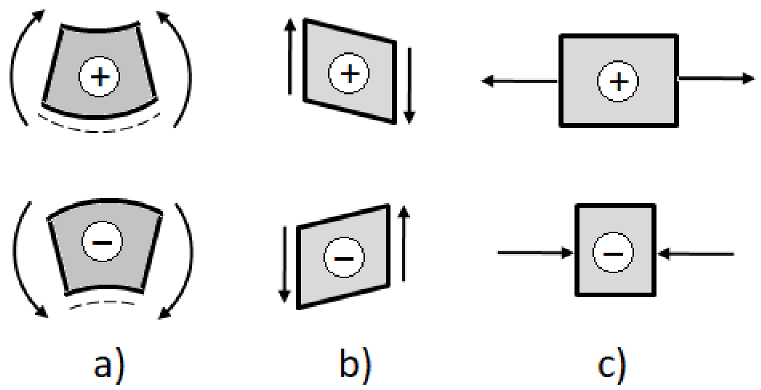


Fig. 5.1. Regula de semn pentru eforturi: moment încovoietor (a), forță tăietoare (b) și forță normală (c)

Exemplul 5.1

Să se traseze diagramele de eforturi la cadrul din figura 5.2a.

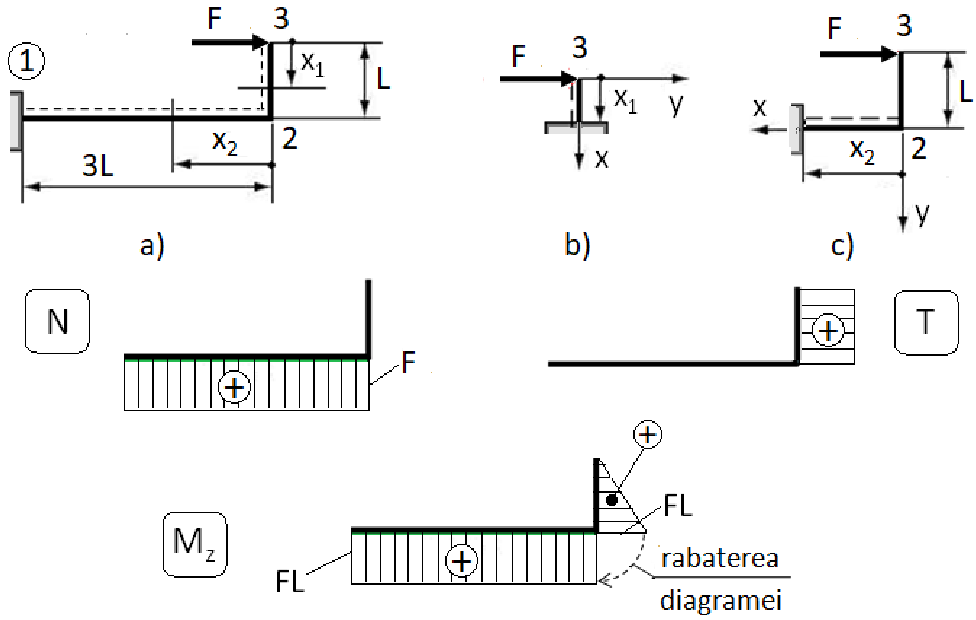


Fig. 5.2. Trasarea diagramelor la un cadru plan format din două bare

Pentru cadrul în consolă se fac secțiuni pornind dinspre capătul liber, pentru a evita calculul reacțiunilor. Se dublează cadrul cu o linie punctată.

La fel ca la bare drepte, se face câte o secțiune în fiecare regiune (3-2 și respectiv 2-1), se izolează o porțiune din structură, care este considerată încastrată în secțiune și se scriu eforturile față de încastrare (fig. 5.2b, 5.2c). La stabilirea semnului momentului încovoietor se consideră numai fibra punctată de pe bara secționată

$$\begin{aligned} &N(x_1)=0; \quad T_y(x_1)=F; \quad M_z(x_1)=Fx_1 \\ &N(x_2)=F; \quad T_y(x_2)=0; \quad M_z(x_2)=FL \end{aligned} \tag{5.1}$$

Se reprezintă grafic aceste funcții, pe desenul cadrului. Se observă că în nodul 2 se obține aceeași valoare a momentului încovoietor M_z în ambele bare.

Acest lucru reprezintă și un criteriu de verificare a diagramei de moment în nodurile care fac joncțiunea dintre două bare. Criteriul se mai numește *rabaterea digramei de moment*. Din diagramele de eforturi se observă că barele cadrului sunt supuse la următoarele solicitări compuse:

- Bara 1-2 este supusă la tracțiune cu încovoiere;
- Bara 2-3 este supusă la forfecare (care poate fi neglijată în cazul barelor lungi) cu încovoiere.

Exemplul 5.2

Să se traseze diagramele de eforturi la cadrul din figura 5.3.

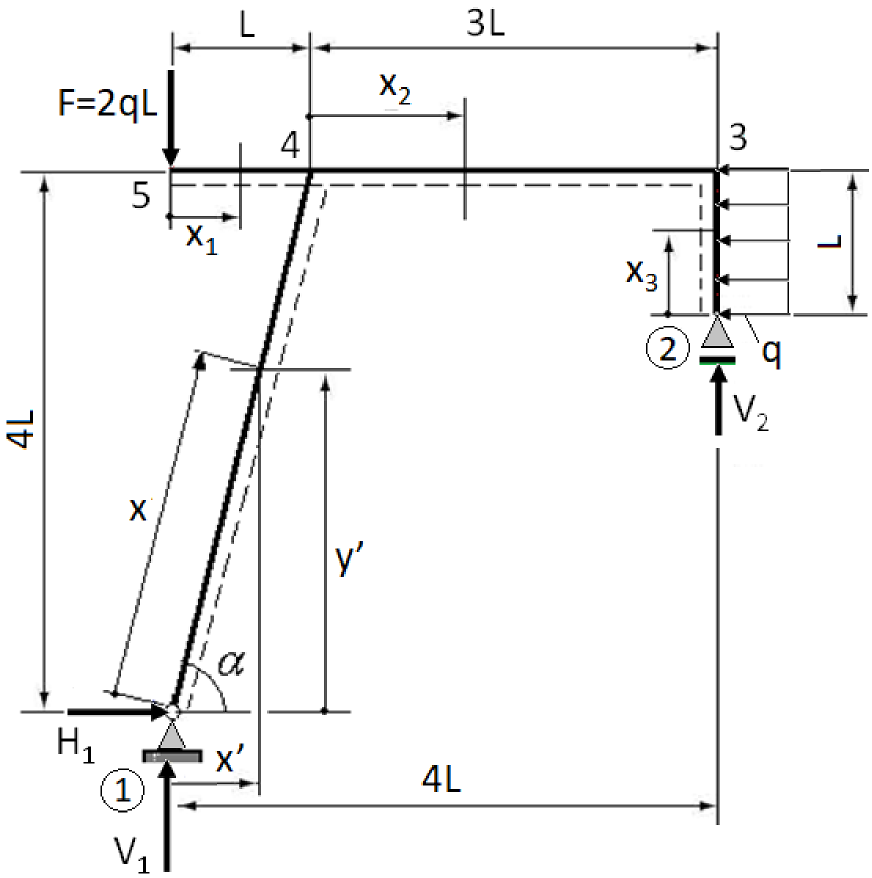


Fig. 5.3. Cadru având un nod (4) care face joncțiunea între trei bare

Trasarea diagramelor de eforturi implică parcurgerea următoarelor etape:

1. Se împarte cadrul în regiuni;
2. Se figurează și se calculează reacțiunile;
3. Se dublează cadrul cu o fibră punctată;
4. Se face o secțiune în fiecare regiune și se scriu eforturile;
5. Se trasează diagramele de eforturi;
6. Verificarea diagramelor de eforturi.

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0 \Leftrightarrow H_1 - qL = 0 \Rightarrow H_1 = qL$$
$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow V_1 + V_2 - F = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - 2qL = 0$$
$$\sum M_{(1)} = 0 \Leftrightarrow V_2 \cdot 4L + qL \cdot 3,5L = 0 \Rightarrow$$
$$V_2 = -\frac{7}{8}qL = -0,875qL \tag{5.2}$$
$$\sum M_{(2)} = 0 \Leftrightarrow V_1 \cdot 4L - H_1 \cdot 3L - F \cdot 4L - qL \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$V_1 == \frac{23}{8}qL = 2,875qL$$

Se observă că reacțiunile V_1 și V_2 astfel calculate verifică ecuația a doua de echilibru (suma proiecțiilor forțelor pe verticală).

Trasarea digramelor de eforturi

Se face câte o secțiune prin fiecare regiune și se scriu eforturile (fig. 5.4). Se calculează ipotenuza triunghiului 1-4-4' și apoi funcțiile trigonometrice ale unghiului α (fig. 5.4d):

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \tag{5.3}$$

Eforturile din barele cadrului sunt calculate în tabelul 5.1.

Se trasează apoi diagramele de eforturi (fig. 5.5). În final se verifică diagramele de eforturi.

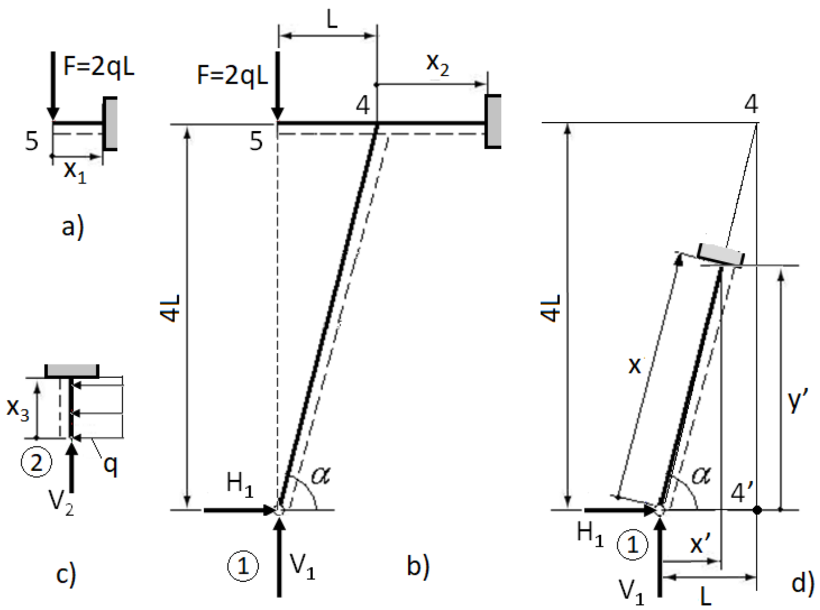


Fig. 5.4. Secționări în vederea scrierii eforturilor

Tab. 5.1. Eforturile din barele cadrului din fig. 5.3

Bara	N	T	M_z
5-4	$N(x_1)=0$	$T(x_1)=-F$ $T(x_1)=-2qL$	$M_z(x_1)=-Fx_1$ $M_z(x_1)=-2qLx_1$
4-3	$N(x_2)=-H_1$ $N(x_2)=-qL$	$T(x_2)=V_1-F$ $T(x_2)=0{,}875qL$	$M_z(x_2)=V_1(L+x_2)-$ $-H_1\cdot 4L-F(L+x_2)$ $M_z(x_2)=0{,}875qLx_2-$ $3{,}125qL^2$
2-3	$N(x_3)=-V_2$ $N(x_3)=0{,}875qL$	$T(x_3)=qx_3$	$M_z(x_3)=-\dfrac{qx_3^2}{2}$
1-4	$N(x)=-H_1\cos\alpha$ $-V_1\sin\alpha$ $N(x)\approx-3{,}032qL$	$T(x)=-H_1\sin\alpha$ $+V_1\cos\alpha$ $T(x)=-0{,}273qL$	$M_z(x',y')=V_1x'-H_1y'$ $x'=x\cos\alpha;\quad y'=x\sin\alpha$ $M_z(x)=-0{,}273qLx$

Variabilele din tabelul 5.2 iau valori în următoarele intervale: $x_1 \in [0, L]$; $x_2 \in [0, 3L]$; $x_3 \in [0, L]$; $x \in [0, \sqrt{17}L]$.

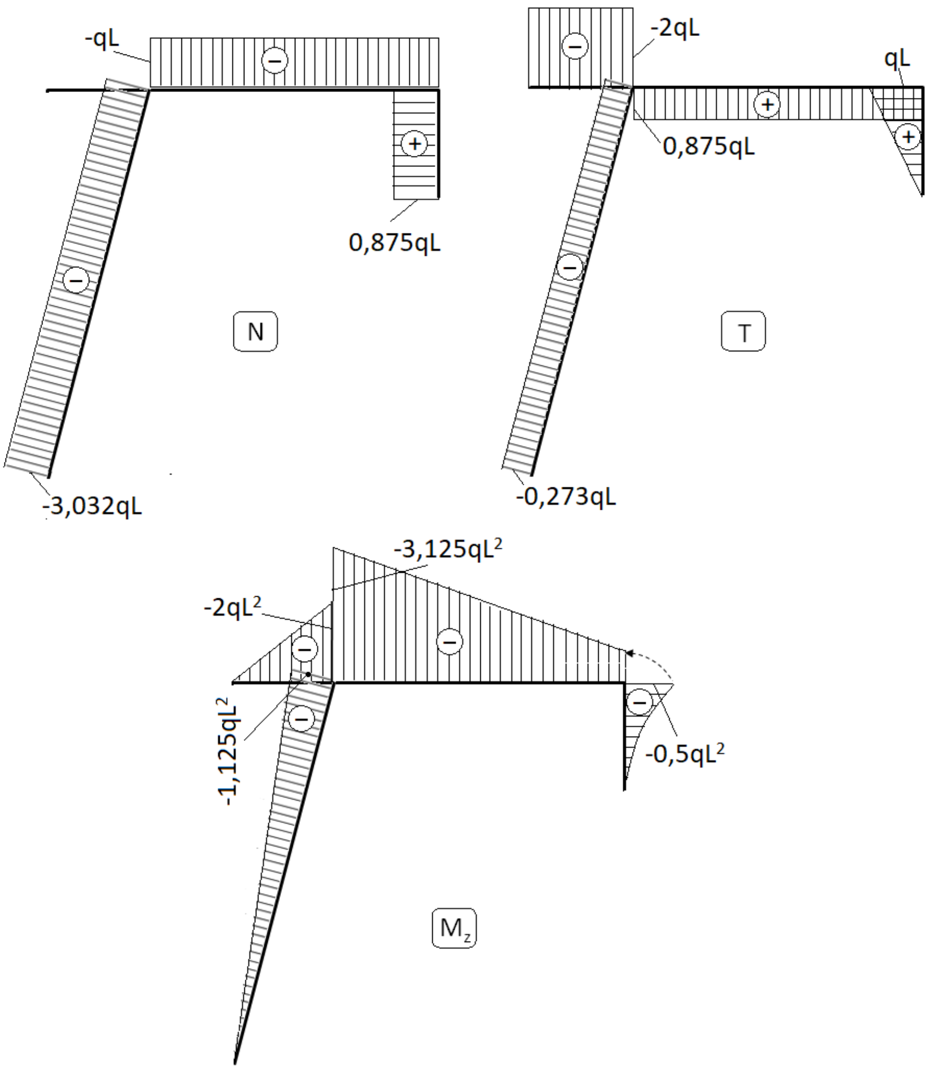


Fig. 5.5. Diagramele de eforturi pentru cadrul din fig. 5.3

Verificarea diagramelor:

- Forța tăietoare este derivata momentului încovoietor și din acest motiv pot fi făcute aceleași verificări ca la barele drepte;
- La nodurile formate din două bare are loc rabaterea diagramei de moment încovoietor (nodul 3);
- Se verifică echilibrul nodurilor formate din mai mult de două bare (nodul 4) astfel: se izolează o vecinătate infinit mică a nodului, cu porțiunile de bară și fibrele punctate aferente. Cu regula fibrei punctate se stabilește sensul momentului încovoietor din fiecare bară. Acestor momente li se atribuie valorile din infinita vecinătate a nodului (în modul) și se verifica dacă nodul este în echilibru (fig. 5.6).

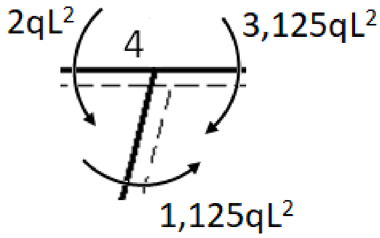


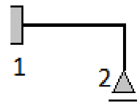
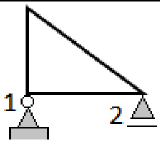
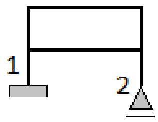
Fig. 5.6. Verificarea echilibrului unui nod în care se întâlnesc mai mult de două bare

5.2. CADRE STATIC NEDETERMINATE

La fel ca la bare drepte, se stabilește gradul de nedeterminare ca diferență dintre numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru: $GN = NN - NE$. După cum se știe, pentru structuri plane numărul ecuațiilor de echilibru este trei. Pentru ridicarea nedeterminării unui sistem trebuie să se scrie ecuațiile de echilibru completate cu un număr suplimentar de ecuații (egal cu gradul de nedeterminare *GN*) provenite din studiul deformației sistemului.

Cadrele pot fi static nedeterminate exterior (necunoscutele sunt reacțiuni), static nedeterminate interior (necunoscutele sunt eforturi) și static nedeterminate interior și exterior (necunoscutele sunt reacțiuni și eforturi). În tabelul 5.2. se face o clasificare a cadrelor static nedeterminate.

Tab. 5.2. Clasificarea cadrelor static nedeterminate

Cadre static nedeterminate	Exemple		
	Figura	Necunoscute	Grad nedeterminare
EXTERIOR		V_1, H_1, M_1, V_2 (NN=4)	GN=4-3=1
INTERIOR		V_1, H_1, V_2, N, T M_z (NN=6)	GN=6-3=3
EXTERIOR ȘI INTERIOR		V_1, H_1, M_1, V_2, N, T, M_z (NN=7)	GN=7-3=4

Gradul de nedeterminare poate fi redus dacă sistemul este simetric sau antisimetric, așa cum se arată în tabelul 5.3.

Tab. 5.3. Efectul simetriei/antisimetriei asupra diagramelor de eforturi

Sisteme	Diagrame			Eforturi pe axa de simetrie/ antisimetrie
	N	T	M_z	
Simetrice	*Simetrică*	Antisimetrică	*Simetrică*	$T=0$ $N\neq 0; M_z\neq 0$
Antisimetrice	Antisimetrică	*Simetrică*	Antisimetrică	$N=0; M_z=0$ $T\neq 0$

Observații:

- Din tabelul 5.3 se observă că *o axă de simetrie reduce gradul de nedeterminare cu o unitate* (T=0 pe axă) iar *o axă de antisimetrie reduce gradul de nedeterminare cu două unități* (N=0 și M_z=0 pe axă);
- Utilizarea acestor proprietăți poate aduce simplificări semnificative la ridicarea nedeterminării și trasarea diagramelor de eforturi;
- Metoda *Iosipescu* de încercare la forfecare pură se bazează pe aceste proprietăți. Ea utilizează o epruvetă simetrică, cu secțiune predeterminată de rupere (slăbită la mijloc prin realizarea a două

crestături), încărcată și rezemată antisimetric. Pe axa se simetrie a epruvetei (în secțiunea slăbită) apare un singur efort nenul: forța tăietoare T, care va produce ruperea epruvetei la forfecare pură [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001].

Cadrul din figura 5.7a este simetric și reacțiunile sunt simetrice. Se secționează după axa de simetrie și se consideră încastrare în secțiune. Deoarece forța tăietoare este nulă pe axa de simetrie, în această încastrare apar numai două reacțiuni (M_A și N_A). În consecință, în loc să se rezolve cadrul din figura 5.7a se rezolvă cel din figura 5.7b, care are un grad de nedeterminare mai mic (GN=5). Diagramele de eforturi pentru întregul cadru se vor trasa prin simetrie (N, M_z) sau antisimetrie (T).

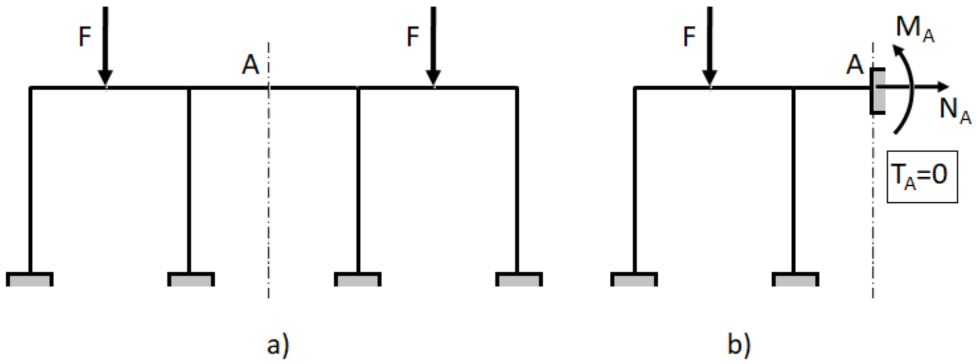


Fig. 5.7. Reducerea gradului de nedeterminare la un cadru simetric

Uneori sunt necesare unele artificii pentru a beneficia de avantajele simetriei/antisimetriei.

Cadrul simetric din figura 5.8a este încărcat cu o forță care acționează pe axa de simetrie. Pentru a putea secționa după axa de simetrie, forța *F* se descompune în două forțe simetrice F/2, infinit apropiate (fig. 5.8b).

Cadrul din figura 5.9a este simetric dar este încărcat nesimetric și are GN=3. El poate fi studiat prin suprapunerea efectelor de la sistemul simetric 5.9b și cel antisimetric 5.9c. Studiul cadrului inițial (cu GN=3) poate fi înlocuit astfel cu studiul cadrelor 5.9d (cu GN=2) și respectiv 5.9e (cu GN=1). Diagramele de eforturi la cadrele 5.9b și respectiv 5.9c se construiesc prin simetrie sau prin antisimetrie. Diagramele de eforturi pentru cadrul 5.9a se trasează apoi prin suprapunerea efectelor.

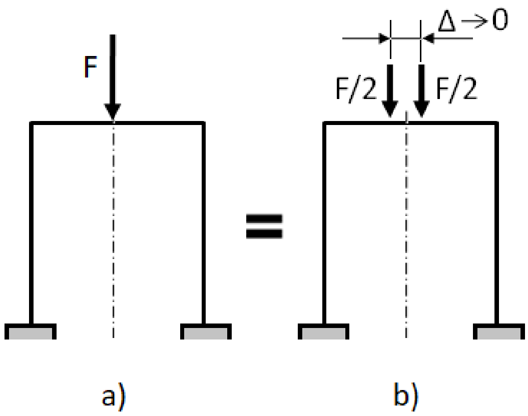


Fig. 5.8. Forța de pe axa de simetrie se descompune în două forțe infinit apropiate și apoi se secționează cadrul pe axa de simetrie

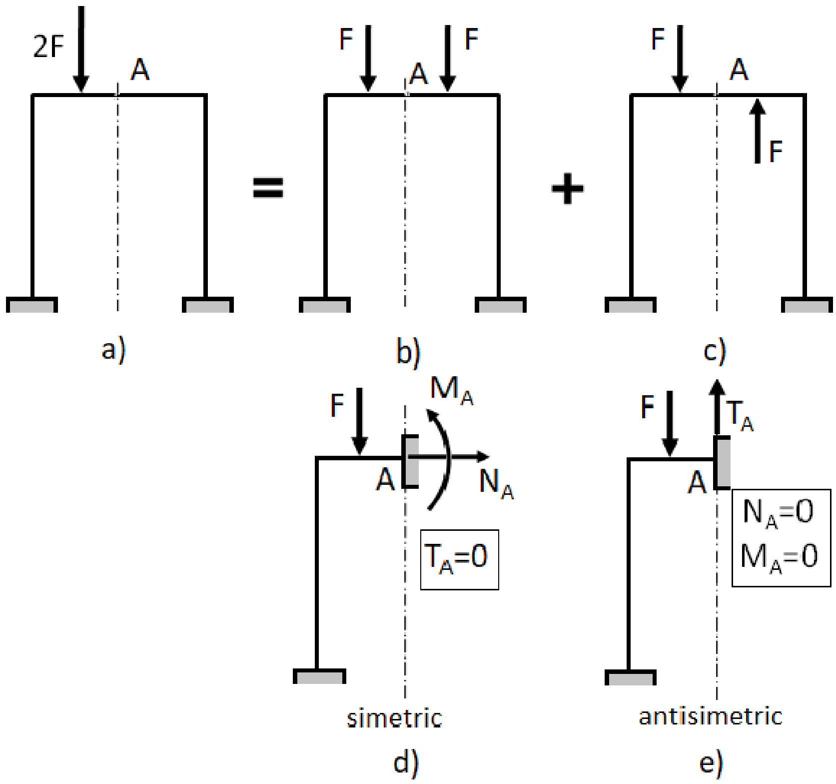


Fig. 5.9. Rezolvarea cadrului încărcat nesimetric (a) prin suprapunerea efectelor (b, c) și secționare pe axa de simetrie (d, e)

Exemplul 5.3

Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din figura 5.10. Toate barele cadrului au aceeași secțiuni transversală și sunt confecționate din același material.

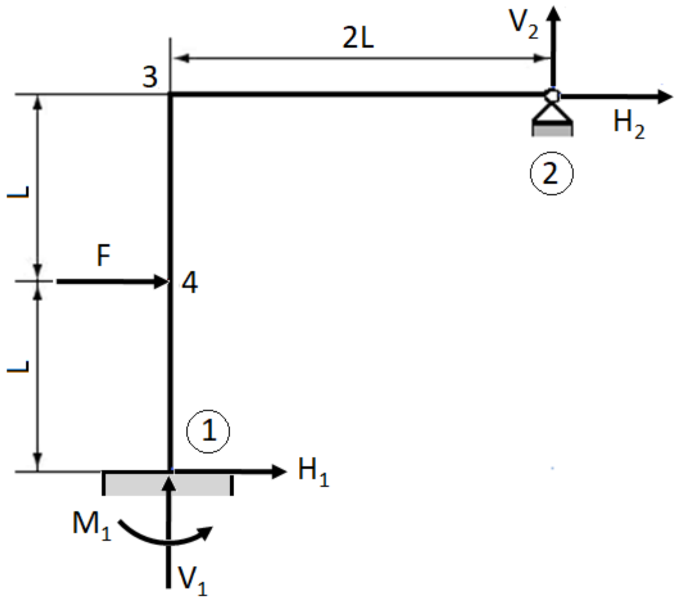


Fig. 5.10. Cadru static nedeterminat exterior

Cadrul este static nedeterminat exterior. Pentru rezolvarea sa vor fi parcurse următoarele etape:

- Se figurează reacțiunile (H_1, V_1, M_1, H_2 și V_2);
- Se stabilește gradul de nedeterminare: $GN = 5 - 3 = 2$. Se spune că acest cadru este *dublu static nedeterminat*;
- Se ridică nedeterminarea prin metoda cea mai convenabilă;
- Se trasează și se verifică diagramele de eforturi.

În cele ce urmează se va ridica nedeterminarea prin doua metode: *Castigliano* și Metoda eforturilor. Metoda eforturilor implică în general un volum mai mic de muncă, mai ales dacă este asociată cu metoda de integrare grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001], dar există unele situații în care nu poate fi aplicată. Metoda *Castigliano* necesită în general un volum mai mare de muncă, însă este universală.

Se scriu ecuațiile de echilibru

$$\begin{cases} H_1 + F + H_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 \cdot 2L - H_2 \cdot 2L - FL + M_1 = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2.1. Ridicarea nedeterminării prin metoda Castigliano

La unele sisteme static nedeterminate exterior o reacțiune poate fi aflată din ecuațiile de echilibru. Acea reacțiune se numește *static determinată*. La metoda *Castigliano* se face derivarea numai funcție de *necunoscute static nedeterminate*. Pentru cadrul dublu static nedeterminat din figura 5.10 este convenabil să se aleagă ca necunoscute static nedeterminate reacțiunile din reazemul 2 (V_2, H_2). Se va face câte o secțiune prin fiecare regiune și se va izola doar porțiunea dinspre reazemul 2, ca în figura 5.11, pentru a evita exprimarea necunoscutelor unele față de altele, cu ajutorul relațiilor (5.4).

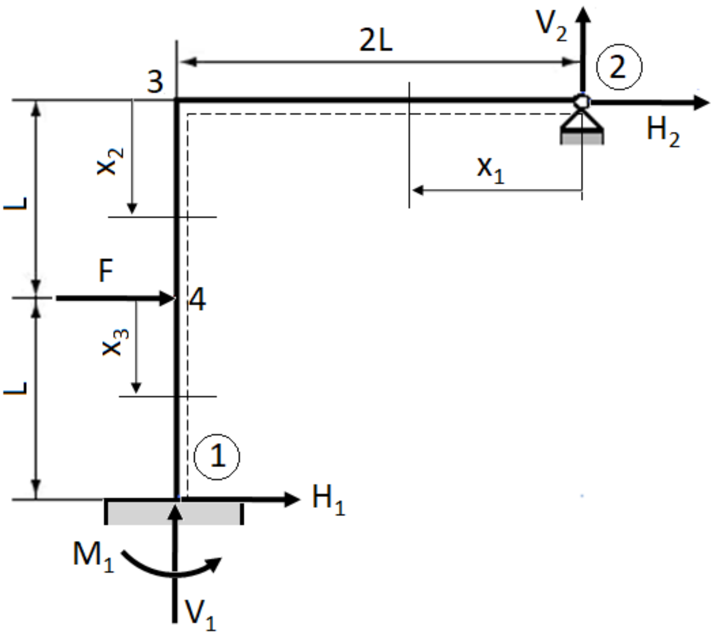


Fig. 5.11. Secționări dinspre reazemul 2
(reacțiunile din 2 sunt desemnate necunoscute static nedeterminate)

Relațiile necesare metodei *Castigliano* sunt centralizate în tabelul 5.4.

Tab. 5.4. Relațiile necesare metodei Castigliano (exemplul 5.3)

Regi-unea	$x_i \in$	$M_z(x_i)$	$\dfrac{\partial M_z(x_i)}{\partial V_2}$	$\dfrac{\partial M_z(x_i)}{\partial H_2}$
2-3	$x_1 \in [0,2L]$	$M_z(x_1)=V_2x_1$	x_1	0
3-4	$x_2 \in [0,L]$	$M_z(x_2)=V_2\cdot 2L-H_2x_2$	$2L$	$-x_2$
4-1	$x_3 \in [0,L]$	$M_z(x_3)=V_2\cdot 2L- -H_2(L+x_3)-Fx_3$	$2L$	$-(L+x_3)$

Cele două ecuații suplimentare puse la dispoziție de metoda *Castigliano* pentru ridicarea nedeterminării sunt (s-a ținut cont numai de efectul încovoierii, care contribuie preponderent la energia potențială de deformare elastică):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial V_2}=\frac{1}{EI_z}[\int_0^{2L}M_z(x_1)\frac{\partial M_z(x_1)}{\partial V_2}dx_1+\int_0^{L}M_z(x_2)\frac{\partial M_z(x_2)}{\partial V_2}dx_2+\\&\int_0^{L}M_z(x_3)\frac{\partial M_z(x_3)}{\partial V_2}dx_3]=0\\&\frac{\partial U}{\partial H_2}=\frac{1}{EI_z}[\int_0^{2L}M_z(x_1)\frac{\partial M_z(x_1)}{\partial H_2}dx_1+\int_0^{L}M_z(x_2)\frac{\partial M_z(x_2)}{\partial H_2}dx_2+\\&\int_0^{L}M_z(x_3)\frac{\partial M_z(x_3)}{\partial H_2}dx_3]=0\end{aligned}\tag{5.5}$$

Înlocuind în (5.5) relațiile din tabelul 5.4, rezultă

$$\begin{cases}\dfrac{32}{3}V_2-4H_2-F=0\\-4V_2+\dfrac{8}{3}H_2+\dfrac{5}{6}F=0\end{cases}\Rightarrow V_2=-\frac{3}{56}F;\quad H_2=-\frac{11}{28}F\tag{5.6}$$

Nedeterminarea fiind astfel ridicată, celelalte reacțiuni pot fi aflate din ecuațiile de echilibru (5.4). Se scriu eforturile

$$\begin{aligned} &N(x_1)=H_2; \quad N(x_2)=V_2; \quad N(x_3)=V_2 \\ &T(x_1)=-V_2; \quad T(x_2)=H_2; \quad T(x_3)=H_2+F \end{aligned} \tag{5.7}$$

și se trasează diagramele de eforturi (fig. 5.12).

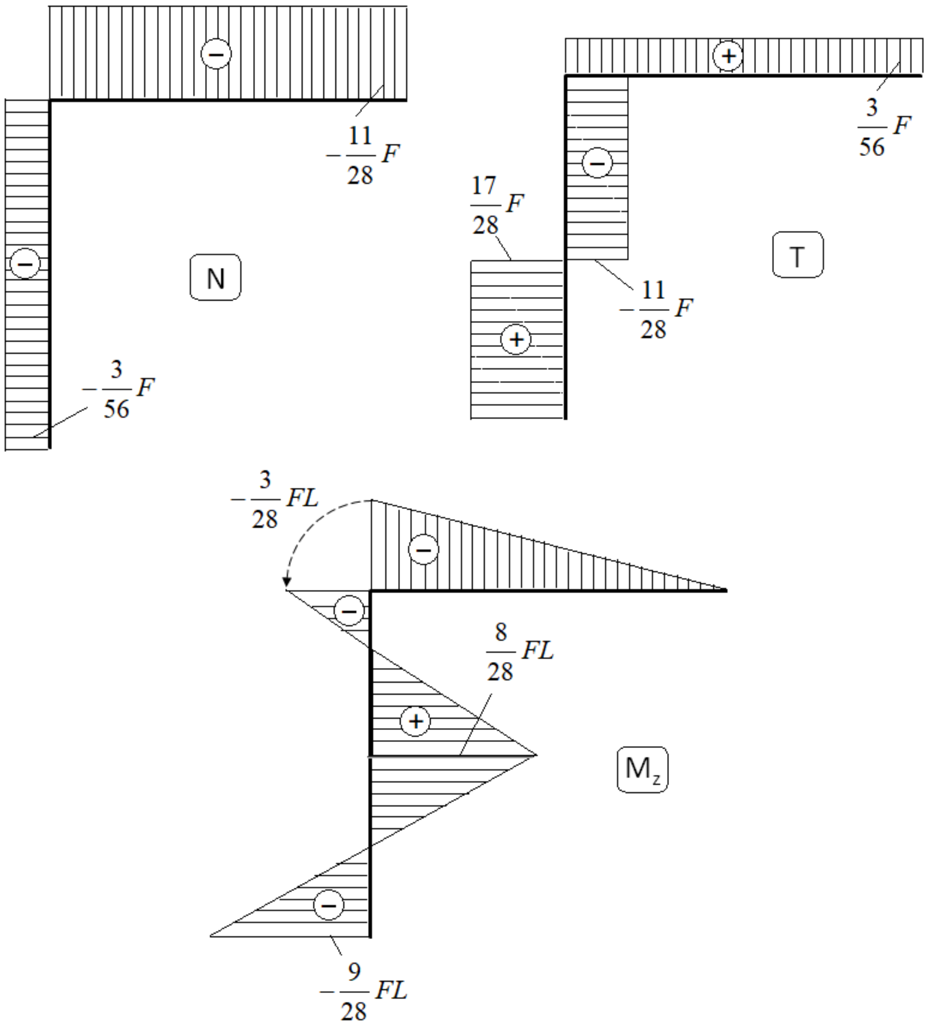


Fig. 5.12. Diagramele de eforturi pentru cadrul din fig. 5.10

5.2.2. **Ridicarea nedeterminării prin metoda eforturilor**

Pentru ridicarea nedeterminării prin metoda eforturilor se vor parcurge următoarele etape:

- Se aleg ca *necunoscute static nedeterminate* reacțiunile din reazemul 2 (V_2 și H_2), la fel ca la metoda *Castigliano*;
- Se îndepărtează un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare și astfel se obținea o structură static determinată, numită *sistem de bază*. În cazul de față reazemul 2 va fi îndepărtat și înlocuit cu reacțiunile pe care acesta le introduce;
- La aceasta metodă necunoscutele static nedeterminate vor fi notate cu X_1 și X_2 (de exemplu H_2=X_1 și V_2=X_2). Astfel X_1 și X_2 trec din categoria reacțiunilor în cea a încărcărilor. Altfel spus, dacă X_1 și X_2 ar fi cunoscute, structura ar fi static determinată;
- Pentru gradul de nedeterminare GN=2 se scrie sistemul general de două ecuații canonice liniare cu două necunoscute (X_1 și X_2). Acest sistem depinde numai de gardul de nedeterminare și nu depinde de forma, rezemarea și încărcarea sistemului

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

  unde $\delta_{12} = \delta_{21}$;

- Se calculează coeficienții de influență δ_{ij}, care reprezintă deplasări fictive;
- Se rezolvă sistemul (5.8) și se obțin necunoscutele X_1 și X_2;
- Se trasează și se verifică diagramele de eforturi.

Sistemul de bază nu este unic. De exemplu, un alt sistem de bază se poate obține în acest caz prin înlocuirea articulației 2 cu un reazem simplu cu încărcarea H_2=X_1 și încastrarea 1 poate fi înlocuită cu o articulație cu încărcarea M_1=X_2. Desigur, este de preferat să se aleagă sistemul de bază care presupune un volum mai mic de muncă pentru calculul necunoscutelor static nedeterminate. În cazul de față, acesta este obținut prin îndepărtarea reazemului 2 (fig. 5.13).

