

Rezistența materialelor 1

Sinteze de cursuri

Conf. dr.ing. Marian MAREȘ

CUPRINS

1.1_Noțiuni de bază	p. 3
1.2_Răspunsul materialelor la solicitările mecanice	p. 17
1.3_Solicitări de întindere și de comprimare aplicate barelor drepte	p. 41
1.4_Rezolvarea problemelor static nedeterminate	p. 50
1.5_Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane	p. 64
1.6_Răsucirea barelor de secțiuni transversale circulare	p. 80
1.7_Calculul convențional la forfecare	p. 102
1.8_Calculul la încovoiere pentru barele drepte	p. 115
1.9_Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte	p. 153
1.10_Probleme static nedeterminate la încovoiere	p. 164

1.1

Noțiuni de bază

Noțiuni de bază

Rezistența materialelor (denumită și *Mecanica materialelor*, sau *Mecanica mediului deformabil*) este o disciplină de cultură tehnică generală, al cărei conținut face trecerea de la disciplinele fundamentale, fizico-matematice, către cele ingineresti, caracterizate prin specializări mai înguste și adresabilitate precisă.

Pentru multe secole, după apariția și sistematizarea preocupărilor științifice ale oamenilor pentru studierea naturii, cunoștințele lor despre mediul înconjurător au fost în primul rând obiectul de studiu al fizicii; dezvoltarea tehnicii a condus apoi la apariția unor discipline specializate, desprinse direct din fizică, precum termotehnica, hidrotehnica, electrotehnica, teoria mecanismelor ș.a. Rezistența materialelor este una dintre aceste discipline tehnice, aflată în interdependență cu cele de mai sus.

Disciplina cea mai apropiată de rezistența materialelor este **mecanica teoretică**, cu care împarte multe elemente – teoretice și de calcul - cum sunt noțiunile din statică utilizate în rezolvarea problemelor (preluarea gradelor de libertate, rezeme, reacțiuni, ecuații de echilibru), sau cele privind caracteristicile de inerție ale secțiunilor plane.

Noțiuni de bază

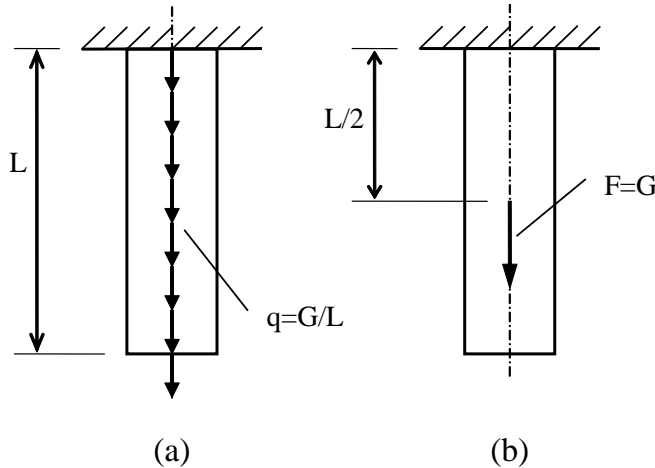
Rezistența materialelor se diferențiază totuși de mecanică prin câteva particularități:

⇒ ia în considerare solidul *deformabil* (mecanica are în vedere solidul rigid);

⇒ tratează forțele și momentele ca vectori *legați* (în mecanică erau vectori alunecători);

⇒ admite că efectul unui sistem de forțe asupra unui corp solid nu este *întotdeauna* echivalent (ca în mecanică) cu al rezultantei sistemului;

se reprezintă în două variante greutatea proprie a unei bare verticale, fixată la capătul de sus – (a) prin forțe axiale uniforme distribuite pe lungime, sau (b) ca forță concentrată (rezultanta distribuției) în centrul de greutate; în primul caz toate secțiunile transversale participă la deformare și se produc distanțări între oricare secțiuni vecine; în al doilea caz jumătate dintre secțiuni (cele de sub nivelul centrului de greutate) nu sunt solicitate, deci nu se



deplasează față de secțiunile vecine (ceea ce contrazice situația din realitate);

⇒ consideră că forțele egale și de sens contrar nu se află în mod permanent în stare de echilibru (ca în mecanica tehnică), ci numai până când se produce *ruperea corpului* pe care forțele îl încarcă.

Noțiuni de bază

Clasificarea corpurilor solide

Corpurile analizate în studiul rezistenței materialelor se grupează, după forma lor geometrică, în trei categorii (având relații de calcul specifice):

- a) Corpuri **lungi** – bare, fire, cabluri – au o dimensiune (“lungimea”) mai mare decât celelalte două, fiind caracterizate complet prin *axa* lor longitudinală (dreaptă sau curbă) și secțiunea *transversală* (adică perpendiculară pe axă), element definitoriu pentru capacitatea corpului de a rezista la solicitările mecanice. După destinația lor, barele sunt foarte diverse și pot fi solicitate la tracțiune (tije, tiranți), comprimare (coloane, stâlpi), forfecare (nituri, pene), încovoiere (osii, grinzi) sau răsucire (arbori).
- b) Corpuri **subțiri** – plăci, membrane, învelitori (vase, tuburi cu pereți subțiri, carcase, cupole) – cu două dimensiuni mari față de cea de-a treia; caracterizate prin forma și mărimea secțiunii *mediane* și prin *grosime* (măsurată perpendicular pe suprafața mediană).
- c) Corpuri **masive** – au toate cele trei dimensiuni de același ordin de mărime; pot fi bile, role, tuburi cu pereți groși, discuri de turbo-mașini, blocuri de fundații, batiuri de mașini-unelte ș.a.m.d.

Noțiuni de bază

Forțe și momente

Se numesc **forțe** vectorii care, aplicați asupra punctelor materiale, produc deplasări (*translații*) ale lor.

Spre deosebire de acestea, **momentele** (cuplurile de forțe) sunt vectori care produc rotații (*rotații*) ale părților de corp pe care acționează; aceste rotații au loc în jurul axei ce reprezintă direcția vectorului moment.

În studiul rezistenței materialelor, forțele și momentele pot fi:

a) *exterioare* (de contur)

- **sarcini** – implicate de îndeplinirea rolului funcțional al piesei;
- **masice** – distribuite în tot volumul piesei (greutatea, forțele de inerție sau electromagnetice);
- de legătură (**reacțiuni**) – rezultate din interacțiunile cu alte corpuri.

b) *interioare* (eforturi) – exprimă inter-acțiunea părților unui corp solicitat într-un mod oarecare, fiind puse în evidență prin secționarea imaginată a corpului.

Noțiuni de bază

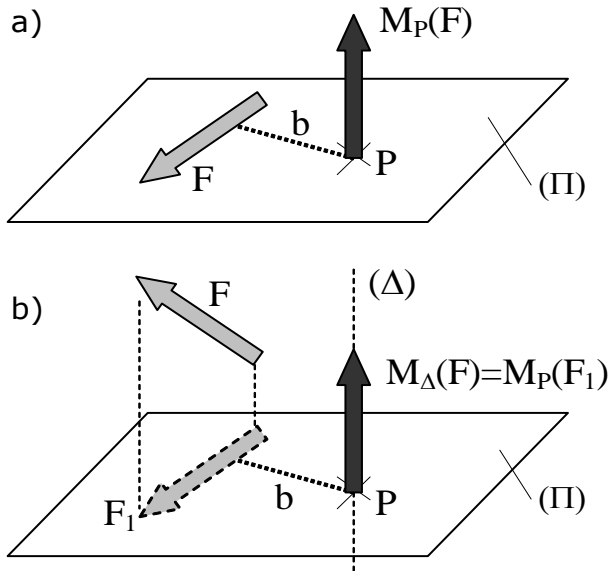
Se reamintește că orice forță F , acționând la distanța \mathbf{b} față de un punct P , produce în raport cu acel punct un *moment*; acesta este un vector, cu originea în P , orientat perpendicular pe planul format de F și P , având sensul dat de regula burghiului drept; mărimea acestui moment este

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \times \mathbf{b}$$

În același fel, o forță F produce un moment față de axa Δ cu care nu este paralelă și nici concurentă; pentru a-i calcula mărimea, se desenează un plan Π perpendicular pe axa Δ și proiecția F_1 a forței F pe plan.

Considerând intersecția axei cu planul în punctul P , momentul forței față de axă este

$$\mathbf{M}_{(\Delta)}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{F}_1)$$



Noțiuni de bază

Tipuri de încărcări (sarcini) (folosind trei dintre criteriile uzuale)

a. Modul de aplicare

⇒ sarcini **concentrate** – se consideră aplicate într-un punct (în realitate sunt forțe/momente distribuite pe suprafețe foarte mici, încât se înlocuiesc definitiv prin rezultantele lor); se măsoară în [N], respectiv [N mm];

⇒ sarcini **distribuite**

- uniform – cu intensitate constantă
- neuniform – cu intensitate variabilă - liniar, parabolic, sinusoidal etc.

Sarcinile distribuite se măsoară în unități de forță sau moment raportate la [m] sau la [m²], după cum se repartizează pe axa unei bare (dreaptă sau curbă), respectiv pe o suprafață.

b. Modul de acțiune în timp

⇒ sarcini **statice** – cu aplicare lentă, progresivă;

⇒ sarcini **dinamice** – cu variații de intensitate, viteză sau accelerație

- aplicate prin șocuri;
- cu intensități variabile – periodic sau neperiodic.

c. Destinația piesei

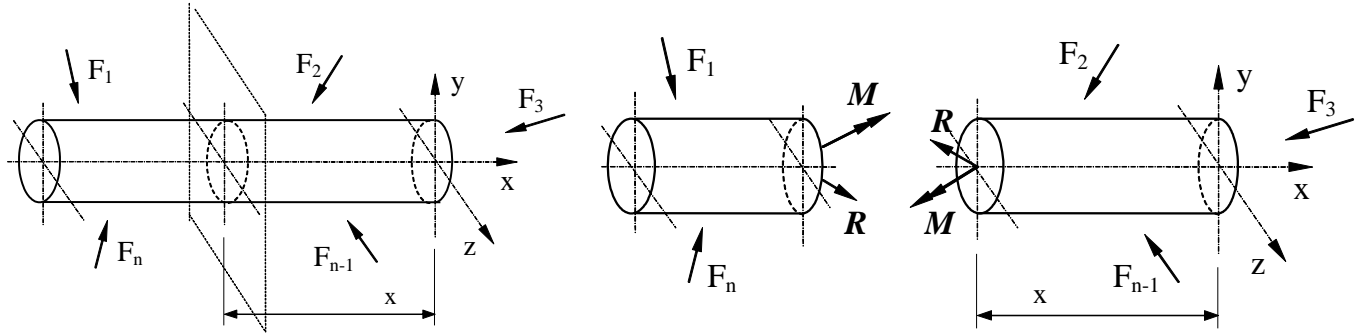
⇒ sarcini **utile** – rezultate nemijlocit din îndeplinirea rolului funcțional;

⇒ sarcini **accesorii** (de obicei nedorite) – forțe de frecare, de inerție etc.

Noțiuni de bază

Metoda secțiunilor

Este metoda prin care se studiază evoluția solicitărilor pe lungimea unui corp solid, aflat în echilibru sub încărcări oarecare. Se admite că intensitatea solicitării din orice secțiune transversală se exprimă prin forțele și momentele interioare (numite **eforturi**) ce pot fi evidențiate în acea secțiune.



Prin secționarea imagină a corpului (ales, pentru simplitate, sub formă de bară) cu un plan normal la axa longitudinală, plasat la distanța x de unul dintre capete, se obțin două părți de corp care, în principiu, nu se mai află în echilibru: rezultanta forțelor și/sau momentelor ce acționează asupra lor diferă de zero. Echilibrul fiecăreia dintre părți se poate reface prin introducerea, pe cele două fețe ale tăieturii, a perechilor simetrice R și M , reprezentând de fapt rezultantele eforturilor interioare din secțiunea respectivă a piesei.

Sursa dezechilibrului părților de corp este îndepărtarea lor după secționare, iar rezultantele exprimă efectele *interacțiunii* celor două părți, calculate prin sumarea încărcărilor situate de o parte, respectiv de cealaltă, față de secțiunea x .

Noțiuni de bază

Tipuri de eforturi

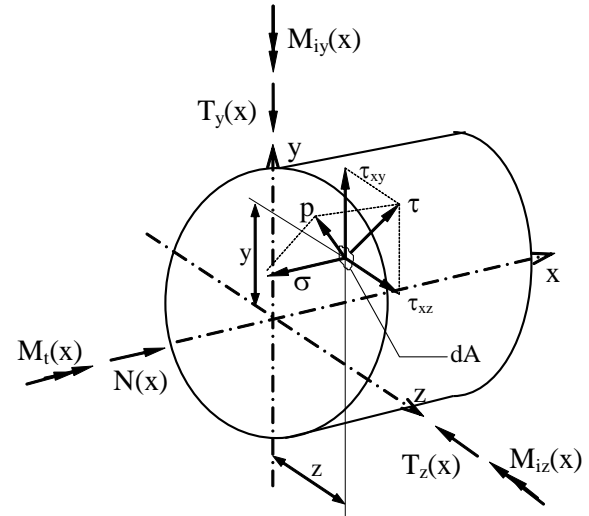
Proiecțiile rezultatelor R/M pe axele de coordonate sunt cele șase tipuri posibile de **eforturi** din secțiunile transversale ale unei bare solicitate într-un mod oarecare (în rezistența materialelor se notează cu x tangenta la axa longitudinală a barei).

Efortul *axial* $N(x)$ este sumă algebrică a proiecțiilor pe axa barei ale forțelor aflate de o parte **sau** de alta față de secțiunea x ; tinde să deplaseze secțiunile pe axă (*tracțiune-compresiune*); de obicei se consideră *pozitiv* efortul axial care *întinde* secțiunea x (adică “iese” din secțiune) și negativ efortul de sens contrar.

Eforturile *tăietoare* $T_y(x)$, $T_z(x)$ sunt sumele proiecțiilor, pe axele y și z din secțiunea x , ale forțelor situate de o parte **sau** de alta față de secțiune; tind să producă “luncări” reciproce ale fețelor secțiunii (*forfecare*); sunt *pozitive* dacă rotesc bara *în sens orar*, față de secțiunea x , în planele longitudinale care le conțin.

Efortul de tip moment $M_x(x)$, notat și $M_t(x)$ este suma algebrică a momentelor, calculate față de axa barei, ale tuturor încărcărilor acționând de o parte **sau** de cealaltă față de secțiunea x ; tinde să producă rotații reciproce ale secțiunilor barei (*răsucire*); deoarece nu există o diferență fizică între rotirea unei secțiuni în sens orar și cea în sens antiorar, nu se definește un sens considerat, prin convenție, pozitiv al momentelor de răsucire.

Momentele perpendiculare pe axa barei, notate $M_{iy}(x)$ și $M_{iz}(x)$, sunt sume algebrice ale momentelor date, față de axele y și z din secțiune, de încărcările aflate de o parte **sau** de alta a secțiunii x ; tind să producă rotații (îndoiri) ale axei barei, în acea secțiune, în jurul axei pe care acționează momentul (*încovoiere*); se consideră pozitive momentele care curbează “în sus” marginile barei față de secțiunea x , în planul *longitudinal* perpendicular pe axa de îndoire.



Noțiuni de bază

Tipuri de solicitări

Este ușor de imaginat că prezența simultană a șase tipuri de eforturi, în secțiunile pieselor uzuale, este un fenomen rar; cel mai des acestea sunt două sau trei, unul fiind predominant în calculele de rezistență. Se spune că *solicitările* aplicate corpurilor solide studiate în rezistența materialelor sunt de două mari categorii:

- *simple* – în secțiunile piesei există un singur tip de efort interior;
- *compuse* – măcar într-o secțiune apar cel puțin două proiecții nenule ale rezultatelor R și M .

Se poate discuta despre piese solicitate în mod tipic la *tracțiune* - fire, lanțuri, cabluri; – la compresiune - stâlpi, coloane; – la *forfecare* - nituri, șuruburi, suduri; – la *răsucire* - arbori de transmisie, spine de arc elicoidal; – la *încovoiere* - osii, arcuri de foi, grinzi cu sarcini transversale.

Precizări privind definirea eforturilor secționale

Pornind de la concluzia că eforturile exprimă fizic interacțiunea celor două părți de bară pe care secțiunea de calcul le separă, se înțelege că noțiunea de **efort secțional** se poate asocia cu perechea de forțe sau/și momente, paralele, egale și opuse, care trebuie să acționeze pe fiecare față a tăieturii imaginare prin secțiunea de calcul, în așa fel încât cele două fețe ale tăieturii să nu se despartă între ele după secționare.

Mai mult decât atât, din analiza tipului (sau tipurilor) de mișcare prin care cele două secțiuni imaginare tind să se separe se poate stabili felul eforturilor secționale nenule din acel punct al barei analizate: dacă tinde să se producă o translație, atunci efortul secțional este de tip forță, dirijată pe direcția respectivei translații; analog, pentru o rotație, efortul este de tip moment.

Noțiuni de bază

Noțiunea de tensiune

Pentru a exprima cât de solicitată este o piesă nu e suficientă mărimea forțelor și momentelor aplicate ei - intensitatea solicitării depinde și de masa de material ce preia solicitarea, adică de forma și dimensiunile piesei; apare necesară o mărime relativă care să evidențieze această dependență.

Considerând, pe o secțiune transversală a piesei, un element de arie dA , destul de mic pentru ca eforturile interioare să fie uniform distribuite pe suprafața lui, rezultanta lor dF va avea punctul de aplicare în centrul de greutate al ariei dA ; prin definiție, **tensiunea** din acel punct al piesei este:

$$\bar{p}_{med} = \frac{dF}{dA} \quad \text{sau} \quad \bar{p} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF}{dA}$$

Este o mărime fundamentală în rezistența materialelor, mai complexă ca forța (depinde și de orientarea elementului de arie, în raport cu direcția forței); se obțin deci valori diferite ale tensiunii pe direcții diferite, în jurul unui punct P din volumul unei piese solicitate într-un mod oarecare.

Sunt importante proiecțiile tensiunii p - pe *axa* barei – tensiunea **normală** (σ) din punctul P, respectiv pe *secțiunea* transversală – tensiunea **tangențială** (τ) din P; desigur că între aceste componente există relația:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

Tensiunea tangențială are și ea două componente, pe direcțiile axelor de coordonate din secțiune, notate τ_{xy} și τ_{xz} : primul indice arată axa perpendiculară pe secțiune, iar cel de-al doilea – axa paralelă cu respectiva componentă a tensiunii.