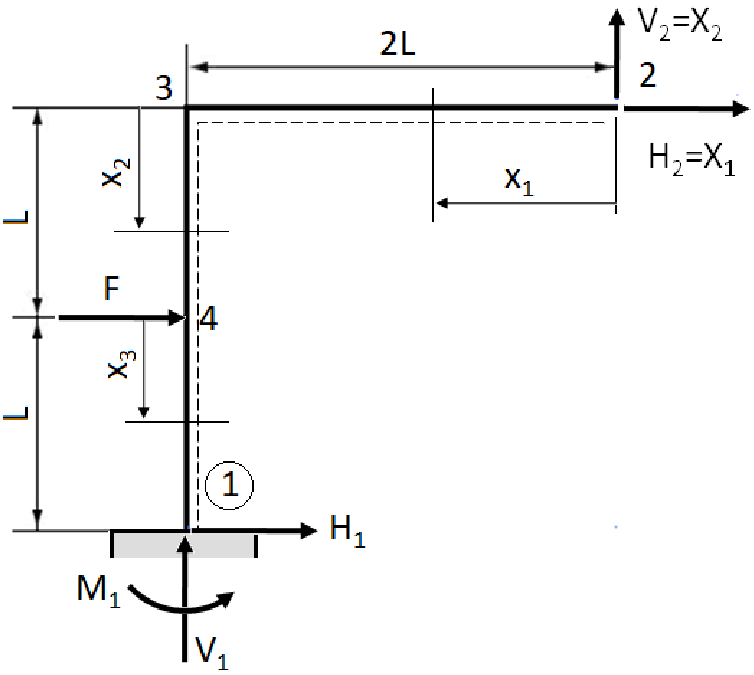


Fig. 5.13. Sistem de baza pentru cadrul din fig. 5.10

În vederea determinării coeficienților de influență sistemul de bază (SB) se studiază cu atâtea încărcări câți indici independenți au coeficienții δ_{ij} din sistemul de ecuații canonice. Se trasează următoarele diagrame de moment fictive:

- $M_0 \rightarrow SB$ cu încărcările reale și necunoscutele static nedeterminate nule;
- $m_i \rightarrow SB$ încărcat numai cu $X_i = 1$.

Indicii coeficienților δ_{ij} arată funcțiile sau diagramele care furnizează momentele încovoietoare utilizate pentru calculul coeficientului respectiv.

Pentru cadrul de față, cu gradul de nedeterminare GN=2, sistemul de bază se studiază cu trei încărcări (indicii independenți ai coeficienților de influență δ_{ij} sunt trei, respectiv 0, 1 și 2). Aceste trei încărcări ale sistemului de bază sunt sintetizate în tabelul 5.5.

Tab. 5.5. Încărcările sistemului de bază pentru cadrul din fig. 5.10

Cazul de încărcare a SB	Încărcare			Diagrama trasată
	F	X_1	X_2	
1	$F \neq 0$ (încărcări reale)	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	M_0
2	$F = 0$	$X_1 = 1$	$X_2 = 0$	m_1
3	$F = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 1$	m_2

Observații:

- Momentele $M_0(x_i)$ se scriu pentru sistemul de bază încărcat numai cu sarcinile reale (F, în cazul din fig. 5.10);
- Momentele $m_1(x_i)$ se scriu pentru sistemul de bază încărcat numai cu sarcina fictivă $X_1=1$;
- Momentele $m_2(x_i)$ se scriu pentru sistemul de bază încărcat numai cu sarcina fictivă $X_2=1$.

Procedând astfel, în locul unei probleme dublu static nedeterminate se vor rezolva trei probleme static determinate, ceea ce reprezintă un avantaj.

Pentru economie de spațiu s-au reprezentat încărcările și diagramele pe sistemul de bază (fig. 5.14). Pentru situații mai simple diagramele de eforturi pot fi trasate direct, fără a mai scrie funcțiile M_0, m_1 și m_2 și apoi coeficienții de influență δ_{ij} pot fi determinați rapid, prin integrare grafo-analitică cu metoda *Mohr-Vereșceaghin*. Această metodă a fost aplicată în volumul 1 [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001] la bare drepte static nedeterminate.

Desigur că trasarea directă a diagramelor de eforturi necesită o anumită experiență.

Acest prim exemplu de utilizare a metodei eforturilor pentru ridicarea nedeterminării la cadre va fi rezolvat atât prin integrare analitică, cât și prin integrare grafo-analitică, pentru o mai buna înțelegere a metodei.

În cazul unor sisteme mai complicate, cum ar fi barele curbe, nu se poate utiliza integrarea grafo-analitică.

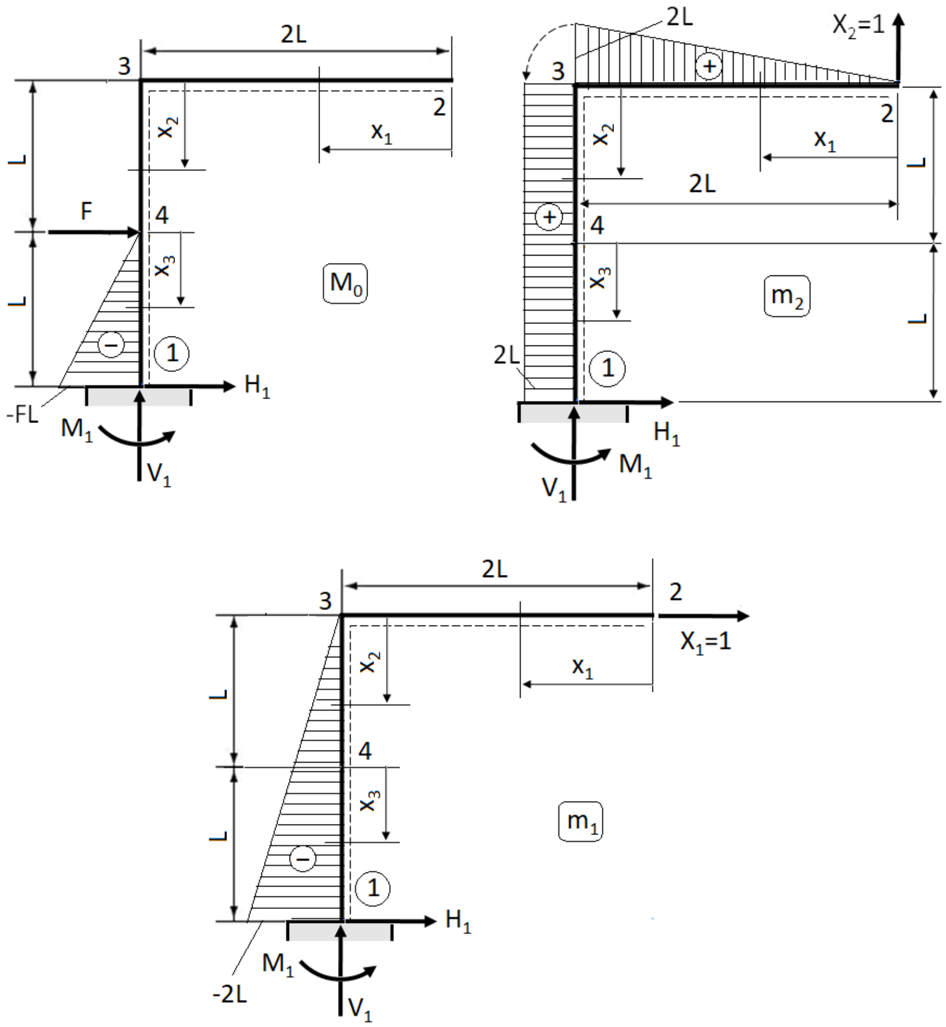


Fig. 5.14. Sistemele de bază cu încărcările și diagramele din tab. 5.5

Funcțiile M_0, m_1 și m_2 sunt cuprinse în tabelul 5.6. Ele vor fi utilizate pentru determinarea coeficienților de influență δ_{ij} prin integrare analitică, așa cum se va vedea mai jos.

Tab. 5.6. Momentele fictive pentru metoda eforturilor (cadrul din fig. 5.10)

Regi-unea	$x_i \in$	$M_0(x_i)$	$m_1(x_i)$	$m_2(x_i)$
2-3	$x_1 \in [0, 2L]$	$M_0(x_1) = 0$	$m_1(x_1) = 0$	$m_2(x_1) = 1 \cdot x_1$
3-4	$x_2 \in [0, L]$	$M_0(x_2) = 0$	$m_1(x_2) = -1 \cdot x_2$	$m_2(x_2) = 1 \cdot 2L$
4-1	$x_3 \in [0, L]$	$M_0(x_3) = -Fx_3$	$m_1(x_3) = -1(L + x_3)$	$m_2(x_3) = 1 \cdot 2L$

Cu funcțiile din tabelul 5.6 se determină coeficienții de influență

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z}[\int_0^{2L} M_0(x_1)m_1(x_1)dx_1 + \int_0^{L} M_0(x_2)m_1(x_2)dx_2 +$$

$$\int_0^{L} M_0(x_3)m_1(x_3)dx_3]$$

$$\delta_{10} = \frac{-1}{EI_z}\int_0^{L}(-Fx_3)(L + x_3)dx_3; \quad \delta_{10} = \frac{5}{6}\cdot\frac{FL^3}{EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{2L} m_1^2(x_1)dx_1 + \int_0^{L} m_1^2(x_2)dx_2 + \int_0^{L} m_1^2(x_3)dx_3\right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{L}(-x_2)^2 dx_2 + \int_0^{L}\left[-(L + x_3)\right]^2 dx_3\right]; \quad \delta_{11} = \frac{8}{3}\cdot\frac{L^3}{EI_z}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z}[\int_0^{2L} m_1(x_1)m_2(x_1)dx_1 + \int_0^{L} m_1(x_2)m_2(x_2)dx_2 +$$

$$\int_0^{L} m_1(x_3)m_2(x_3)dx_3]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{L}(-x_2)\cdot 2L dx_2 - \int_0^{L}(L + x_3)\cdot 2L dx_3\right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{4L^3}{EI_z} \tag{5.9}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z}[\int_0^{2L} M_0(x_1)m_2(x_1)dx_1 + \int_0^L M_0(x_2)m_2(x_2)dx_2 +$$

$$\int_0^L M_0(x_3)m_2(x_3)dx_3]$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z}\int_0^L(-Fx_3)2Ldx_3 \quad \delta_{20} = -\frac{FL^3}{EI_z}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{2L} m_2^2(x_1)dx_1 + \int_0^L m_2^2(x_2)dx_2 + \int_0^L m_2^2(x_3)dx_3\right] \tag{5.10}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{2L}(x_1)^2 dx_1 + \int_0^L(2L)^2 dx_2 + \int_0^L(2L)^2 dx_3\right]$$

$$\delta_{22} = \frac{32}{3}\cdot\frac{L^3}{EI_z}$$

Înlocuind coeficienții δ_{ij} în (5.8) rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{8L^3}{3EI_z}X_1 - \dfrac{4L^3}{EI_z} + \dfrac{5FL^3}{6EI_z} = 0 \\ -\dfrac{4L^3}{EI_z}X_1 + \dfrac{32L^3}{3EI_z} - \dfrac{FL^3}{EI_z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X_1 = -\dfrac{11}{28}F = H_2 \\ X_2 = -\dfrac{3}{56}F = V_2 \end{matrix} \tag{5.11}$$

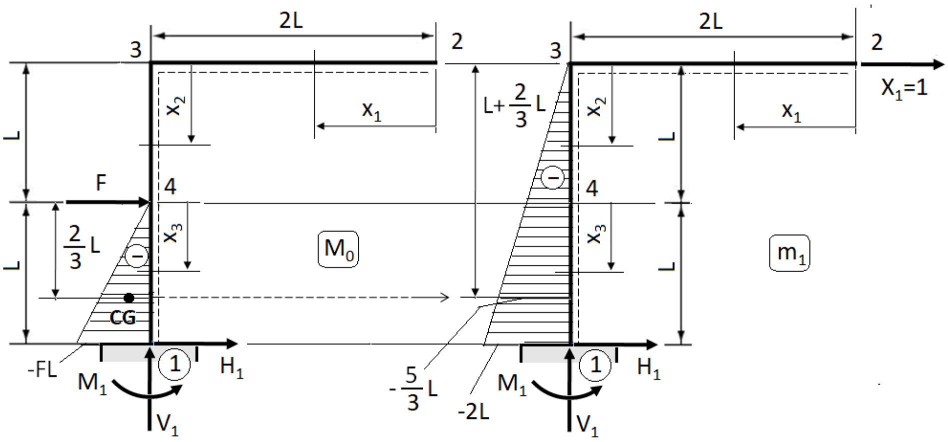
S-au obținut aceleași reacțiuni ca la metoda *Castigliano*. Trasarea diagramei de moment încovoietor M_z se poate face simplu, prin suprapunerea celor trei diagrame din figura 5.14, conform relației

$$M_z(x_i) = M_0(x_i) + X_1\cdot m_1(x_i) + X_2\cdot m_2(x_i) \tag{5.12}$$

În continuare se vor calcula coeficienții de influenta δ_{ij} prin integrare grafo-analitică (metoda *Mohr-Vereșceaghin*). În acest scop funcțiile M_0, m_1 și m_2 nu mai sunt scrise analitic ca în tabelul 5.6, ci se pornește de la diagramele din figura 5.14, care sunt trasate direct (cu o anumită experiență). Se observă că la metoda analitică indicii unui coeficient δ arată ce funcții se folosesc pentru calcularea sa. În mod asemănător, la metoda grafo-analitică indicii arată care diagrame din figura 5.14 se folosesc pentru calculului coeficientului. *Aranjarea diagramelor din figurile 5.15-5.19 are scop didactic*.

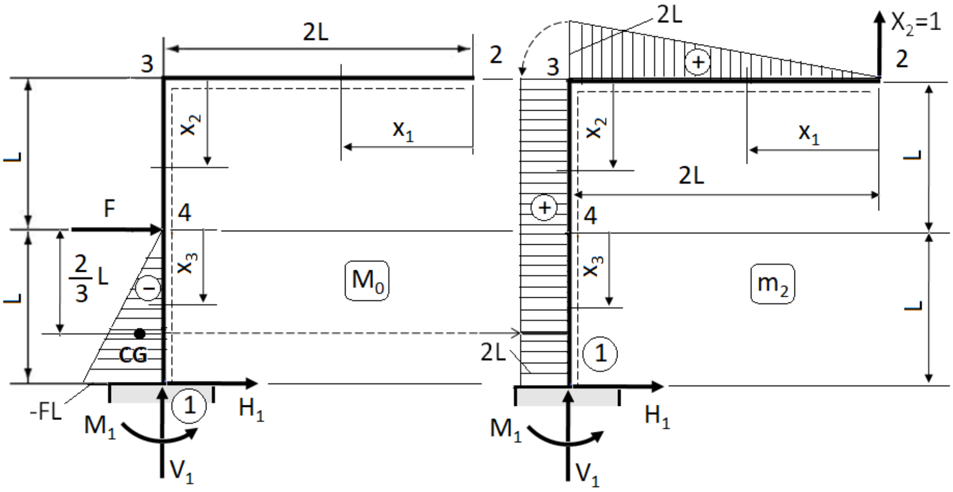
Explicații privind calculul coeficienților δ_{ij} (fig. 5-14-5.18):

- Expresiile coeficienților de influență conțin factorul $1/EI_z$, pe care îl folosește energia potențială de deformare elastică produsă la încovoiere. S-a neglijat energia potențială provenită din alte solicitări (forfecare și solicitări axiale), acestea fiind mici în comparație ce cea introdusă de încovoiere;
- Indicii coeficienților δ arată ce diagrame se folosesc pentru calculul fiecărui coeficient de influență;
- Expresia coeficientului δ_{10} (fig. 5.15) cuprinde între acolade suprafața diagramei M_0 înmulțită cu valoarea din diagrama m_1 măsurată în dreptul centrului de greutate al diagramei M_0. Triunghiul din diagrama m_1 este dreptunghic isoscel și acest lucru reduce volumul de calcul. Și alte triunghiuri din diagramele de mai sus au aceeași proprietate;
- Coeficientul δ_{20} (fig. 5.16) s-a calculat ca produsul dintre suprafața diagramei M_0 și valoarea din diagrama m_2, măsurată în dreptul centrului de greutate al diagramei M_0;
- Coeficientul δ_{11} (fig. 5.17) s-a calculat ca produsul dintre suprafața diagramei m_1 înmulțită cu valoarea lui m_1 din dreptul propriului centru de greutate;
- Pentru calculul coeficientului δ_{22} (fig. 5.18) se folosește de două ori diagrama m_2, și anume se înmulțește suprafața diagramei de pe fiecare regiune cu valoarea lui m_2 în dreptul centrului său de greutate;
- Pentru calculul coeficientului δ_{12} (fig. 5.19) se folosesc diagramele m_1 și m_2. Suprafața diagramei m_1 se înmulțește cu valoarea din diagrama m_2, măsurată în dreptul centrului de greutate al diagramei m_1;
- Dacă o diagramă *m* este formată din linii frânte, metoda se aplică pe regiuni;
- Dacă o diagramă trece prin zero și are o schimbare se semn, metoda se aplică de asemenea pe regiuni;
- La metoda eforturilor sistemul de bază trebuie să aibă aceleași deformații cu sistemul static nedeterminant.



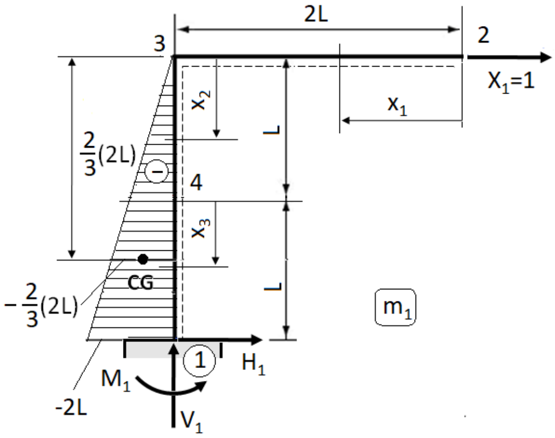
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{2}(-FL)L\left[-\left(L+\frac{2}{3}L\right)\right]\right\} = \frac{5}{6}\cdot\frac{FL^3}{EI_z}$$

Fig. 5.15. Calculul coeficientului δ_{10} prin metoda Mohr-Vereșceaghin



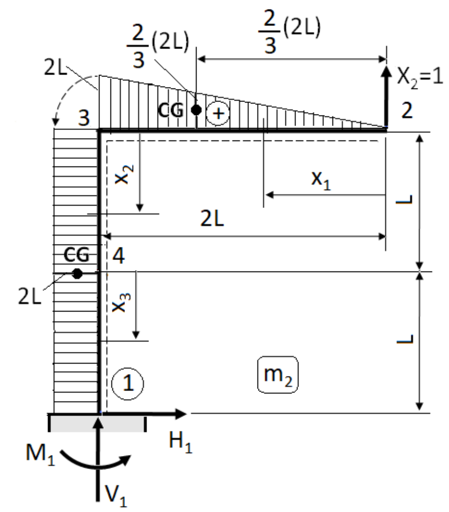
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z}\cdot\frac{(-FL)L}{2}\cdot 2L = -\frac{FL^3}{EI_z}$$

Fig. 5.16. Calculul coeficientului δ_{20} prin metoda Mohr-Vereșceaghin



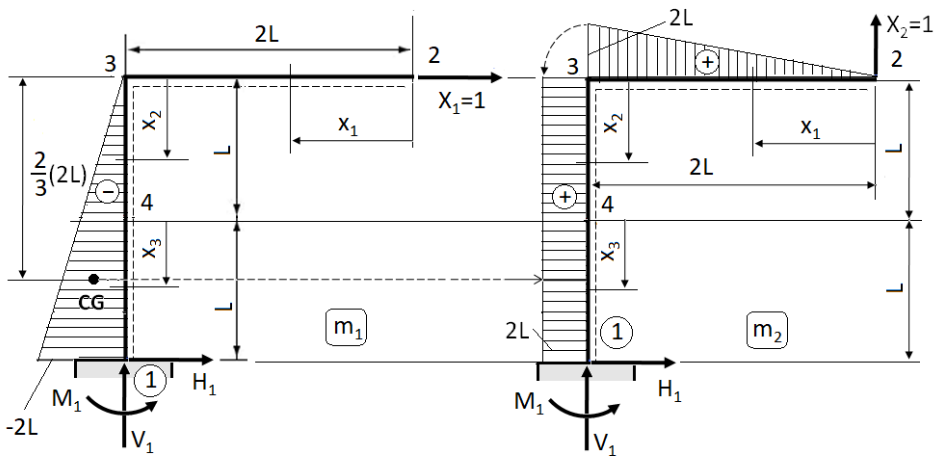
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_z}\left[\frac{(-2L)2L}{2}\left(-\frac{2}{3}2L\right)\right]=\frac{8L^3}{3EI_z}$$

Fig. 5.17. Calculul coeficientului δ_{11} prin metoda Mohr-Vereșceaghin



$$\delta_{22}=\frac{1}{EI_z}\left(\frac{2L\cdot 2L}{2}\cdot\frac{2}{3}2L+2L\cdot 2L\cdot 2L\right)=\frac{32}{3}\cdot\frac{L^3}{EI_z}$$

Fig. 5.18. Calculul coeficientului δ_{22} prin metoda Mohr-Vereșceaghin



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{(-2L)2L}{2} 2L = -\frac{4L^3}{EI_z}$$

Fig. 5.19. Calculul coeficientului δ_{12} prin metoda Mohr-Vereșceaghin

5.2.3. Cadre static nedeterminate interior

Exemplul 5.4

Să se traseze diagramele de eforturi pentru cadrul din figura 5.20a.

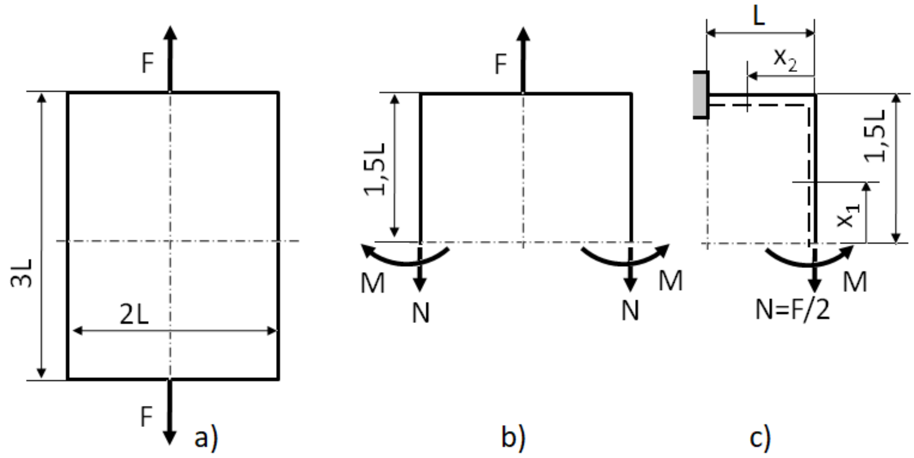


Fig. 5.20. Cadru static nedeterminat interior (a)
și secționări după axele de simetrie (b,c)

Sistemele static nedeterminate interior sunt de regulă triplu static nedeterminate, deoarece prin secționarea unui ochi închis se pun în evidență trei necunoscute static nedeterminate (eforturile N, T și M). Simetria sau antisimetria reduc gradul de nedeterminare (v. tab. 5.3). În cazul de față fiecare axă de simetrie reduce gradul de nedeterminare cu o unitate și astfel cadrul rămâne simplu static nedeterminat.

Se secționează cadrul după axa de simetrie orizontală. Deoarece există simetrie și față de axa verticală, eforturile din barele secționate sunt simetrice (fig. 5.20b). Se scrie ecuația de echilibru a proiecțiilor forțelor pe verticală

$$F - 2N = 0 \Rightarrow N = \frac{F}{2} \tag{5.13}$$

Se mai face o secțiune după axa de simetrie verticală. Sfertul de cadru rămas este SB ales și are două regiuni. Prin fiecare regiune se face o secțiune (fig. 5.20c). Se va ridica nedeterminarea prin metoda eforturilor. Pentru GN=1 se scrie ecuația

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0 \tag{5.14}$$

Pentru sistemul de bază din figura 5.21 necunoscuta static nedeterminată nu poate fi alta decât $M=X_1$. Se scriu eforturile (tab. 5.7) și se trasează diagramele M_0 și m_1.

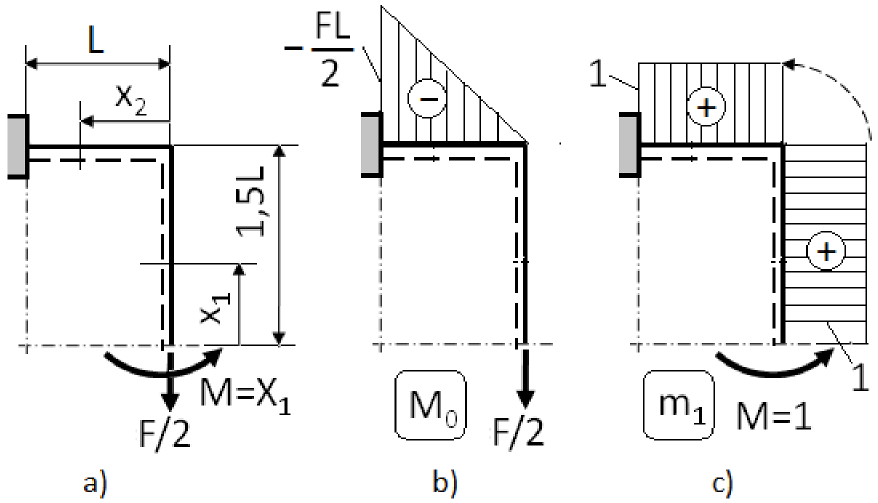


Fig. 5.21. Sistemul de bază și diagramele M_0 și m_1 pentru cadrul din fig. 5.20a

Tab. 5.7. Eforturile din barele sistemului de bază (fig. 5.21)

Regi-unea	$x_i \in$	$M_0(x_i)$	$m_1(x_i)$	$M_z(x_i) = M_0(x_i) + X_1 m_1(x_i)$
C-B	$x_1 \in [0;1,5L]$	$M_0(x_1) = 0$	$m_1(x_1) = 1$	$M_z(x_1) = \frac{FL}{10}$
B-A	$x_2 \in [0;L]$	$M_0(x_2) = -\frac{F}{2}x_2$	$m_1(x_1) = 1$	$M_z(x_2) = -\frac{F}{2}x_2 + \frac{FL}{10}$

Se calculează coeficienții de influență

$$\delta_{10} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{1,5L} M_0(x_1)m_1(x_1)dx_1 + \int_0^L M_0(x_2)m_1(x_2)dx_2\right]$$

$$\delta_{10} = \frac{4}{EI_z}\int_0^L\left(-\frac{F}{2}x_2\right)\cdot 1\cdot dx_2 \Rightarrow \delta_{10} = -\frac{FL^2}{EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{1,5L} m_1^2(x_1)dx_1 + \int_0^L m_1^2(x_2)dx_2\right] \tag{5.15}$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{1,5L} 1^2\cdot dx_1 + \int_0^L 1^2\cdot dx_2\right] \Rightarrow \delta_{11} = \frac{10L}{EI_z}$$

În (5.15) s-a considerat coeficientul 4 pentru a ține cont de energia înmagazinată de întregul cadru (sistemul de bază a fost considerat doar pe un sfert de cadru).

Se trasează diagramele de eforturi pentru un sfert de cadru. Momentul încovoietor M_z se determină ușor, prin suprapunea efectelor, așa cum se arată în tabelul 5.7.

Pentru întregul cadru diagramele se vor trasa prin simetrie sau antisimetrie față de două axe (v. fig. 5.22), ținând cont de cele prezentate în tabelul 5.3:

- Diagramele M_z și N sunt simetrice;
- Diagrama T este antisimetrică.

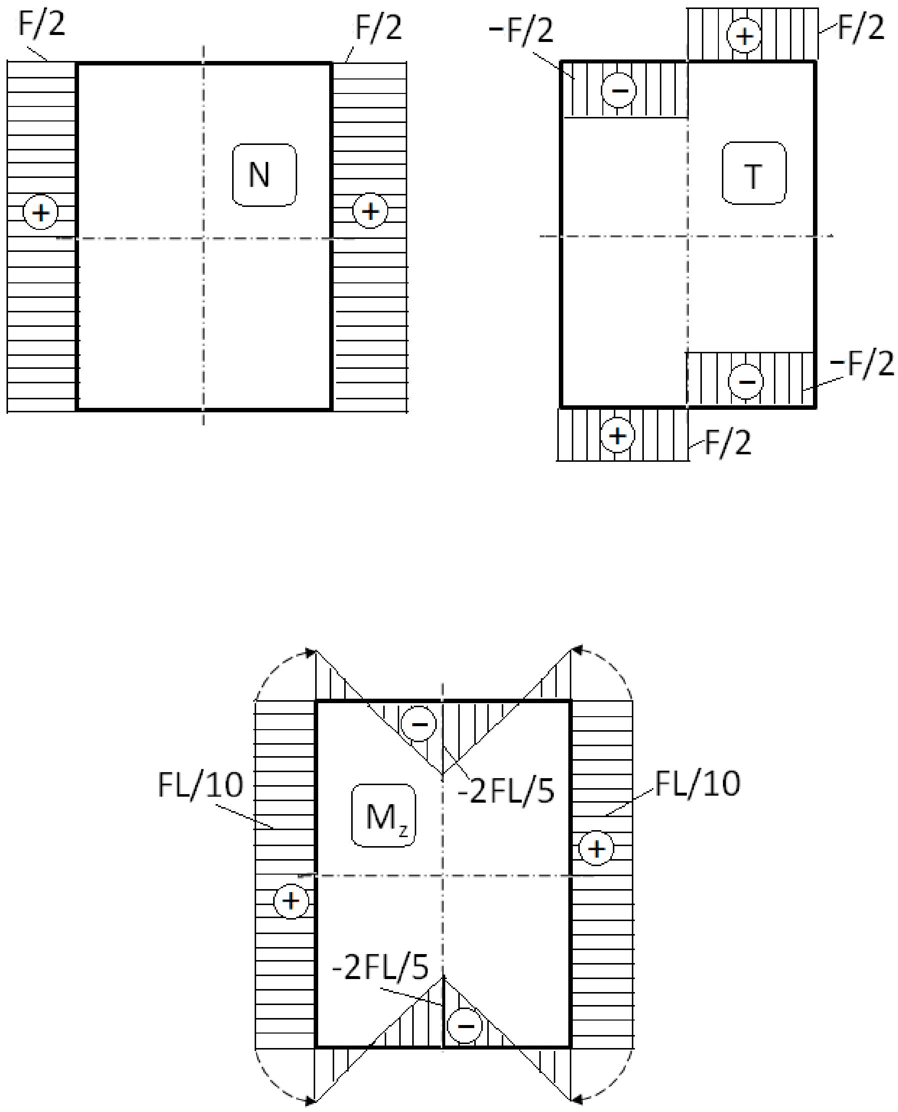


Fig. 5.22. Diagramele de eforturi pentru cadrul din fig. 5.20a

BARE CURBE

Pentru realizarea colajului din acest capitol s-au folosit:

https://www.albinaco.com/bending-profiles/beams

https://www.indiamart.com/proddetail/crane-hooks-21689678730.html

https://www.quora.com/What-is-an-aircraft-wing-box-How-is-a-wing-box-made

6. BARE CURBE

În structurile de rezistență din construcția de mașini si din ingineria civilă se întâlnesc frecvent organe de mașini și elemente structurale care pot fi asimilate cu bare curbe plane sau spațiale. În cele ce urmează se vor studia doar barele curbe la care axa geometrică este o curbă plană.

6.1. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI

Pentru studiul barelor curbe se admit ipotezele de la încovoierea barelor drepte:

- Secțiunea transversală are o axă de simetrie, cuprinsă în planul de simetrie al barei;
- Forțele exterioare acționează în acest plan;
- Lungimea barei este mare în raport cu dimensiunile secțiunii transversale;
- Este valabilă ipoteza lui *Bernoulli*.

În secțiunea unei bare curbe încărcate apar în general trei eforturi: N, T și M_z. Se izolează un element infinit mic dintr-o bară curbă, de lungime *ds*, asupra căruia acționează încărcarea *qds* (fig. 6.1).

Se scriu ecuațiile de echilibru, respectiv suma proiecțiilor forțelor pe direcțiile N, T și a momentelor față de B:

$$N-(N+dN)\cos(d\alpha)+(T+dT)\sin(d\alpha)+q\cdot ds\cdot\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)=0$$
$$T-(T+dT)\cos(d\alpha)-(N+dN)\sin(d\alpha)-q\cdot ds\cdot\cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right)=0 \qquad (6.1)$$
$$M-(M+dM)+TR\sin(d\alpha)-NR(1-\cos(d\alpha))-q\cdot ds\cdot\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)=0$$

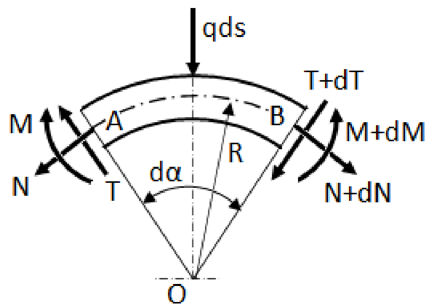


Fig. 6.1. Izolarea unui element dintr-o bară curbă

Aproximând $\sin(d\alpha)\approx d\alpha$ și $\cos(d\alpha)\approx 1$ și neglijând infiniții mici de ordin superior rezultă

$$\begin{aligned}&-dN+T\cdot d\alpha=0\\&-dT-N\cdot d\alpha-q\cdot ds=0\\&-dM+T\cdot R\cdot d\alpha=0\end{aligned} \qquad (6.2)$$

Înlocuind în (6.2) $ds=R\cdot d\alpha$ se obține

$$\frac{dN}{ds}=\frac{T}{R};\quad \frac{dT}{ds}=-\frac{N}{R}-q;\quad \frac{dM}{ds}=T \qquad (6.3)$$

Se observă că atunci când în (6.3) $R\to\infty$ se obțin relațiile diferențiale de la bare drepte [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$\frac{dT}{dx}=-q;\quad \frac{dM}{dx}=T \qquad (6.4)$$

Relațiile (6.3) vor fi utilizate la trasarea diagramelor de eforturi la bare curbe.

6.2. CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL BARELOR CURBE

Sub acțiunea încărcărilor, în secțiunea barelor curbe apar următoarele tensiuni:

- Tensiune normală $\sigma = N/A$ produsă de forța axială, considerată a fi uniform distribuită;
- Tensiune tangențială τ, considerată că variază aproximativ după formula lui *Juravski*;
- Tensiune normală σ, provenită din încovoiere.

La fel ca la barele drepte lungi, tensiunea tangențială este mică în raport cu tensiunile normale și poate fi neglijată. Rămâne astfel solicitarea la încovoiere cu forte axiale. Ambele tensiuni normale sunt pe aceeași fațetă și în consecință se vor suma algebric, obținând o tensiune rezultantă care, în cazul barelor curbe, se calculează cu o formulă specială. Există mai multe metode pentru calculul barelor curbe. Dintre acestea va fi prezentată în continuare cea care utilizează un coeficient de formă a secțiunii transversale.

Se izolează un element din bara curbă, supus la solicitări axiale cu încovoiere și se studiază deformația acestuia (fig. 6.2). *Momentul încovoietor va fi considerat pozitiv atunci când tinde să micșoreze raza de curbură a barei.*
Se admit relațiile de echivalență de la barele drepte [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$\sigma = \int_A \sigma dA; \quad M_z = \int_A \sigma y dA \tag{6.5}$$

Secțiunea inițială 1-1 se deplasează (O' ajunge în O'') și se rotește (rămânând tot plană, în baza ipotezei lui *Bernoulli*) cu unghiul $\Delta d\varphi$ și ajunge astfel în poziția 1'-1'. S-a notat cu ρ raza de curbură a barei. Se vor stabili mai întâi relații geometrice între deformații.

$$\begin{aligned} &arc(OO') = ds_0 = \rho \cdot d\varphi; \quad arc(CB) = ds = (\rho + y)d\varphi \\ &arc(BB') = arc(BB'') + arc(B''B') \approx arc(O'O'') + arc(B''B') = \\ &\varepsilon_0 ds_0 + y \cdot tg(\Delta d\varphi) \end{aligned} \tag{6.6}$$

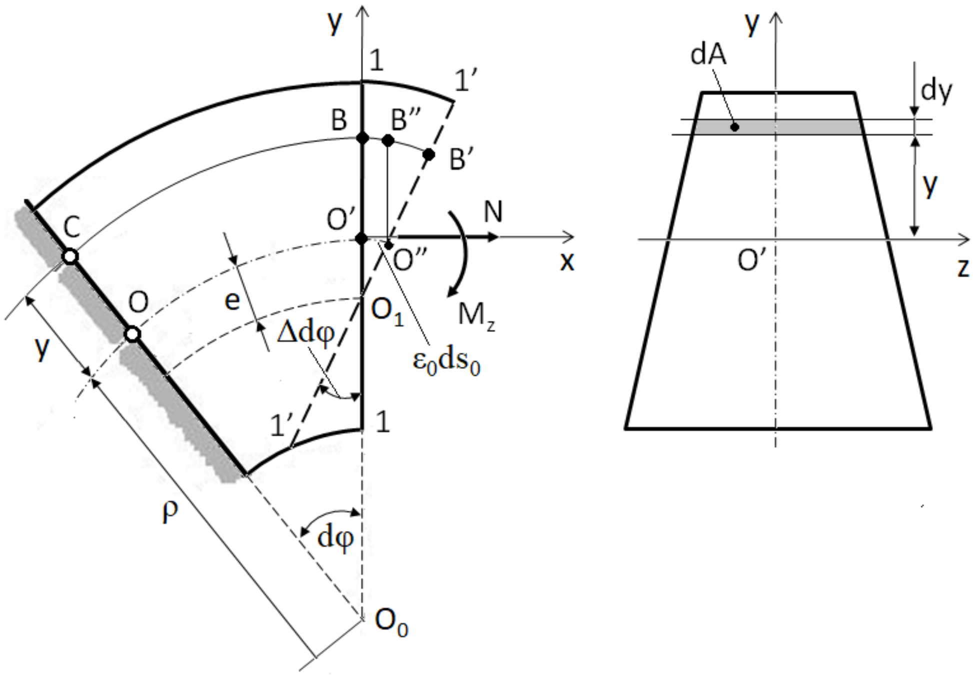


Fig. 6.2. Deformația unui element dintr-o bară curbă

Pentru $\Delta d\varphi$ foarte mic se poate scrie

$$arc(BB') \approx \varepsilon_0 ds_0 + y \cdot \Delta d\varphi \tag{6.7}$$

unde ε_0 este alungirea specifică a fibrei de pe axa geometrică.

Pentru solicitări în domeniul liniar-elastic se aplică legea lui Hooke

$$\begin{gathered}
\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{arc(BB')}{ds} \\
\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \rho d\varphi + y \cdot \Delta d\varphi}{(\rho + y) d\varphi} = \frac{\rho}{\rho + y}\left(\varepsilon_0 + y \frac{\Delta d\varphi}{\rho \cdot d\varphi}\right) \\
\sigma = E\varepsilon = \frac{E\rho}{\rho + y}\left(\varepsilon_0 + y \frac{\Delta d\varphi}{ds_0}\right)
\end{gathered} \tag{6.8}$$

Înlocuind tensiunea normală σ în ecuațiile de echivalență (6.5) se obține

$$\begin{cases} \dfrac{N}{E\rho} = \varepsilon_0 \displaystyle\int_A \dfrac{1}{\rho + y} dA + \dfrac{\Delta d\varphi}{ds_0} \displaystyle\int_A \dfrac{y}{\rho + y} dA \\ \dfrac{M_z}{E\rho} = \varepsilon_0 \displaystyle\int_A \dfrac{y}{\rho + y} dA + \dfrac{\Delta d\varphi}{ds_0} \displaystyle\int_A \dfrac{y^2}{\rho + y} dA \end{cases} \tag{6.9}$$

În continuare se introduce un coeficient de formă a secțiunii

$$k = -\frac{1}{A} \int_A \frac{y}{\rho + y} dA \tag{6.10}$$

Cu această notație integralele din relațiile (6.9) devin

$$\begin{aligned} &\int_A \frac{1}{\rho + y} dA = \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\rho}{\rho + y} dA = \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\rho + y - y}{\rho + y} dA = \frac{A}{\rho}(1 + k) \\ &\int_A \frac{y^2}{\rho + y} dA = \int_A \frac{y^2 + \rho y - \rho y}{\rho + y} dA = \int_A y dA - \rho \int_A \frac{y}{\rho + y} dA = \rho k A \end{aligned} \tag{6.11}$$

unde integrala

$$\int_A y dA = S_z = 0 \tag{6.12}$$

reprezintă momentul static al suprafeței transversale A față de axa O'z, care este nul deoarece axa geometrică trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale.

Cu aceste notații sistemul (6.9) devine

$$\begin{cases} \dfrac{N}{E\rho} = \dfrac{A}{\rho}(1 + k)\varepsilon_0 - kA \dfrac{\Delta d\varphi}{ds_0} \\ \dfrac{M_z}{E\rho} = -kA\varepsilon_0 + \rho k A \dfrac{\Delta d\varphi}{ds_0} \end{cases} \tag{6.13}$$

Rădăcinile acestui sistem sunt

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{AE}\left(N + \frac{M_z}{\rho}\right); \qquad \frac{\Delta d\varphi}{ds_0} = \frac{1}{AE\rho}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho}\right) \tag{6.14}$$

Înlocuind (6.14) în expresia tensiunii normale din (6.8) se obține

$$\sigma = \frac{1}{A}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho}\cdot\frac{y}{\rho + y}\right) \tag{6.15}$$

Observații privind tensiunile normale din bare curbe:

1. Tensiunea normală σ din barele curbe este invers proporțională cu raza de curbură;
2. Când M_z=0 relația (6.15) degenerează în formula de la solicitări axiale;
3. Pentru N=0 se determină poziția axei neutre, din condiția σ=0

$$y = -\frac{k\rho}{1+k} \tag{6.16}$$

Axa neutră se deplasează întotdeauna către centrul de curbură. Poziția ei depinde doar de raza de curbură și de secțiunea transversală a barei curbe;

4. Se studiază *k* pentru $\rho \to \infty$ (cazul barelor drepte), pornind de la

$$\int_A \frac{y^2}{\rho + y} dA = \rho k A \tag{6.17}$$

Neglijând la numitor *y* în raport cu ρ (bare cu rază mare de curbură), se obține succesiv

$$\frac{1}{\rho}\int_A y^2 dA \approx \rho k A \Rightarrow \frac{1}{\rho} I_z \approx \rho k A \Rightarrow k \approx \frac{I_z}{\rho^2 A} \tag{6.18}$$

Înlocuind această expresie a lui *k* în cea a tensiunilor normale σ se obține relația cunoscută de la barele drepte supuse la solicitări axiale cu încovoiere

$$\sigma \approx \frac{1}{A}\left(N + \frac{M_z}{\frac{I_z}{\rho^2 A}}\cdot\frac{y}{\rho}\right) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y \tag{6.19}$$

5. Formula care dă tensiunile normale din secțiunea unei bare curbe poate fi scrisă sub forma

$$\sigma = C + D\frac{y}{\rho + y}$$
$$C = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{A\rho}; \quad D = \frac{M_z}{kA\rho} \tag{6.20}$$

Se observă că tensiunea σ este repartizată după o hiperbolă (fig. 6.3) cu asimptotele

$$y \to \infty \Rightarrow \sigma = C + D$$
$$y \to -\rho \Rightarrow \sigma \to \infty \tag{6.21}$$

6. Deoarece coeficientul *k* este mult mai mic decât unitatea ($k << 1$), coeficientul *D* din expresia lui σ (6.20) devine foarte mare. Tensiunea normală maximă în modul se află la interiorul curburii (unde $y = -h_1$), ceea ce conduce la creșterea raportului $y/\rho + y$ (fig. 6.3).

7. Formula pentru calculul tensiunilor normale la bare curbe (6.15) este mult mai complicată decât cea de la bare drepte supuse la solicitări axiale cu încovoiere, respectiv

$$\sigma_{rez} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} \tag{6.22}$$

Din acest motiv, utilizarea formulei de la bare drepte pentru barele cu rază mare de curbură ar fi avantajoasă, chiar dacă astfel s-ar introduce o anumită eroare, atâta timp cât aceasta este acceptabilă. Se folosește raportul ρ/h pentru a lua o decizie în acest sens. Astfel, pentru $\frac{\rho}{h} \geq 10$ se poate arăta că folosirea formulei de la bare drepte în locul celei deduse la bare curbe nu introduce o eroare mai mare de 3% [Horbaniuc D., 1979; Bia C., 1983]. Acest raport delimitează în mod convențional *domeniul barelor cu rază mare de curbură*, care pot fi calculate aproximativ cu (6.22). Pentru barele cu rază mică de curbură, avem $\frac{\rho}{h} < 10$ și se va folosi relația (6.15).

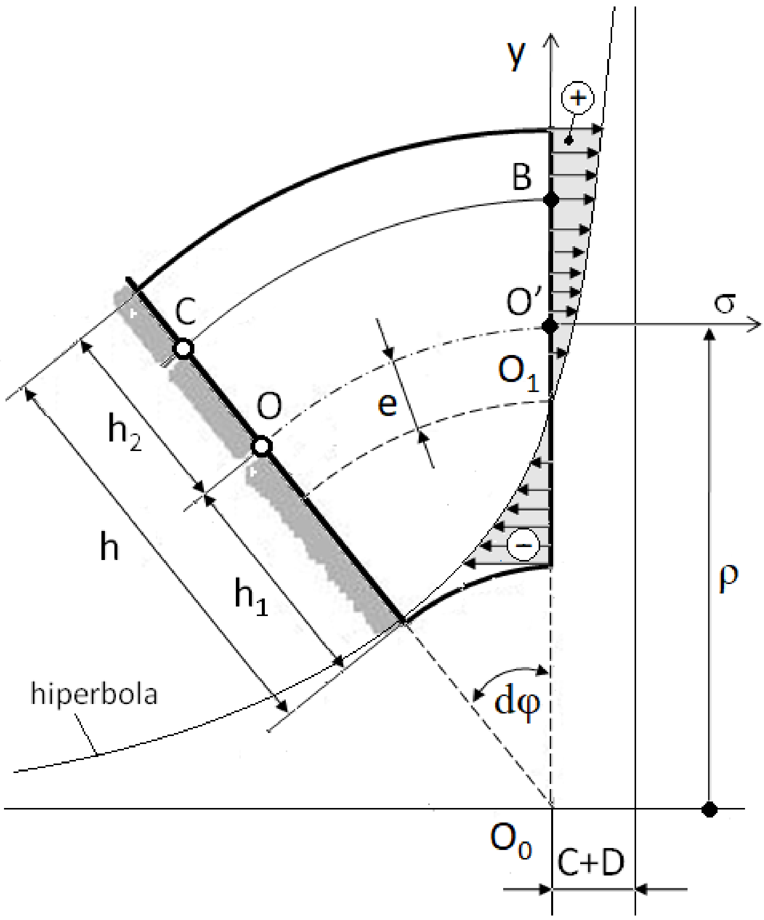


Fig. 6.3. Variația tensiunii normale σ(y) la bare curbe

La calculul de verificare se cunosc dimensiunile secțiunii transversale, se poate calcula raportul ρ / h și funcție de acesta se stabilește cu ce formule se va lucra, (6.22) sau (6.15).

În cazul dimensionării însă, nu se cunoaște *h*. Din acest motiv se face o predimensionare cu formula mai simplă, cea de la bare drepte (6.22) și se adoptă o dimensiune rotunjită pentru *h*. Se calculează apoi raportul ρ / h Dacă $\rho / h \geq 10$ bara are rază mare de curbură și calculul se încheie.

Dacă $\rho / h < 10$ bara are rază mică de curbură. Se majorează *h* și se verifică cu (6.15). Dacă tensiunea calculată este mai mare decât cea admisibilă urmează un calcul empiric: prin încercări se stabilește o valoare pentru *h* care asigură o tensiune cu puțin mai mică decât cea admisibilă (fig. 6.4).

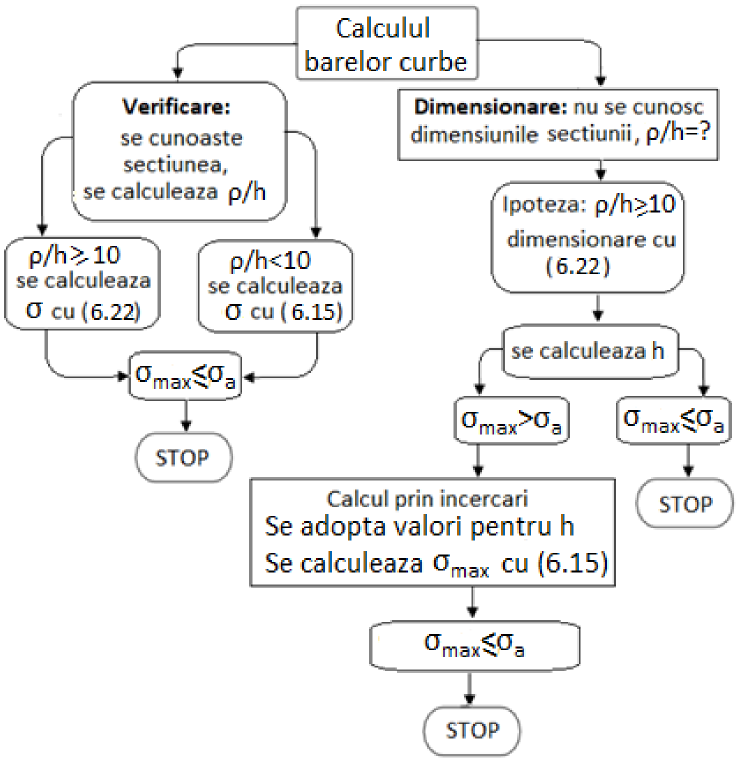


Fig. 6.4. Schemă bloc pentru calculul barelor curbe

6.2.1. Calculul coeficientului de formă k

Coeficientul *k* depinde de forma și dimensiunile secțiunii transversale a barei curbe. În cele ce urmează se va determina *k* pentru câteva secțiuni cu forme uzuale: dreptunghiulară, circulară și trapezoidală (fig. 6.5).

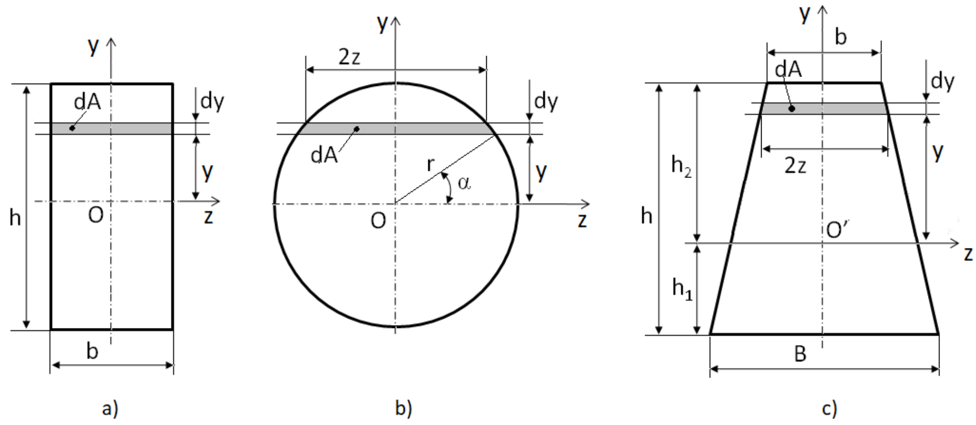


Fig. 6.5. Secțiuni uzuale ale barelor curbe

Fie secțiunea dreptunghiulară din figura 6.5a, pentru care se calculează coeficientul *k*

$$k = -\frac{1}{A}\int_A \frac{y}{\rho + y} dA$$

$$k = -\frac{1}{bh}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{y+\rho-\rho}{\rho+y} b dy; \quad k = -\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left(1-\frac{\rho}{\rho+y}\right)dy \qquad (6.23)$$

$$\int \frac{dy}{a+by} = \frac{1}{b}\ln|a+by| + C; \quad k = -1 + \frac{\rho}{h}\ln\frac{\left|\rho+\frac{h}{2}\right|}{\left|\rho-\frac{h}{2}\right|}$$

Integrala aferentă coeficientului *k* pentru secțiunea circulară din figura 6.5b nu poate fi efectuată analitic. Din acest motiv se recurge la dezvoltarea în serie

$$\frac{y}{\rho+y} = \frac{y}{\rho} - \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^3 - \left(\frac{y}{\rho}\right)^4 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^5 - \left(\frac{y}{\rho}\right)^6 + \ldots \qquad (6.24)$$

din care se va reține un număr finit de termeni.

$$k=-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\rho}\int_A ydA-\frac{1}{\rho^2}\int_A y^2dA+\frac{1}{\rho^3}\int_A y^3dA-\frac{1}{\rho^4}\int_A y^4dA+...\right)$$

$$y=r\sin\alpha;\quad dA=2zdy=2r^2\cos^2\alpha\cdot d\alpha \tag{6.25}$$

$$k=\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4+\frac{5}{64}\left(\frac{r}{\rho}\right)^6+...$$

Pentru calcule uzuale este suficientă adoptarea primilor doi termeni din dezvoltarea în serie.

Pentru secțiunea trapezoidală din figura 6.5c coeficientul de forma *k* este [Horbaniuc D., 1979]:

$$A=\frac{(B+b)h}{2};\quad dA=2zdy;\quad 2z=b+\frac{B-b}{h}\cdot(h_2-y)$$

$$k=-\frac{2}{(B+b)h}\int_{-h_1}^{h_2}\frac{y}{\rho+y}\left[b+\frac{B-b}{h}(h_2-y)\right]\cdot dy\Rightarrow \tag{6.26}$$

$$k=-1+\frac{2\rho}{(B+b)h}\left\{\left[b+\frac{B-b}{h}(h_2+\rho)\right]\ln\frac{\rho+h_2}{\rho-h_1}-(B-b)\right\}$$

Particularizând (6.26) se poate obține coeficientul *k* pentru *secțiunea triunghiulară*

$$b=0;\quad h_1=\frac{h}{3};\quad h_2=\frac{2}{3}h$$

$$k=-1+\frac{2}{h}\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{\rho}{h}\right)\ln\frac{3\rho+2h}{3\rho-h}-1\right] \tag{6.27}$$

6.3. SECȚIUNI RAȚIONALE

Secțiunea trapezoidală, orientată cu baza mare către centrul de curbură (acolo unde tensiunile sunt mai mari) este rațională pentru barele curbe. Această secțiune se utilizează în special la cârlige de macara, de tracțiune etc. Pentru economie de material și scăderea greutății cârligului se mai obișnuiește să se îndepărteze material din zona axei neutre, unde tensiunile normale sunt mici (fig. 6.6). Colturile sunt rotunjite pentru a preveni tăierea cablurilor de prindere.

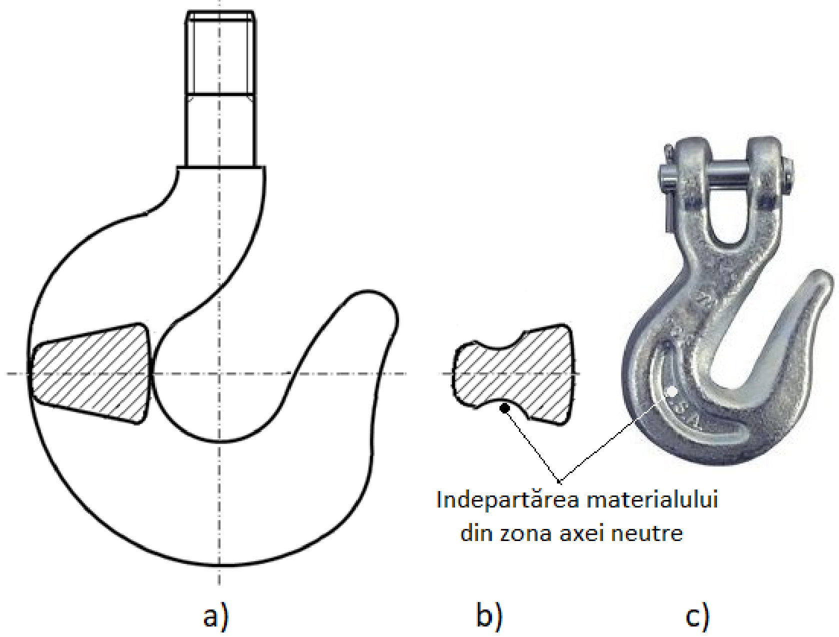


Fig. 6.6. Secțiuni raționale pentru cârligul de macara

Pentru calculul barelor curbe se va vor trasa mai întâi diagramele de eforturi și apoi se va face dimensionarea. Secțiunea periculoasă este de obicei cea în care momentul încovoietor este maxim, chiar dacă forța axială este nulă. La trasarea diagramei la bare curbe *forțele tăietoare se proiectează pe direcție razei, iar cele axiale pe direcția tangentei* în punctul în care s-a făcut secțiunea.

În continuare se vor prezenta exemple cu calculul de verificare și de dimensionare. Mai multe exemple se referă însă doar la trasarea diagramelor la bare curbe. După trasarea acestora se stabilește secțiunea periculoasă și apoi calculele de rezistență se efectuează asemănător cu cele din primele două exemple. Diagramele de eforturi se hașurează pe direcția normalei la curbă.

6.4. APLICAȚII

Problema 6.1

Să se verifice un cârligul de macara din figura 6.7, știind că: D=45mm, h=45mm, b=16mm, B=32mm, F=100 kN și σ_a=90 MPa.

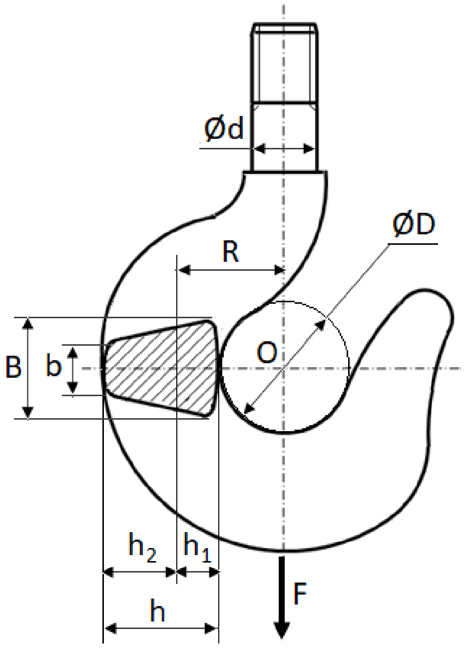


Fig. 6.7. Cârlig de macara

Rezolvare

Se determină aria și poziția centrului de greutate al trapezului

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(32+16)45}{2} = 1080mm^2$$

$$h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b+B}{B+b} = \frac{45}{3} \cdot \frac{32+32}{32+16} = 20mm \qquad (6.28)$$

$$h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2B+b}{B+b} = \frac{45}{3} \cdot \frac{64+16}{32+16} = 25mm$$

Raza de curbură este egală cu distanța de la O la centrul de greutate:

$$\rho = R = \frac{D}{2} + h_1; \quad R = 22,5 + 20 = 42,5mm \tag{6.29}$$

Se trasează diagramele de eforturi schematizând cârligul (fig. 6.8). La bara în consolă se fac secțiuni dinspre capătul liber. Eforturile sunt scrise în tabelul 6.1.

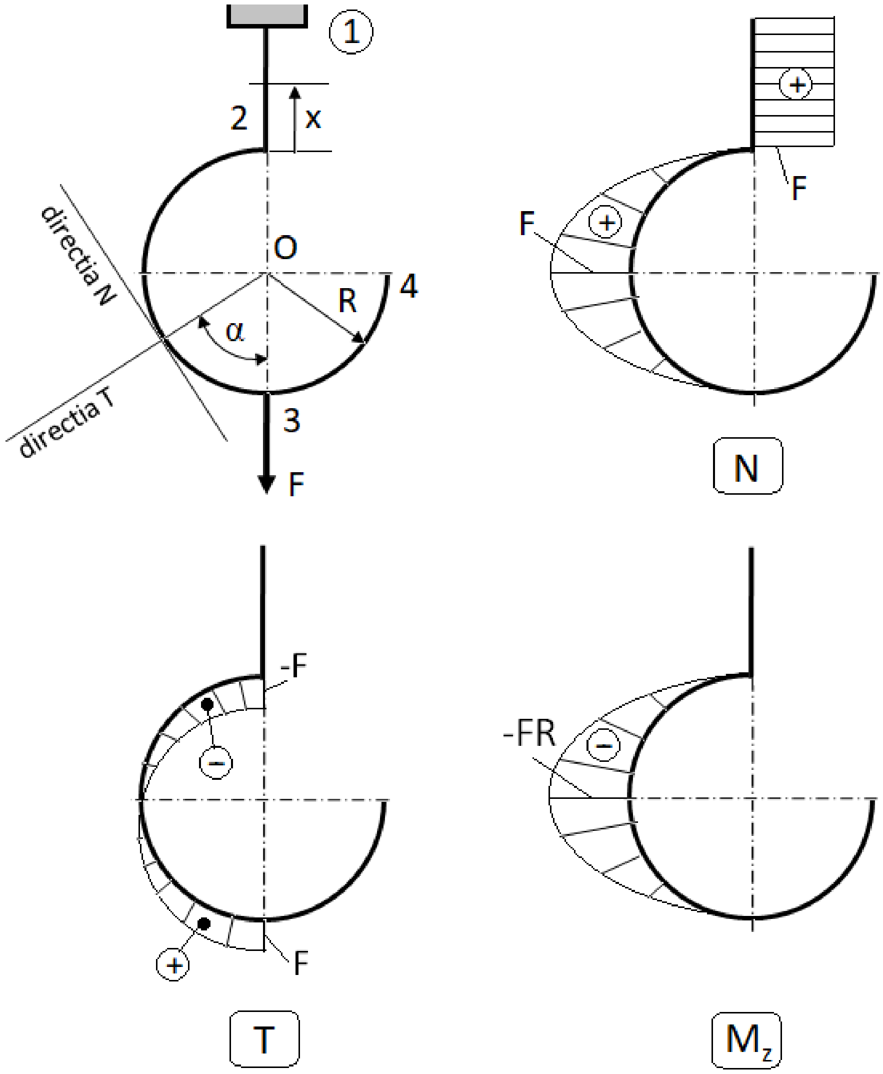


Fig. 6.8. Diagramele de eforturi pentru cârligul de macara din fig. 6.7

Tab. 6.1. Eforturile din cârligul prezentat în fig. 6.8

Regiu-nea	Variabila	N	T	M_z
4-3	-	-	-	-
3-2	$\alpha \in [0,\pi]$	$N(\alpha)=F\sin\alpha$	$T(\alpha)=F\cos\alpha$	$M_z(\alpha)=-FR\sin\alpha$
2-1	x	$N(x)=F$	$T(x)=0$	$M_z(x)=0$

S-a considerat pozitiv momentul încovoietor care micșorează raza de curbură.

Se observă că regiunea 4-3 nu este încărcată. Ea are rolul de a nu permite cablului cu care se atașează greutatea *F* să iasă de pe cârlig în timpul ridicării și al transportului cu macaraua.

Secțiunea periculoasă este la α=90°, unde N=F și M_z=-FR.

Se calculează raportul dintre raza de curbură și înălțimea secțiunii

$$\frac{\rho}{h}=\frac{42,5}{45}<10 \tag{6.30}$$

Suntem în cazul barelor cu rază mică de curbură și în consecință se va utiliza formula de la bare curbe (6.15). Se calculează coeficientul *k*, neglijând rotunjirile de la colțurile trapezului

$$k=-1+\frac{2\cdot 42,5}{(32+16)45}\left[16+\frac{32-16}{45}\cdot(25+42,5)\ln\frac{42,5+25}{42,5-20}-(32-16)\right] \tag{6.31}$$

$$k=0,0998;\quad \frac{1}{k}=10,02$$

Coeficientul *k* are o valoare subunitară. El trebuie considerat cu minim trei cifre caracteristice. Deoarece în (6.15) *k* apare la numitor, este avantajos să se calculeze $1/k$.

Cu (6.15) se determină tensiunile de la interiorul și de la exteriorul curburii

$$y = h_2 \Rightarrow \sigma_{ext} = \frac{1}{A}\left(F - \frac{FR}{R} - \frac{FR}{kR}\cdot\frac{h_2}{R+h_2}\right)$$
$$\sigma_{ext} = -\frac{F}{Ak}\cdot\frac{h_2}{R+h_2} = -\frac{10^4}{1080\cdot 0,0988}\cdot\frac{25}{42,5+25} = -34,7MPa$$
$$y = h_1 \Rightarrow \sigma_{\text{int}} = \frac{1}{A}\left(F - \frac{FR}{R} - \frac{FR}{kR}\cdot\frac{h_1}{R+h_1}\right) = -\frac{F}{Ak}\cdot\frac{h_1}{R+h_1} \tag{6.32}$$
$$\sigma_{\text{int}} = -\frac{10^4}{1080\cdot 0,0988}\cdot\frac{-20}{42,5-20} = 83,3MPa < \sigma_a = 90MPa$$

Deoarece tensiunea maximă este mai mică decât cea admisibilă, cârligul rezistă la încărcarea propusă.

Se face o dimensionare în regiunea rectiline 2-1, care este supusă numai la tracțiune, secțiunea fiind circulară

$$\sigma = \frac{F}{A};\quad \sigma = \frac{4F}{\pi d^2} \le \sigma_a \Rightarrow d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi\sigma_a}}$$
$$d \ge \sqrt{\frac{4\cdot 10^5}{90\pi}} \approx 37,6mm \tag{6.33}$$

Se observă că regiunea 2-1 se termină cu un filet (fig. 6.7).Diametrul *d* astfel calculat este unul minim. În consecință se va adopta un filet standardizat cu diametrul interior mai mare decât 37,6mm.

Problema 6.2

Să se dimensioneze bara curbă din figura 6.9 știind că: R=120mm; F=45kN; σ_a=185MPa și secțiunea transversală este circulară.

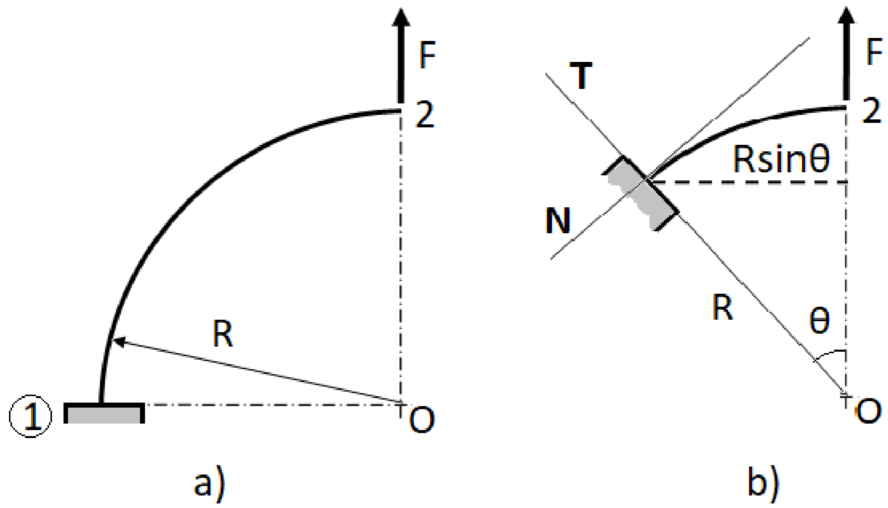


Fig. 6.9. Bara curbă (a) și schema pentru stabilirea eforturilor (b)

Rezolvare

Pentru bara în consolă se fac secțiuni și se reține porțiunea dinspre capătul liber, pentru a evita calculul reacțiunilor. Se scriu eforturile în secțiunea $\theta \in [0, 90°]$ și se trasează diagramele de eforturi (fig. 6.10).

$$T(\theta) = -F\cos\theta; \quad N(\theta) = F\sin\theta; \quad M_z(\theta) = -FR\sin\theta \qquad (6.34)$$

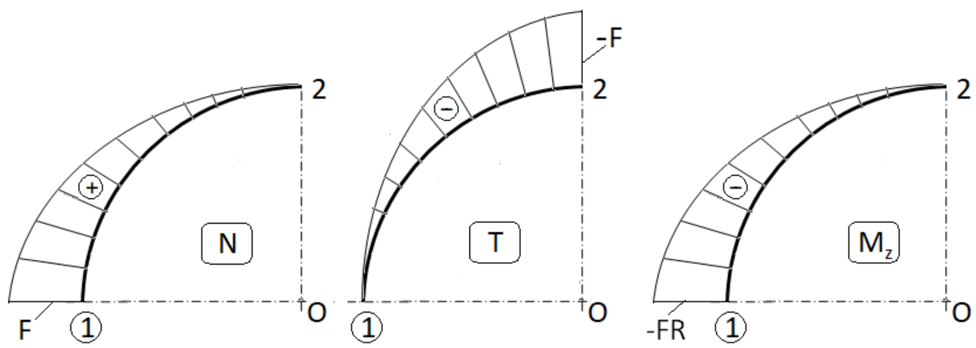


Fig. 6.10. Diagramele de eforturi pentru bara curbă din fig. 6.9

Secțiunea periculoasă este în încastrare, unde momentul încovoietor este maxim în modul. Cu eforturile din această secțiune se va face dimensionarea barei (v. diagramele din fig. 6.10).

Deoarece nu se cunoaște diametrul barei ($d = h$) și nici raportul r/h, se urmărește traseul calculului din figura 6.4. Așa cum s-a procedat în cazul barelor drepte, se face inițial o predimensionare la încovoiere și apoi se majorează secțiunea și se verifică la solicitarea axială cu încovoiere

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma = \frac{32\left|-FR\right|}{\pi d^3} \le \sigma_a \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{32FR}{\pi\sigma_a}}$$
$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 120}{195\pi}} \approx 65,6mm \tag{6.35}$$

Se majorează diametrul la d=67mm și se face verificarea la solicitarea compusă

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32FR}{\pi d^3} = \frac{4F}{\pi d^2}\left(1 + 8\frac{R}{d}\right)$$
$$\sigma = \frac{4 \cdot 45 \cdot 10^3}{\pi 67^2}\left(1 + 8\frac{120}{67}\right) \approx 98MPa < \sigma_a \tag{6.36}$$

Deoarece raportul

$$\frac{\rho}{h} = \frac{R}{d} = \frac{120}{67} < 10 \tag{6.37}$$

suntem în cazul barelor cu rază mică de curbură și se continuă cu formula (6.15). Se calculează coeficientul *k* pentru secțiunea circulară cu (6.25), reținând numai primii doi termeni

$$k = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4; \quad k = \frac{1}{4}\left(\frac{33,5}{120}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{33,5}{120}\right)^4 \approx 0,0202$$
$$\frac{1}{k} \approx 49,4 \tag{6.38}$$

Tensiunea maximă se află la interiorul curburii, unde $y=-r=-d/2$.

$$\sigma=\frac{1}{A}\left(N+\frac{M_z}{\rho}+\frac{M_z}{k\rho}\cdot\frac{y}{\rho+y}\right)$$

$$\sigma=\frac{4}{\pi d^2}\left(F+\frac{-FR}{R}+\frac{-FR}{kR}\cdot\frac{-r}{R-r}\right);\quad \sigma=\frac{4}{\pi d^2}\cdot\frac{F}{k}\cdot\frac{r}{R-r} \qquad (6.39)$$

$$\sigma=\frac{4}{\pi 67^2}\cdot 49,4\cdot 45\cdot 10^3\,\frac{33,5}{120-33,5};\quad \sigma\approx 244,2>\sigma_a$$

Deoarece tensiunea din bară o depășește pe cea admisibilă, se majorează diametrul la d=70mm. Cu această valoare se reia calculul coeficientului de formă și se găsește

$$k=\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4;\quad k=\frac{1}{4}\left(\frac{35}{120}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{35}{120}\right)^4$$
$$k=0,02217;\quad \frac{1}{k}\approx 45,1 \qquad (6.40)$$

Se recalculează tensiunea normală

$$\sigma=\frac{4}{\pi d^2}\cdot\frac{F}{k}\cdot\frac{r}{R-r};\quad \sigma=\frac{4}{\pi 70^2}\cdot 45,1\cdot 45\cdot 10^3\,\frac{35}{120-35}$$
$$\sigma\approx 217,1>\sigma_a \qquad (6.41)$$

Deoarece tensiunea este încă prea mare, se adopta d=75mm (din STAS 75-90) și se reia calculul. Se obține astfel

$$k=0,0256;\quad \frac{1}{k}=39,05;\quad \sigma=180MPa<\sigma_a=185MPa \qquad (6.42)$$

Diametrul final al barei este adoptat d=75mm.

Se prezintă în continuare câteva exemple de trasare a diagramelor de eforturi la bare curbe cu diverse încărcări.

Problema 6.3

Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 6.11a.

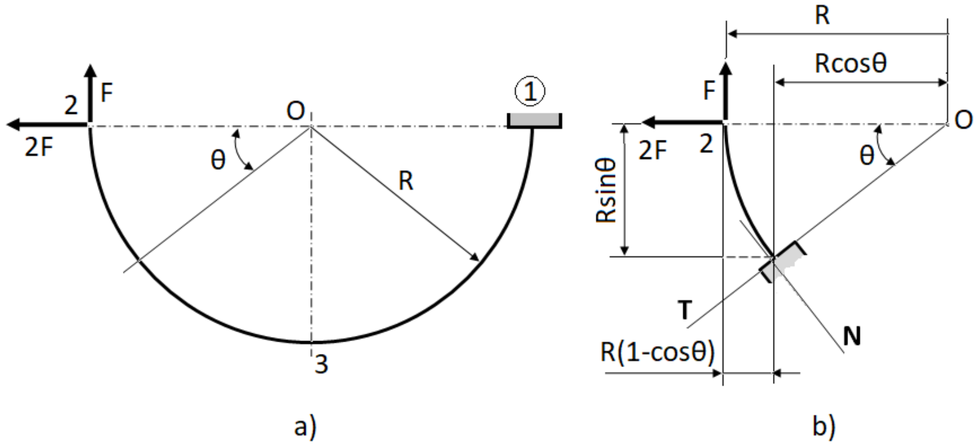


Fig. 6.11. Bară curbă în consolă, încărcată cu două forțe (a), secționare și brațele momentelor (b)

Rezolvare

Bara are o singură regiune și variabila ia valori în intervalul $\theta \in [0, \pi]$. Eforturile în secțiunea θ sunt

$$\begin{aligned} T(\theta) &= -2F\cos\theta + F\sin\theta \\ N(\theta) &= 2F\sin\theta + F\cos\theta \\ M_z(\theta) &= -2FR\sin\theta + FR(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{6.43}$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în fig. 6.12.

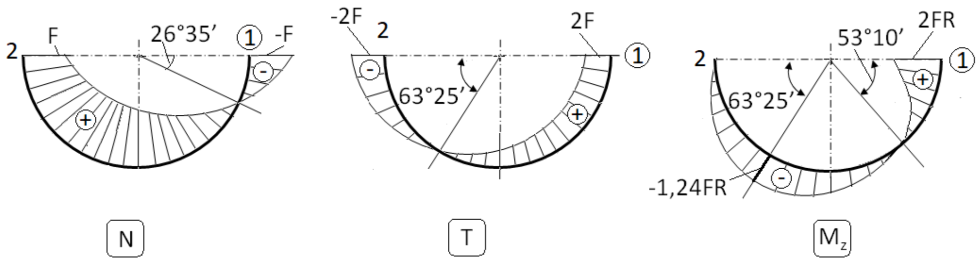


Fig. 6.12. Diagramele de eforturi pentru bara curbă din fig. 6.11

Problema 6.4

Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 6.13. O asemenea forță distribuită poate proveni din presiunea vântului.

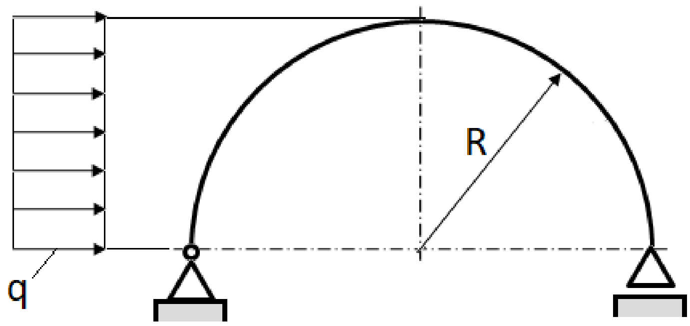


Fig. 6.13. Bară curbă încărcată cu forță uniform distribuită pe raza verticală

Rezolvare

Se figurează și se calculează reacțiunile. Se face câte o secțiune prin fiecare dintre cele două regiuni ale barei (fig. 6.14).