Noțiuni de bază

Unitatea de măsură pentru tensiuni este cea a presiunilor, adică Pascalul, $1\text{Pa}=1\text{N}/\text{m}^2$; această unitate este foarte mică pentru ingineria mecanică, încât se lucrează de obicei cu multiplul ei $1\text{MPa}=10^6\text{Pa}=1\text{N}/\text{mm}^2$.

- ◆ Operațiile cu vectorii-forțe se aplică componentelor tensiunii după înmulțirea lor cu ariile pe care se distribuie, ceea ce le transformă în mărimi de tip forță.
- ◆ Ansamblul tensiunilor dintr-un punct al unui corp solicitat într-un mod oarecare reprezintă **starea de tensiuni** din punctul respectiv.

Precizări privind noțiunea de tensiune mecanică

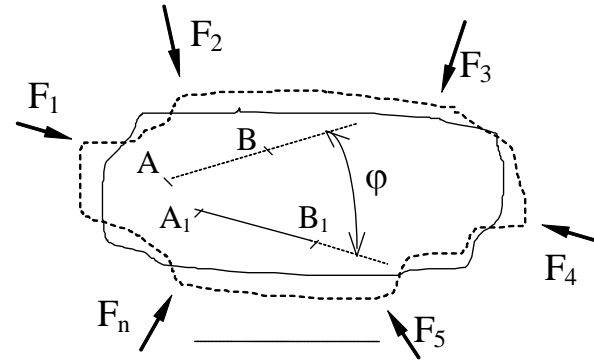
Întrucât această noțiune este importantă în diverse tipuri de calcule ingineresti, este util de observat ce au în comun relațiile de calcul (din capitolele ulterioare) prin care e stabilită mărimea tensiunilor în cazul solicitărilor simple. Ca principiu, mărimea unei tensiuni, într-o anumită secțiune a unui corp solid, se calculează *împărțind* valoarea din acel punct a **efortului secțional** care produce respectiva tensiune la o **caracteristică geometrică** a secțiunii de calcul; în mod intuitiv se observă că, pentru ca rezultatul acestei împărțiri să se exprime în MPa (adică N/mm^2), mărimea de la numitor va fi măsurată în mm^2 – dacă efortul de la numărător este de tip forță, dar în mm^3 – dacă efortul secțional este de tip moment!

Aceste observații vor fi confirmate de relațiile deduse la solicitările simple: mărimea de la numitor va fi **aria** secțiunii de calcul – pentru forfecare și solicitările axiale, respectiv un **modul de rezistență** al secțiunii – în cazul solicitărilor de răsucire și de încovoiere.

Noțiuni de bază

Deplasări și deformații

Sunt noțiuni de primă importanță, legate în mod direct de considerarea solidelor ca deformabile; pentru definirea lor este urmărită situația punctelor din volumul unui corp arbitrar, solicitat într-un mod oarecare: pe schița alăturată liniile punctate prezintă aspectul dinainte de producerea solicitării, iar liniile continue – corpul deformat de încărcările lui.



Se numesc **deplasări** schimbările poziției punctelor din corp, în urma deformării lui sub o solicitare oarecare; acestea formează două categorii:

- deplasări *liniare* – distanțele AA_1 sau BB_1 dintre pozițiile ocupate de punctele respective înainte și după producerea deformării;
- deplasări *unghiulare* (rotiri) – unghiul dintre segmentele de dreaptă AB și A_1B_1 determinate de două puncte din corp, înainte și după deformare.

Se numesc **deformații** variațiile dimensiunilor geometrice în vecinătatea unui punct al corpului, ca urmare a solicitărilor aplicate asupra lui; și acestea pot fi:

- *liniare* (alungiri sau scurtări) – modificarea distanței dintre două puncte ale corpului; exemplu

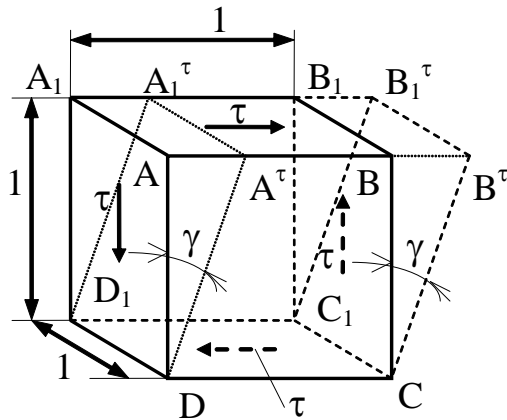
$$\Delta L = A_1B_1 - AB;$$

- *unghiulare* (luncări) – modificarea unghiului dintre două segmente din vecinătatea punctului dat.

Mărimile liniare se măsoară în unități de lungime, iar cele unghiulare – în radiani sau, mai rar, în grade.

Noțiuni de bază

Pentru a se înlesni compararea deformațiilor a două corpuri, se apelează la mărimi *relative* (adimensionale):



- *lungirea specifică* (ε) – raportul dintre deformația liniară absolută și lungimea inițială

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB}$$

- *lunecarea specifică* (γ) – măsura variației, după deformare, a unghiului inițial drept dintre două plane din corpul studiat; se consideră pozitivă dacă unghiul drept se micșorează.

Deformațiile specifice liniare (ε) și lunecările specifice (γ) reprezintă mărimi fundamentale în rezistența materialelor, prin care se evaluează tipul și nivelul deformațiilor unei structuri elastice, sub acțiunea unei anumite solicitări.

Totalitatea valorilor deformațiilor specifice din jurul unui punct dintr-un corp solicitat formează **starea de deformații** din acel punct. Măsurând, printr-o metodă oarecare, valorile deformațiilor specifice, se constată că se obțin rezultate diferite, după planul sau direcția de măsurare; din acest motiv, ele se exprimă de obicei prin *componentele* lor pe axele unui sistem de coordonate oarecare (cu originea în punctul considerat), respectiv din planele determinate de aceste axe.

1.2

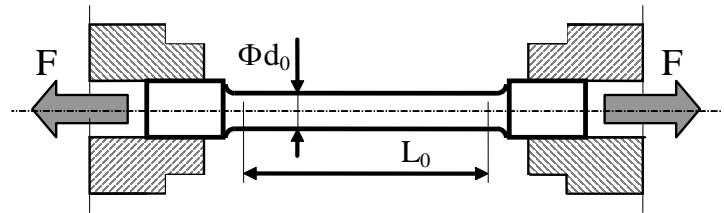
Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Încercarea la tracțiune aplicată metalelor

Relația care există, pentru un anumit material, între tensiunile σ și deformațiile specifice ϵ care le corespund, se analizează prin experimente de laborator numite *încercări mecanice*; pentru metale cea mai importantă este încercarea la tracțiune - ea se poate realiza inclusiv la temperaturi ridicate sau scăzute, dar aici se descrie testul efectuat la temperatura *ambientă*.

Se solicită o probă cilindrică din materialul studiat (numită *epruvetă*, la toate încercările mecanice) prin intermediul a două forțe egale și opuse, aplicate pe capetele îngroșate ale probei și având direcția axei longitudinale a acesteia.



Încărcarea se realizează pe o mașină pentru încercări mecanice, având acționare mecanică sau hidraulică. Deformațiile epruvetei în timpul solicitării sunt foarte mici, de ordinul a 10^{-3} mm și pot fi măsurate doar cu aparate speciale, numite *extensometre*, sau cu *trductoare rezistive* (numite și mărci tensometrice), amplasate în porțiunea mediană a probei.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Pe epruvetă se marchează o zonă “calibrată”, cu dimensiunile inițiale d_0 și L_0 ; pe parcursul încercării se măsoară forța de solicitare F (indicată pe display sau pe un cadran al mașinii), având o creștere lentă, adică îndeplinind condițiile unei încercări de tip **static**. În plus, computerul prin care este comandată mașina trasează graficul dependenței dintre forța F și lungirea epruvetei $\Delta L = L - L_0$.

Acest grafic variază ca aspect în funcție de materialul încercat, se numește *diagrama încercării la tracțiune* și *aproximează*, cu precizie mulțumitoare, evoluția dependenței dintre *tensiunile* ($\sigma = F/A$) și *deformațiile specifice* (ϵ) ale epruvetei; este remarcabil că, pentru materialele omogene, aceste mărimi sunt aproximativ uniforme în întregul volum al zonei calibrate a probei, până la un anumit moment al încercării la tracțiune.