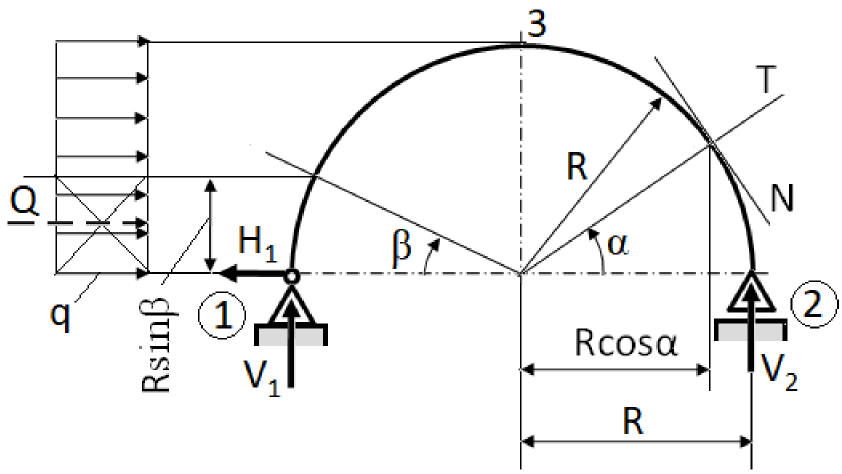


Fig. 6.14. Figurarea reacțiunilor, împărțirea în regiuni
și secționare în fiecare regiune

În figura 6.15 sunt izolate porțiuni de bară în vederea scrierii eforturilor.

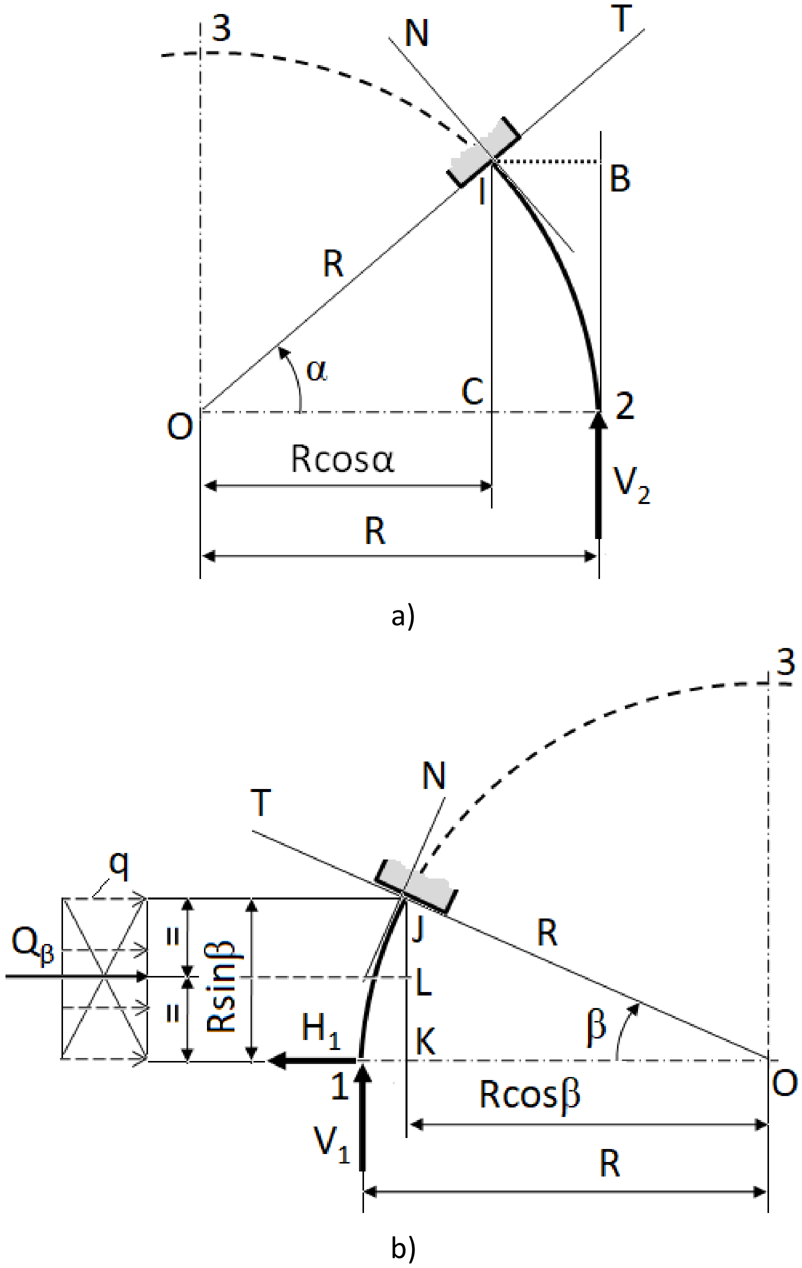


Fig. 6.15. Izolarea porțiunilor din bară în scopul scrierii expresiilor eforturilor

Se calculează reacțiunile din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}
&V_1 + V_2 = 0; \quad H_1 = Q = qR; \\
&\sum M_{(1)} = 0 \Leftrightarrow V_2 \cdot 2R - Q \cdot \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{qR}{4} \\
&\sum M_{(2)} = 0 \Leftrightarrow V_1 \cdot 2R + Q \cdot \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{qR}{4}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Eforturile din secțiunea $\alpha \in [0, 90°]$ sunt (fig. 6.15a):

$$N(\alpha) = -V_2 \cos\alpha; \quad T(\alpha) = -V_2 \sin\alpha; \quad M_z(\alpha) = -V_2 R(1 - \cos\alpha) \tag{6.45}$$

Eforturile din secțiunea $\beta \in [0, 90°]$ sunt (fig. 6.15b):

$$\begin{aligned}
&N(\beta) = H_1 \sin\beta - V_1 \cos\beta - Q_\beta \sin\beta \\
&T(\beta) = H_1 \cos\beta + V_1 \sin\beta - Q_\beta \cos\beta \\
&M_z(\beta) = -H_1 R \sin\beta - V_1 R(1 - \cos\beta) + Q_\beta \frac{R \sin\beta}{2} \\
&Q_\beta = qR \sin\beta
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Verificare diagramelor

Verificarea expresiei eforturilor N și T poate fi făcută dând valori unghiurilor de mai sus astfel încât să se ajungă în reazeme. Astfel, pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 0$ din (6.45) și (6.46) rezultă reacțiunile din reazemele 1 și respectiv 2

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0 \Rightarrow N(0) = -V_2; \quad T(0) = 0 \\
&\beta = 0 \Rightarrow N(0) = -V_1; \quad T(0) = H_1
\end{aligned} \tag{6.47}$$

În reazeme reacțiunile V_1 și V_2 sunt orientate pe direcția tangentei la bara curbă și sunt forțe axiale iar H_1 este orientată pe direcție radială și este forță tăietoare.

Verificarea diagramei de moment de face astfel: momentul este nul în reazemele în care nu există momente concentrate; în secțiunile în care există un moment concentrat M, în diagramă apare un salt egal în modul cu M.

În figura 6.16 sunt prezentate diagramele de eforturi. Se observă că în secțiunea în care $T = 0$ există un punct de extrem al momentului, așa cum prevăd relațiile diferențiale între eforturi (6.4). Secțiunea periculoasă este cea în care momentul încovoietor este maxim în modul.

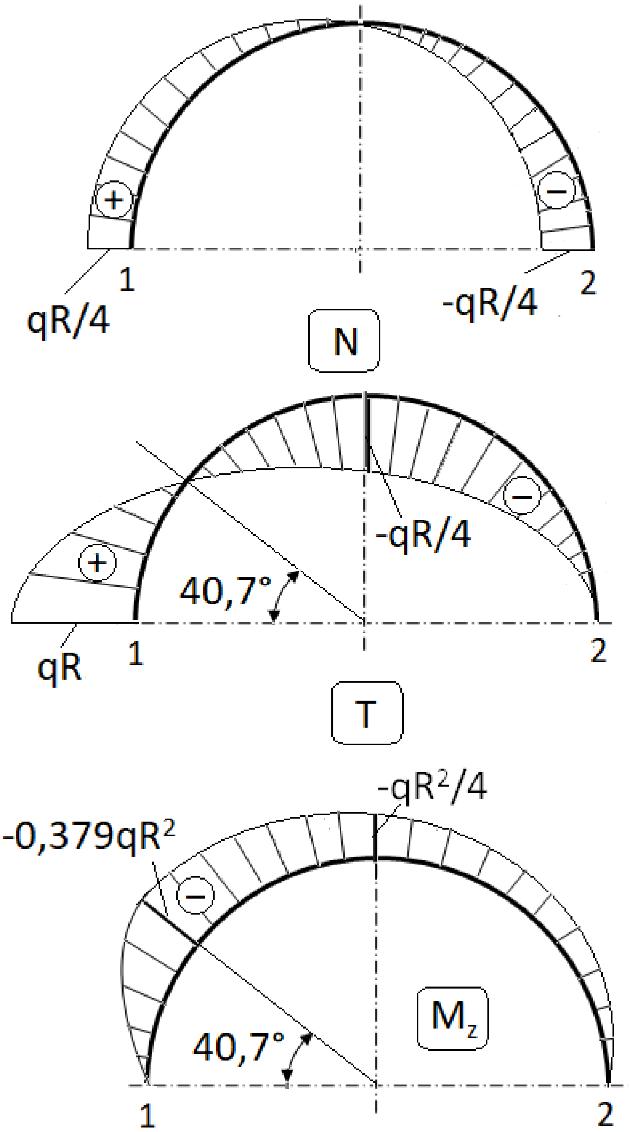


Fig. 6.16. Diagramele de eforturi pentru bara din fig. 6.13

6.5. BARE CURBE STATIC NEDETERMINATE

La fel ca în cazul cadrelor, barele curbe pot fi static nedeterminate interior, exterior și respectiv interior și exterior. Pentru ridicarea nedeterminării pot fi aplicate aceleași metode care au fost utilizate la cadre. Dacă se utilizează metoda eforturilor, integrarea grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin* nu poate fi aplicată la bare curbe și coeficienții de influență vor fi calculați numai prin integrare analitică.

Se dau în continuare câteva exemple privind ridicarea nedeterminării.

Fie bara curbă din figura 6.17, pentru care se vor trasa diagramele de eforturi.

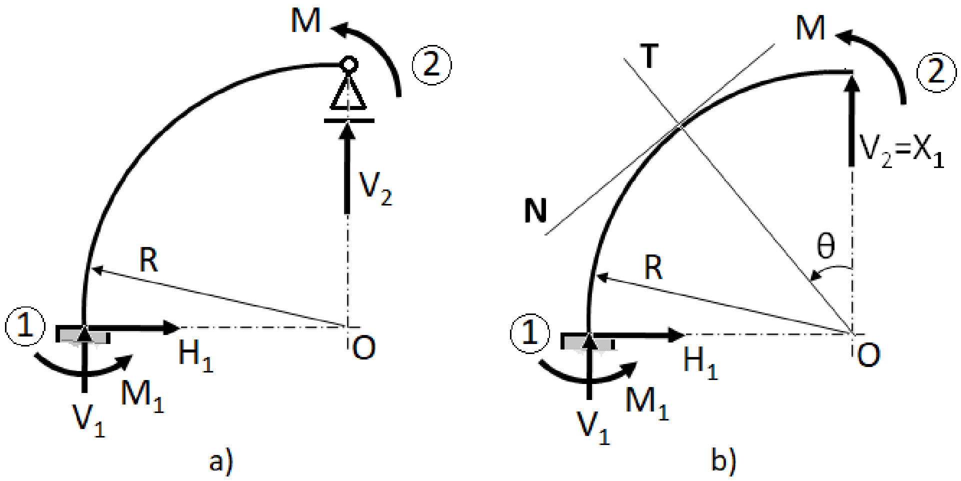


Fig. 6.17. Bară curbă static nedeterminată exterior (a) și sistemul de bază (b)

Se figurează cele patru reacțiuni și se stabilește gradul de nedeterminare $GN = 4 - 3 = 1$. Bara este simplu static nedeterminată exterior (necunoscutele sunt reacțiuni). Pentru ridicarea nedeterminării se va utiliza metoda eforturilor. Pentru nedeterminarea simplă (GN=1) se scrie ecuația

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0 \tag{6.48}$$

Se alege sistemul de bază (SB), care este static determinat. În acest scop se îndepărtează un număr de reacțiuni egal cu GN.

De exemplu, se îndepărtează reazemul 2 și se figurează numai reacțiunea $V_2=X_1$ (fig. 6.17b). Dacă X_1 ar fi cunoscut, sistemul de bază ar fi static determinat. La ridicarea nedeterminării se vor considera numai efectul momentelor încovoietoare, care au o contribuție predominantă la energia potențială de deformare elastică. Se studiază sistemul de bază în atâtea situații câți indici independenți au coeficienți δ, respectiv 1 și 0 în acest caz. Se trasează următoarele diagrame de momente fictive (fig. 6.18):

- Pentru S.B. încărcat cu sarcini reale (M) și $X_1=0$ se trasează diagrama M_0;
- Pentru S.B. încărcat cu $X_1=1$ și fără sarcini (M=0) se trasează diagrama m_1.

La fel ca la cadre, diagramele fictive se trasează pe același desen cu bara, pentru economie de spațiu.

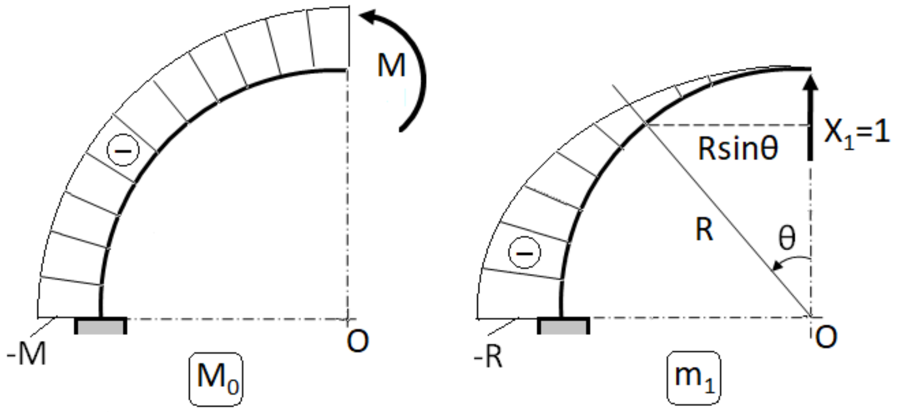


Fig. 6.18. Trasarea diagramelor de eforturi fictive pentru SB din fig. 6.17b

Se scriu eforturile fictive, coeficienții de influență se calculează prin integrare iar momentul încovoietor real M_z se calculează prin suprapunerea efectelor

$$M_0(\theta) = -M; \quad m_1(\theta) = -1 \cdot R\sin\theta$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} M_0(\theta)\cdot m_1(\theta) R d\theta; \delta_{11} = \frac{1}{EI_z}\int_0^{\pi/2} m_1(\theta)\cdot m_1(\theta) R d\theta \quad (6.49)$$

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{4M}{\pi R} = V_2; \quad M_z(\theta) = M_0(\theta) + X_1 \cdot m_1(\theta)$$

În figura 6.19 sunt prezintate diagramele de eforturi reale.

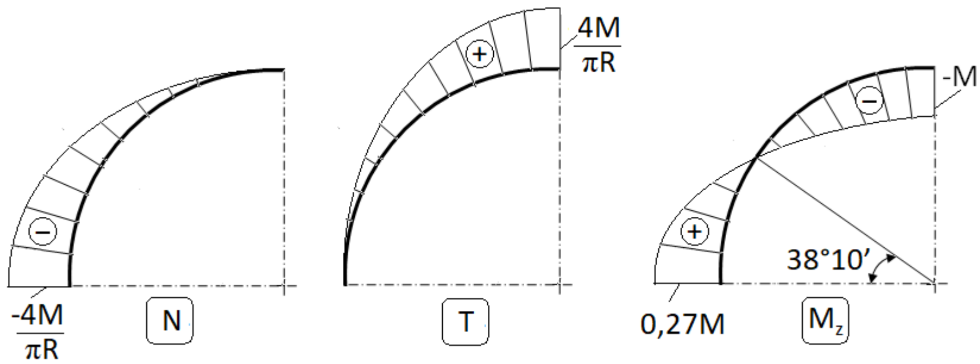


Fig. 6.19. Diagramele de eforturi pentru bara curbă din fig. 6.17

6.5.1. Calculul zalei de lanț

În cele ce urmează se va dimensiona zaua de lanț din figura 6.20, știind că: F=1kN; R=10mm; σ_a=250MPa.

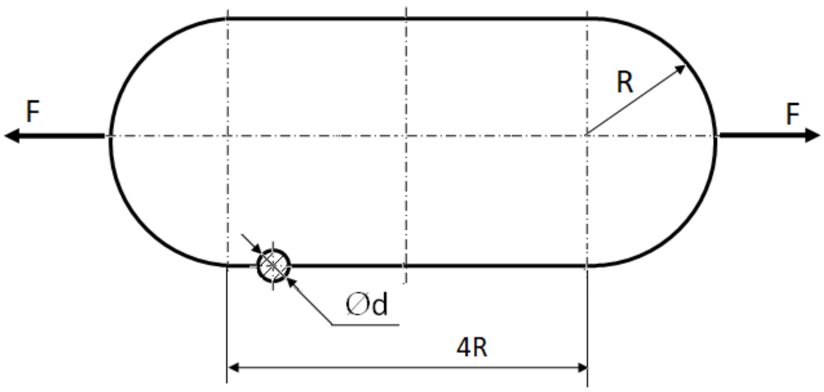


Fig. 6.20. Za de lanț

Zaua de lanț este un sistem static determinat exterior (forțele *F* sunt în echilibru) și static nedeterminat interior (prin secționare apar trei eforturi necunoscute). În principiu, sistemele static nedeterminate interior sunt triplu static nedeterminate. Zaua de lanț are două axe de simetrie. Așa cum s-a discutat la cadrele static nedeterminate, fiecare axă de simetrie reduce gradul de nedeterminare cu o unitate. Ținând cont de dubla simetrie, zaua de lanț este simplu static nedeterminată. Se va ridica nedeterminarea cu metoda eforturilor. Pentru GN=1 se scrie ecuația de gradul întâi (6.48).

Se alege apoi sistemul de bază (static determinat) cu necunoscuta static nedeterminată X_1=M. Fibra punctată este amplasată la exteriorul zalei, pentru a respecta regula de semn de la bare curbe (momentul încovoietor pozitiv micșorează raza de curbură). La metoda eforturilor se va ține cont numai de influența momentelor încovoietoare și expresia energiei de la bare drepte, ceea ce reprezintă o aproximare. Energia potențială pentru bare curbe este prezentată în paragraful 6.6. Se secționează zaua după axa de simetrie orizontală și se figurează eforturile (fig. 6.21). Pe axa se simetrie forțele tăietoare sunt nule (v. tab. 5.3). Datorită simetriei față de axa verticală eforturile sunt simetrice. Eforturile fictive sunt în tabelul 6.2.

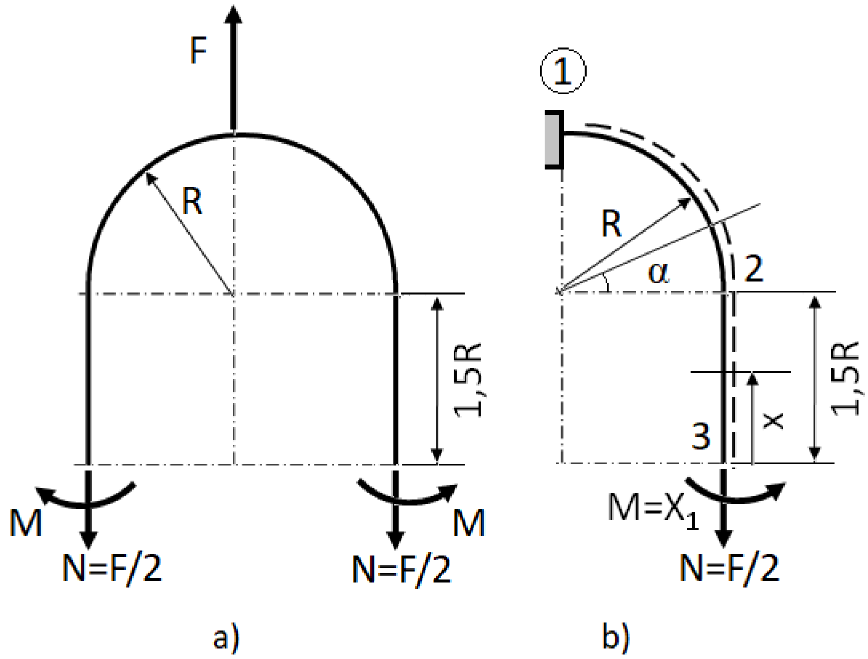


Fig. 6.21. Secționarea zalei după axa de simetrie orizontală (a) și stabilirea sistemului de bază (b)

Tab. 6.2. Eforturi în sistemul de bază din fig. 6.21b

Reg.	Vari-abila	M_0	m_1	$M_z = M_0 + X_1 m_1$
3-2	$x \in [0;2R]$	$M_0(x)=0$	$m_1(x)=-1$	$M_z(x)= -\dfrac{\pi-2}{2(\pi+4)}FR$
2-1	$\alpha \in [0,\pi/2]$	$M_0(\alpha)= \dfrac{F}{2}R(1-\cos\alpha)$	$m_1(\alpha)=-1$	$M_z(\alpha)= \dfrac{FR}{2}(1-\cos\alpha)- \dfrac{\pi-2}{2(\pi+4)}FR$

Cu eforturile fictive M_0 și m_1 din tabelul 6.2 se calculează coeficienții de influență și necunoscuta static nedeterminată X_1. Se multiplică toți coeficienții de influență cu 4, pentru a ține cont de faptul că sistemul de bază este pe sfert și metoda contabilizează energia întregului sistem

$$\delta_{10} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{2R} M_0(x)m_1(x)dx + \int_0^{\pi/2} M_0(\alpha)m_1(\alpha)Rd\alpha\right]$$

$$\delta_{10} = \frac{4}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\frac{F}{2}R(1-\cos\alpha)(-1)Rd\alpha \Rightarrow \delta_{10} = -\frac{FR^2(\pi-2)}{EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{2R} m_1^2(x)dx + \int_0^{\pi/2} m_1^2(\alpha)Rd\alpha\right] \tag{6.50}$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{EI_z}\left[\int_0^{2R}(-1)^2 dx + \int_0^{\pi/2}(-1)^2 Rd\alpha\right] \Rightarrow \delta_{11} = \frac{2R(\pi+4)}{EI_z}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}; \quad X_1 = M = \frac{\pi-2}{2(\pi+4)}FR$$

Momentul încovoietor real M_z se scrie folosind suprapunerea efectelor (tab. 6.2).

Diagramele de eforturi sunt trasate pe un sfert de za în figura 6.22. Diagramele pot fi trasate pentru întreaga za prin simetrie.

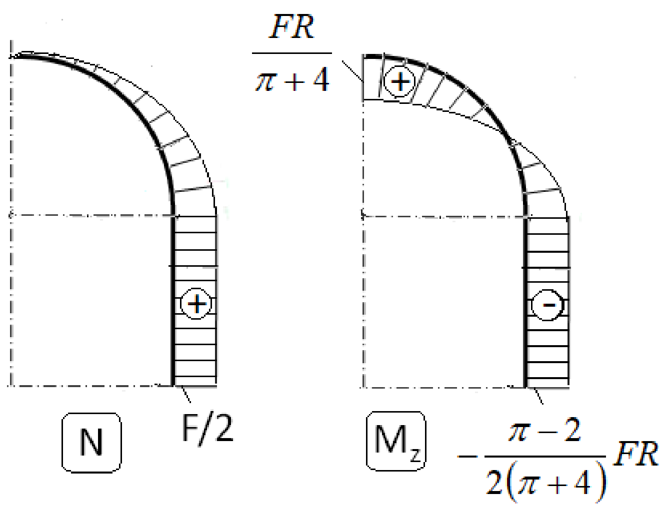


Fig. 6.22. Diagramele de eforturi pentru un sfert de za

Secțiunea periculoasă este la $\alpha = 90°$, acolo unde momentul M_z este maxim. Se va face dimensionarea cu eforturile din această secțiune

$$M_{z.\max} = \frac{FR}{\pi + 4} \approx 0,14FR; \quad N = 0 \tag{6.51}$$

Pentru început se admite ipoteza

$$\frac{\rho}{h} = \frac{R}{d} \geq 10 \tag{6.52}$$

Astfel bara este considerată pentru început cu rază mare de curbură. Se va face o predimensionare numai la încovoiere, apoi la încovoiere cu solicitări axiale (6.22) și se va verifica (6.52).

$$\sigma_{\max} \approx \frac{M_{z.\max}}{W_z} \le \sigma_a$$

$$\sigma_{\max} = 0{,}14FR \cdot \frac{32}{\pi d^3} \le \sigma_a \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{4{,}48FR}{\pi \sigma_a}} \tag{6.53}$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{4{,}48 \cdot 10^3 \cdot 10}{\pi \cdot 250}} \approx 3{,}85mm \Rightarrow d_1 = 4mm$$

Se majorează diametrul sârmei la d=5mm și se verifică la solicitarea compusă

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z.\max}}{W_z} + \frac{N}{A}; \quad \sigma_{\max} = 0{,}14FR \cdot \frac{32}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}$$
$$\sigma_{\max} = \frac{4F}{\pi d^2}\left(1{,}12\frac{R}{d} + 1\right); \quad \sigma_{\max} = \frac{4 \cdot 10^3}{25\pi}\left(1{,}12\frac{10}{5} + 1\right) \approx 209MPa \tag{6.54}$$

Deși tensiunea la solicitarea compusă este mai mică decât cea admisibilă, totuși calculul nu poate fi oprit aici, deoarece ipoteza inițială (6.52) nu se verifică. Se continua calculul tensiunii cu relația (6.15) de la bare curbe. Mai întâi se calculează coeficientul de forma *k* pentru secțiune circulară, cu (6.25), reținând numai primii doi termeni

$$k = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4; \quad k = \frac{1}{4}\left(\frac{2{,}5}{10}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{2{,}5}{10}\right)^4 \approx 0{,}0161$$
$$\frac{1}{k} \approx 62{,}06 \tag{6.55}$$

Tensiunea maximă se află la interiorul curburii, unde $y = -r$.

$$\sigma = \frac{1}{A}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right)$$
$$\sigma = \frac{1}{\pi r^2}\left(\frac{0{,}14FR}{R} + \frac{0{,}14FR}{kR} \cdot \frac{(-r)}{R - r}\right) = \frac{0{,}14F}{\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{r}{R - r}\right) \tag{6.56}$$
$$\sigma = \frac{0{,}14 \cdot 10^3}{\pi 2{,}5^2}\left(1 - 62{,}06\frac{2{,}5}{10 - 2{,}5}\right) \approx -140{,}4MPa; \sigma_{\max} = \left|-140{,}4\right| < \sigma_a$$

Deoarece $\sigma_{max} < \sigma_a$, se oprește calculul si se adoptă o sârmă cu d=5mm.

Problema 6.5

Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 6.23. O asemenea forță distribuită poate proveni din presiunea apei la o anumită adâncime.

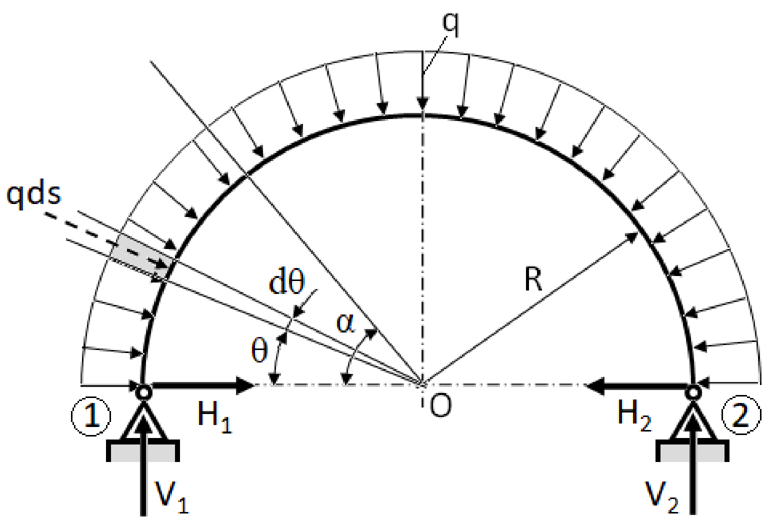


Fig. 6.23. Bară curbă încărcată cu forță uniform distribuită pe direcție radială

Rezolvare

Se figurează reacțiunile și se scriu ecuațiile de echilibru

$$
\begin{aligned}
&V_1 + V_2 - \int_0^{\pi} qR\sin\theta d\theta = 0\\
&H_1 - H_2 + \int_0^{\pi} qR\cos\theta d\theta = 0\\
&V_1 \cdot 2R - \int_0^{\pi} qR^2 \sin\theta d\theta = 0
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

Datorită simetriei reacțiunile sunt simetrice

$$V_1 = V_2 = qR; \quad H_1 = H_2 = H \tag{6.58}$$

Se observă că aceleași reacțiuni V s-ar obține pentru o grindă dreaptă de lungime 2R, rezemată la capete și încărcată cu forță verticală *q*, uniform distribuită pe lungimea grinzii.

La fel se întâmplă și în cazul unui un piston: forța rezultantă produsă de presiunea care acționează asupra sa nu se modifică pentru diverse forme ale capului pistonului și depinde numai de diametrul acestuia și de presiune.

Problema este simplu static nedeterminată (GN=1). Se ridică nedeterminarea cu teorema lui *Castigliano*

$$\frac{\partial U}{\partial H}=0; \quad \int_s M\left(\alpha\right)\frac{\partial M\left(\alpha\right)}{\partial H}ds=0 \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned} &M\left(\alpha\right)=VR\left(1-\cos\alpha\right)-qR^2\int_0^\alpha \sin\left(\alpha-\theta\right)d\theta+HR\sin\alpha \\ &M\left(\alpha\right)=HR\sin\alpha; \quad \frac{\partial M\left(\alpha\right)}{\partial H}=R\sin\alpha \end{aligned} \tag{6.60}$$

Din (6.59) și (6.60) rezultă

$$\begin{aligned} &HR^2\int_0^\pi \sin^2\alpha\cdot d\alpha=0; \quad HR^2\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\Big|_0^\pi=0 \\ &\frac{\pi}{2}HR^2=0\Rightarrow H=0 \end{aligned} \tag{6.61}$$

Astfel se ridică nedeterminarea și se obțin reacțiunile $V=qR, H=0.$

Se observă că momentul încovoietor și forța tăietoare se anulează

$$\begin{aligned} &M_z\left(\alpha\right)=qR^2\left(1-\cos\alpha\right)-qR^2\cos\left(\alpha-\theta\right)\Big|_0^\alpha \\ &M_z\left(\alpha\right)=qR^2\left(1-\cos\alpha\right)-qR^2\left(1-\cos\alpha\right)=0 \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$T(\alpha) = V_1 \sin\alpha - qR\int_0^{\alpha} \cos(\alpha - \theta)\cdot d\theta$$
$$T(\alpha) = qR\sin\alpha - qR\sin\alpha = 0 \tag{6.63}$$

Se scrie forța axială

$$N(\alpha) = -V_1 \cos\alpha - qR\int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \theta)\cdot d\theta$$
$$N(\alpha) = -qR\cos\alpha - qR(1-\cos\alpha) = -qR \tag{6.64}$$

care este constantă și negativă (de compresiune) pe toată lungimea barei (fig. 6.24).

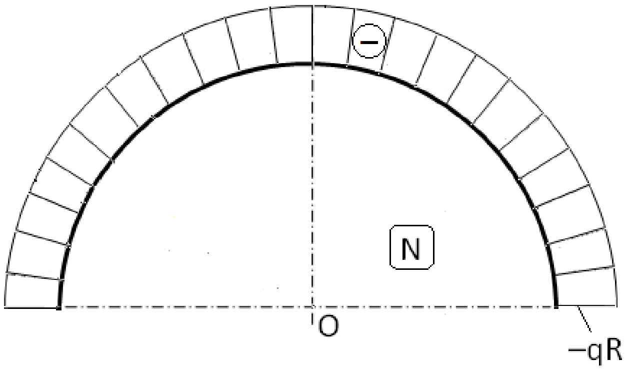


Fig. 6.24. Diagrama forțelor axiale pentru bara din fig. 6.23

O aplicație a acestei probleme se găsește în cazul unor baraje de munte, care sunt construite în arc de cerc. Se știe că presiunea apei variază liniar cu adâncimea, dar la o adâncime constantă situația este cea prezentată mai sus: nu există decât o diagramă de forte axiale, care sunt uniforme și negative (de compresiune). Acest lucru este favorabil pentru beton, material cu cedare fragilă, care rezistă foarte bine la compresiune. Desigur, manopera pentru construirea barajului în arc de cerc este mai scumpă și această soluție constructivă se adoptă numai atunci când prețul materialului economisit este mai mare decât costul manoperei suplimentare.

6.6. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ A BARELOR CURBE

Problemele static nedeterminate prezentate mai sus au fost rezolvate aproximativ, făcând apel la expresia energiei potențiale de deformare elastică de la bare drepte. Pentru un calcul mai precis se va deduce mai jos expresia energiei potențiale pentru bare curbe.

In barele curbe plane apar eforturile: moment încovoietor M_z, forță tăietoare *T* și forță normală *N*. La fel ca la barele drepte și la barele curbe lungi (în raport cu dimensiunile secțiunii transversale) influența forței tăietoare este mică și se poate neglija. Se consideră un element de lungime *ds*, detașat dintr-o bara curbă. Energia potențială de deformare elastică înmagazinată în acest element (v. fig. 6.2) este

$$dU = \frac{1}{2} M_z \Delta\left(d\varphi\right) + \frac{1}{2} N \Delta\left(ds_0\right) \tag{6.65}$$

Din (6.14), rezultă

$$\Delta(d\varphi) = \frac{1}{AE\rho}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho}\right) ds_0 \tag{6.66}$$

Energia potențială produsă de momentul încovoietor este

$$dU_1 = \frac{1}{2} M_z \Delta\left(d\varphi\right) = \frac{M_z}{2AE\rho}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho}\right) ds_0 \tag{6.67}$$

Din (6.14) rezultă

$$\Delta\left(ds_0\right) = \varepsilon_0 \cdot ds_0 = \frac{1}{AE}\left(N + \frac{M_z}{\rho}\right) ds_0 \tag{6.68}$$

Energia potențială produsă de forța axială este

$$dU_2 = \frac{1}{2} N \Delta\left(ds_0\right) = \frac{N}{2AE}\left(N + \frac{M_z}{\rho}\right) ds_0 \tag{6.69}$$

Energia potențială de deformare elastică produsă de momentul încovoietor și forța axială în elementul de bară este egală cu suma energiilor potențiale dU_1 și dU_2

$$dU = \frac{M_z}{2AE\rho}\left(N + \frac{M_z}{\rho} + \frac{M_z}{k\rho}\right)ds_0 + \frac{N}{2AE}\left(N + \frac{M_z}{\rho}\right)ds_0 \qquad (6.70)$$

de unde rezultă

$$dU = \frac{1}{2AE}\left[\left(\frac{M_z}{\rho}\right)^2 \frac{k+1}{k} + \frac{2M_z N}{\rho} + N^2\right]ds_0 \qquad (6.71)$$

Energia potențială de deformare elastică înmagazinată de întreaga bară se află prin integrare pe lungimea barei curbe

$$U = \frac{1}{2AE}\left[\int_s \left(\frac{M_z}{\rho}\right)^2 \frac{k+1}{k} ds + \int_s \frac{2M_z N}{\rho} ds + \int_s N^2 ds\right] \qquad (6.72)$$

Teoremele lui *Castigliano* se aplică astfel la bare curbe

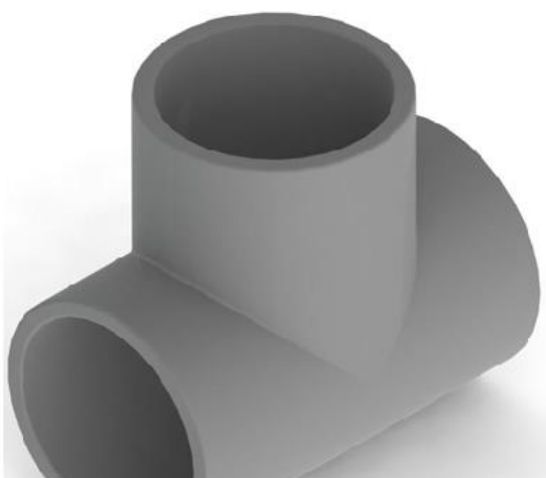
$$\frac{\partial U}{\partial F} =$$

$$\frac{1}{AE}\left[\frac{k+1}{k}\int_s \frac{M_z}{\rho^2}\cdot\frac{\partial M_z}{\partial F} ds + \int_s \frac{1}{\rho}\left(N\frac{\partial M_z}{\partial F} + M_z\frac{\partial N}{\partial F}\right)ds + \int_s N\frac{\partial N}{\partial F} ds\right] \qquad (6.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{AE}\left(\frac{k+1}{k}\int_s \frac{M_z}{\rho^2}\cdot\frac{\partial M_z}{\partial M} ds + \int_s \frac{N}{\rho}\frac{\partial M_z}{\partial M} ds\right)$$

CAP. 7

VASE CU PEREȚI SUBȚIRI



Pentru colajul din acest capitol s-au folosit:

https://www.deform.se/en/pressure-vessels

https://www.deform.se/en/pressure-vessels

https://sokodirectory.com/2018/11/households-to-pay-more-for-cooking-gas-as-prices-shoot-to-a-27-month-high/

https://www.greenhousepeople.co.uk/products/3028/t-joint-for-pipe/

7. VASE CU PEREȚI SUBȚIRI

În acest capitol vor fi prezentate corpuri din categoria vase de revoluție cu pereți subțiri, destinate stocării fluidelor la presiuni relativ mici.