Imaginea grafică propriu-zisă a dependenței dintre mărimile *relative* σ și ϵ este specifică fiecărei clase de materiale, încât este denumită *curbă caracteristică a materialului* (în acest caz – la tracțiune); ea oferă multe informații privind proprietățile materialului, așa cum se va arăta mai jos. În cazul unui material din categoria oțelurilor moi, pe curba caracteristică se pot deosebi mai multe zone, cărora le corespund o serie de mărimi importante pentru a încadra metalul încercat într-o anumită clasă și a-i stabili utilizările cele mai potrivite.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

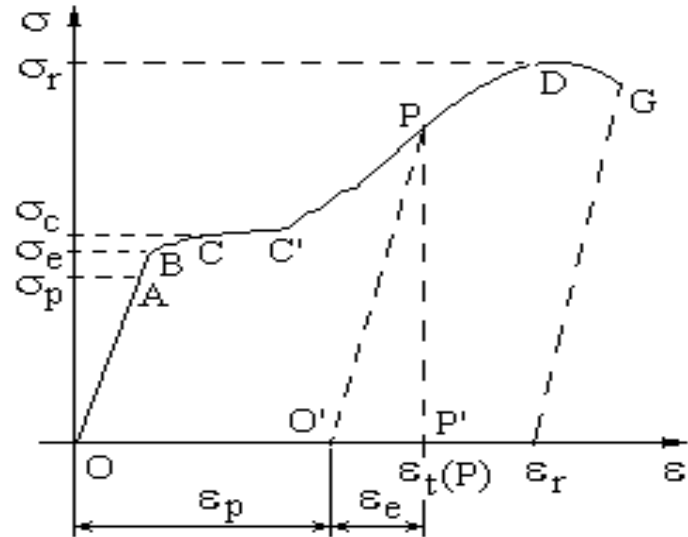
Curba caracteristică a metalelor de duritate medie

Punctul O corespunde situației inițiale, în care în epruvetă nu există tensiuni ($\sigma=0$) și nici deformații ($\varepsilon=0$). În prima porțiune cele două mărimi cresc simultan, dar viteza de creștere a lui σ este mai mare (graficul este mai apropiat de axa tensiunilor); dependența dintre cele două mărimi este liniară până în A, care corespunde *limitei de proporționalitate* a materialului (σ_p).

Ordonata punctului B, până la care materialul se comportă perfect elastic, adică după descărcare (îndepărtarea forței) epruveta își recapătă lungimea inițială L_0 , se numește *limită de elasticitate* (σ_e).

Începând din punctul C curba capătă tendința de a continua pe o direcție aproximativ paralelă cu axa absciselor - se produce creșterea deformației fără ca forța să crească în mod sensibil (materialul “curge”); începe deformarea *plastică* a materialului, iar tensiunea corespunzătoare punctului C se numește *limită de curgere* (σ_c).

Urmează o porțiune crescătoare a curbei, fără proporționalitate între cele două mărimi, care se termină în punctul de maxim D, considerat *limita de rupere* (σ_r) sau *rezistența la* (rupere prin) *tracțiune* a materialului



Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

testat. Dacă se oprește încercarea într-un punct oarecare $P \in (C'D)$ și se urmărește evoluția epruvetei pe parcursul scăderii forței către zero, se constată că descreșterea celor două mărimi nu se face pe drumul urmat la încărcare și nici pe direcția normală la axa absciselor (PP'), ci după o linie (PO') aproximativ paralelă cu zona elastică (OB) a curbei.

Aceasta arată că deformațiile înregistrate pe epruvetă nu sunt în totalitate reversibile, pentru că din deformația specifică (ε_t) existentă în starea de încărcare din punctul P dispare o cantitate (ε_e), numită *deformație elastică*, dar epruveta rămâne cu deformația ε_p – *deformație plastică* (permanentă), adică are o lungime mai mare cu ($\varepsilon_p \cdot L_0$) față de lungimea inițială. Dacă această epruvetă se montează din nou în mașina pentru încercări și se reia solicitarea, se observă o evoluție $\sigma(\varepsilon)$ mergând, cu aproximație, după segmentul ($O'P$), indicând o zonă cu deformare proporțională (elastică) a materialului, zonă de lungime mai mare decât porțiunea liniară inițială (OA). Acest fenomen, marcând o modificare favorabilă a calităților materialului, se numește *ecruisare* și este specific metalelor cu proprietăți mecanice moderate; se recomandă ca piesele făcute din astfel de metale să fie supuse unei solicitări inițiale (pre-încărcare) depășind ușor limita lor de curgere, înainte de a le fi aplicate încărcările propriu-zise pe care trebuie să le preia.

Când se ajunge cu încărcarea epruvetei în apropierea punctului D , adică la valoarea maximă a forței (F_{max}), se constată că într-o anumită porțiune a epruvetei secțiunea ei transversală se micșorează (“gâtuire”), fenomen care se accentuează apoi până când se produce ruperea; în acest timp forța aplicată se micșorează și ea, conducând la un traseu descendent (DF) al curbei caracteristice. Este remarcabil că apariția gâtuirii înseamnă pierderea caracterului *omogen* al solicitării, datorită creșterii valorilor locale ale tensiunilor și deformațiilor specifice în zona respectivă a epruvetei.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Caracteristici mecanice ale materialului

Dacă după rupere se așează cap la cap cele două bucăți de epruvetă și se măsoară lungimea finală L_u a porțiunii calibrate, se poate calcula *alungirea specifică la rupere*:

$$A_r = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 = \frac{\Delta L}{L_0} \cdot 100 \quad [\%]$$

În mod analog, notând S_0 și S_u ariile inițială și finală (calculate în funcție de diametru) ale secțiunii de rupere, se calculează *gâtuirea specifică la rupere*:

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100 \quad [\%]$$

Despre valorile limită ale tensiunii, în standardul pentru încercarea la tracțiune a metalelor (ISO 6892-1:2015) se recomandă calculul lor prin împărțirea valorilor corespunzătoare ale forței de încărcare nu la aria instantanee a secțiunii epruvetei, ci la aria inițială S_0 , astfel că limitele teoretice ale tensiunii (σ_c și σ_r) sunt înlocuite prin niște mărimi *convenționale*:

Limita de curgere $R_e = \frac{F_c}{S_0} \quad [\text{MPa}]$

Limita de rupere $R_m = \frac{F_{\max}}{S_0} \quad [\text{MPa}]$

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Legea lui Hooke

Este legea fundamentală a elasticității, enunțată prima dată de matematicianul englez Robert Hooke, într-o carte din 1678; exprimă dependența dintre tensiuni și deformațiile specifice în porțiunea de început (zona liniară OA) a curbei caracteristice de tipul descris; fiind o dependență liniară, cu pornire din originea axelor, exprimarea ei matematică este:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Modulul de elasticitate longitudinal

Este factorul de proporționalitate E (modulul lui Young), principala caracteristică privind deformabilitatea (rigiditatea) unui material: dintre două piese identice și solicitate la fel de intens (cu tensiuni egale), mai mult se deformează cea din materialul cu modul mai mic; un material este cu atât mai *rigid* cu cât are modulul E de valoare mai mare.

Deformația specifică fiind o mărime adimensională, rezultă că modulul de elasticitate are aceleași unități de măsură cu tensiunile σ , adică [N/mm²] sau [MPa]; iată valorile medii ale modulului longitudinal (în GPa) pentru câteva categorii de materiale uzuale:

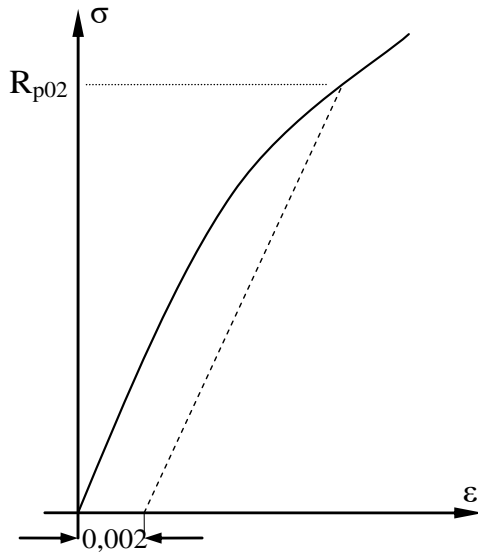
oțeluri laminate - 210; oțeluri turnate - 175; fonte - 115÷160; aluminiu - 70;
lemn – în lungul fibrelor - 9÷12 – perpendicular pe fibre - 0,4÷1

Trebuie spus că două grupe de materiale – oțelurile și lemnul – respectă practic legea lui Hooke, celelalte având diagrame $\sigma(\varepsilon)$ curbilini pe toată lungimea, de obicei fără discontinuități până la rupere.

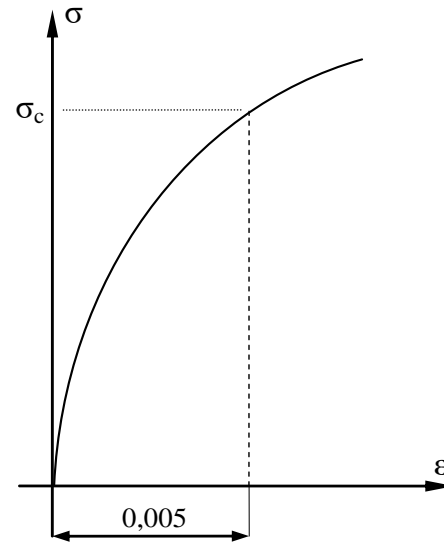
Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Particularități ale materialelor care nu au limită de curgere

Pentru materialele a căror curbă caracteristică la tracțiune nu prezintă palier de curgere este dificilă definirea limitei de sus a domeniului elastic de deformabilitate; în mod obișnuit sunt evidențiate două categorii de astfel de metale, după forma zonei inițiale a curbei lor caracteristice:



a.



b.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

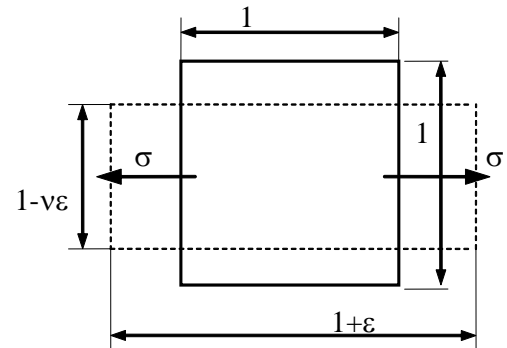
- cu zonă elastică **liniară** - limita de elasticitate (notată $R_{p0.2}$) se stabilește (*convențional*) ducând o paralelă la zona liniară, în punctul de pe axa deformațiilor care corespunde unei lungiri specifice $\varepsilon = 0,002$ (o alungire de 0,2% din L_0) a epruvetei
- cu zonă elastică **neliniară** - metoda de mai sus nu se poate aplica; practica uzuală este ca limita convențională de curgere (σ_c) să fie valoarea tensiunii la care lungirea specifică a epruvetei atinge un anumit prag, de obicei $\varepsilon = 0,005$ (o alungire de 0,5% din lungimea inițială L_0)

Fenomenul de contracție transversală

Alungirea barelor supuse la tracțiune duce la scăderea dimensiunilor transversale, proporțional cu alungirea specifică; mărimea acestei deformații perpendiculare pe axa barei (contracție transversală) are relația:

$$\varepsilon_{tr} = -\nu \cdot \varepsilon$$

Factorul de proporționalitate ν este *coeficientul lui Poisson*, o altă constantă elastică a materialelor; în calcule obișnuite se ia, pentru metale, valoarea $\nu \cong 0,3$; valoarea precisă se obține experimental, măsurând deformațiile specifice de pe cele două direcții, pe suprafața epruvetei solicitate la tracțiune.



Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

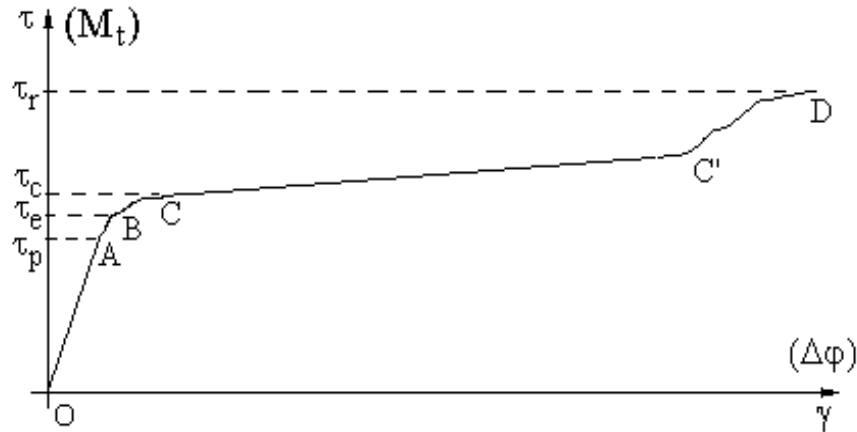
Despre încercarea la răsucire aplicată metalelor

Curba caracteristică la *răsucire* reprezintă evoluția dependenței dintre *tensiunile* aplicate (τ) și *lunecările specifice* (γ) produse în epruvetă și este asemănătoare – pentru oțelurile de duritate medie – curbei de tracțiune, dar având *zona de curgere* mult mai întinsă.

Partea rectilinie inițială (OA) a curbei are ecuația

$$\tau = G \cdot \gamma$$

care este *legea lui Hooke* pentru solicitarea de răsucire, constanta G fiind *modulul de elasticitate transversal* al materialului.



Curba caracteristică la răsucire pentru metalele tenace.

Răspunsul materialelor la sollicitările mecanice

Constante de elasticitate ale materialelor

Pe baza noțiunilor prezentate anterior, se poate constata că proprietățile materialelor considerate *omogene* și *izotrope*, în domeniul deformării lor de tip *elastic* (reversibil), sunt caracterizate prin **trei constante de elasticitate**: modulul *longitudinal* **E**, cel *transversal* **G**, respectiv *factorul de contracție transversală* **v**; în cadrul teoriei elasticității se poate demonstra că între valorile acestor constante există relația

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

ceea ce arată că numai două dintre ele sunt independente (dacă se cunosc valorile a două dintre constante, pentru un anumit material, valoarea celei rămase poate fi stabilită din această relație).

Observație: Pentru materialele *neomogene* și *anizotrope* (care au proprietăți diferite în direcții diferite din volumul lor), cum sunt în mod tipic materialele *compozite*, numărul constantelor elastice crește, proporțional cu *gradul de anizotropie* a proprietăților, iar relațiile dintre aceste constante cresc și ele în complexitate.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Posibilități de a influența proprietățile materialelor

Este posibil să fie *modificate*, în anumite limite, aspectul curbelor caracteristice și valorile caracteristicilor mecanice ale materialelor, făcând modificări potrivite în privința a două categorii de factori, caracterizați astfel:

a) factori cu influență **aparentă**

- *dimensiunile epruvetelor* – pentru sârmele subțiri se obțin, la metale, rezistențe la rupere mai mari decât în cazul epruvetelor normale;
- *viteza de aplicare a încărcării* – cu cât forța se aplică mai lent, cu atât rezistența la rupere scade, iar alungirea crește;

b) factori cu influență **reală**

- *temperatura de lucru* – pentru oțeluri, rezistența mecanică crește la temperaturi scăzute, iar deformabilitatea scade, adică se constată *fragilizarea* materialului; la temperaturi ridicate – cresc alungirea și gătuirea la rupere, dar scad limita de rupere și modulul de elasticitate;

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

- *tratamentele termice* – operații tehnologice prin care se induce în materialul unor piese (metalice) modificări de microstructură, strict controlate, urmărind optimizarea unor proprietăți ale materialului;
- *timpul de funcționare* a pieselor – pentru piesele menținute sub solicitare un timp lung, se produce creșterea lentă a deformațiilor (fenomenul de *fluaj*), respectiv micșorarea (*relaxarea*) tensiunilor din material;
- *ecruisarea* – creșterea unor caracteristici de rezistență în urma unei încărcări mecanice moderate, aplicate înaintea solicitării propriu-zise.

Este interesant că valorile caracteristicilor de rezistență și de deformabilitate ale materialelor metalice sunt influențate sensibil de eventuale impurități structurale, sau de diverse tratamente termice sau mecanice pe care materialul le-a avut de suportat; în schimb, valoarea modulului de elasticitate nu este afectată de astfel de factori! Pe această bază se admite, de exemplu, că pentru majoritatea categoriilor de oțeluri, indiferent de prezența în structura lor a elementelor de aliere, modulul E are aproximativ aceeași valoare (210GPa).

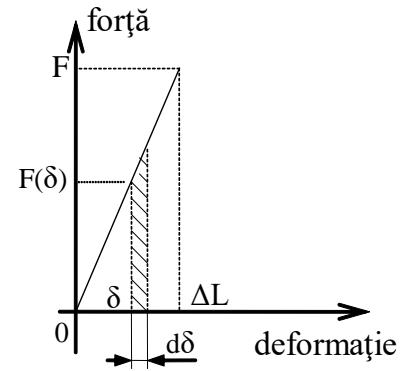
Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Energia potențială de deformare elastică

Pe măsură ce se produc deformări ale unei bare, sub încărcările ei, consumul de lucru mecanic duce la acumularea în bară a unei energii potențiale de deformare; această energie se eliberează la descărcare (*reversibilitatea* deformațiilor), dacă solicitarea nu trece de limita de elasticitate a materialului barei.

Dacă în urma încărcării și descărcării complete a unui corp solid, într-un proces *reversibil* de deformare mecanică, variația energiei potențiale a corpului este nulă, atunci sistemul format din corp și încărcările aplicate asupra lui se numește *conservativ* (nu implică “pierderi” de energie).

Se imaginează o bară cilindrică solicitată la tracțiune prin forța axială crescătoare $F(\delta)$, care lungește bara cu cantitatea *totală* ΔL ; lucrul mecanic efectuat de forța exterioară când se deplasează pe o distanță elementară $d\delta$ se va numi *lucru mecanic elementar*, calculat din relația: $dL = F(\delta) \cdot d\delta$ încât lucrul mecanic *total* se obține prin integrare:



$$L = \int_{\Delta L} dL = \int_0^{\Delta L} F(\delta) \cdot d\delta$$

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Diagrama figurată arată că integrala se interpretează geometric ca aria suprafeței aflate între *graficul* dependenței $\mathbf{F}-\delta$ și *axa* absciselor. Fiind vorba despre domeniul *elastic* al deformabilității materialului barei, în care dependența dintre cele două mărimi este *liniară*, lucrul mecanic de deformare va fi *aria triunghiului* de sub grafic.