Dacă pe suprafața unui balon se trasează o rețea de meridiane și paralele, atunci când se umflă balonul se observă că laturile unui element de suprafață se măresc, dar unghiurile drepte nu se modifică (fig. 7.1). Acest lucru indică o solicitare la tracțiune biaxială. Pe direcție radială, la interior acționează asupra învelișului (mantalei) presiunea *p*, care trebuie să fie echilibrată de tensiunea normală din imediata vecinătate a suprafeței interioare. Tensiunea pe direcție radială este mică în comparație cu tensiunile de la tracțiunea biaxială. La exterior presiunea este considerată zero (se lucrează numai cu presiuni peste cea atmosferică) și în consecință tensiunea normală pe direcție radială, din imediata vecinătate a suprafeței exterioare, este și ea nulă. Rezultă că tensiunile pe direcție radială sunt mici și se neglijează. Elementul din mantaua vasului se consideră supus doar la tracțiune biaxială, pe direcția meridianului, respectiv a paralelului. În acest element de volum apar tensiuni pe direcția meridianului σ_m și respectiv a paralelului σ_p. Imaginea globului din figura 7.1 a fost preluată din [5] și prelucrată.

Convențional se consideră că un vas este cu pereți subțiri dacă raportul dintre razele exterioară și interioară îndeplinește condiția

$$\frac{R_{ext}}{R_{\text{int}}} < 1,2 \tag{7.1}$$

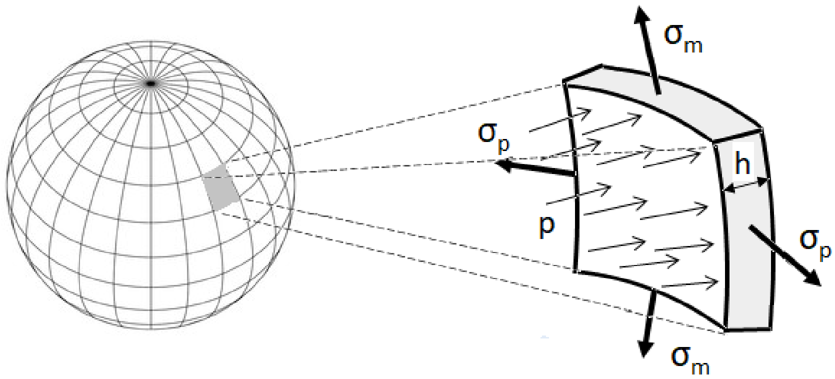


Fig. 7.1. Rețea de meridiane și paralele și izolarea unui element din mantaua vasului (marcat cu gri)

7.1. TENSIUNI ÎN MANTAUA VASULUI

Secționând vasul cu plane care conțin două meridiane și respectiv două paralele infinit apropiate se detașează un element din mantaua acestuia. Lungimile arcelor pe cele doua direcții sunt: ds_m pe direcția meridianului și ds_p pe direcția paralelului.

Ducând normalele în colțurile elementului de volum detașat din anvelopa vasului se află centrele de curbură O_1 și O_2 și razele de curbură ale meridianului ρ_m și respectiv paralelului ρ_p. Numai la sferă aceste două raze sunt egale. Se obțin astfel două *piramide* rectangulare care au aceeași bază ABCD și aceeași axă O_1-O_2 (fig. 7.2).

Se consideră că presiunea *p* este constantă pe suprafața elementului de volum detașat din mantaua vasului, care se află într-o stare plană de tensiuni (tracțiune biaxială), cu tensiuni uniform repartizate pe grosimea peretelui *h*.

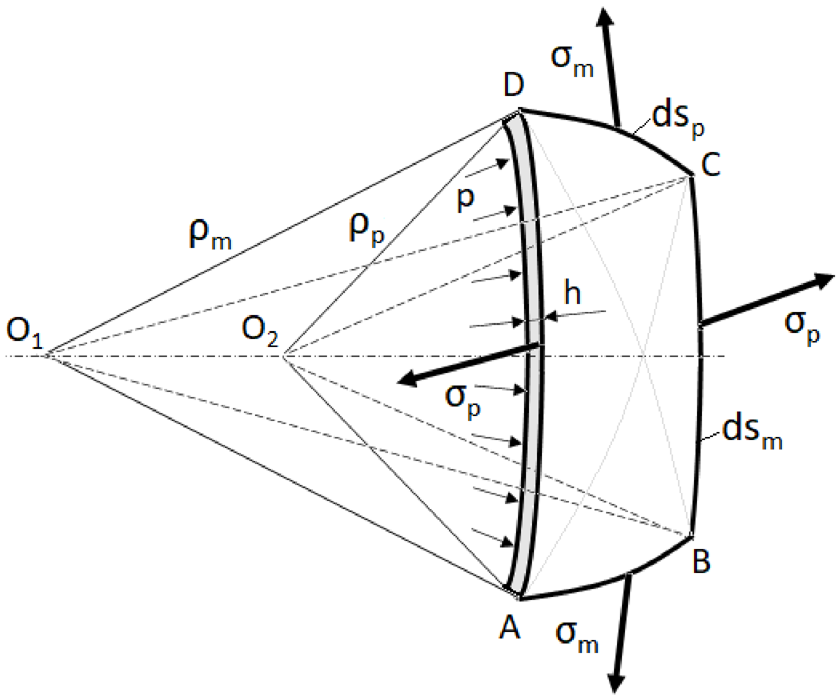


Fig. 7.2. Detașarea unui element infinit mic din mantaua vasului

În figura 7.3 se prezintă forțele care acționează asupra unui element infinit mic (vedere din lateral și de sus). Se scriu proiecțiile forțelor pe direcția axei O_1O_2

$$
\begin{aligned}
&2\sigma_m \cdot h \cdot ds_p \cdot \sin\frac{d\alpha_m}{2} + 2\sigma_p \cdot h \cdot ds_m \cdot \sin\frac{d\alpha_p}{2} = p \cdot ds_p ds_m \\
&ds_m = \rho_m d\alpha_m; \quad ds_p = \rho_p d\alpha_p \\
&\sin\frac{d\alpha_m}{2} \approx \frac{d\alpha_m}{2}; \quad \sin\frac{d\alpha_p}{2} \approx \frac{d\alpha_p}{2} \\
&2\sigma_m \cdot h \cdot \rho_p \cdot d\alpha_p \cdot \frac{d\alpha_m}{2} + 2\sigma_p \cdot h \cdot \rho_m \cdot d\alpha_m \cdot \frac{d\alpha_p}{2} = \\
&p \cdot \rho_p \cdot d\alpha_p \cdot \rho_m \cdot d\alpha_m
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

După simplificări, din ultima relație (7.2) rezultă relația lui *Laplace*:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_p}{\rho_p} = \frac{p}{h} \tag{7.3}$$

Forțele care fac un unghi mic cu normala la planul figurii s-au reprezentat în figura 7.3 cu simbolul forțelor normale la plan, care ies din plan.

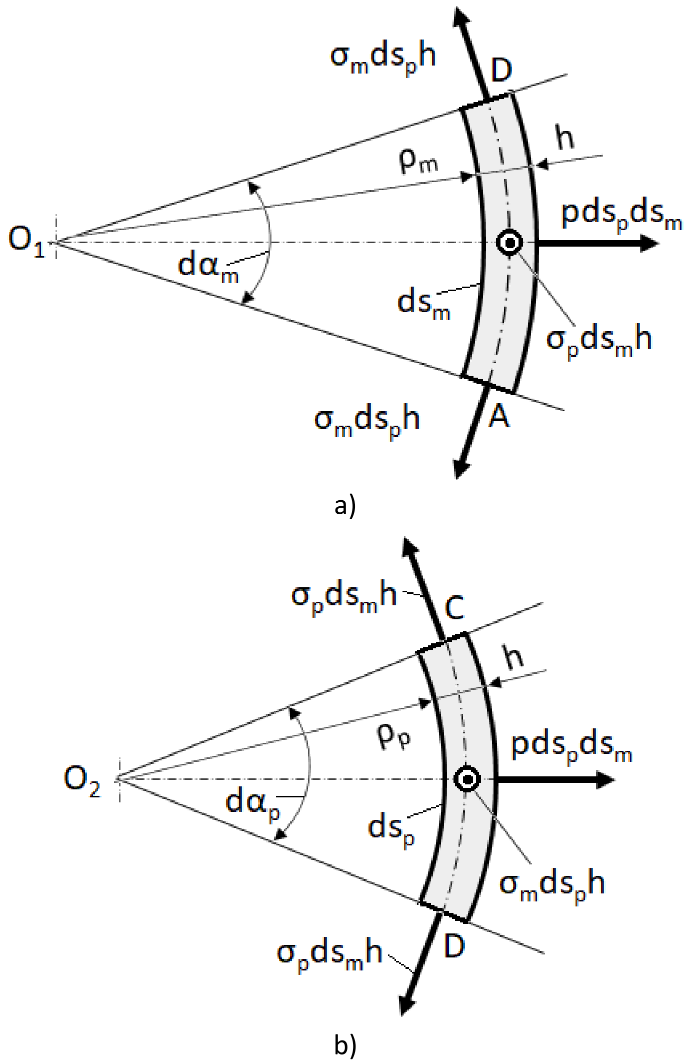


Fig. 7.3. Forțele care acționează asupra elementului de volum din fig. 7.2: vedere din lateral (a); vedere de sus (b)

Fiind scrisă pentru un element de anvelopă infinitezimal, pentru care p≈constant, ecuația lui *Laplace* este valabilă pentru orice vas de revoluție cu pereți subțiri, care conține gaze sau lichide.

Fie o anvelopă de formă oarecare, supusă la presiunea efectivă *p*. Prin secționare cu planul orizontal *P* se obține o porțiune se anvelopă de suprafață *S*, a cărei proiecție pe planul *P* este *A*. Unghiul dintre normala la un element de suprafață *dA* și normala *y* la planul *P* este α. Forța produsă de componenta verticală a presiunii, $p\cos\alpha$, care acționează pe suprafața *S*, este egală cu rezultanta produsă de presiunea *p* care acționează pe suprafața *A* (fig. 7.4). Se va demonstra în continuare acest lucru scriind proiecția forțelor pe direcția axei Oy

$$\sum Y_i = 0 \Leftrightarrow \int_S (p\cos\alpha)\cdot dA = \int_A p\cdot(dA\cos\alpha) \tag{7.4}$$

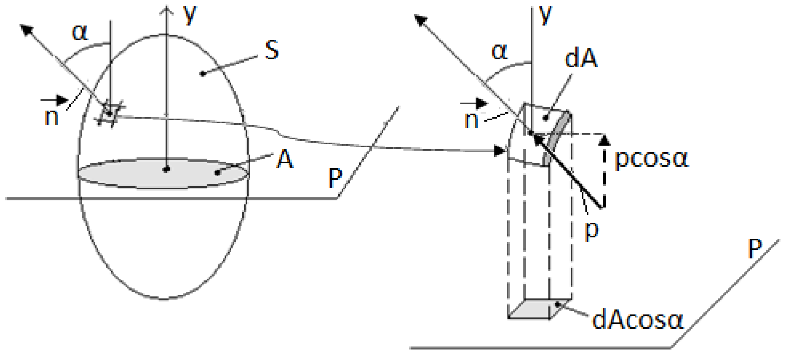


Fig. 7.4. Secționarea anvelopei cu un plan P

Ecuația lui Laplace conține două tensiuni necunoscute. A doua ecuație va fi cea de echilibru a proiecțiilor tuturor forțelor pe verticala Oy (fig. 7.5).

În cazul presiunii exercitată de un gaz, care nu depinde de înălțimea coloanei, se poate scrie

$$\begin{aligned} &\sigma_m\cdot A\cdot\cos\alpha_1 = p\cdot\pi r^2;\quad \sigma_m\cdot 2\pi rh\cdot\cos\alpha_1 = p\cdot\pi r^2 \\ &r = \rho_p\cos\alpha_1 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Din (7.5) rezultă

$$\sigma_m = \frac{p\rho_p}{2h} \tag{7.6}$$

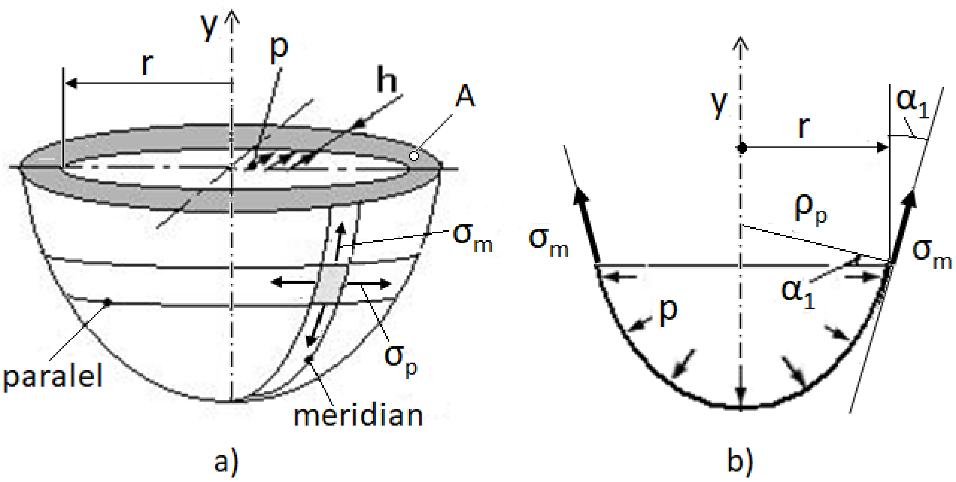


Fig. 7.5. Secționarea vasului cu un plan orizontal, fără prezentarea tensiunilor în secțiune (a) și apoi cu un plan vertical (b)

Ecuația (7.6) a fost dedusă pentru o presiune constantă în toată incinta, așa cum este în cazul vaselor care stochează gaze. Ea poate fi folosită și în cazul vaselor care stochează lichide, dacă coloana de lichid nu este mare. Se reamintește faptul că la baza unei coloane de apă presiunea crește cu $1bar = 0{,}1MPa$ la fiecare 10m înălțime a coloanei.

Concluzii:

- Ecuația lui *Laplace* (7.3) este valabilă pentru vase care stochează orice fluide (gaze sau lichide), deoarece a fost dedusă pentru un element infinitezimal din mantaua vasului, pe înălțimea căruia variația presiunii lichidului este practic nulă;
- Ecuația (7.6) a fost dedusă pentru vase care stochează gaze sub presiune;

- Se observă că tensiunile sunt proporționale cu razele de curbură. În consecință, tuburile cu un diametru mai mic pot stoca presiune mai mari, la aceeași grosime a peretelui h;
- Ecuația lui *Laplace* (7.3), împreună cu (7.6), pot fi folosite pentru determinarea tensiunilor din mantaua vaselor care conțin gaze sub presiune. Ecuația (7.6) poate fi extinsă și la lichide, dacă coloana de lichid este suficient de mică;
- Pentru cazul vaselor care depozitează coloane de fluid mari, presiunea variază liniar cu înălțimea coloanei (adâncimea). În acest caz ecuația (7.6) nu mai este valabilă. În consecință, este necesar să se scrie din nou ecuația de echilibru a forțelor pe direcție verticală (Oy). Deoarece această ecuație depinde de forma vasului, nu se poate indica pentru ea o formă unică, așa cum s-a făcut în cazul vaselor care stochează gaze sub presiune.

La joncțiunea dintre vase de forme diferite apar salturi în diagrama de tensiuni care nu pot fi calculate cu ecuațiile prezentate în acest capitol. Se recomandă ca aceste joncțiuni să fie ranforsate cu inele sau prin suprapunere de material.

7.2. APLICAȚII

7.2.1. Vase care stochează gaze

Vase sferice

Datorită dublei simetrii tensiunile din mantaua vasului sferic pot fi aflate direct din ecuația lui *Laplace*

$$\begin{gathered}\rho_p = \rho_m = R; \quad \sigma_m = \sigma_p = \sigma \\ \sigma = \frac{pR}{2h}\end{gathered} \tag{7.7}$$

Tensiunile pe cele două direcții sunt egale și din acest motiv nu există o direcție preferențială de rupere a vasului (fig. 7.6). Așa cum se va vedea mai jos, valoarea tensiunilor este minimă în mantaua vasului sferic. Din acest motiv, vasele sferice asigură un consum minim de material și deci o greutate minimă a recipientelor. Porțiuni din vase sferice se folosesc pentru închiderea vaselor cilindrice, ca în cazul cisternelor, de exemplu.

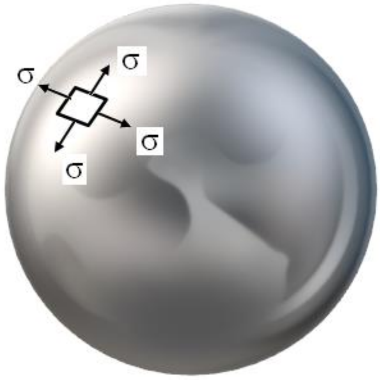


Fig. 7.6. Tensiunile pe cele două direcții sunt egale la vasul sferic

Vasele sferice mai prezintă avantajul că au suprafața minimă pentru un volum dat. Din acest motiv sunt indicate pentru construirea rezervoarelor mari, supraterane, destinate stocării lichidelor inflamabile (petrol, benzină) deoarece expun o suprafață mai mică la soare. Manopera pentru construirea unui vas sferic este totuși mai scumpă. Decizia construirii unui vas sferic este luată după un calcul tehnico-economic. Soluția se adoptă numai dacă prețul materialului economist depășește costul manoperei suplimentare.

Vase cilindrice

În cazul vaselor cilindrice generatoarea (meridianul) este o dreaptă și în consecință $\rho_{\mathrm{m}} \rightarrow \infty$. Directoarea (paralelul) este un cerc de rază *R* (fig. 7.7). Din ecuațiile (7.6) și (7.3) se calculează tensiunile din mantaua vasului

$$\sigma_p = \frac{pR}{h}; \quad \sigma_m = \frac{pR}{2h} \tag{7.8}$$

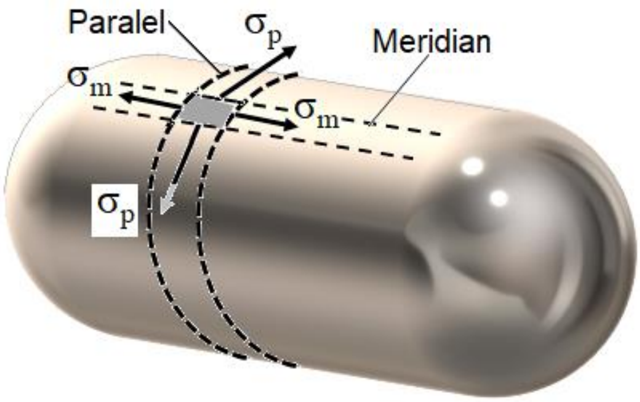


Fig. 7.7. Vas cilindric închis cu două vase emisferice

Deoarece $\sigma_p = 2\sigma_m$, vasele cilindrice se rup întotdeauna pe direcția generatoarei, adică σ_p este normala la suprafața de rupere (fig. 7.8).

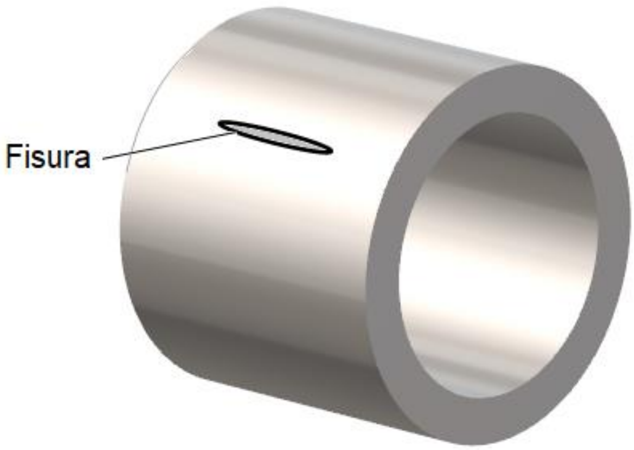


Fig. 7.8. Vasele cilindrice sub presiune se rup pe direcția generatoarei

În cazul cedării ductile a vaselor cilindrice, înainte de fisurare apare o umflătura (dom). Fisurarea se va produce în vârful domului. În cazul cedării fragile nu se produc deformații vizibile cu ochiul liber.

7.2.2. Vase care stochează coloane mari de lichid

Vase conice

Se vor trasa diagramele de variație a tensiunilor la vasul conic cu raza la bază *R* și înălțimea *H*, simplu rezemat pe conturul bazei, suspendat și plin cu lichid cu greutate specifică γ (fig. 7.9).

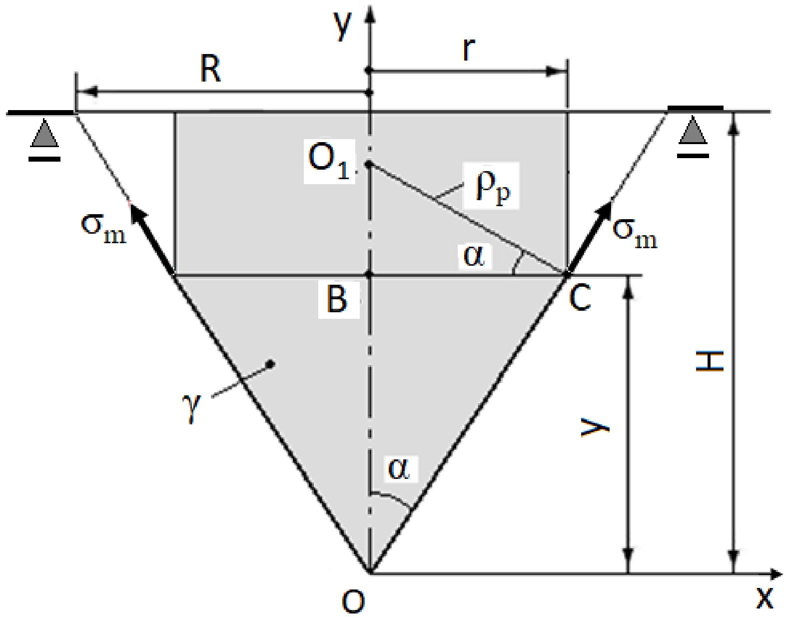


Fig. 7.9. Vas conic umplut cu lichid (s-au evidențiat σ_m, greutatea lichidului de sub secțiunea y si presiunea hidrostatică la H-y)

Generatoarea (meridianul) conului este o dreaptă iar directoarea este un cerc. Paralelele sunt de asemenea cercuri. Se face secțiunea *y* față de vârf, se trasează σ_m, ρ_p și determină unghiul α.

$$\tan\alpha = \frac{R}{H} = \frac{r}{y}; \quad \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}};$$
$$\cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}; \quad p = \gamma\left(H-y\right); \tag{7.9}$$
$$\rho_m \to \infty; \quad \rho_p = \frac{r}{\cos\alpha} = y\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Din ecuația lui *Laplace* rezultă

$$\sigma_p = \frac{\gamma}{h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}(H-y)y; \quad \frac{d\sigma_p}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{H}{2}$$
$$y = \frac{H}{2} \Rightarrow \sigma_{p.\max} = \frac{\gamma H^2}{4h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\gamma R\sqrt{R^2+H^2}}{4h} \tag{7.10}$$

Se secționează vasul la distanța *y* față de vârf și se scrie echilibrul forțelor pe direcția Oy. S-a considerat că în sensul negativ al axei acționează greutatea lichidului din conul de înălțime y și greutatea lichidului din cilindrul de înălțime H-y (marcate cu gri în fig. 7.9)

Din ecuația de echilibru a forțelor pe direcția Oy rezultă

$$\sigma_m \cdot 2\pi rh \cdot \cos\alpha = \gamma\left(V_{con} + V_{cil}\right) \Leftrightarrow$$
$$\sigma_m 2\pi rh\cos\alpha = \gamma\left[\frac{1}{3}\pi r^2 y + \pi r^2 (H-y)\right]$$
$$\sigma_m = \frac{\gamma}{6h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}(3H-2y)y \Rightarrow$$
$$\sigma_m = \frac{\gamma}{6h} \cdot \frac{R\sqrt{R^2+H^2}}{H^2}(3H-2y)y \tag{7.11}$$
$$\frac{d\sigma_m}{dy} = 0 \Leftrightarrow 3H - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}H$$
$$\sigma_{m.\max} = \sigma_m\left(\frac{3H}{4}\right) = \frac{3\gamma}{16h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}H^2 \Rightarrow \sigma_{m.\max} = \frac{3\gamma R\sqrt{R^2+H^2}}{16h}$$
$$y = H \Rightarrow \sigma_m(H) = \sigma_m = \frac{\gamma R\sqrt{R^2+H^2}}{6h}$$

Diagramele de variație a tensiunilor se reprezintă pe direcția generatoarei iar valoarea funcțiilor σ_m și σ_p de reprezintă pe normala la generatoare (fig. 7.10).

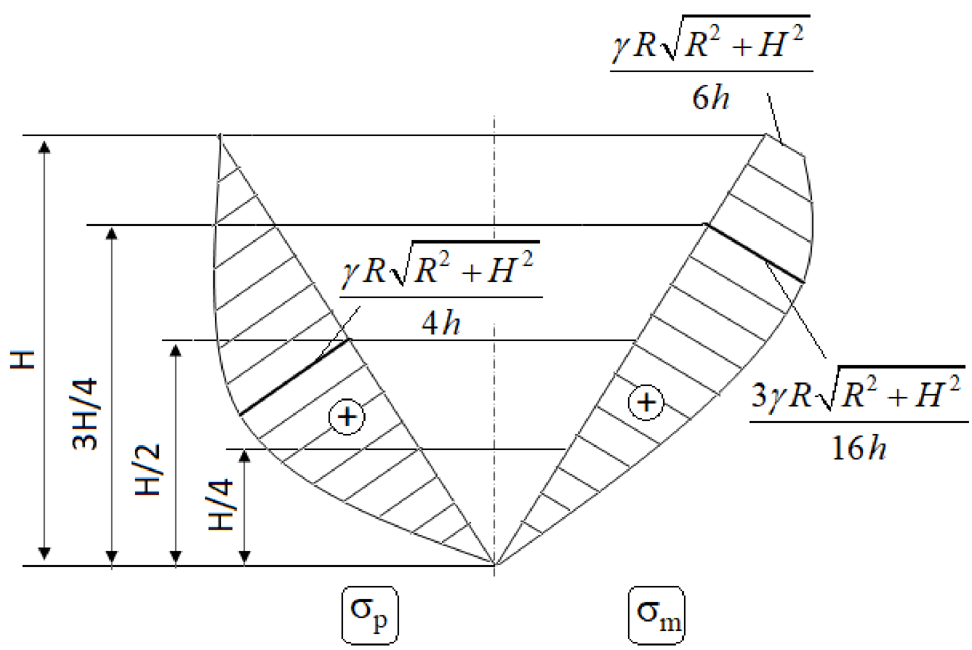


Fig. 7.10. Variația tensiunilor principale din mantaua vasului conic plin cu lichid

7.2.3. Probleme

Problema 7.1

Să se dimensioneze vasul sferic cu diametrul interior d=4m, care conține un gaz cu presiunea p=10 bar, știind că mantaua este din oțel, cu σ_a=100MPa. Care este masa mantalei (densitatea ρ=7850kg/m^3)? Să se calculeze variația volumului vasului aflat sub presiune și a unității de volum a mantalei, știind că E=210GPa și ν=0,3.

Rezolvare

Se exprimă presiunea în [MPa]: $10bar = 1MPa$.

Peretele mantalei este supus la tracțiune echibiaxială cu tensiunile date de (7.7).

Dimensionarea se face pe baza teoriilor de stare limită. Pentru cazul cedării ductile se vor utiliza teoria *von Mises*.

Teoria *Tresca* nu poate fi aplicată în acest caz deoarece indică eronat

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma - \sigma = 0 \tag{7.12}$$

Din (7.12) rezultă că pentru orice valori ale tensiunilor vasul nu cedează, ceea ce este absurd.

Teoria *von Mises* pentru starea plană de tensiuni este particularizată la tracțiunea echibiaxială astfel

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 - \sigma \cdot \sigma} = \sigma \tag{7.13}$$

În acest caz particular teoria *von Mises* degenerează în teoria *Rankine*. Se face dimensionarea cu această teorie

$$\frac{pR}{2h} \le \sigma_a \Rightarrow h \ge \frac{pR}{2\sigma_a}; \quad h \ge \frac{1 \cdot 2000}{2 \cdot 100} = 10mm \tag{7.14}$$

Pentru această grosime a peretelui se calculează volumul și masa mantalei

$$\begin{aligned} &V_m = \frac{4}{3}\pi\left[\left(R+h\right)^3 - R^3\right]; \quad V_m = \frac{4}{3}\pi\left[\left(2+0,01\right)^3 - 2^3\right] \\ &V_m \approx 505 \cdot 10^6 mm^3 = 0,505 m^3 \\ &M_m = \rho V_m; \quad M_m = 7850 \cdot 0,505 \approx\sim 3964 kg \\ &M_m \approx 3,964 t \end{aligned} \tag{7.15}$$

Se scriu ecuațiile constitutive pentru starea spațială de tensiuni

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] \end{aligned} \tag{7.16}$$

Se particularizează (7.16) pentru tracțiunea echibiaxială, pentru care $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \sigma_3 = 0$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{\sigma(1-\nu)}{E} = \frac{pR}{2hE}(1-\nu)$$
$$\varepsilon_3 = -\frac{2\nu\sigma}{E} \tag{7.17}$$

Circumferința ecuatorului vasului fără presiune este $2\pi R$ Când vasul este sub presiune aceasta se mărește cu $\Delta l = 2\pi R\varepsilon$. Rezultă că raza sferei se mărește cu

$$\Delta R = R\varepsilon = \frac{R\sigma}{E}(1-\nu) = \frac{pR^2(1-\nu)}{2hE}$$
$$\Delta R = \frac{1\cdot 2000^2(1-0,3)}{2\cdot 10\cdot 2,1\cdot 10^5} \approx 0,33mm \tag{7.18}$$

Creșterea volumului vasului aflat sub presiune este

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\Delta R)^3 - R^3\right]$$
$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left(2000,33^3 - 2000^3\right) \approx 4\cdot 10^6 mm^3 = 0,004m^3 \tag{7.19}$$

Variația unității de volum a mantalei este

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V_m}{V_m} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$\varepsilon_v = \frac{2\sigma(1-\nu)}{E} - \frac{2\nu\sigma}{E} = \frac{2\sigma}{E}(1-2\nu)$$
$$\varepsilon_v = \frac{pR}{hE}(1-2\nu)$$
$$\varepsilon_v = \frac{1\cdot 2000}{10\cdot 2,1\cdot 10^5}(1-2\cdot 0,3); \quad \varepsilon_v \approx 381\cdot 10^{-6} \tag{7.20}$$

Variația volumului mantalei este

$$\Delta V_m = V_m \cdot \varepsilon_v$$
$$\Delta V_m = 505\cdot 10^6 \cdot 381\cdot 10^{-6} = 192405mm^3 \approx 1,92405\cdot 10^{-4} m^3 \tag{7.21}$$

Problema 7.2

Vasul de la problema 7.1 este înlocuit cu unul cilindric, avânda aceeași rază R și același volum. Care este masa mantalei vasului?

Rezolvare

Volumele și razele celor două vase sunt egale și se calculează înălțimea H a vasului cilindric

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{4}{3}R \tag{7.22}$$

Tensiunile principale din mantaua vasului cilindric sunt

$$\sigma_1 = \sigma_p = \frac{pR}{h}; \quad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pR}{2h} \tag{7.23}$$

Se dimensionează vasul cu teoria *von Mises*

$$\begin{gathered}\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{pR}{h} \le \sigma_a \\ h \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{pR}{\sigma_a}; \quad h \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1\cdot 2000}{100} \approx 17,3mm; \quad h_{adoptat} = 18mm\end{gathered} \tag{7.24}$$

Volumul mantalei vasului cilindric este

$$\begin{gathered}V_m = 2\pi R^2 h + 2\pi RHh = 2\pi Rh\left(R + H\right) = 2\pi Rh\left(R + \frac{4}{3}R\right) = \frac{14}{3}\pi R^2 h \\ V_m = \frac{14}{3}\pi\cdot 2000^2\cdot 18 \approx 1,055\cdot 10^9 mm^3 = 1,055m^3\end{gathered} \tag{7.25}$$

Economia de material (ca volum) care se realizează în cazul vasului sferic față de cel cilindric este:

$$\Delta V = V_{m.cil} - V_{m.sf}; \quad \Delta V = 1,055 - 0.505 = 0,55m^3 \tag{7.26}$$

Se observă că volumul mantalei vasului cilindric este aproximativ dublu față de cel al mantalei vasului sferic.

Problema 7.3

Un vas cilindric cu diametrul interior de 3,5m este umplut cu un gaz la presiunea de 0,85 MPa. Să se dimensioneze vasul știind că σ_a=75 MPa și să se determine starea de tensiuni din cordonul de sudură, executat în două variante constructive:

- Pe direcția generatoarei (fig. 7.11a);
- În spirală, la un unghi de α=60° față de generatoare (fig. 7.11b).

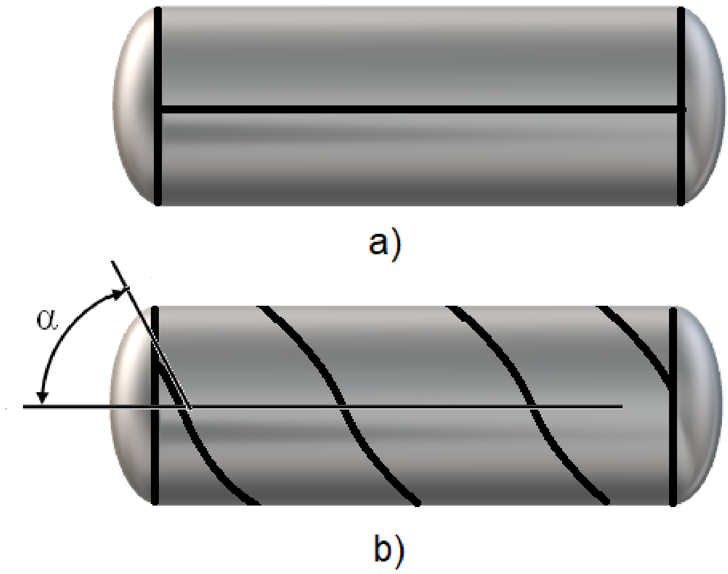


Fig. 7.11. Rezervor sudat: pe direcția generatoarei (a) și elicoidal (b)

Rezolvare

Tensiunile principale din mantaua vasului cilindric, considerat cu pereți subțiri, sunt

$$\sigma_1 = \sigma_p = \frac{pR}{h}; \quad \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pR}{2h} \tag{7.27}$$

Deoarece vasele cilindrice cedează întotdeauna pe direcția generatoarei (sub acțiunea lui σ_p), se dimensionează peretele vasului cu teoria σ_{max} (*Rankine*)

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h} \le \sigma_a; \quad h \ge \frac{0,85 \cdot 1750}{75} = 19,8mm \tag{7.28}$$

Se adoptă h=20mm (STAS 75-90)și cu această valoare se recalculează tensiunile

$$\sigma_1 = \frac{0,85 \cdot 1750}{20} \approx 74,4MPa; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} = 37,2MPa \qquad (7.29)$$

La interiorul vasului tensiunea pe direcție radială egalează presiunea $\sigma_{rad} = p = 0,85MPa$. Deoarece această tensiune este mult mai mică decât tensiunile principale, poate fi neglijată în raport cu acestea și în consecință a fost justificată încadrarea vasului în categoria celor cu pereți subțiri, în mantaua cărora există practic o stare plană de tensiuni.

Cordonul de sudură orientat pe direcția generatoarei

Cordonul de sudură, la fel ca mantaua vasului, sunt ambele supuse la tracțiune biaxială, cu tensiunile principale calculate mai sus (elementul de volum A din fig. 7.12). Din figura 7.12 se observă că axa principală 2 este orientată pe orizontală și de acest lucru trebuie să se țină cont la calcularea tensiunilor funcție de unghiul de rotire θ al elementului de volum.

Cordonul de sudură orientat elicoidal

Axa Ox este normală la cordonul de sudură elicoidal și în consecință unghiul θ este complementul lui α, adică θ=30°.