Rezultă că lucrul mecanic necesar pentru deformarea barei în modul descris va fi:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{L}}{2}$$

O discuție similară se face pentru solicitarea cu un *moment* concentrat crescător, de valoare maximă \mathbf{M} , căreia îi corespunde deformația *unghiulară* maximă $\Delta\varphi$ a barei, în secțiunea unde acționează momentul \mathbf{M} ; *lucrul mecanic de deformare* va fi:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{M} \cdot \Delta\varphi}{2}$$

În cazul cel mai general, în care atât *sarcinile* exterioare cât și *deplasările* și *rotirile* sunt date (ca în expresia de mai jos) prin proiecțiile lor pe axele unui sistem tri-axial de coordonate, pe

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

baza ipotezei privind *proporționalitatea* între sarcini și deformații (de unde derivă principiul *suprapunerii efectelor*) efectele solicitărilor *nu depind de ordinea aplicării* lor, iar expresia globală a lucrului mecanic exterior poate fi scrisă astfel:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_i (P_{ix} u_i + P_{iy} v_i + P_{iz} w_i) + \frac{1}{2} \sum_j (M_{jx} \varphi_{jx} + M_{jy} \varphi_{jy} + M_{jz} \varphi_{jz})$$

Pe de altă parte, pentru un corp elastic aflat în repaus *lucrul mecanic* al sarcinilor exterioare ce acționează asupra lui (împreună cu care formează un sistem *conservativ*) este egal ca mărime cu *energia potențială de deformare* acumulată în corp:

$$L_e = U$$

Cele două expresii matematice de mai sus sunt cunoscute, în rezistența materialelor și în teoria elasticității, drept *teoremele lui Clapeyron*.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Proprietăți ale materialelor observabile pe curba lor caracteristică la tracțiune

a) *Tenacitatea sau fragilitatea*

Materialele care pot suporta tensiuni situate *peste limita lor de curgere* (așa cum sunt oțelurile *de duritate medie*, a căror curbă caracteristică a fost descrisă anterior) se numesc **tenace**; opuse lor sunt materialele **fragile**, care nu prezintă gâtuire a epruvetei, nici zonă de curgere pe curba caracteristică, iar deformațiile lor până la rupere sunt foarte mici. Ca regulă generală se spune despre un material că este **fragil** atunci când alungirea lui la rupere nu depășește valoarea de 5% din lungimea inițială a epruvetei (adică are lungirea specifică de cel mult $\varepsilon = 0,05$).

b) *Posibilitatea de producere a **ecruisării***

Indicată de prezența zonei ascendente de pe curbă, dincolo de limita de curgere, este un fenomen specific metalelor *tenace*; larga lor utilizare în ingineria mecanică și în construcții este cauzată tocmai de capacitatea *unică* a acestor materiale de a suporta, în domeniul de plasticitate, încărcări mecanice ce pot fi chiar crescătoare.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

c) *Elasticitatea sau rigiditatea*

După cum rezultă din expresia de mai sus a legii lui Hooke, modulul de elasticitate poate fi *aproximat* prin **panta** (*tangenta* unghiului de înclinare) de pe porțiunea de început de pe curba caracteristică de la solicitarea respectivă, deci un material va fi cu atât mai *rigid* cu cât zona inițială liniară de pe curbă este mai *abruptă*.

d) *Capacitatea de a acumula energie potențială de deformare*

Această cantitate de energie, egală cu lucrul mecanic consumat pentru deformarea unei epruvete, are o mărime proporțională cu **aria** domeniului cuprins între curba caracteristică și axa absciselor, fiind cu atât mai mare cu cât curba caracteristică este mai întinsă. Se poate spune deci că o altă caracteristică *definitorie* pentru materialele *tenace* este capacitatea lor de a absorbi o cantitate mare de energie înainte de ruperea prin tracțiune.

e) *Plasticitatea*

Este proprietatea unor materiale de a fi deformate plastic, adică *nereversibil*, capacitate cu atât mai pronunțată cu cât partea din curba caracteristică aflată **după** zona de

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

curgere este mai întinsă. În acest sens se vorbește despre **ductilitate** – cuantificarea nivelului de deformare plastică pe care un material o suportă înainte de a ceda sub acțiunea unei anumite solicitări mecanice.

Deformabilitatea dincolo de zona elastică nu este în mod special elocventă pentru materialele din care se fabrică piese de mașini (care trebuie să fie solicitate *sub limita de curgere* a materialului), dar este importantă în cazul *prelucrărilor* prin deformări plastice. Acestea se pot realiza “la rece”, deci la temperatura ambiantă, pentru materialele cu deformabilitate mare, sau “la cald”, pentru alte materiale.

Se poate înțelege că încercările mecanice aplicate materialelor furnizează informații detaliate și precise privind categoria în care trebuie să fie încadrat materialul testat și valorile unor proprietăți ale sale (numite *caracteristici mecanice* sau *elastice*); pornind de la aceste informații se pot face *calcul de rezistență* (necesare în activitatea inginerescă), se poate stabili dacă materialul este *utilizabil* într-o anumită aplicație, sau se poate *prognoza* modul în care o piesă sau o structură confecționată din acel material va răspunde unei anumite solicitări.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Ipoteze de bază folosite în rezistența materialelor

La modelarea solicitărilor mecanice se folosesc ipoteze simplificatoare asupra structurii și comportării materialelor, cele mai importante fiind următoarele:

◇ *Ipoteza mediului continuu* – orice material este un mediu fără discontinuități, omogen, ocupând întregul spațiu reprezentat de volumul său; este apropiată de realitate pentru materialele amorse, dar aproximativă pentru cele cristaline.

◇ *Ipoteza izotropiei* – încercări efectuate pe orice direcție din material conduc la aceleași constante elastice (E , G , ν), proprietăți mecanice, electrice ș.a.m.d.

◇ *Ipoteza elasticității perfecte* – apropiată de realitate, materialele fiind solicitate de obicei sub limita de elasticitate, încât deformațiile lor sunt reversibile.

◇ *Ipoteza deformațiilor mici* (față de dimensiunile corpurilor) – arată că ecuațiile de echilibru se pot scrie la fel, pentru corpul deformat și nedeformat, deoarece direcțiile forțelor și distanțele dintre ele nu se modifică în urma deformării; în expresiile matematice care includ valori ale deformațiilor, termenii ce conțin puteri ale acestor valori pot fi neglijați (ca “infiniți mici de ordin superior”).

◇ *Ipoteza relației liniare între eforturi și deformații* – conduce la principiul “suprapunerii (independenței) efectelor” încărcărilor, care permite simplificarea calculelor și poate fi

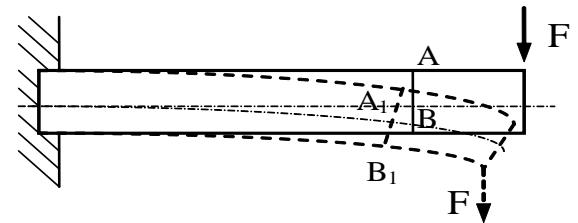
Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

aplicat în toate cazurile în care există o relație liniară între două mărimi fizice (pentru materialele liniar-elastice, acestea există între forțe și deplasări, între momente și rotații, dar și între tensiuni și deformații specifice); este utilă și pentru extinderea aplicabilității relațiilor de calcul deduse pentru materiale elastice, în cazul materialelor care nu respectă legea lui Hooke.

◇ *Principiul lui Saint-Venant* – la distanță suficientă de locul de aplicare, efectele a două forțe de aceeași intensitate sunt aceleași, chiar dacă ele sunt aplicate în mod diferit (concentrat sau distribuit).

◇ *Ipoteza lui Bernoulli* – o secțiune plană și normală la axa unei bare, înainte de deformarea ei printr-o solicitare, rămâne plană și perpendiculară pe axă și după deformare; ipoteza se respectă riguros la tracțiune, dar și la răsucirea barelor de secțiune circulară; ea aduce simplificări în analiza distribuției tensiunilor pe secțiunile barelor, mai ales la încovoiere, față de calculele din teoria riguroasă a elasticității.

◇ *Ipoteza stării naturale* – pentru un corp, o rezemare și un sistem de sarcini date, starea de tensiuni și deformații este unică (adică se neglijează eventualele tensiuni *remanente* din materialul piesei).



Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Criterii de calcul

Rezolvarea problemelor de rezistența materialelor se face diferit, după *criteriul* folosit în analiza comportării sub solicitare a piesei analizate; aici se prezintă cele **trei** criterii de bază folosite în aceste analize.

A. Criteriul de rezistență - Se admite că o piesă e realizată corect dacă *tensiunile efective* din ea nu depășesc o *valoare limită* numită **rezistență admisibilă** (notată σ_a , respectiv τ_a) stabilită convențional, ținând seama de particularitățile solicitării și de caracteristicile mecanice ale materialului ei; relația de calcul a criteriului se scrie:

$$\sigma_{ef}(\mathbf{x}) \leq \sigma_a \quad (*)$$

Notăția σ este utilizată în sens generic și poate fi înlocuită prin τ – pentru solicitările caracterizate prin predominanța tensiunilor tangențiale.

Valoarea rezistenței admisibile a unui material este specifică fiecărui tip de solicitare și se definește în raport cu o *stare limită* de pe curba lui caracteristică la solicitarea respectivă; acea stare limită e considerată periculoasă pentru material și nu trebuie atinsă în funcționarea piesei calculate; se adoptă un *coeficient de siguranță* c , mereu *supraunitar*, proporțional cu distanța care se impune a fi păstrată față de starea limită.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

Coeficienții de siguranță uzuali pentru piesele de mașini au (în principiu) valori cuprinse între 1,3 și 4; valoarea potrivită unui caz anume se alege după tipul de solicitare, domeniul de utilizare și importanța piesei în ansamblul din care face parte.

Definirea rezistențelor admisibile depinde de felul solicitărilor:

⇒ pentru solicitările **statice**, se definesc în raport cu

* *limita de curgere*, pentru materialele **tenace**

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}$$

* *limita de rupere*, pentru materialele **fragile**

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c}$$

Calcululele bazate pe *criteriul de rezistență* pot avea în vedere trei aspecte distincte:

⇒ **dimensionarea** piesei – calculul dimensiunilor minime pentru care piesa preia în mod corect încărcările pe care trebuie să le suporte;

⇒ **verificarea** piesei – confirmarea alegerii corecte a dimensiunilor ei, care trebuie să conducă, în toate secțiunile, la îndeplinirea condiției (2.9);

⇒ calculul încărcării maxime admisibile a piesei (**forța capabilă**) – pentru ca tensiunile să se mențină în limitele permise.

Răspunsul materialelor la solicitările mecanice

B. Criteriul de rigiditate – O piesă este corect realizată dacă valorile maxime ale deformațiilor sale ($\delta_{\text{ef max}}$), sub acțiunea încărcărilor pe care le preia, nu depășesc valoarea limită admisibilă δ_a corespunzând funcționării ei stabile și reversibile.

Exprimarea matematică a criteriului este:

$$\delta_{\text{ef max}}(\mathbf{x}) \leq \delta_a \quad (**)$$

C. Criteriul de stabilitate – Exprimă necesitatea ca stabilitatea elastică a piesei calculate să se mențină pe parcursul preluării încărcărilor ei; se concretizează în condiția ca valorile efective ale forțelor, respectiv ale tensiunilor din piesă să se afle la distanță de anumite valori-limită, numite *critice* și notate F_{cr} , respectiv σ_{cr} .

Folosind un coeficient de siguranță specific aplicației concrete, relațiile de calcul ale criteriului se scriu:

$$F_{\text{ef max}} = \frac{F_{\text{cr}}}{c} \quad \text{sau} \quad \sigma_{\text{ef max}}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{c} \quad (***)$$

1.3

**Solicitări de întindere și de
comprimare aplicate barelor
drepte**

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Principalele elemente de calcul

Numite și *solicitări axiale*, întinderea (tracțiunea) și comprimarea sunt similare între ele și se produc în barele încărcate cu forțe dirijate pe axa lor longitudinală; efectul produs în bare este deplasarea (apropierea sau îndepărtarea) reciprocă a secțiunilor transversale; se spune că barele capătă *alungiri*, respectiv *scurtări*.

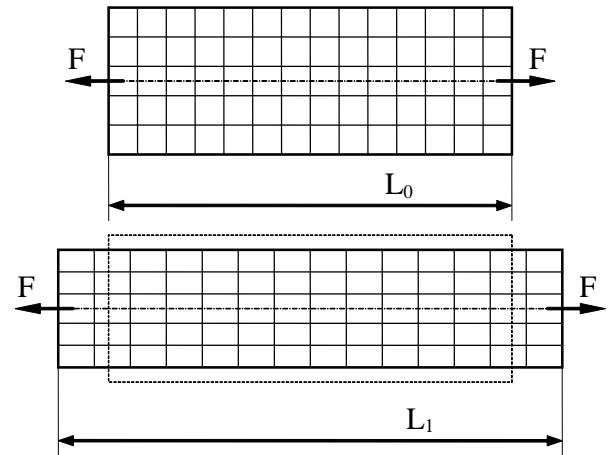
Tensiuni și deformații specifice

Pe o bară prismatică se trasează linii longitudinale și transversale, ochiurile rețelei fiind pătrate; aplicând la capetele barei forțe egale și contrare și analizând forma după solicitare se observă că:

⇒ Bara se alungește cu $\Delta L = L_1 - L_0$

⇒ Apare o contracție transversală, iar pătratele rețelei devin dreptunghiuri, alungite pe direcția solicitării, adică în bară se produc numai tensiuni de tip normal σ și deformații specifice liniare ϵ (lungiri specifice).

⇒ Secțiunile care inițial erau plane și perpendiculare pe axa barei își păstrează aceste caracteristici după producerea solicitării, chiar dacă se deplasează de-a lungul axei, adică este respectată la deformare ipoteza lui Bernoulli, discutată anterior.



Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Se poate spune că, măcar în domeniul deformațiilor elastice și proporționale cu forța aplicată, deformarea este *uniformă* în întregul volum de material, pentru o porțiune de secțiune constantă și cu încărcare constantă pe lungimea ei L , de pe o bară oarecare solicitată axial:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \text{ct.} \quad (\forall) \mathbf{x} \in (0, L)$$

Având în vedere presupunerea făcută, precum că nu se depășește, prin solicitare, limita de proporționalitate a materialului, înseamnă că este respectată legea lui Hooke, adică se poate scrie că:

$$\sigma(\mathbf{x}) = E \cdot \varepsilon(\mathbf{x}) = \text{ct.} \quad (\forall) \mathbf{x} \in (0, L)$$

Prin urmare, solicitarea de tracțiune (respectiv de comprimare) produce, într-o astfel de bară (și în domeniul de elasticitate al materialului ei), o distribuție *uniformă* a tensiunilor și deformațiilor specifice, adică o *stare omogenă* de tensiuni și de deformații. Este *singura* solicitare simplă care prezintă această caracteristică, ceea ce explică importanța acordată încercării la tracțiune a materialelor, precum și multitudinea de concluzii rezultate din efectuarea ei.

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Calculul bazat pe criteriul de rezistență

Dacă se imaginează un element din volumul barei, mărginit de două secțiuni transversale vecine, bara fiind solicitată la tracțiune, se poate admite că pe una dintre secțiuni acționează *efortul axial* $N(x)$, echilibrat pe cealaltă secțiune transversală de totalitatea *tensiunilor* $\sigma(x)$, acționând în toate punctele secțiunii respective. Ținând seama că tensiunile $\sigma(x)$ se distribuie uniform pe suprafața $A(x)$ a oricărei secțiuni a barei, se poate scrie următorul șir de egalități:

$$N(x) = \int_A \sigma(x) \, dA = \sigma(x) \int_A dA = \sigma(x) \cdot A(x)$$

Se ajunge astfel la relația folosită pentru calculul *tensiunilor efective* din secțiunile barei:

$$\sigma_{\text{ef}}(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad [\text{MPa}]$$

De aici se obține *condiția de rezistență* pentru bara studiată:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) \leq \sigma_a \quad (*)$$

σ_a fiind, așa cum s-a arătat anterior, *rezistența admisibilă* la tracțiune a materialului sau, dacă materialul rezistă diferit la tracțiune și compresiune, *rezistența admisibilă* pentru solicitarea din secțiunea periculoasă a barei.

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Condiția de mai sus se va scrie în secțiunea solicitată cel mai puternic (aceea în care tensiunea are valoarea maximă) – numită și *secțiune periculoasă* (sau periclitată) a barei și care este stabilită din *diagrama* (variației) *tensiunilor axiale* $\sigma(x)$, pe lungimea barei considerate.

Așa cum de asemenea s-a mai arătat, în ingineria mecanică calculele de rezistență se pot face urmărind trei aspecte:

a) **Verificarea** proiectării corecte a piesei, adică respectarea inegalității (*); dacă sensul inegalității nu se respectă, se mărește treptat aria efectivă a secțiunii de calcul, până la obținerea rezultatului dorit.

b) Aflarea *forței maxime* suportabile de bara studiată, numită **forță capabilă**:

$$N_{\text{cap}} = A_{\text{ef}}(x) \cdot \sigma_a \geq N_{\text{ef}}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

c) **Dimensionarea** piesei, adică stabilirea dimensiunilor *minime* necesare ale secțiunilor transversale:

$$A_{\text{nec}} = \frac{N(x)}{\sigma_a} \leq A_{\text{ef}}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Calculul bazate pe criteriul de rigiditate

Pentru calculul deformațiilor și deplasărilor în barele solicitate axial, pe baza legii lui Hooke și a definițiilor (anterioare ale) tensiunilor σ și deformațiilor specifice ϵ , se poate scrie că:

$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} \Leftrightarrow \frac{\delta(x)}{x} = \frac{1}{E} \frac{N(x)}{A(x)} \Rightarrow \delta(x) = \frac{N(x) \cdot x}{A(x) \cdot E}$$

Regulă de calcul

Deplasarea unei secțiuni arbitrare x este determinată numai de deformarea părții de bară situată între acea secțiune și capătul fixat al barei (sau unul dintre capete, dacă ambele sunt fixate); ca urmare, deplasarea se calculează ca *sumă algebrică a deformațiilor* regiunilor delimitate pe respectiva porțiune de bară.

Consecințe

1. Dacă pe un tronson de bară sunt constante mărimile $N(x)=N$ și $A(x)=A$, atunci deformația lui totală, adică deplasarea reciprocă a capetelor tronsonului se scrie:

$$\Delta l = \frac{N \cdot L}{A \cdot E} \quad [\text{mm}]$$

2. Dacă pe o regiune a barei se produc variații (după funcții anumite, de variabilă x) ale celor două mărimi, atunci deplasarea secțiunii arbitrare de pe acea regiune, în raport cu originea considerată a lui x , se calculează din relația următoare:

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{N(x) dx}{A(x) \cdot E}$$

3. Cum rezultă din această integrală, dacă aria $A(x)$ este constantă pe porțiuni ale barei (adică variază în trepte pe lungimea ei), atunci *gradul funcției deplasărilor $\delta(x)$ este cu o unitate mai mare ca al funcției $N(x)$* ; aceasta ușurează studiul și trasarea *diagramei deplasărilor $\delta(x)$* , în problemele în care se impune acest lucru.