Relațiile de variație ale tensiunilor în jurul unui punct (2.33) și (2.34) se scriu în funcție de tensiunile principale, ținând cont de particularitățile de notare (rotire de la direcția principală 2 către direcția 1), adică $\sigma_x = \sigma_2; \quad \sigma_y = \sigma_1; \quad \tau_{xy} = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\cos 2\theta \\ \tau(\theta) &= -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (7.30)$$

În (7.30) se înlocuiesc apoi tensiunile principale cu cele de la vase cilindrice cu pereți subțiri (7.8) și se obține

$$\sigma(\theta) = \frac{pR}{4h}(3 - \cos 2\theta); \quad \tau(\theta) = \frac{pR}{4h}\sin 2\theta \qquad (7.31)$$

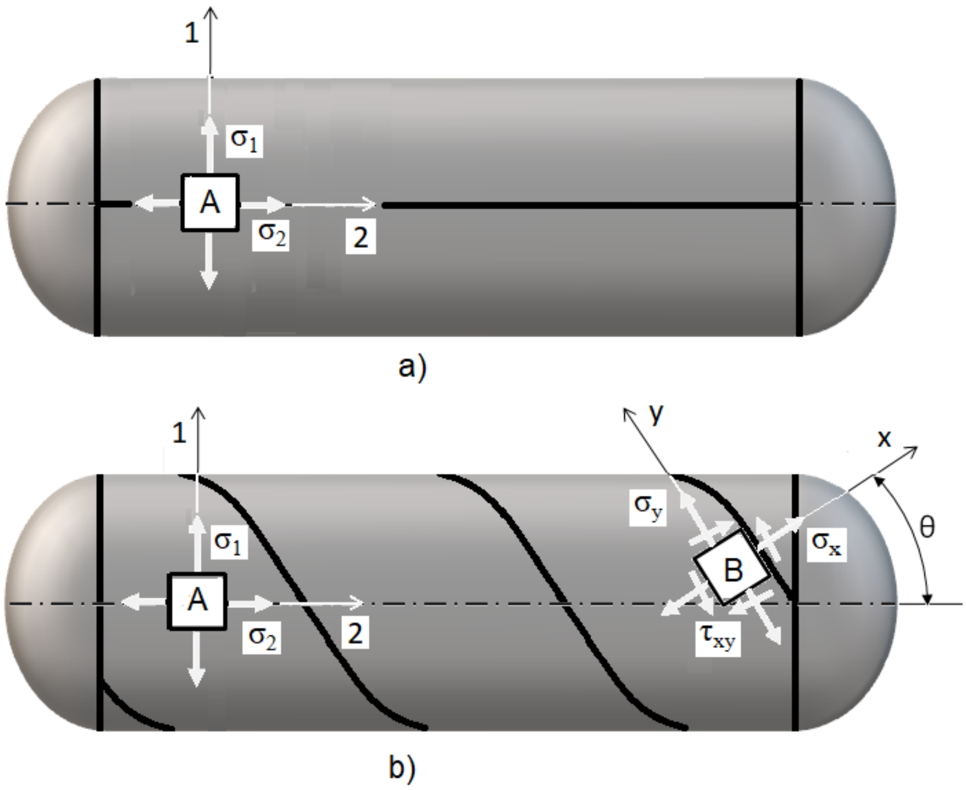


Fig. 7.12 Starea de tensiuni din cordonul de sudură și manta: sudură pe direcția generatoarei (a) și elicoidală (b)

Se scriu tensiunile pentru diverse valori ale unghiului θ

$$\begin{aligned}
&\theta = 0° \Rightarrow \sigma(0°) = \frac{pR}{2h} = \sigma_2; \quad \tau(0°) = 0 \\
&\theta = 90° \Rightarrow \sigma(90°) = \frac{pR}{h} = \sigma_1; \quad \tau(90°) = 0 \\
&\theta = 45° \Rightarrow \sigma(45°) = \frac{3}{4} \cdot \frac{pR}{h} = \sigma_m; \quad \tau(45°) = \frac{pR}{4h} = \tau_{\max} \\
&\theta = 30° \Rightarrow \sigma(30°) = \frac{5}{8} \cdot \frac{pR}{h}; \quad \tau(30°) = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{pR}{h}
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Se observă că, rotind elementul de volum dinspre direcția principală 2 către direcția principală 1, s-au verificat valorile tensiunilor la 0° și la 90°. Se trasează cercul lui Mohr, cu datele numerice din problemă (fig. 7.13), ținând cont de faptul că rotirea secțiunii (respectiv a elementului de volum) începe de la direcția 2 (punctul S_2) către direcția 1 (punctul S_1), adică inversul sensului de rotire direct trigonometric adoptat la cercul lui *Mohr* (fig. 2.21).

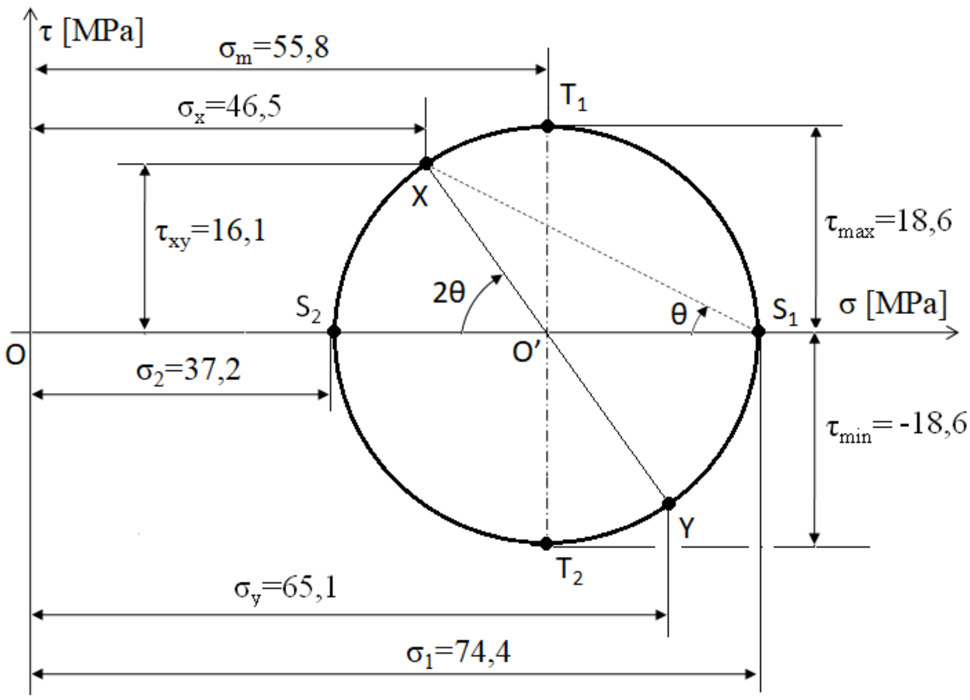


Fig. 7.13. Cercul lui Mohr pentru starea de tensiuni din vasul cilindric

Cu ajutorul cercului *Mohr* (fig. 7.13) se pot prezenta apoi stările de tensiuni care acționează asupra elementului de volum și sunt prezentate în figura 7.14 astfel: figura 7.14a (θ=0°), figura 7.14b (θ=30°) și respectiv pentru cazul în care tensiunile tangențiale sunt maxime figura 7.14c (θ=45°). Rotirea secțiunii începe de la direcția 2 (punctul S_2) către direcția 1.

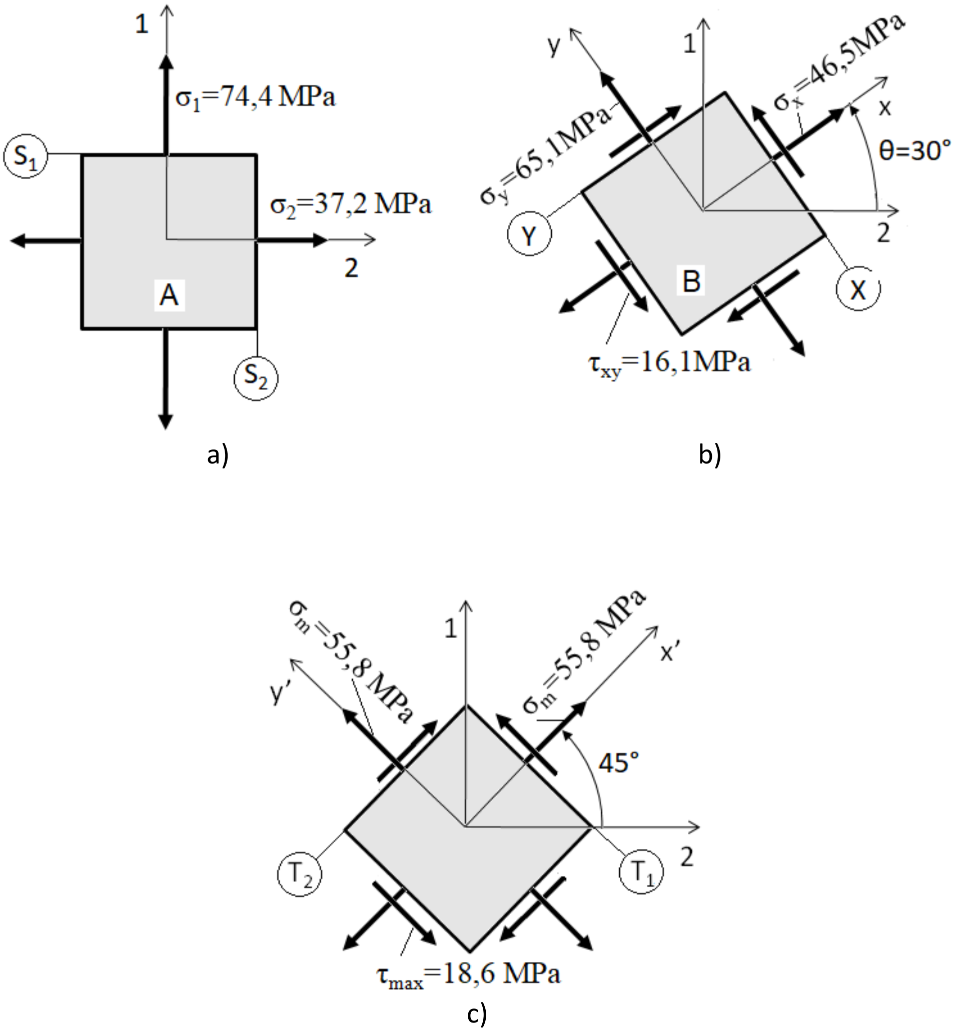


Fig. 7.14. Stările de tensiuni din elementele de volum A și B (v. fig. 7.12) și starea de tensiuni pentru care tensiunile tangențiale sunt maxime

CAP. 8

TUBURI CU PEREȚI GROȘI ȘI DISCURI ÎN ROTAȚIE

La realizarea colajului din acest capitol s-au folosit următoarele surse:

https://www.indiamart.com/proddetail/alloy-steel-tube-15372776448.html

https://buckeyeapp.com/ce-este-un-excavator/

https://economictimes.indiatimes.com/topic/underwater-submarine-services

https://www.aerocontact.com/en/virtual-aviation-exhibition/product/381-aircraft-jet-engine-parts

https://www.birosalesinc.com/product/biro-a16361-lower-shaft-bearing-assembly/

https://www.indiamart.com/proddetail/hydraulic-cylinder-7300080397.html

8. TUBURI CU PEREȚI GROȘI ȘI DISCURI ÎN ROTAȚIE

Determinarea stării de tensiuni într-o șaibă detașată dintr-un tub cu pereți groși sau într-un disc aflat în rotație uniformă conduce la probleme de elasticitate plană, care vor fi studiate în coordonate polare. Ecuațiile pentru cele două categorii corpuri sunt asemănătoare și din acest motiv se studiază de obicei împreună.

8.1 TUBURI CU PEREȚI GROȘI

Tuburile cu pereți groși sunt destinate stocării fluidelor la presiuni mari.
Uzual tuburile cu pereți groși îndeplinesc condiția ca raportul dintre raza exterioară R_2 și cea interioară R_1 să fie

$$\frac{R_2}{R_1} > 1,2 \tag{8.1}$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, tubul se consideră cu pereți subțiri. Spre deosebire de tuburile cu pereți subțiri, la cele cu pereți groși sunt considerate și tensiunile pe direcție radială, variabile pe grosimea peretelui.

În primă fază se vor studia tuburile de lungime infinită și deschise la capete, caz care poate fi tratat în cadrul elasticității plane. Ulterior vor fi studiate și tuburile închise. Presiunile interioară și exterioară sunt considerate constante pe toată lungimea tubului.

8.1.1. Tuburi deschise

Se consideră un tub supus la presiunea interioară p_i și la presiune exterioară p_e. Din tub se detașează o șaibă de grosime *t*, din care se izolează un element de volum (fig. 8.1).

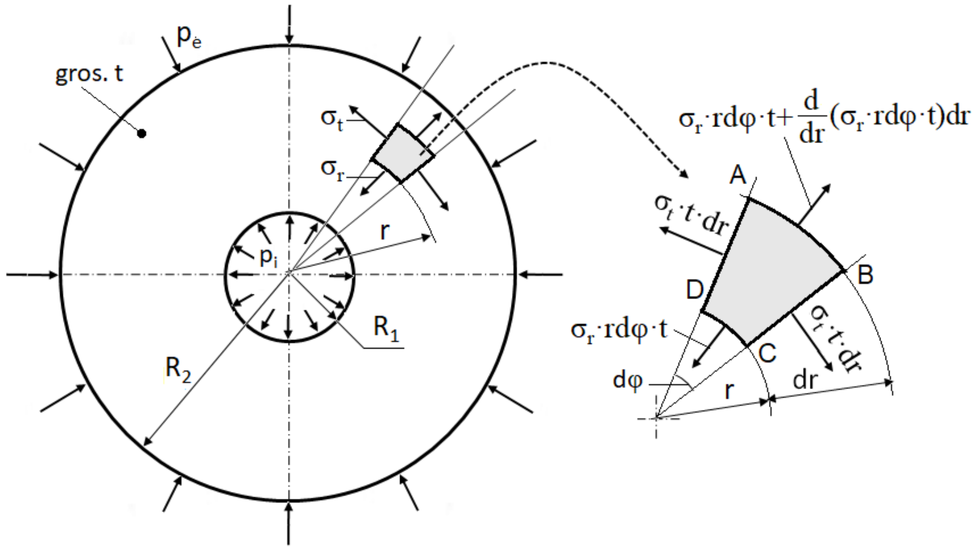


Fig. 8.1. Detașarea unei șaibe din tub și izolarea unui element de volum

Pentru elementul de volum se scrie ecuația de echilibru a forțelor pe direcție radială (datorită simetriei tensiunile nu depind de unghiul φ):

$$\sigma_r \cdot rd\varphi \cdot t + \frac{d}{dr}(\sigma_r \cdot rd\varphi \cdot t)dr - \sigma_r rd\varphi \cdot t - 2\sigma_t \cdot dr \cdot t \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (8.2)$$

Înlocuind $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ și împărțind (8.2) cu $r \cdot t \cdot dr \cdot d\varphi$ se obține

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (8.3)$$

Aceasta este singura ecuație de echilibru care poate fi scrisă. Deoarece ea conține două tensiuni necunoscute, se va apela în continuare la ecuațiile geometrice și constitutive pentru rezolvarea problemei.

Se scrie ecuația de echilibru în funcție de deplasări. Se va nota cu *u* deplasarea pe direcție radială a unui punct situat la distanta *r* față de centru. Deplasarea pe direcție radială a unui punct situat la distanța *r+dr* este

$$u+\frac{du}{dr}dr \tag{8.4}$$

Alungirea specifică pe direcție radială este

$$\begin{aligned} &\Delta(dr)=u+\frac{du}{dr}dr-u=\frac{du}{dr}dr \\ &\varepsilon_r=\frac{\Delta(dr)}{dr}=\frac{du}{dr} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ca urmare a deplasării pe direcție radială *u*, raza *r* devine *r+u* și alungirea specifică tangențială (circumferențială) poate fi scrisă

$$\varepsilon_t=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r};\quad \varepsilon_t=\frac{u}{r} \tag{8.6}$$

Cu aceste alungiri specifice se scriu ecuațiile constitutive pentru starea plană de tensiuni (în forma rigiditate, format sistem):

$$\begin{cases} \sigma_r=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_t\right)=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{du}{dr}+\nu\dfrac{u}{r}\right) \\ \sigma_t=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r\right)=\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{u}{r}+\nu\dfrac{du}{dr}\right) \end{cases} \tag{8.7}$$

Înlocuind (8.7) în (8.3) rezultă

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr}-\frac{1}{r^2}u=0 \tag{8.8}$$

Aceasta este o ecuație diferențială cu coeficienți variabili, de tip *Euler*, care admite soluții de forma

$$u=A\cdot r+\frac{B}{r} \tag{8.9}$$

Din (8.9) rezultă

$$\frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}; \quad \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2} \tag{8.10}$$

Din (8.10) și (8.7) se obține

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[A(1+\nu) - \dfrac{B}{r^2}(1-\nu)\right] \\ \sigma_t = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[A(1+\nu) + \dfrac{B}{r^2}(1-\nu)\right] \end{cases} \tag{8.11}$$

Constantele *A* și *B* se determină din condițiile la limită

$$\begin{aligned} r = R_1 \Rightarrow \sigma_r = -p_i \\ r = R_2 \Rightarrow \sigma_r = -p_e \end{aligned} \tag{8.12}$$

Presiunile au fost considerate cu semnul minus, deoarece solicitarea este la compresiune (fig. 8.2).

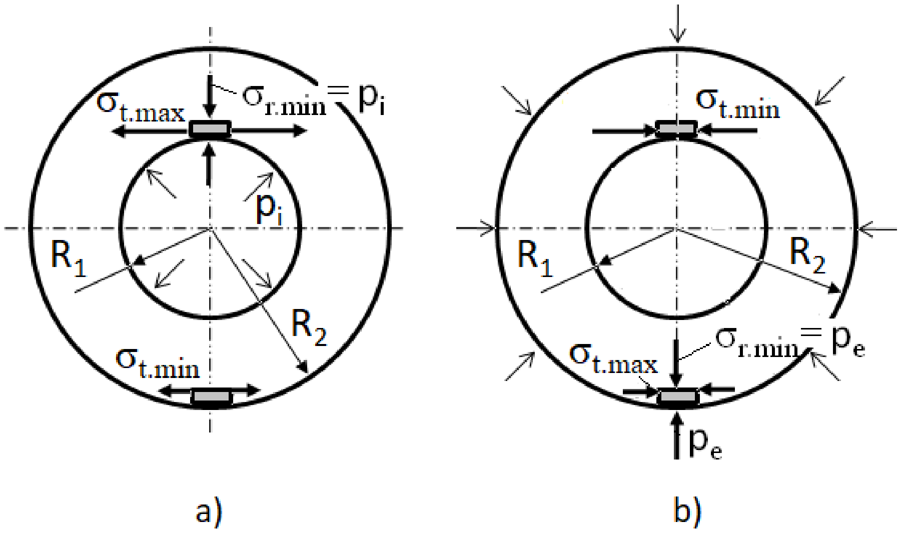


Fig. 8.2. Tensiunea σ_r echilibrează presiunile: p_i la interiorul tubului (a) și p_e la exteriorul tubului (b)

Înlocuind (8.12) în expresia lui σ_r din (8.11), rezultă

$$\begin{cases} -p_i = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[A(1+\nu)-\dfrac{B}{R_1^2}(1-\nu)\right] \\ -p_e = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[A(1+\nu)-\dfrac{B}{R_2^2}(1-\nu)\right] \end{cases} \tag{8.13}$$

Rezolvând sistemul (8.13) se obțin constantele *A* și *B*

$$\begin{cases} A = \dfrac{1-\nu}{E}\cdot\dfrac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} \\ B = \dfrac{1+\nu}{E}\cdot\dfrac{R_1^2 R_2^2 \left(p_i - p_e\right)}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases} \tag{8.14}$$

Din (8.14) și (8.11) se obțin tensiunile normale

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} - \dfrac{R_1^2 R_2^2 \left(p_i - p_e\right)}{r^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \\ \sigma_t = \dfrac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} + \dfrac{R_1^2 R_2^2 \left(p_i - p_e\right)}{r^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \end{cases} \tag{8.15}$$

Observații:

- Tensiunile $\sigma_r(r)$ și $\sigma_t(r)$ nu depind de condițiile de la capetele tubului și reprezintă hiperbole;
- Suma tensiunilor este constantă (nu variază cu *r*);
- În majoritatea cazurilor $p_i > p_e$ și în consecință $\sigma_t > \sigma_r$;
- Tensiunea σ_t este maximă pentru $r = R_1$ (la interiorul tubului);
- *Rețelele de conducte* lungi se consideră deschise la capete și se dimensionează/verifică cu (8.15), adică se află într-o *stare plană de tensiuni* (tab. 8.1);
- Cazul tuburilor de lungime finită (închise) este discutat mai jos.

8.1.2. **Tuburi închise**

Tuburile scurte se calculează ca tuburi *închise* care, pe lângă tensiunile de mai sus, mai sunt supuse și la o tensiune σ_l pe direcția generatoarei (longitudinală), adică se află într-o *stare spațială de tensiuni*.

Tensiunea pe direcție longitudinală σ_l se calculează din echilibrul forțelor pe direcția generatoarei tubului. Aceste forțe sunt create de presiunile interioară (care acționează pe suprafața cercului de rază R_1) și respectiv exterioară (care acționează pe suprafața cercului de rază R_2) din capacul care închide tubul și efortul *N* din manta, care este dat de tensiunea σ_l care acționează pe secțiunea transversală a tubului

$$\sigma_l \cdot \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) = p_i \cdot \pi R_1^2 - p_e \cdot \pi R_2^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_l = \frac{p_i R_1^2 - p_e R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{8.16}$$

Astfel tuburile din rețelele de conducte se consideră a fi într-o stare plană de tensiuni, iar tuburile scurte într-o stare spațială de tensiuni (fig. 8.3).

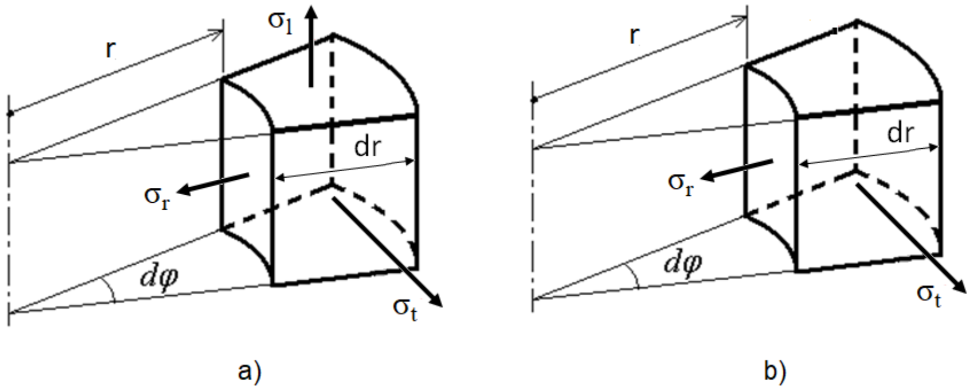


Fig. 8.3. Un element de volum din tub se află: într-o stare spațială de tensiuni, în cazul tuburilor scurte (a); în stare plană de tensiuni, în cazul conductelor lungi (b)

Se observă că tensiunea longitudinală este egală cu tensiunea medie

$$\sigma_l = \sigma_m = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} \tag{8.17}$$

Tab. 8.1. Indicații privind calculul de rezistență al tuburilor cu perete groși

Stare de tensiuni	Tensiuni	Ecuații	Aplicații
Plană	σ_r, σ_t	(8.15)	Rețele de conducte
Spațială	σ_r, σ_t, σ_l	(8.15) și (8.16)	Tuburi de lungime finită (cilindri hidraulici etc.)

Se vor discuta în continuare câteva situații particulare pentru tuburile lungi aflate în stare plană de tensiuni.

8.1.3. Cazuri particulare

Tub cu presiune interioară

Anulând presiunea exterioară (p_e=0), din (8.15) rezultă

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2}\left[1 - \left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right]; \quad \sigma_t = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2}\left[1 + \left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right] \tag{8.18}$$

Se reprezintă grafic funcțiile (8.18) pentru o jumătate de șaibă detașată din tub (fig. 8. 4).

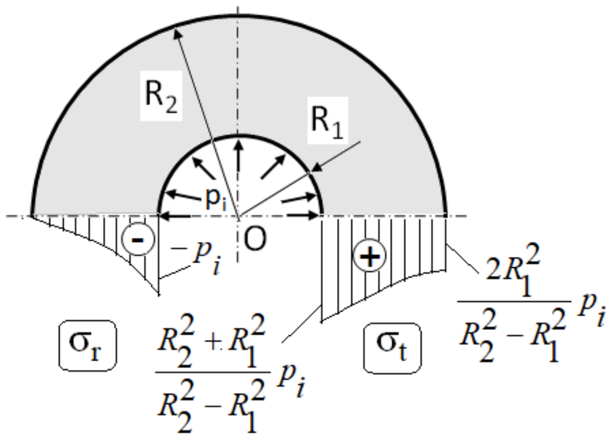


Fig. 8.4. Variația tensiunilor principale în tubul cu presiune interioară

Tub cu presiune exterioară

Anulând presiunea interioară (p_i=0), din (8.15) rezultă:

$$\sigma_r = -\frac{R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2}\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right]; \quad \sigma_t = -\frac{R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2}\left[1 + \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right] \qquad (8.19)$$

Se reprezintă grafic funcțiile (8.19) pentru o jumătate de șaibă detașată din tub (fig. 8. 5).

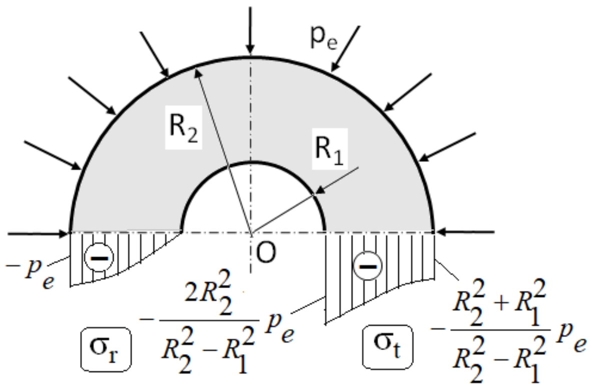


Fig. 8.5. Variația tensiunilor principale în tubul cu presiune exterioară

Observații:

Tensiunea maximă în modul este σ_t, la interiorul tubului ($r=R_1$). Din acest motiv, la tuburile cu presiune interioară ruperea se va produce pe direcție radială (normală la direcția lui σ_t), fisura propagându-se de la interior către exterior. Tuburile suspuse la presiuni exterioare mari pot ceda prin flambaj (pierderea formei prin voalarea peretelui tubului).

8.1.4. Deplasări

Deplasarea *u* pe direcție radială a unui punct situat la raza curentă *r*, pentru tuburi *deschise* și respectiv *închise* (în secțiuni suficient de îndepărtate de capete) este

$$u = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \nu\left(\sigma_r + \sigma_l\right)\right]; \quad u = \frac{r}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_r\right) \qquad (8.20)$$

Deplasarea pe direcție radială a unui punct de pe suprafața interioară a unui tub deschis, cu presiune interioară, se află înlocuind în (8.20) p_e=0 și $r=R_1$:

$$u_i = \frac{R_1 p_i}{E}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \nu\right) \tag{8.21}$$

Deplasarea pe direcție radială a unui punct de pe suprafața exterioară a unui tub deschis, cu presiune exterioară, se afla înlocuind în (8.20) p_i=0 și r=R_2

$$u_e = -\frac{R_2 p_e}{E}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \nu\right)\frac{1}{2} \tag{8.22}$$

8.1.5. Dimensionare/verificare

Se vor particulariza unele teorii de stare limită la tuburile cu pereți groși.

Tuburi închise

Tensiunile principale în cazul tuburilor închise, cu presiune interioară, sunt

$$\sigma_1 = \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_l = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2}; \quad \sigma_3 = \sigma_r \tag{8.23}$$

Valorile tensiunilor sunt date de (8.15) și (8.16).

Teoria von Mises

Pentru stare spațială de tensiuni aceasta teorie dă tensiunea echivalentă (3.32) sau (3.33). Înlocuind (8.23) în oricare dintre aceste relații se obține

$$\sigma_{ech} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sigma_t - \sigma_r\right) \tag{8.24}$$

Din (8.24) și (8.15) rezultă

$$\sigma_{ech} = \frac{\sqrt{3} R_2^2 \left(p_i - p_e\right)}{R_2^2 - R_1^2} \tag{8.25}$$

La calculul de verificare trebuie sa fie îndeplinită condiția

$$\sigma_{ech} \le \sigma_a \tag{8.26}$$

La dimensionare se fixează de regulă R_1 și se calculează R_2

$$R_2 \ge R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - \sqrt{3}\left(p_i - p_e\right)}} \tag{8.27}$$

La *tuburi deschise* starea de tensiuni este plană, tensiunile sunt date de (8.15) și σ_l=0. Tensiunea echivalentă *von Mises* devine

$$\sigma_{ech} = \frac{p_i\sqrt{3R_2^4 + R_1^4}}{R_2^2 - R_1^2} \tag{8.28}$$

Teoria Rankine

Aceasta teorie ține cont numai de tensiunea principală maximă σ_1. Din acest motiv ea are aceeași formă atât pentru tuburile deschise, cât și pentru cele închise.

Pentru verificare se va folosi

$$\sigma_{ech} = \sigma_{t.\max} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p_e \le \sigma_a \tag{8.29}$$

Dimensionarea se face cu relația

$$R_2 \ge R_1\sqrt{\frac{\sigma_a + p_i}{\sigma_a - p_i + 2p_e}} \tag{8.30}$$

Problema 8.1

Să se verifice cilindrul unei prese hidraulice care are razele $R_{int}=R_1$=200mm și $R_{ext}=R_2$=240mm și este supus unei presiuni interioare p_i=50MPa. Cilindrul este confecționat din oțel cu σ_a=330MPa.

Rezolvare

La interiorul cilindrului apar tensiunile:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{t.\max} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p_i; \quad \sigma_r = -p_i; \quad \sigma_l = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p_i \\
&\sigma_{t.\max} = \frac{240^2 + 200^2}{240^2 - 200^2} \cdot 50 = 277{,}3MPa; \quad \sigma_r = -50MPa;
\end{aligned} \tag{8.31}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_l = \frac{200^2}{240^2 - 200^2} \cdot 50 = 113{,}64MPa \\
&\Rightarrow \sigma_1 = 277{,}3MPa; \quad \sigma_2 = 113{,}64MPa; \quad \sigma_3 = -50MPa
\end{aligned} \tag{8.32}$$

1. *Teoria Rankine*

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 = 277,3MPa < \sigma_a = 330MPa \tag{8.33}$$

2. *Teoria Tresca*

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_3 = 277,3 - (-50) = 327,3MPa < \sigma_a = 330MPa \tag{8.34}$$

3. *Teoria von Mises*

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(277,3 - 113,64)^2 + \left[277,3 - (-50)\right]^2 + \left[113,64 - (-50)\right]^2} \tag{8.35}$$

$$\sigma_{ech} = 283,5 < \sigma_a = 330MPa$$

Cilindrul hidraulic rezistă conform tuturor teoriilor de mai sus.

8.2. TUBURI FRETATE

Din relațiile de mai sus se observă că dimensionarea tuburilor supuse la presiune interioară este posibilă doar daca $p_i << \sigma_a$. Pentru a crește p_i se poate introduce o presiune exterioară p_e de compresiune, care să conducă la micșorarea lui $\sigma_{t.max}$. Acest lucru poate fi realizat prin introducerea presată a unui tub în alt tub (fretare), ca în figura 8.6, prin bobinarea tubului cu un fir puternic tracționat etc. Pentru obținerea fretajului, între cilindrul interior și cel exterior trebuie să existe un ajustaj cu strângere foarte precis. Fretajul poate fi realizat astfel:

- Prin presarea tubului interior în cel exterior;
- Prin introducerea tubului interior în cel exterior, care a fost încălzit sub liniile de transformare;
- Prin răcirea tubului interior (de exemplu în azot lichid) și introducerea sa presată în cel exterior.

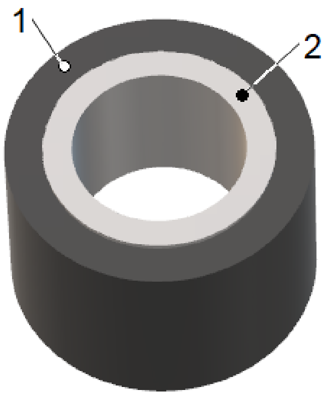


Fig. 8.6. Tuburi fretate: tubul 1 este introdus presat în tubul 2

După fretaj cele două tuburi vor avea raza comună R_2. Pentru a realiza acest lucru, cilindrul exterior se dilată iar cel interior se comprimă. Se presupune ca tuburile au lungimi egale (fig. 8.7).

Raza exterioară a tubului interior se execută cu foarte puțin mai mare decât raza interioară R'_2 a celui exterior. După montarea forțată, tubul interior se deformează radial cu δ_i, iar cel exterior cu δ_e. Astfel se realizează strângerea (serajul)

$$\delta = |\delta_i| + |\delta_e| \tag{8.36}$$

Toleranțele cu care se execută razele R'_2 (raza exterioară a tubului interior și respectiv raza interioară a celui exterior) trebuie să fie foarte strânse, pentru a putea asigura serajul prevăzut, dar această tehnologie presupune și costuri ridicate.

După montarea forțată a tuburilor, între ele apare presiunea de fretaj p_f, care produce deplasările radiale:

- $u_e(R_2)$ la suprafața exterioară a tubului interior;
- $u_i(R_2)$ la suprafața interioară a tubului exterior (caz în care se înlocuiește $R_1=R_2$ și $R_2=R_3$ în (8.21) și (8.22).

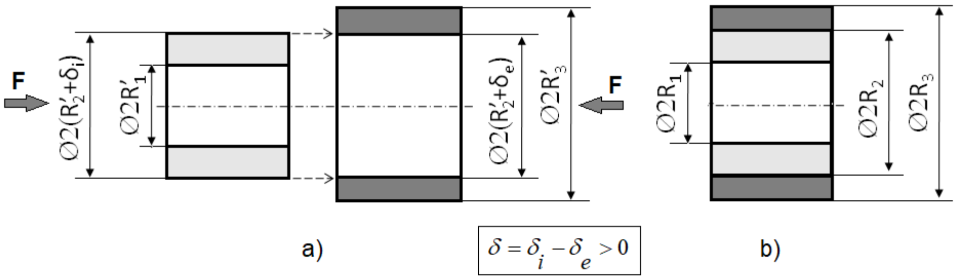


Fig. 8.7. Realizarea fretajului

Legenda figurii 8.7:

δ_i =deformația radială a tubului interior;

δ_e =deformația radială a tubului exterior;

R_2' =valoare minimă a razei înainte de presarea tuburilor;

R_2 = valoarea razei comune după presarea tuburilor.

Se poate scrie că suma celor două deplasări produse de p_f (luate în modul) este egală cu δ, care pentru tuburi din același material este

$$\delta = \left|u_e\left(R_2\right)\right| + \left|u_i\left(R_2\right)\right| = \frac{p_f R_2}{E}\left(\frac{R_2^2+R_1^2}{R_2^2-R_1^2} - \nu + \frac{R_2^2+R_3^2}{R_3^2-R_2^2} + \nu\right)$$
$$\Rightarrow p_f = \frac{\delta E\left(R_2^2-R_1^2\right)\cdot\left(R_3^2-R_2^2\right)}{2R_2^3\left(R_3^2-R_1^2\right)} \tag{8.37}$$

8.2.1. Cazuri particulare

Când în tubul interior este înlocuit cu o bară plină (R_1=0) presiunea de fretaj se determină cu

$$p_f = \frac{E\delta\left(R_3^2-R_2^2\right)}{2R_2R_3^2} \tag{8.38}$$

Pentru *tuburi din materiale diferite* presiunea de fretaj este [Buzdugan G., 1986]:

$$p_f = \frac{\delta}{R_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_1}\left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \nu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \nu_2\right)} \tag{8.39}$$

Cei doi cilindri pot fi studiați separat (tub interior de raze R_1 și R_2, încărcat cu presiune exterioară p_f și respectiv tub exterior, de raze R_2 și R_3, încărcat cu presiune interioară p_f):

1. *Tubul interior*

$$\begin{aligned} r = R_1 &\Rightarrow \sigma_r = 0; \quad \sigma_{t.\max} = -p_f \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ r = R_2 &\Rightarrow \sigma_r = -p_f; \quad \sigma_t = -p_f \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \tag{8.40}$$

2. *Tubul exterior*

$$\begin{aligned} r = R_2 &\Rightarrow \sigma_r = -p_f; \quad \sigma_{t.\max} = p_f \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \\ r = R_3 &\Rightarrow \sigma_r = 0; \quad \sigma_t = p_f \frac{2R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \end{aligned} \tag{8.41}$$

Tensiunile din tuburile fretate supuse la presiune se determină prin suprapunere de efecte (fig. 8.8): se adună tensiunile de fretaj (8.40) și (8.41) cu tensiunile produse de presiunea de serviciu în mantaua unui *tub monobloc* cu raza interioară R_1 și cea exterioară R_3. Tensiunile produse de presiunea interioară p_i în pereții tubului monobloc sunt

$$\begin{aligned} r = R_1 &\Rightarrow \sigma_r = -p_i; \quad \sigma_{t.\max} = p_i \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \\ r = R_2 &\Rightarrow \sigma_r = -p_i \frac{R_1^2\left(R_3^2 - R_2^2\right)}{R_2^2\left(R_3^2 - R_1^2\right)}; \quad \sigma_t = p_i \frac{R_1^2\left(R_3^2 + R_2^2\right)}{R_2^2\left(R_3^2 - R_1^2\right)} \\ r = R_3 &\Rightarrow \sigma_r = 0; \quad \sigma_t = p_i \frac{2R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

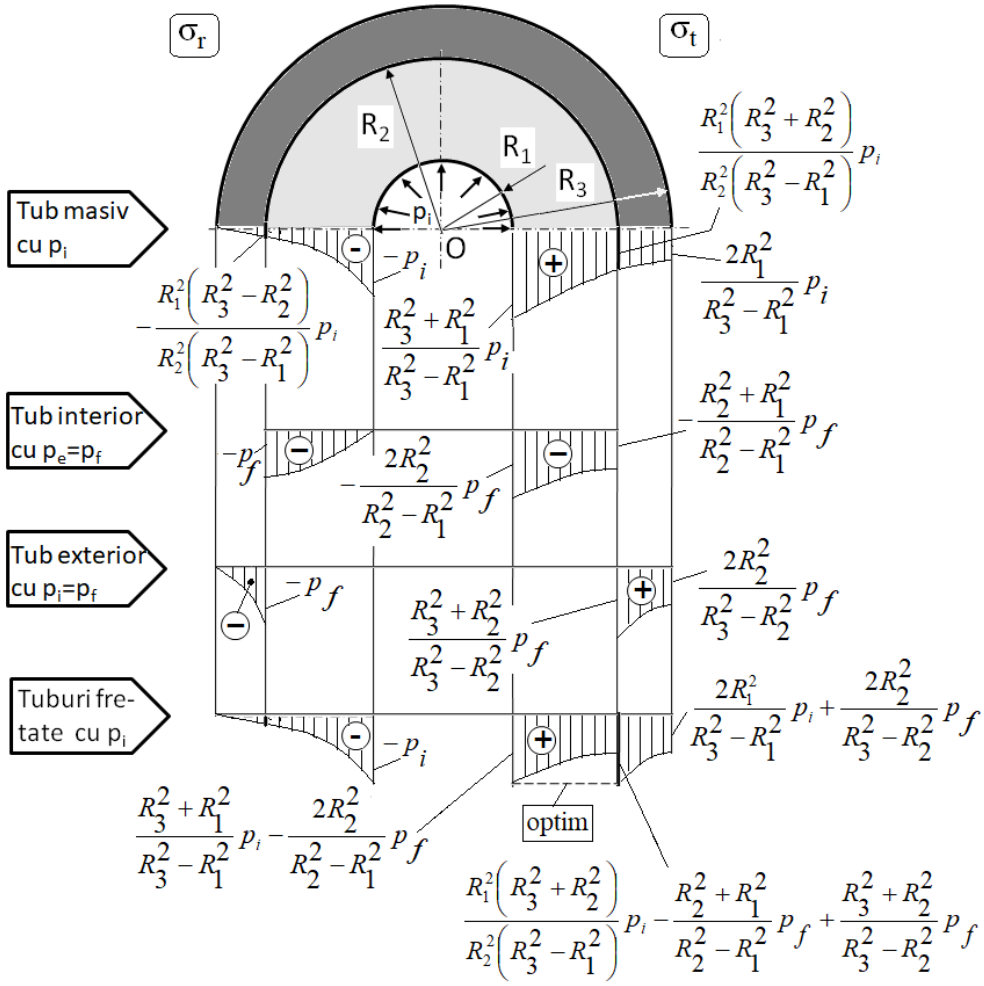


Fig. 8.8. Determinarea, prin suprapunerea efectelor, a tensiunilor din tuburile fretate

Observații:

- Valoarea extremă a tensiunii σ_r este aceeași la tuburile cu presiune interioară, atât cele monobloc, cât și la cele fretate;

- Ca urmare a fretajului se obține o diagramă σ_t în trepte: la interiorul tubului interior (r=R_1) σ_t scade, iar la interiorul tubului exterior (r=R_2) crește, față de cazul tubului monobloc. Deoarece $\sigma_{t.max}$ scade, se evidențiază astfel efectul favorabil al fretajului. Rațional este ca cele două valori extreme ale lui σ_t de mai sus sa fie egale (vezi mențiunea „optim” din fig. 8.8);
- Problema tuburilor fretate se rezolvă prin încercări, căutând o strângere δ care sa conducă la scăderea lui $\sigma_{t.max}$ până la o valoare convenabilă;
- Asemenea situații pot fi întâlnite și la presarea unui rulment, a unei bucșe sau a unei roți dințate pe un arbore. În acest caz presiunea de fretaj variază în lungul îmbinării (este mai mare la extremități și mai mică în zona centrală). Nu există o soluție analitică exactă pentru acest caz. Din acest motiv se poate admite că presiunea este uniform distribuită în lungul îmbinării, obținându-se astfel o soluție aproximativă. Problema poate fi rezolvată prin AEF;
- Un arbore plin poate fi considerat ca un tub cu raza interioară nulă (R_1=0). Un rulment poate fi modelat, într-o primă aproximare, numai prin inelul său interior, iar o roată numai prin butucul său. Astfel se poate face un calcul de rezistență aproximativ, utilizând relațiile deduse la tuburi fretate.

Problema 8.2

Să se determine presiunea optimă de fretaj p_f dintre două tuburi de oțel cu razele R_1=40mm, R_2=57mm și R_3=73mm, știind că σ_a=500MPa și tuburile fretate sunt încărcate cu presiunea interioară admisibilă.

Rezolvare

Tensiunile maxime se produc la interiorul tuburilor:

1. Tubul interior (r=R_1)

$$\sigma_r' = -p_i; \quad \sigma_t' = \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p_f \tag{8.43}$$

$$\sigma_t' = 1{,}86 p_i - 3{,}94 p_f$$

2. Tubul exterior (r=R$_2$)

$$\sigma_r'' = \frac{R_1^2}{R_3^2 - R_1^2}\left[1 - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2\right] p_i - p_f$$

$$\sigma_t'' = \frac{R_1^2}{R_3^2 - R_1^2}\left[1 - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2\right] p_i + \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} p_f \tag{8.44}$$

$$\sigma_r'' = 0,274 p_i - p_f; \quad \sigma_t'' = 1,14 p_i + 4,17 p_f$$

Utilizând teoria *von Mises*, condiția de fretaj optim (fig. 8.8) se scrie

$$\sqrt{(\sigma_t')^2 + (\sigma_r')^2 - \sigma_t' \cdot \sigma_r'} = \sqrt{(\sigma_t'')^2 + (\sigma_r'')^2 - \sigma_t'' \cdot \sigma_r''}$$
$$\Rightarrow 4,63 p_i^2 - 30,92 p_i p_f - 6,74 p_f^2 = 0 \Rightarrow p_i = 6,9 p_f \tag{8.45}$$

Presiunea de fretaj se determină din condiția

$$\sqrt{(\sigma_t')^2 + (\sigma_r')^2 - \sigma_t' \cdot \sigma_r'} = \sigma_a$$
$$\sqrt{\left(8,894 p_f\right)^2 + 8,894 \cdot 6,9 p_f^2 + \left(6,9 p_f\right)^2} = 500 \Rightarrow \tag{8.46}$$
$$p_f = 36,5 MPa$$

Presiunea interioara admisibilă este

$$p_i = 6,9 p_f = 6,9 \cdot 36,5 = 251,5 MPa \tag{8.47}$$

Problema 8.3

Un tub fretat este compus din două tuburi de oțel, cu razele R$_1$=50mm, R$_2$=100mm și R$_3$=150mm, cu strângerea δ=0,04mm. Tubul este supus la presiunea interioară p$_i$=1000 bar. Să se calculeze presiunea de fretaj p$_f$ și tensiunile principale pentru cazul tubului monobloc (fără fretaj) și pentru cel fretat.

Rezolvare

Se transformă presiunea interioară în [MPa]:

$$p_i = 1000 bar = 100 MPa \tag{8.48}$$

Presiunea de fretaj este

$$p_f = \frac{\delta E\left(R_2^2 - R_1^2\right)\cdot\left(R_3^2 - R_2^2\right)}{2R_2^3\left(R_3^2 - R_1^2\right)}$$

$$p_f = \frac{0,04\cdot 2,1\cdot 10^5\left(100^2 - 50^2\right)\left(150^2 - 100^2\right)}{2\cdot 100^3\left(150^2 - 50^2\right)} = 19,7MPa \tag{8.49}$$

Tensiunile din tubul monobloc sunt

$$\underline{r = R_1 = 50mm} \Rightarrow \sigma_r = -p_i = -100MPa;$$

$$\sigma_{t.\max} = p_i\frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = 100\frac{150^2 + 50^2}{150^2 - 50^2} = 125MPa$$

$$\underline{r = R_2 = 100mm} \Rightarrow \sigma_r = -p_i\frac{R_1^2\left(R_3^2 - R_2^2\right)}{R_2^2\left(R_3^2 - R_1^2\right)} = -15,6MPa; \tag{8.50}$$

$$\sigma_t = p_i\frac{R_1^2\left(R_3^2 + R_2^2\right)}{R_2^2\left(R_3^2 - R_1^2\right)} = 40,6MPa$$

$$\underline{r = R_3 = 150mm} \Rightarrow \sigma_r = 0; \quad \sigma_t = p_i\frac{2R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = 25MPa$$

Pentru cele două tuburi independente (fără a considera deocamdată suprapunerea efectelor) valorile tensiunilor sunt următoarele:

1. *Tubul interior*

$$\underline{r = R_1 = 50mm} \Rightarrow \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_{t.\max} = -p_f\frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -19,7\frac{2\cdot 100^2}{100^2 - 50^2} = -52,5MPa$$

$$\underline{r = R_2 = 100mm} \Rightarrow \sigma_r = -p_f = -19,7MPa; \tag{8.51}$$

$$\sigma_t = -p_f\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = -19,7\frac{100^2 + 50^2}{100^2 - 50^2} = -32,8MPa$$

2. *Tubul exterior*

$$\underline{r = R_2 = 100mm} \Rightarrow \sigma_r = -p_f = -19,7MPa;$$

$$\sigma_{t.\max} = p_f \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = 19,7\frac{150^2 + 100^2}{150^2 - 100^2} = 51,2MPa$$

$$\underline{r = R_3 = 150mm} \Rightarrow \sigma_r = 0; \tag{8.52}$$

$$\sigma_t = p_f \frac{2R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = 19,7\frac{2 \cdot 100^2}{150^2 - 100^2} = 31,5MPa$$

3. *Tubul fretat*

Tensiunile din tubul fretat se obțin prin suprapunerea efectelor (tab. 8.2).

Tab. 8.2. Suprapunerea efectelor pentru tuburile fretate

Raza [mm]	Tensiuni principale [MPa]			Observații
	Tub mono-bloc	Două tuburi indepen-dente	Tuburi fretate	
$R_1 = 50$	σ_r=100	σ_r=0	σ_r=-100	
	σ_t=125	σ_t=-52,5	σ_t=125-52,5=72,5	
$R_2 = 100$	σ_r=-15,6	σ_r=p_f=-19,7	σ_r=-15,6-19,7=-35,3	Tub interior
		σ_t=-32,8	σ_t=40,6-32,8=7,8	
	σ_t=40,6	σ_r= p_f=-19,7	σ_r=-15,6-19,7=-35,3	Tub exterior
		σ_t=51,2	σ_t=40,6+51,2=91,8	
$R_3 = 150$	σ_r=0	σ_r=0	σ_r=0	
	σ_t=25	σ_t=31,5	σ_t=25+31,5=56,5	

8.3. DISCURI ÎN ROTAȚIE

Starea de tensiuni din discurile de grosime constantă aflate în mișcare de rotație uniformă se determină în mod similar cu cea de la tuburile cu pereți groși. Deosebirea constă în faptul ca la discuri intervin forțele centrifuge și presiunea exterioară pozitivă este orientată către exterior.

„Presiunea” exterioară poate proveni, de exemplu, din forțele centrifuge, fiecare acționând asupra unei palete din multitudinea celor care sunt montate la periferia unui disc de turbină.

Se discută deocamdată cazul discurilor de grosime constantă, aflate în mișcare de rotație uniformă, fără presiune interioară (p_i=0) sau exterioară (p_e=0).

Forța centrifugă elementară care acționează asupra elementului de volum din figura 8.9 este

$$\begin{aligned} dF_c &= dm\omega^2 r = \rho dV\omega^2 r \approx \rho\cdot r\cdot d\varphi\cdot dr\cdot t\cdot\omega^2 r \\ dF_c &\approx \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 t\cdot d\varphi\cdot dr \end{aligned} \tag{8.53}$$

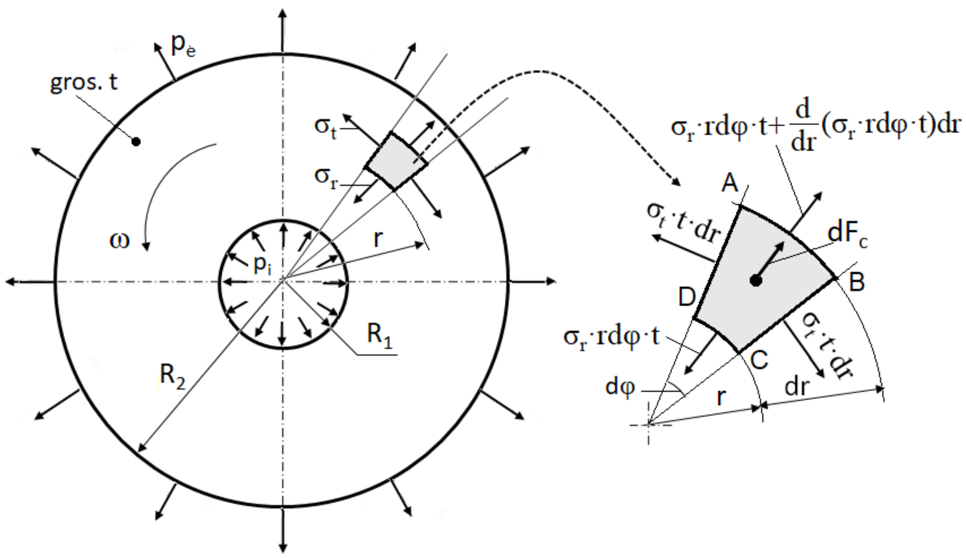


Fig. 8.9. Disc în mișcare de rotație uniformă și detașarea unui element de volum

Pentru elementul de volum se scrie ecuația de proiecție a forțelor pe direcție radială, așa cum s-a procedat și la tuburi. Cu aproximarea sin(dφ/2) $\approx\varphi/2$ se obține:

$$\begin{aligned}&\sigma_r r\cdot d\varphi+\frac{d}{dr}\left(\sigma_r r\cdot d\varphi\right)dr-\sigma_r r\cdot d\varphi+\\&\frac{\gamma}{g}r\cdot d\varphi\cdot dr\cdot r\omega^2-2\sigma_t dr\frac{d\varphi}{2}\end{aligned}\qquad(8.54)$$

După împărțirea cu $t\cdot dr\cdot d\varphi$ rezulă

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_t+\frac{\gamma}{g}r^2\omega^2=0\qquad(8.55)$$

La fel ca la tuburile cu pereți groși, se trece ecuația în deplasări

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=-\left(1-\nu^2\right)\frac{\gamma\cdot r\cdot\omega^2}{gE}\qquad(8.56)$$

unde *u* este deplasarea pe direcție radială.

Această ecuație diferențială admite o soluție generală de forma

$$u=Ar+\frac{B}{r}-\left(1-\nu^2\right)\frac{\gamma\cdot r^3\omega^2}{8gE}\qquad(8.57)$$

Din (8.57) se obține

$$\begin{aligned}&\frac{u}{r}=A+\frac{B}{r^2}-\left(1-\nu^2\right)\frac{\gamma r^2\omega^2}{8gE}\\&\frac{du}{dr}=A-\frac{B}{r^2}-\left(1-\nu^2\right)\frac{3\gamma\omega^2r^2}{8gE}\end{aligned}\qquad(8.58)$$

În relațiile constitutive se înlocuiesc alungirile specifice pe direcție radială și tangențială ținând cont de (8.5), (8.6) și (8.58) și apoi se determină constantele *A* și *B* din condițiile pe contur (pentru $r=R_1$ și $r=R_2$ avem $\sigma_r=0$ la discurile fără presiune, vezi și fig. 8.2):

$$A=\left(1-\nu\right)\left(3+\nu\right)\left(R_1^2+R_2^2\right)\frac{\gamma\omega^2}{8gE};\quad B=\left(1-\nu\right)\left(3+\nu\right)R_1^2R_2^2\frac{\gamma\omega^2}{8gE}\qquad(8.59)$$

Se scriu apoi tensiunile normale pe direcție radială și tangențială

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} \cdot \left[R_1^2 + R_2^2 - \left(\dfrac{R_1 R_2}{r} \right)^2 - r^2 \right] \\ \sigma_t = \dfrac{(3+\nu)\gamma\omega^2}{8g} \cdot \left[R_1^2 + R_2^2 + \left(\dfrac{R_1 R_2}{r} \right)^2 - \dfrac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right] \end{cases} \tag{8.60}$$

Din (8.60) se observă că pentru 0<ν<0,5 se obține pentru orice *r*

$$\sigma_t > \sigma_r \tag{8.61}$$

Se determină tensiunea radială maximă

$$\begin{gathered} \frac{d\sigma_r}{dr} = C\left(\frac{2R_1^2}{r^3} - \frac{2r}{R_2^2} \right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{R_1 R_2} \\ \sigma_r\left(r = \sqrt{R_1 R_2} \right) = \sigma_{r.\max} = \frac{(3+\nu)\gamma\left(R_2 - R_1\right)^2 \omega^2}{8g} \end{gathered} \tag{8.62}$$

Tensiunea tangențială nu are un maxim algebric în intervalul [R_1, R_2] și în consecință se determină doar valorile funcției la capetele intervalului

$$\begin{gathered} \sigma_t\left(r = R_1\right) = \sigma_{t.\max} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2 \right] \\ \sigma_t\left(r = R_2\right) = \sigma_{t.\min} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\nu)R_1^2 + (1-\nu)R_2^2 \right] \end{gathered} \tag{8.63}$$

Se observă că tensiunea tangențială este maximă pentru $r=R_1$, adică la interiorul alezajului. Din acest motiv ruperea discurilor în rotație se produce datorită unei fisuri care pornește de la interior și se propagă spre exterior pe direcție radială.

Variația tensiunilor principale pe direcția razei discului este prezentată în figura 8.10.

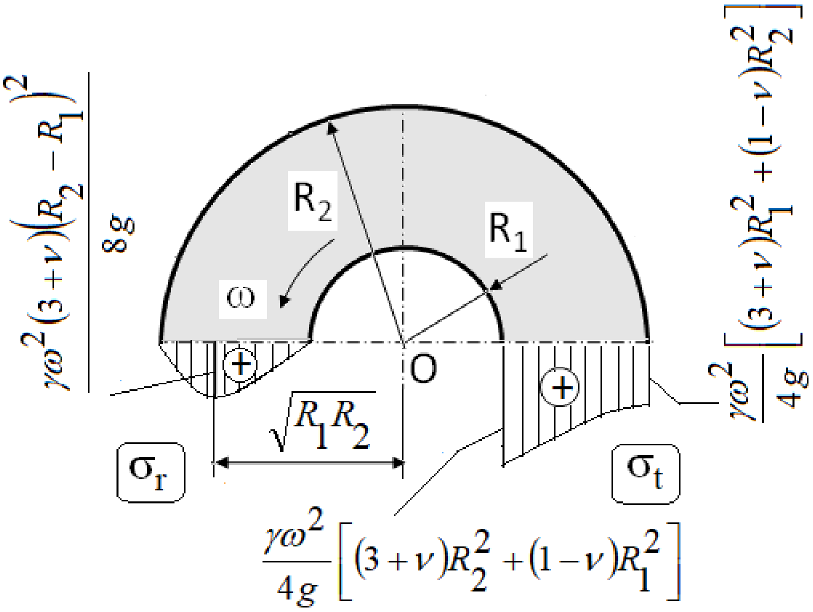


Fig. 8.10. Variația tensiunilor principale funcție de raza r

8.3.1. Cazuri particulare

Disc fără gaură

În centrul discului deplasarea *u* pe direcție radială este nulă și în consecință B=0. Pentru a afla constanta *A* se pune condiția ca la periferia discului ($r=R_2=R$) tensiunea pe direcție radială să fie nulă ($\sigma_r=0$) și astfel rezultă [Buzdugan G., 1973]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(3+\nu)\gamma R^2\omega^2}{8g}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \\ \sigma_t &= \frac{(3+\nu)\gamma R^2\omega^2}{8g}\left[1-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{8.64}$$

Ambele tensiuni sunt maxime și egale în centrul discului cu raza R_2=R

$$\sigma_{r.\max} = \sigma_{t.\max} = \frac{(3+\nu)\gamma R^2\omega^2}{8g} \tag{8.65}$$

Disc cu gaură nulă

Punând condiția R_1=0 se găsește că tensiunea normală pe direcție radială este nulă iar tensiunea tangențială maximă este localizată tot în centrul discului, însă are o valoare dublă față de cea din cazul discului fără gaură, cu R_2=R (8.65) și anume

$$\sigma_{t.\max} = \frac{(3+\nu)\gamma R^2\omega^2}{4g} \tag{8.66}$$

Această contradicție aparentă se explică prin faptul că atunci când în centrul discului apare o gaură infinit mică ($R_1 \rightarrow 0$) tensiunea tangențială în vecinătatea ei se dublează și acesta este un fenomen de concentrare a tensiunilor.

Concluzii:

- Tensiunile din disc depind de dimensiunile sale (R_1, R_2), densitatea materialului $\rho=\gamma/g$, coeficientul Poisson ν și viteza unghiulară ω și nu depind de grosimea discului *t*;
- Turația maximă pe care o poate atinge un disc de dimensiuni date depinde numai de caracteristici de material (γ, ν și σ_a). Din acest motiv, la discuri în rotație se poate calcula doar viteza unghiulară ω_{max} sau turația maximă n_{max}. Turația maximă poate fi depășită micșorând raza exterioară R_2 sau schimbând materialul din care este confecționat discul cu unul care are greutatea specifică γ mai mică. Se poate adopta și un material tensiunea admisibilă σ_a mai mare;
- La discul fără gaură tensiunile maxime sunt mai mici decât la cel cu gaură și în consecință el permite atingerea unor turații mai mari;
- Tensiunea tangențială maximă este dublă la discul cu gaură nulă ($R_1 \rightarrow 0$) în comparație cu discul fără gaură;

- Dacă discul este presat pe arbore, sau are presat un bandaj, sau are palete la periferie (a căror acțiune este consideră ca o presiune exterioară, orientată spre exterior, ca în fig. 8.9), atunci tensiunile din disc se determină pe baza tensiunilor de la tuburi fretate și a celor de la discuri, prin suprapunere de efecte. Presiunea exterioară de la discuri p_e va fi considerată de semn contrar celei de la tuburi.

Se poate determina un *disc de egală rezistență*, cu grosimea variabilă, la care tensiunile nu depind de *r* și care permite atingerea unor turații mai mari decât discul de grosime constantă [Buzdugan G., 1973]. Grosimea discului de egală rezistență variază conform funcției

$$t = t_0 \exp\left(-\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g\sigma_0}\right) t = t_0 \exp\left(-\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g\sigma_0}\right) \tag{8.67}$$

unde t_0 este grosimea discului în centrul discului (r=0). Discul de egală rezistență trebuie să aibă la periferie o tensiune pe direcție radială σ_0 care poate fi produsă, de exemplu, de forțele de inerție care acționează asupra paletelor.

Problema 8.4

Să se verifice discul de oțel din figura 8.11 știind că: R_1=75mm, R_2=300mm. Discul este încărcat cu p_e=22N/mm^2 și se rotește cu turația n=3000rot/min. Oțelul din care este confecționat are σ_a=110MPa, γ=7,8×10^{-5}N/mm^3, ν=0,3. Se va considera accelerația gravitațională g=9,81m/sec^2.

Rezolvare

Se calculează viteza unghiulară a discului în unități ale SI

$$\omega = 2\pi n \Rightarrow \omega\left[\frac{rad}{\sec}\right] = \frac{\pi}{30} n\left[\frac{rot}{\min}\right]; \omega = \frac{\pi}{30}3000 = 100\pi\left[\frac{rad}{\sec}\right] \tag{8.68}$$

Tensiunea maximă la discul fără presiuni (p_i=p_e=0) aflat în rotație uniformă este σ_t la interiorul alezajului (r=R_1), unde σ_r=0

$$\sigma'_{t.\max} = \frac{\gamma\omega^2}{4g}\left[(3+\nu)R_2^2 + (1-\nu)R_1^2\right]; \quad \sigma'_r = 0 \tag{8.69}$$

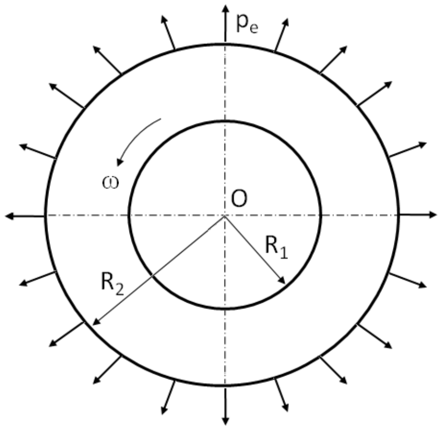


Fig. 8.11. Disc în rotație

Tensiunea maximă la tubul cu presiune exterioară este tot σ_t la interior ($r=R_1$), unde $\sigma_r=0$. Deoarece p_e este orientată spre interior la tuburi și spre exterior la discuri, ea va fi luată cu semnul minus

$$\sigma''_{t.\max} = -\frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(-p_e\right) = \frac{2R_2^2 \cdot p_e}{R_2^2 - R_1^2}; \quad \sigma''_r = 0 \tag{8.70}$$

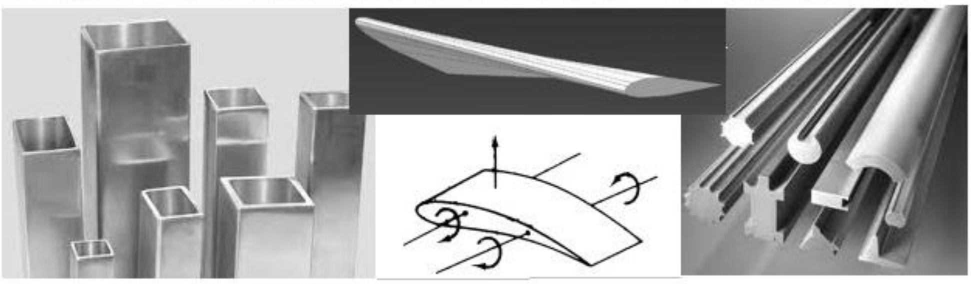
$$\begin{aligned} \sigma'_{t.\max} &= \frac{7,8 \cdot 10^{-5}\left(100\pi\right)^2}{4 \cdot 9810}\left[3,3 \cdot 300^2 + 0,7 \cdot 75^2\right] = 58,98MPa \\ \sigma''_{t.\max} &= \frac{2 \cdot 300^2 \cdot 22}{300^2 - 75^2} = 46,93MPa \end{aligned} \tag{8.71}$$

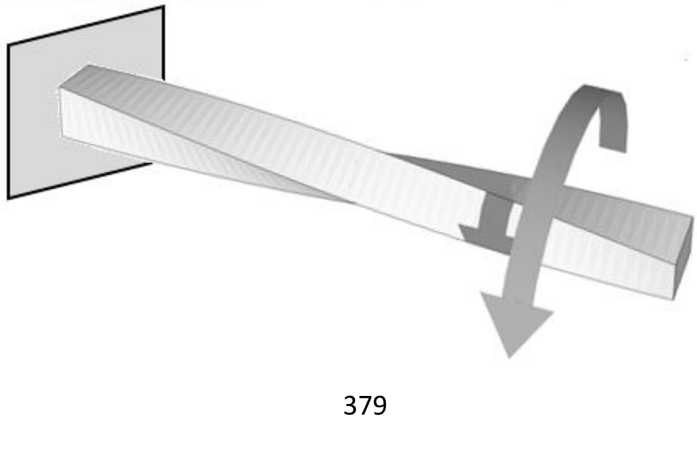
La interiorul alezajului tensiunile normale pe direcție radială sunt nule, conform (8.70), iar tensiunile normale pe direcție tangențială, date de (8.71), sunt pe aceeași fațetă și pe aceeași direcție și în consecință se adună algebric

$$\begin{aligned} \sigma_{rez} &= \sigma'_{t.\max} + \sigma''_{t.\max} \\ \sigma_{rez} &= 58,98 + 46,93 = 105,91MPa < \sigma_a = 110MPa \end{aligned} \tag{8.72}$$

Discul rezistă la turația propusă, deoarece tensiunea normală rezultantă este mai mică decât cea admisibilă.

TORSIUNEA LIBERĂ A BARELOR PRISMATICE





Pentru realizarea colajului din acest capitol s-au folosit:

https://www.nsenergybusiness.com/features/testing-wind-turbine-blades/

https://www.alexander-schleicher.de/en/service/technik/holm-im-fluegel/

https://www.green-mechanic.com/2016/09/torsional-testing-of-materials.html

https://www.tradeindia.com/products/steel-profiles-1205991.html

9. TORSIUNEA LIBERĂ A BARELOR PRISMATICE

La torsiunea barelor cu secțiune circulară sau circulară inelară s-a admis ipoteza lui *Bernoulli*. Experiența arată că în cazul barelor cu secțiuni de alte forme această ipoteză nu mai poate fi acceptată, deoarece are loc o deplanare a secțiunilor transversale. Starea de tensiuni din aceste bare a fost determinată de către *Saint-Vénant*, cu ajutorul Teoriei Elasticității. Se admit următoarele ipoteze:

- Secțiunea barei este constantă pe toată lungimea;
- La capetele barei de lungime *L* sunt aplicate momente de torsiune concentrate și nu există alte încărcări;
- Deplasările u(z,y) pe direcția axială Ox sunt libere și în consecință $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0$;
- În secțiune apar *numai* tensiuni tangențiale τ_{xy} și τ_{xz}.

Aceste ipoteze caracterizează *torsiunea liberă* a unei bare drepte de secțiune oarecare. Tensiunile tangențiale sunt nule pe suprafața liberă a barei.

Se știe că, în cazul torsiunii pure a barei cilindrice, orice secțiune transversală circulară rămâne plană și perpendiculară pe axa barei Ox (ipoteza lui *Bernoulli*), rotindu-se numai cu

$$\varphi = \theta x \tag{9.1}$$

unde θ este rotirea specifică [rad/m] și *x* distanța de la secțiunea considerată fixă pană la cea curentă.

Deplasările unui punct al secțiunii circulare față de axe se determină geometric (fig. 9.1 și fig. 9.2):

$$w = -\theta xy; \quad v = \theta xz \tag{9.2}$$

Deplasarea *u* în direcția axei Ox este nulă, în baza ipotezei lui *Bernoulli*.

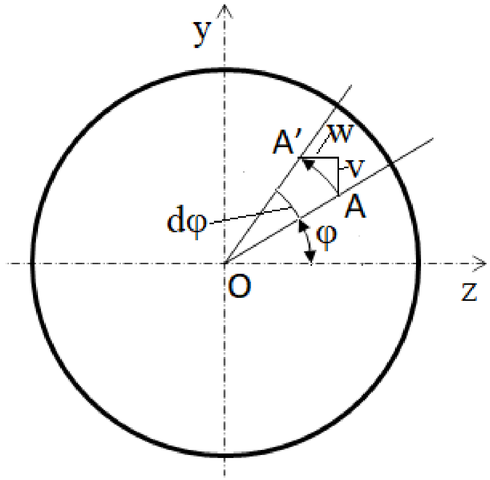


Fig. 9.1. Deplasările unui punct A la torsiunea barei cilindrice

La răsucirea barelor prismatice se presupune că deplasările *v* și *w* din planul secțiunii sunt determinate tot cu (9.2), însă deplasarea *u* nu mai este nulă și depinde de forma secțiunii și coordonatele punctului. Deplasările *u*, *v* și *w* sunt produse de lunecări în planele zOx și yOx.

Pentru a determina starea de tensiuni din barele supuse la torsiune se caută o *funcție de tensiuni* Φ(z,y) care să fie constantă sau nulă pe conturul secțiunii și ale cărei derivate parțiale să dea componentele tensiunii tangențiale într-un punct al secțiunii

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \tau_{xz}; \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \tau_{xy} \tag{9.3}$$

Funcția $\Phi(z,y)$ poate fi găsită pe cale analitică (în Teoria Elasticității), experimentală (*analogia cu membrana*) sau numerică.

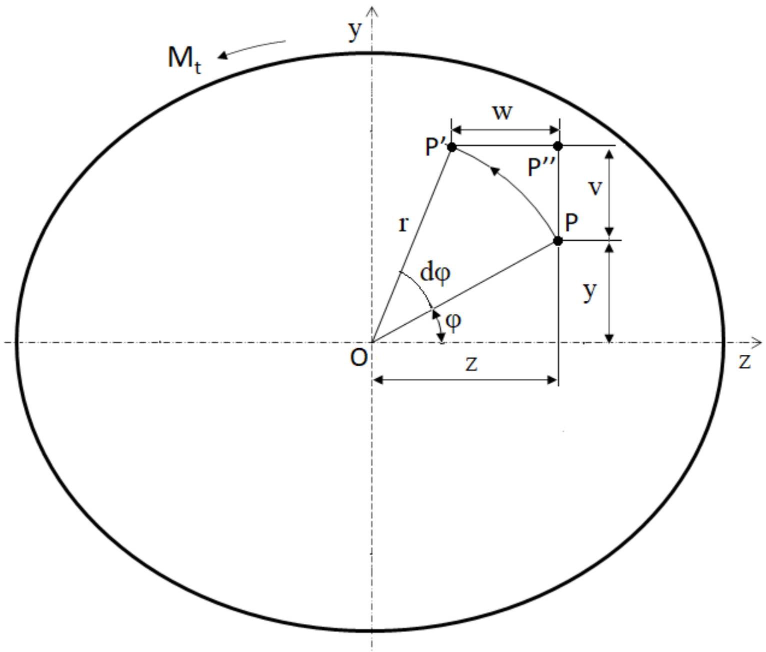


Fig. 9.2. Torsiunea unei bare cu secțiunea necirculară

Se pot scrie următoarele relații geometrice (v. fig. 9.2):

$$\begin{aligned}
&[OP] \approx [OP'] = r; \quad arc\left(PP'\right) = ds = rd\varphi \\
&r\cos\varphi = z; \quad r\sin\varphi = y; \\
&v \approx arc\left(PP'\right)\cos\varphi = rd\varphi\cos\varphi; \quad w = -rd\varphi\sin\varphi \\
&v = zd\varphi; \quad w = -yd\varphi
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Rotirea specifică θ este dată de (9.1).

În continuare se aplică ecuațiile fundamentale ale Teoriei Elasticității.

Ținând cont de faptul că numai tensiunile τ_{xy} și τ_{xz} nu sunt nule, *ecuațiile de echilibru Cauchy* (2.68) pot fi particularizate astfel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

Ecuațiile (9.5) arată că tensiunile $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ și $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ nu depind de *x*.

Din (9.3) și prima ecuație (9.5) rezultă

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0 \tag{9.6}$$

Ecuațiile geometrice sau de deformații (2.76) pentru lunecări pot fi particularizate pentru acest caz astfel [Tripa M., 1967]:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= z\theta + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} &= -y\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Din ecuațiile (9.7) și ecuațiile *constitutive* (2.80) rezultă

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(z\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G\left(-y\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{9.8}$$

Se derivează τ_{xy} în raport cu *z* și τ_{xz} în raport cu *y* și se obține:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\left(\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\left(-\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right) \tag{9.9}$$

Scăzând apoi ecuațiile (9.9) se obține

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\left(-\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \theta - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) = -2G\theta \tag{9.10}$$

Din (9.10) și (9.3) rezultă ecuația lui *Poisson*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{9.11}$$

Utilizând notația

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9.12}$$

ecuația (9.11) poate fi scrisă comprimat

$$\nabla^2 \Phi = -2G\theta \tag{9.13}$$

Pentru determinarea funcției Φ se pun condițiile pe conturul secțiunii transversale. În figura 9.3 punctul *P* de pe conturul secțiunii se deplasează în *P'*, ca urmare a deformării barei sub acțiunea M_t. Proiecțiile deplasării sunt *dz* și *dy*. Deplasarea *dz* are loc în sens contrar axei Oz și este negativă. Se scriu cosinușii directori și se particularizează prima dintre ecuațiile (2.6):

$$\begin{gathered}
m = \cos(\overline{n}, y) = \cos\alpha = -\frac{dz}{ds}; \quad n = \cos(\overline{n}, z) = \sin\alpha = \frac{dy}{ds} \\
p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \Rightarrow \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \Leftrightarrow \\
-\frac{dz}{ds} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{ds} = 0 \Rightarrow \Phi = const.
\end{gathered} \tag{9.14}$$

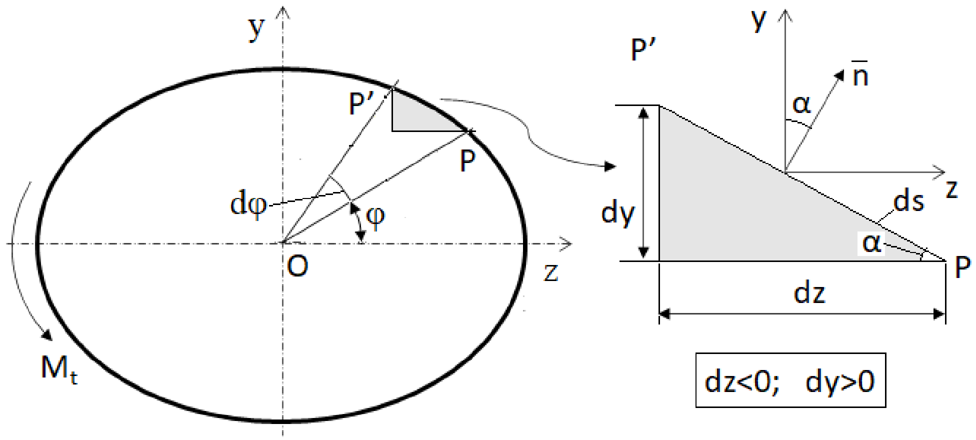


Fig. 9.3. Studiul condițiilor pe contur

Din (9.14) rezultă că funcția Φ este constantă pe conturul secțiunii. Deoarece tensiunile tangențiale depind doar de derivatele lui Φ, rezultă că variația funcției cu o contantă nu modifică tensiunile. În particular această constantă poate fi zero și funcția poate fi nulă pe contur $\Phi = 0$.

Pe bazele prismei sunt aplicate două momente de torsiune M_t de sensuri contrare. Se scriu în continuare relațiile dintre eforturi și tensiuni, numite și *ecuații de echivalență* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001]:

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \iint_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \right) \cdot dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \Phi) = \Phi + x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Rightarrow \tag{9.15}$$

$$M_t = -2\iint_A \Phi dydz + \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial y}(y\Phi) - \frac{\partial}{\partial z}(-z\Phi) \right] \cdot dydz$$

Aplicând formula lui *Riemann* pentru a doua integrală aceasta se reduce la integrale pe conturul secțiunii, definit de curba Γ

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial y}(y\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}(z\Phi) \right] dydz = \Phi \left(\int_\Gamma ydz - \int_\Gamma zdy \right) = 0 \tag{9.16}$$

Din (9.15) și (9.16) rezultă

$$M_t = 2\int_A \Phi dA = 2\iint_A \Phi dydz \qquad (9.17)$$

Integrala din relația (9.17) reprezintă dublul volumului prismoidului care are ca baze secțiunea transversală a barei și respectiv proiecția ei pe suprafața Φ(z,y). Ea are în același timp și rolul de moment de inerție convențional. Funcția Φ poate fi determinată ținând cont că ea trebuie să satisfacă relația lui *Poisson* (9.13) și să fie nulă pe conturul secțiunii transversale.

În cazurile întâlnite în practica inginerească rezultatele rezolvării relațiilor de calcul de la torsiunea elastică a barelor prismatice pot fi prezentate prin analogie cu torsiunea barelor cu secțiune circulară astfel [Ponomariov S.D., 1960]:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_x}{W_t} \\ \varphi = \theta L &= \frac{M_x L}{G I_t} \end{aligned} \qquad (9.18)$$

unde I_t și W_t depind de forma și dimensiunile secțiunii transversale. I_t caracterizează rigiditatea secțiunii la torsiune și se măsoară în [mm^4] iar W_t caracterizează rezistența și se măsoară în [mm^3]. Pentru cazul particular al secțiunii circulare rezultă $I_t=I_p$ și $W_t=W_p$. Cu M_x s-a notat efortul care, în cazul torsiunii libere, este egal cu încărcarea $M_x = M_t$.

9.1. CAZURI PARTICULARE

9.1.1. Torsiunea barelor cilindrice

Relațiile pentru torsiunea parelor prismatice vor fi verificate în cazul particular al barelor cilindrice cu secțiune circulară, pentru care formulele sunt cunoscute și au fost deduse utilizând ipoteza lui *Bernoulli* [Bârsănescu P.D., Ciobanu O., 2001].

Ecuația cercului cu centrul în origine este

$$z^2 + y^2 = R^2 \qquad (9.19)$$

Se caută o funcție de tensiuni de forma

$$\Phi\left(z,y\right)=C\left(z^2+y^2\right) \tag{9.20}$$

Pe conturul secțiunii se alege funcția de tensiuni de forma

$$\Phi\left(z,y\right)=CR^2=const. \tag{9.21}$$

Constanta *C* se determină din condiția ca funcția Φ(z,y) să satisfacă ecuația lui *Poisson*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2G\theta \Leftrightarrow 2C+2C=-2G\theta \Rightarrow C=-\frac{G\theta}{2}$$

$$\Phi=-\frac{G\theta}{2}\left(z^2+y^2\right) \tag{9.22}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=G\theta\cdot z; \quad \tau_{xz}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-G\theta\cdot y$$

Tensiunea tangențială rezultantă este

$$\tau=\sqrt{\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2}=G\theta\sqrt{z^2+y^2}=G\theta R \tag{9.23}$$

Se scrie relația de echivalență pentru torsiune și se ține cont de (9.22) și (9.23):

$$\begin{gathered} M_t=\int_A\left(\tau_{xy}z-\tau_{xz}y\right)\cdot dA=G\theta\int_A r^2dA=G\theta\cdot I_p \\ \frac{M_t}{I_p}=G\theta=\frac{\tau}{R}\Rightarrow \tau=\frac{M_tR}{I_p}=\frac{M_t}{W_p}; \quad \theta=\frac{M_t}{GI_p} \end{gathered} \tag{9.24}$$

S-au găsit astfel relațiile de la torsiunea barelor de secțiune circulară.

9.1.2. Torsiunea barelor cu secțiune eliptică

Se pornește de la ecuația elipsei

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9.25}$$

și se caută o funcție de tensiuni de forma

$$\Phi = C\left(\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{9.26}$$

Pe contur funcția este constantă și se scrie

$$\Phi = C \tag{9.27}$$

De unde

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{2C}{a^2}; \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{2C}{b^2}\Rightarrow \\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2C\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-2G\theta\Rightarrow \\
&C=-\frac{G\theta a^2b^2}{a^2+b^2} \\
&\Phi=-\frac{G\theta}{a^2+b^2}\left(b^2z^2+a^2y^2\right)
\end{aligned} \tag{9.28}$$

S-a determinat astfel funcția de tensiuni pentru secțiunea eliptică. Urmând un raționament asemănător cu cel de la secțiunea circulară (&9.1.1) se obține [Bia C., 1983]:

$$\theta=\frac{M_t\left(a^2+b^2\right)}{\pi a^3b^3G} \tag{9.29}$$

Notând

$$I_t=\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2} \tag{9.30}$$

rotirea specifică θ se rescrie

$$\theta=\frac{M_t}{GI_t} \tag{9.31}$$

S-a obținut astfel o relație de forma (9.18).

Tensiunile tangențiale pentru secțiunea eliptică sunt

$$\tau_{xy} = \frac{2M_t}{\pi a^3 b} z; \quad \tau_{xz} = \frac{2M_t}{\pi a b^3} y \tag{9.32}$$

La capetele semiaxelor, în punctele de intersecție cu axele de coordonate 1(a,0) și respectiv 2(0,b), tensiunile tangențiale au valori extreme

$$\tau_1 = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}; \quad \tau_2 = -\frac{2M_t}{\pi a b^2} \tag{9.33}$$

În cazul în care

$$a > b \Rightarrow |\tau_1| < |\tau_2| \tag{9.34}$$

Tensiunea maximă se obține în punctul 2, la extremitatea semiaxei mici și mai poate fi scrisă sub forma

$$\tau_2 = \frac{M_t}{W_t}; \quad W_t = \frac{\pi a b^2}{2} \tag{9.35}$$

S-a obținut o relație de forma (9.18).

Pentru a=b=R se regăsește cazul particular al secțiunii circulare.

9.1.3. Torsiunea barelor cu secțiune dreptunghiulară

Determinarea analitică a funcției de tensiuni este complicată în acest caz și poate fi găsita în [Bia C., 1983]. Pentru un dreptunghi cu laturile h>b caracteristicile geometrice necesare în relațiile în (9.18) sunt

$$I_t = \beta h b^3; \quad W_t = \alpha h b^2 \tag{9.36}$$

Tensiunea tangențială maximă $\tau_{xy.\max}$ se obține la mijlocul laturii mari (fig. 9.4). La mijlocul laturii mici tensiunea se calculează funcție de $\tau_{xy.\max}$

$$\tau_{xz.\max} = \gamma \tau_{xy.\max} \tag{9.37}$$

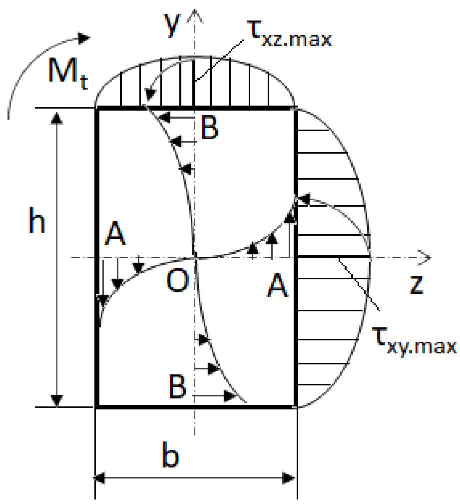
Coeficienții din relațiile (9.36) și (9.37) se dau de obicei în tabele (tab. 9.1).
Pentru dreptunghiuri înguste (h/b>4) se poate utiliza relația aproximativă

$$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}\left(1-0,63\frac{b}{h}\right) \tag{9.38}$$

Se observă că

$$\frac{b}{h} \to 0 \Rightarrow \alpha \to \frac{1}{3};\quad \beta \to \frac{1}{3} \tag{9.39}$$

Pentru b=h se obține cazul particular al secțiunii pătrate.
În cazul secțiunilor poligonale tensiunea tangențială este nulă la colțuri, din motive de echilibru.



$$h \ge b \Rightarrow \left|\tau_{xy.\max}\right| \ge \left|\tau_{xz.\max}\right|$$

Fig. 9.4. Repartiția tensiunilor tangențiale
la torsiunea barei cu secțiune dreptunghiulară

Tensiunile tangențiale au o repartiție spațială pe suprafața dreptunghiulară din figura 9.3, unde se prezintă secțiuni pe direcțiile B-B, A-A și pe direcțiile laturilor, toate rabătute în planul figurii.

Tab. 9.1. Coeficienții pentru ecuațiile (9.36) și (9.37)

h/b	α	β	γ
1	0,141	0,208	1,000
1,5	0,196	0,231	0,859
2	0,219	0,246	0,795
3	0,263	0,263	0,753
4	0,281	0,281	0,745
6	0,299	0,299	0,743
8	0,307	0,307	0,742
10	0,313	0,313	0,742
$\to\infty$	1/3	1/3	0,742

9.1.4. Torsiunea barelor cu secțiune hexagonală

Pentru torsiunea barelor cu secțiunea un hexagon regulat (fig. 9.5) se folosesc tot relațiile (9.18), cu următoarele caracteristici geometrice

$$I_t = 0{,}155 b^4; \quad W_t = 0{,}189 b^3 \tag{9.40}$$

Tensiunea maximă τ_{max} apare la mijlocul laturilor iar la colțuri $\tau=0$ [Ponomariov S.D., 1963].

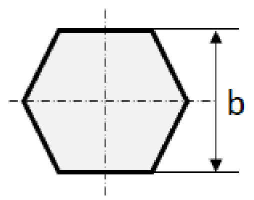


Fig. 9.5. Secțiune hexagonală

Pentru secțiuni cu forme mai complicate funcția de tensiuni poate fi stabilită prin metode numerice sau experimentale. Metoda experimentală numită analogia cu membrana va fi prezentată mai jos.

9.2. ANALOGIA CU MEMBRANA

Determinarea analitică a funcției de tensiuni Φ pentru secțiuni cu formă complicată este dificilă. În acest scop *Prandtl* a propus o metodă experimentală aproximativă, numită *analogia cu membrana*. La membrane se aplică ecuația lui *Laplace* (7.3) de la vase cu pereți subțiri, însă cu tensiunile principale egale

$$\sigma_p = \sigma_m = \sigma; \quad \frac{1}{\rho_p} + \frac{1}{\rho_m} = \frac{p}{H}; \quad H = \sigma \cdot h \tag{9.41}$$

Dacă x=f(z,y) este ecuația suprafeței membranei și dacă deplasările *x* sunt mici, cele două curburi pot fi scrise ca în cazul grinzilor

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{\rho_m} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{9.42}$$

Din (9.42) și (9.41) se obține

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{p}{H} \tag{9.43}$$

Ecuația (9.43) este similară cu relația lui *Poisson* (9.11). Deplasarea *x* pe contur este nulă, la fel ca la funcția Φ.

Experimental se pot alege *p* și *H* astfel încât să se obțină

$$\frac{p}{H} = -2G\theta \tag{9.44}$$

În acest caz rezultă

$$x(z,y) = \Phi(z,y) \tag{9.45}$$

Practic funcția de tensiuni poate fi determinată astfel: într-o placă se practică un orificiu de forma secțiunii transversale a barei supuse la torsiune și peste el se fixează o membrană subțire, care este supusă la presiunea *p*. Măsurând deplasarea *x* a membranei pe direcție normală la placă, la o anumită scară se poate determina funcția de tensiuni Φ.

9.3. SECȚIUNI DE ALTE FORME

Pentru secțiunile simplu și dublu conexe se vor aplica ecuațiile (9.18), cu caracteristicile geometrice I_t și W_t specifice acestor categorii de secțiuni.

9.3.1. Secțiuni simplu conexe

Pentru bara de forma unui *sector inelar subțire* (fig. 9.6) se utilizează caracteristicile geometrice de la secțiunea dreptunghiulară cu

$$I_t = \frac{1}{3} s t^3; \quad W_t = \frac{1}{3} s t^2; \quad t = const. \tag{9.46}$$

Cu *s* s-a notat lungimea fibrei medii și cu *t* grosimea sectorului. Relațiile sunt valabile pentru $s >> t$.

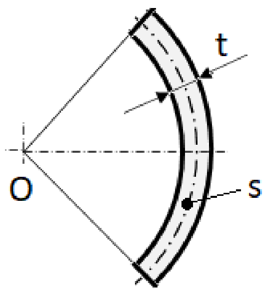


Fig. 9.6. Sector inelar subțire

În cazul secțiunilor simplu conexe care pot fi descompuse în dreptunghiuri subțiri (fig. 9.7) caracteristicile geometrice sunt

$$\begin{gathered} I_t = \frac{1}{3} \sum_i h_i b_i^3; \quad W_t = \frac{I_t}{b_{\max}} \\ h_i \geq b_i; \quad i = 1, 2 \ldots; \quad b_{\max} = \max\{b_1, b_2, \ldots\} \end{gathered} \tag{9.47}$$

Se recomandă ca descompunerea să țină cont de fibra medie, dacă este posibil. Pentru profilul *U* din figura 9.7, de exemplu, s-a trasat mai întâi fibra medie (cu linie punct). Descompunerea s-a făcute în două dreptunghiuri cu laturile b_1 și h_1 și un dreptunghi cu laturile b_2 și h_2. Aceste dreptunghiuri se suprapun la colțuri (suprapunerile sunt marcate cu gri deschis) dar rămân două dreptunghiuri egale (marcate cu gri închis) care nu au fost luate în considerație și acest lucru se compensează. Tensiunea tangențială maximă τ_{max} se află la jumătatea laturii mari a dreptunghiului de grosime maximă b_{max}.

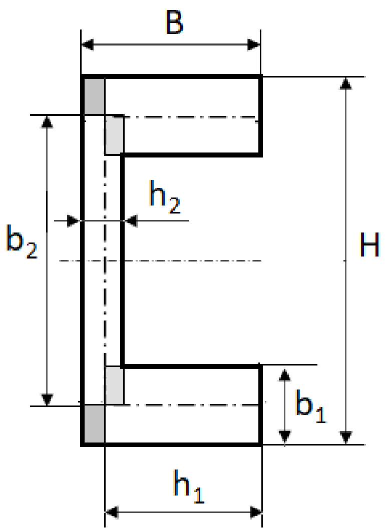


Fig. 9.7. Descompunerea unui profil simplu conex

9.3.2. Secțiuni dublu conexe

În cazul secțiunilor dublu conexe (închise) cu pereți de grosime *t* variabilă (fig. 9.8), caracteristicile geometrice se calculează astfel

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\int\limits_s \frac{ds}{t}}; \quad W_t = 2\Omega t_{\min} \tag{9.48}$$

Pentru profile cu grosimea peretelui constantă $t = const.$ relațiile (9.48) devin:

$$I_t = \frac{4\Omega^2 t}{s}; \quad W_t = 2\Omega t \tag{9.49}$$

unde s-a notat:

$s =$ lungimea (perimetrul) fibrei medii;

$\Omega =$ suprafața mărginită de fibra medie.

La profile cu grosimea peretelui variabilă tensiunea tangențială maximă se află în secțiunea în care grosimea peretelui este minimă t=min.

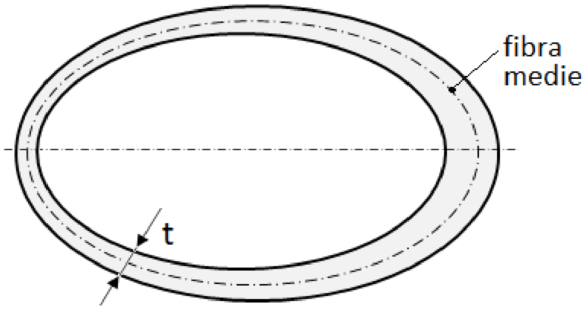


Fig. 9.8. Profil dublu conex cu grosimea pereților variabilă

9.3.3. Secțiuni multiplu conexe

Secțiunea multiplu conexă din figura 9.9 poate fi descompusă în doua profilure închise, suprafețele mărginite de fibrele lor medii fiind Ω_1 și Ω_2 și având grosimile pereților constante t_1, t_2 și t_3. Pe fiecare contur închis *fluxul* $\tau \cdot t$ este constant

$$2G\theta\Omega = \int_s \tau ds \tag{9.50}$$

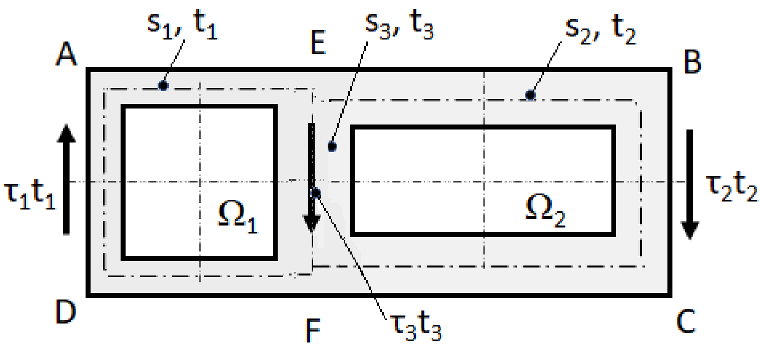


Fig. 9.9. Secțiune multiplu conexă

Pentru contururile închise AEFD și respectiv BCFE se poate scrie

$$\begin{aligned} 2G\theta\Omega_1 &= \tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 \\ 2G\theta\Omega_2 &= \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 \end{aligned} \tag{9.51}$$

Pentru toate contururile închise care formează secțiunea se poate scrie

$$M_x = \tau_1 W_{t1} + \tau_2 W_{t2} \tag{9.52}$$

Pe peretele despărțitor se consideră că fluxul de tensiuni este

$$\tau_3 t_3 = \tau_1 t_1 - \tau_2 t_2 \Rightarrow \tau_3 = \frac{\tau_1 t_1 - \tau_2 t_2}{t_3} \tag{9.53}$$

Din ecuațiile de mai sus rezultă tensiunile tangențiale și rotirea specifică

$$\begin{aligned} \tau_1 &= M_x \frac{s_2 t_3 \Omega_1 + s_3 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)}{2[s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2]} \\ \tau_2 &= M_x \frac{s_1 t_3 \Omega_2 + s_3 t_1 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)}{2[s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2]} \\ \tau_3 &= M_x \frac{s_2 t_1 \Omega_1 - s_1 t_2 \Omega_2}{2[s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2]} \\ \theta &= \frac{M_x}{4G\Omega_1} \cdot \frac{\Omega_1 \left(t_2 s_1 s_3 + t_3 s_1 s_2 - t_1 s_2 s_3\right) + 2\Omega_2 s_1 s_3 t_2}{s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2} \end{aligned} \tag{9.54}$$

9.4. APLICAȚII

Problema 9.1

O bară de oțel în consolă, cu secțiunea din figura 9.10a, este supusă la torsiune liberă cu momentul M_t=3kNm. Să se calculeze tensiunea tangențială τ și rotirea specifică θ. Modulul de elasticitate transversală este $G=8\cdot10^4$MPa.

Rezolvare

În figura 9.10b s-a trasat și s-a cotat fibra medie. Se calculează suprafața mărginită de fibra medie Ω, perimetrul acesteia *s*, precum și caracteristicile geometrice I_t și W_t:

$$\Omega = 80 \cdot 50 = 4000 mm^2; \quad s = 2(80 + 50) = 260 mm$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2 t}{s}; \quad I_t = \frac{4 \cdot 4000^2 \cdot 5}{260} \approx 1230769 mm^4 \qquad (9.55)$$

$$W_t = 2\Omega t; \quad W_t = 2 \cdot 4000 \cdot 5 = 40000 mm^3$$

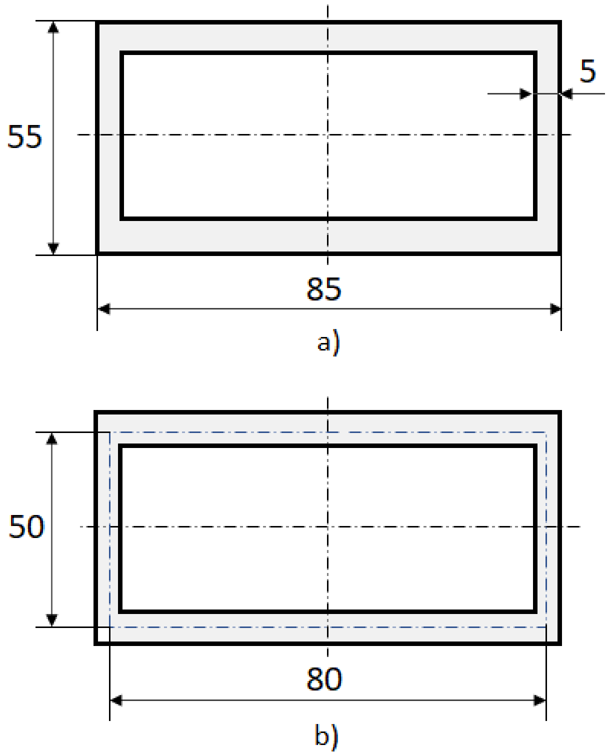


Fig. 9.10. Țeavă dreptunghiulară (a) și trasarea fibrei medii (b)

Se calculează tensiunea tangențială τ și rotirea specifică θ

$$\tau = \frac{M_x}{W_t}; \quad \tau = \frac{3 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^4} = 75 MPa$$

$$\theta = \frac{\phi}{l} = \frac{M_x}{GI_t}; \quad \theta = \frac{3 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 1230769} = 3,05 \cdot 10^{-5} rad / mm \qquad (9.56)$$

$$\theta \approx 0,00175° / mm = 1,75° / m$$

Unghiul de rotire al capătului liber al barei, la care se aplică momentul M_t, se poate calcula cunoscând lungimea barei L

$$\varphi = \theta \cdot L \tag{9.57}$$

Problema 9.2

O țeavă pătrată se execută din tablă cu grosimea *t*, prin pliere și sudare pe direcția generatoarei. Dimensiunile exterioare ale țevii sunt 10t x 10t.

O porțiune din aceasta țeavă, de lungime *L>>10t*, este încastrată la un capăt și liberă la celălalt. La capătul liber se aplică un moment de torsiune M_t. Țeava este încercată în doua variante: înainte de sudare (grosimea fantei se consideră neglijabilă) și respectiv sudată pe generatoare.

Să se determine:

- raportul momentelor de torsiune maxime (capabile) pe care le poate prelua țeava executată în cele două variante;
- raportul rotirilor maxime (la capătul liber) produse de aceste momente.

Rezolvare

1. *Țeava nesudată*

Secțiunea este simplu conexă. Considerând grosimea fantei nulă, se face descompunerea în patru dreptunghiuri de laturi b=t și h=9t, ținând cont de fibra medie (colțurile suprapuse sunt marcate cu gri în fig. 9.11).

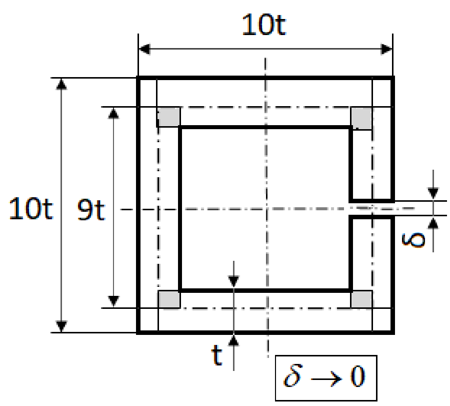


Fig. 9.11. Țeava pătrată nesudată

Se calculează caracteristicile geometrice, momentul de torsiune capabil și rotirea maximă pentru profilul simplu conex (SC):

$$\begin{aligned}
&I_t^{SC}=\frac{4}{3}9t\cdot t^3=12t^4;\quad W_t^{SC}=\frac{I_t^{SC}}{t}=12t^3\\
&\tau_a=\frac{M_{t.cap}^{SC}}{W_t^{SC}}\Rightarrow M_{t.cap}^{SC}=W_t^{SC}\cdot\tau_a\\
&M_{t.cap}^{SC}=12t^3\cdot\tau_a\\
&\varphi_{\max}^{SC}=\frac{M_{t.cap}^{SC}\cdot L}{GI_t^{SC}}
\end{aligned}\tag{9.58}$$

2. *Țeava sudată*

Pentru secțiunea dublu conexă se trasează fibra medie (fig. 9.12).

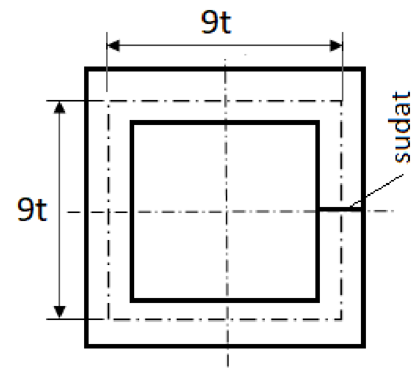


Fig. 9.12. *Țeava sudată*

Se calculează caracteristicile geometrice, momentul de torsiune capabil și rotirea maximă pentru profilul dublu conex (DC):

$$\begin{aligned}
&I_t^{DC}=\frac{4\Omega^2 t}{s}=\frac{4\left(9t\cdot 9t\right)^2 t}{4\cdot 9t}=729t^4\\
&W_t^{DC}=2\Omega t=2\cdot 81t^2\cdot t=162t^3\\
&M_{t.cap}^{DC}=162t^3\cdot\tau_a\\
&\varphi_{\max}^{DC}=\frac{M_{t.cap}^{DC}L}{GI_t^{DC}}
\end{aligned}\tag{9.59}$$

3. *Comparație între două cazuri*

Se calculează rapoartele cerute

$$\frac{M_{t.cap}^{DC}}{M_{t.cap}^{SC}} = \frac{162t^3}{12t^3} = 13,5$$
$$\frac{\varphi_{\max}^{DC}}{\varphi_{\max}^{SC}} = \frac{M_{t.cap}^{DC}L}{GI_t^{DC}} \cdot \frac{GI_t^{SC}}{M_{t.cap}^{SC}L} = \frac{M_{t.cap}^{DC}}{M_{t.cap}^{SC}} \cdot \frac{I_t^{SC}}{I_t^{DC}} = 13,5\frac{12t^4}{729t^4} = 0,22 \tag{9.60}$$

Concluzii:

1. Profilul dublu conex din acest exemplu (țeava sudată pe generatoare) poate prelua un moment de torsiune de 13,5 ori mai mare decât profilul simplu conex (țeava nesudată);
2. Sub acțiunea acestui moment rotirea capătului liber al țevii dublu conexe este 22% din cea a țevii simplu conexe.
3. *În general secțiunile dublu conexe pot prelua momente de torsiune mult mai mari și cu deformații mult mai mici decât cele simplu conexe*.
4. *Ori de câte ori este posibil se vor adopta secțiuni dublu conexe pentru barele drepte solicitate la torsiune*.

Problema 9.3

Să se dimensioneze bara cu secțiunea din figura 9.13, știind că trebuie să preia un moment de torsiune M_t=0,2kNm și τ_a=90MPa. Să se calculeze rotirea specifică, știind că G=70GPa.

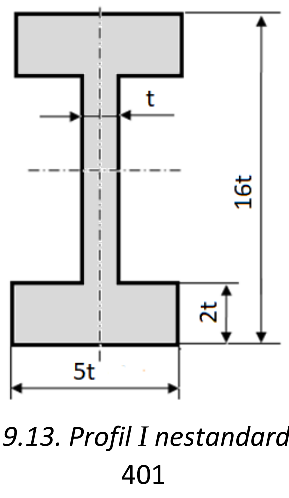


Fig. 9.13. Profil I nestandardizat

Rezolvare

Secțiunea este simplu conexă. Deoarece descompunerea pe baza fibrei medii nu este posibilă în acest caz, se va proceda la o descompune în inimă (t×12t) și doua tălpi (2t×5t). Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii

$$I_t = \frac{1}{3}\left[12t \cdot t^3 + 2 \cdot 5t \cdot (2t)^3\right] = \frac{92}{3}t^4$$
$$W_t = \frac{I_t}{b_{\max}}; \quad W_t = \frac{92}{3}t^4 \cdot \frac{1}{2t} = \frac{92}{6}t^3 \tag{9.61}$$

Din condiția de rezistență se obține

$$\tau = \frac{M_x}{W_t} \le \tau_a; \quad M_x \frac{6}{92t^3} \le \tau_a$$
$$t \ge \sqrt[3]{\frac{6M_x}{92\tau_a}}; \quad t \ge \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,2 \cdot 10^6}{92 \cdot 90}}; \quad t \ge 5,25mm; \quad t_{ad} = 6mm \tag{9.62}$$

Pentru valoarea adoptată (t=6mm) se calculează rotirea specifică

$$\theta = \frac{M_x}{GI_t}; \quad \theta = \frac{0,2 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^4} \cdot \frac{3}{92 \cdot 6^4} \approx 7,19 \cdot 10^{-5} rad / mm$$
$$\theta \approx 0,00412° / mm; \quad \theta \approx 4,12° / m \tag{9.63}$$

Problema 9.4

O bară cu secțiunea din figura 9.14a este solicitată la torsiune liberă. Știind că tensiunea admisibilă τ_a=50MPa, se cere să se determine momentul de torsiune maxim (capabil) $M_{t.cap}$ pe care îl poate prelua bara. Toți pereții au grosimea de 10mm, cu excepția peretelui despărțitor, care are grosimea de 12 mm.

Rezolvare

Se trasează fibra medie și se cotează (fig. 9.14b).

Pentru secțiunea multiplu conexă se utilizează ecuațiile (9.54). Se calculează mărimile care intervin în aceste ecuații, ținând cont de figura 9.9.

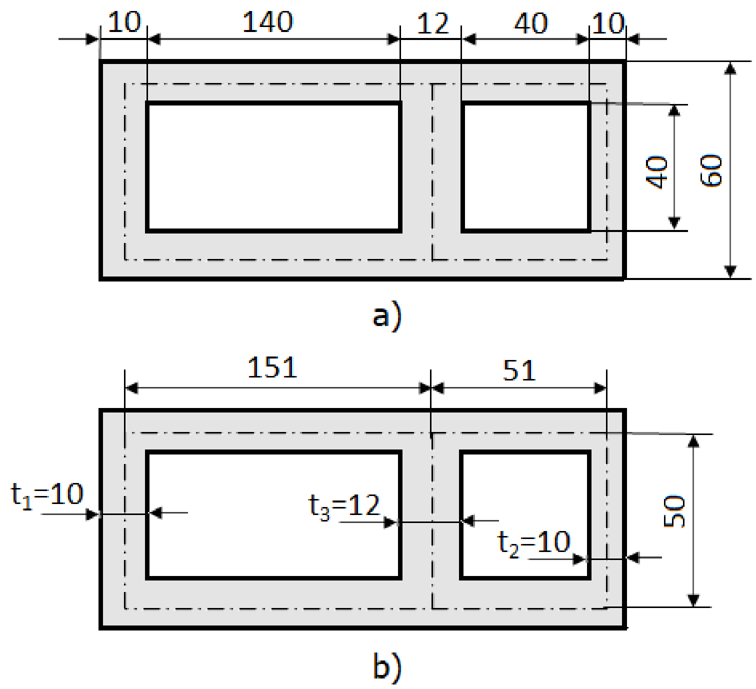


Fig. 9.14. Secțiunea transversală a barei (a) și trasarea fibrei medii (b)

$$\begin{aligned}
&s_1 = 151\cdot 2 + 50 = 352mm; \quad t_1 = 10mm; \quad \Omega_1 = 151\cdot 50 = 7550mm^2 \\
&s_2 = 51\cdot 2 + 50 = 152mm; \quad t_2 = 10mm; \quad \Omega_2 = 51\cdot 50 = 2550mm^2 \\
&s_3 = 50mm; \quad t_3 = 12mm
\end{aligned} \tag{9.64}$$

Pentru a determina momentul capabil se pune condiția ca tensiunea tangențială maximă să nu depășească tensiunea admisibilă. Deoarece toate tensiunile din ecuațiile (9.9) au același numitor, se caută tensiunea cu cel mai mare numărător. Tensiunea maximă nu poate fi τ_3, care conține o diferență la numărător. Pentru a găsi tensiunea maximă se vor studia τ_1 și τ_2 din (9.9). Deoarece $t_1=t_2$, al doilea termen de la numărătorul membrului drept al tensiunilor τ_1 și τ_2 are aceeași valoare. Rezultă că primii termeni de la numărător decid care tensiune este mai mare. Raportul acestor temeni este

$$\frac{s_2 t_3 \Omega_1}{s_1 t_3 \Omega_2} = \frac{152\cdot 7550}{352\cdot 2250} \approx 1,45 \tag{9.65}$$

Deoarece raportul (9.65) este supraunitar, rezultă că tensiunea maximă este τ_1

$$\tau_1 = M_x \frac{s_2 t_3 \Omega_1 + s_3 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)}{2[s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2]} \tag{9.66}$$

Din lipsă de spațiu se calculează separat numărătorul si numitorul membrului drept

$$\begin{aligned} & s_2 t_3 \Omega_1 + s_3 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right) = \\ & 152 \cdot 12 \cdot 7550 + 50 \cdot 10 \left(7550 + 2550\right) \approx 18,82 \cdot 10^6 \\ & s_2 t_1 t_2 \Omega_1^2 + s_1 t_2 t_3 \Omega_2^2 + s_3 t_1 t_2 \left(\Omega_1 + \Omega_2\right)^2 = \\ & 152 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7550^2 + 352 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 2550^2 + \\ & 50 \cdot 10 \cdot 10 \left(7550 + 2550\right)^2 \approx 1,65 \cdot 10^{12} \end{aligned} \tag{9.67}$$

De unde

$$\tau_1 = M_x \cdot \frac{18,82 \cdot 10^6}{2 \cdot 1,65 \cdot 10^{12}}; \quad \tau_1 = 5,7 \cdot 10^{-6} M_x \tag{9.68}$$

Condiției

$$\tau_1 = \tau_a \tag{9.69}$$

îi corespunde momentul de torsiune maxim (capabil)

$$M_{x.\max} = M_{t.cap} \tag{9.70}$$

Se determină momentul de torsiune capabil

$$\begin{aligned} & \tau_a = 5,7 \cdot 10^{-6} M_{t.cap} \Rightarrow M_{t.cap} = \frac{\tau_a}{5,7 \cdot 10^{-6}} \\ & M_{t.cap} = \frac{50}{5,7 \cdot 10^{-6}} \approx 8,772 \cdot 10^6 \, Nmm = 8,772 kNm \end{aligned} \tag{9.71}$$

Momentul de torsiune care încarcă bara nu trebuie să depășească această valoare.

BIBLIOGRAFIE

Linkuri:

1. https://www.ct.upt.ro/studenti/cursuri/ungureanu/caracteristici%20geometrice%20profile%20laminate.pdf
2. http://phelafel.technion.ac.il/~bbliron/Theory.html
3. Failure Prediction and Avoidance, *Experimental Stress Analysis Notebook*, Issue 22, Dec. 1993, Measurements Group, pp. 6-11, preluat din: https://classes.mst.edu/civeng2211/lessons/failure/theories/index.html
4. http://www.rd.tuat.ac.jp/en/activities/factors/search/20140401_68.html
5. https://stock.adobe.com/ro/images/front-view-of-blank-planet-earth-white-globe-with-grid-of-meridians-and-parallels-or-latitude-and-longitude-3d-vector-illustration/222982360

Avril J. (coord.), *Encyclopedie d'analyse des contraintes*, 2nd ed., Malakoff: Micromesures, France, 1984

ASTM E9-89A (Reapproved 2000), Standard Test Methods of Compression Testing of Metallic Materials at Room Temperature

Barber J.R., *Elasticity*, 3rd ed., Springer, 2010, ISBN 978-90-481-3808-1

Bazant Z., Zou Y., Why Did the World Trade Center Collapse?-Simple Analysis, *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 129, No. 7, July (2003), pp. 839

Bârsănescu P.D., Sandovici A., Serban A., Mohr-Coulomb criterion with circular failure envelope, extended to materials with strength-differential effect, *Materials and Design*, 148 (2018) 49–70, ISSN: 0264-1275, DOI: 10.1016/j.matdes.2018.03.043

Bârsănescu P.D., Comanici A., *von Mises* Theory Revised, *Acta Mechanica,* (2017) 228(2), 433-446, , Springer, ISSN: 0001-5970; DOI 10.1007/s00707-016-1706-2

Bârsănescu P.D., Ciobanu O., *Rezistența materialelor,* vol. 1, Ed. „Gheorghe Asachi", Iași, 2001, ISBN 973-8292-05-0

Beer F., Johnston R. Jr., DeWolf J., Mazurek D., *Mechanics of Materials*, 8th ed., Mc Graw Hill, 2020, ISBN-13: 9781260113273

Bia C., Ille V., Soare M.V., *Rezistența materialelor si teoria elasticității*, EDP, București, 1983

Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, EA, București, 1986

Chèze C., *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, 1966

Collins J., *Failure of materials in Mechanical Design, Analysis and Prevention*, 2nd ed., J. Willey and Sons, 1993, ISBN 0-471-55891-5

Comanici A.M., Bârsănescu P.D., Modification of *Mohr*'s criterion in order to consider the effect of the intermediate principal stress, *International Journal of Plasticity*, 108 (2018) 40-54 ISSN: 0749-6419, DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.04.010

Christensen R., The Theory of Materials Failure, Oxford University Press, Oxford, UK, 2013

Dieter G., Mechanical Metallurgy, McGraw Hill, NY, 1988

Dowling N.E., *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, 1999

Giet A., Géminard L., *Résistance des matériaux*, tom II, Dunod, Paris, 1968

Horbaniuc D., *Rezistența materialelor*, vol. 2, I.P. Iași, 1979

Kerguignas M., Caignaert G., *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, 1977

Massonet Ch., Cescotto S., *Mécanique des matériaux*, Ed. Eyrolles, Paris, 1980

Mirolioubov I., et. aut., *Résistance des matériaux,* ed. Mir, Moscou, 1973

Nan L., He Y., Heng L., Siliang Y., Plastic wrinkling prediction in thin-walled part forming process: A review, *Chinese Journal of Aeronautics* (2016) 29(1): 1-14

Pissarenko G., Yakovlev A., Matvéev V., *Aide-memoire de résistance de matériaux*, Ed. Mir, Moscou, 1979

Ponomariov S.D., Biderman V.L., Liharev C.K., Makușin V.M., Malinin N.N., Feodosiev V.I., Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. 1, 2, 3, E.T., Bucuresti, 1960, 1963. 1964

STAS 75-90, Dimensiuni liniare normale

STAS 564-86 Oțel laminat la cald. Oțel U

STAS 565-80 Oțel laminat la cald. Oțel I

Taylor G.I., Quinney H., The plastic distortion of metals, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, (1931), https://doi.org/10.1098/rsta.1932.0009

Timoshenko J., Gere S., Theory of elastic stability, 2nd ed., Dover Pub., 2012

Tripa M., *Rezistența materialelor*, EDP, București, 1967

Ugural A.C., Fenster S.K., *Advanced Strength of Materials and Applied Elasticity*, 3rd ed., Pretince Hall, New Jersey, 1995

Wang J., Afshan S., Schillo N. et al., Material properties and compressive local buckling response of high-strength steel square and rectangular hollow sections, *Engineering Structures*, Vol. 130, (2017) 297-315

Yu M.-H., *Unified Strength Theory and its Applications*, 2nd ed. Springer & Xi'an Jiaotong Univ. Press, Singapore, 2018

Yu M.-H., Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century, *Appl. Mech. Rev.*, (2002) 55(3), 169-218