4. Dacă tema de proiectare precizează valori limită (*admisibile*) ale deformațiilor absolute (Δl) sau relative (ε) ale barei, atunci se fac calcule bazate pe *criteriul de rigiditate* și care pot fi:

a) de verificare
$$\Delta l_{ef} = \frac{N \cdot L}{A \cdot E} \leq \Delta l_a \text{ [mm]} \quad \text{sau} \quad \varepsilon_{ef \max}(x) = \frac{\sigma_{ef \max}(x)}{E} \leq \varepsilon_a \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{m}} \right]$$

b) de forță capabilă
$$N_{ef}(x) \leq N_{cap} = \frac{A \cdot E \cdot \Delta l_a}{L} \quad \text{sau} \quad N_{ef}(x) \leq N_{cap} = A \cdot E \cdot \varepsilon_a$$

c) de dimensionare
$$A_{ef}(x) \geq A_{nec} = \frac{N_{ef}(x) \cdot L}{E \cdot \Delta l_a} \quad \text{sau} \quad A_{ef}(x) \geq A_{nec} = \frac{N_{ef}(x)}{E \cdot \varepsilon_a}$$

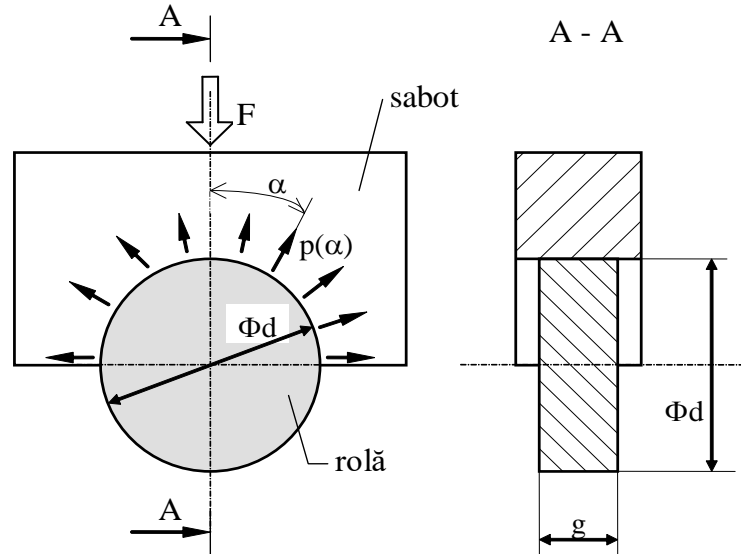
5. Produsul ($E \cdot A$) este *rigiditatea axială* (modulul de rigiditate) $a(l)$ barei studiate.

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Calculul la strivire

Atunci când se aplică o comprimare pe suprafața de contact dintre două corpuri, trebuie să se evite distrugerea celor două suprafețe prin fenomenul de *strivire*. În această situație calculul de rezistență impune limitarea presiunii efective de contact, valoarea limită fiind *presiunea admisibilă* a celui mai puțin rezistent dintre cele două materiale, după relația:

$$P_{\text{ef str}} \leq P_{\text{astr}}$$



Fenomenul se produce, în mod tipic, în cazul tablelor îmbinate prin nituri sau șuruburi, iar un caz special este contactul, pe suprafețe *semi-cilindrice*, dintre table și aceste elemente de îmbinare; un exemplu similar este contactul rolă-sabot, unde echilibrarea forței active F se realizează prin forțele distribuite uniform $p(\alpha) = p_{\text{ef str}} = \text{ct.}$

Suprafața de contact, de formă semi-cilindrică, are mărimea $A_{\text{ef}} = \pi \frac{d}{2} g$

Solicitări de întindere și comprimare aplicate barelor drepte

Considerând forțele distribuite dirijate *normal* la suprafața de contact, adică *radial*, echilibrul forțelor pe verticală se scrie:

$$F = \int_A p(\alpha) \cdot \cos \alpha \, dA$$

în care factorul $p(\alpha)$ este constant și se extrage în afara integralei; notând ds elementul de arc de pe conturul secțiunii transversale a rolei, aria elementară din integrala de mai sus va fi:

$$dA = g \cdot ds = g \cdot r \, d\alpha = g \cdot (d/2) \, d\alpha$$

iar aria de strivire “de calcul” se determină din relația de sus, astfel:

$$A_{\text{calcul}} = \frac{F}{P_{\text{ef str}}} = \int_A \cos \alpha \, dA = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha) g \frac{d}{2} \, d\alpha = g \cdot d \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha$$

Cum integrala rămasă de calculat are valoarea 1, rezultă aria $A_{\text{calcul}} = g \cdot d$; aceasta este secțiunea “longitudinală” (diametrală) a porțiunii din rolă pe care se produce contactul (aria vizibilă în secțiunea A-A din desenul de mai sus).

Observație importantă: Contactul real nu conduce la apariția unei presiuni uniforme între cele două piese (de cele mai multe ori au loc concentrări locale de tensiuni) și nici la dirijarea pe direcții strict radiale a componentelor $p(\alpha)$! Calculul prezentat este însă “*acoperitor*”, deoarece folosește o arie efectivă de contact mai mică (aproximativ cu 30%) decât aceea ideală ($g \cdot d < \pi \cdot g \cdot d/2$), deci presiunea calculată va fi mai mare decât aceea efectivă.

1.4

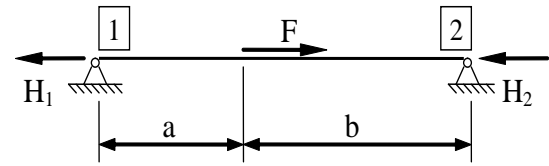
Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Numărul n al necunoscutelor suplimentare din aceste probleme reprezintă *gradul nedeterminării* sistemului studiat, iar rezolvarea problemei presupune să fie găsite n ecuații care să conțină acele necunoscute, *în plus* față de ecuațiile de echilibru ale sistemului respectiv - analizând deformațiile din sistem, sau folosind proprietățile sistemelor elastice, în legătură cu energia lor potențială de deformare (teoremele energetice).

Probleme static nedeterminate privind bare și sisteme de bare sollicitate axial

Sunt probleme de mai multe tipuri, iar pentru rezolvare se scriu ecuații *suplimentare* de legătură între necunoscute și încărcările exterioare, exprimând condiții sau limitări ale modului cum se deformează barele, sau aplicând teoreme și metode energetice.



1. Bare cu capetele fixate

Capetele barei nu se pot deplasa axial, de exemplu pentru rezemarea articulată în 1 și 2 din figură; *singura ecuație de echilibru* semnificativă este a proiecțiilor de forțe pe axa barei: $H_1 + H_2 = F$

Ecuația conține *două* forțe *necunoscute*, încât problema este *simplu static nedeterminată*; a doua ecuație se poate obține exprimând condiția ca deformarea totală a barei (suma lungirilor celor n regiuni) să fie nulă (distanța dintre capete nu se poate modifica):

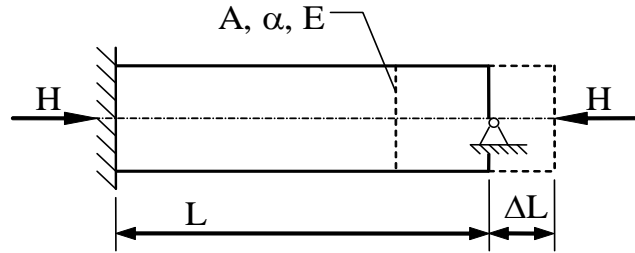
$$\Delta L_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \frac{N(x_i) \cdot L_i}{A(x_i) \cdot E} = 0$$

Pe de altă parte, ecuația suplimentară se poate scrie și aplicând una dintre metodele energetice

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

2. Bare cu dilatare termică împiedicată

O bară prismatică de lungime L și secțiune A , din metal cu modul de elasticitate E și coeficient de dilatare termică α , e fixată axial la capete. La o creștere de temperatură Δt , ea tinde să se dilate; dacă dilatarea s-ar produce doar axial (celelalte dimensiuni crescând neglijabil de puțin), creșterea lungimii ar fi: $\Delta L^t = \alpha \cdot L \cdot \Delta t$



În fapt, distanța dintre capetele barei nu se poate modifica; se poate imagina că aceasta se întâmplă pentru că reazemele introduc forțele axiale H , egale între ele (conform echilibrului forțelor axiale), comprimând bara cu cantitatea ΔL^m , deformație de tip *mechanic* calculată folosind relația obișnuită.

Observând că, pe toată bara, efortul axial este $N(x)=H=ct.$ se obține:

$$\Delta L^m = \frac{N(x) \cdot L}{E \cdot A(x)} = \frac{H \cdot L}{E \cdot A}$$

Lungimea barei nu se schimbă după încălzire, deci $\Delta L^t = \Delta L^m$, iar folosind relațiile de mai sus se ajunge la determinarea forței care soliciță bara:

$$H = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

Este de remarcat lipsa lungimii L din această relație. Forța H este constantă pentru toate secțiunile transversale și nu este influențată de lungimea barei!

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Tensiunile din piesă sunt constante în întregul ei volum, având mărimea:

$$\sigma(x) = \frac{H}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

Condiția de rezistență se scrie:

$$E \cdot \alpha \cdot \Delta t \leq \sigma_a$$

De aici se calculează, de obicei, diferența de temperatură pe care o poate suporta o bară, în condiții de siguranță.

Exemplu numeric: Pentru o bară ca mai sus, cu $E=2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ și $\sigma_a=150 \text{MPa}$, să se calculeze până la ce *temperatură* din timpul verii bara nu este periclitată, cunoscând că a fost instalată iarna, la temperatura de -20°C .

Din condiția de rezistență de mai sus rezultă:

$$\Delta t \leq \frac{\sigma_a}{E \cdot \alpha} = \frac{150 \text{MPa}}{2,1 \cdot 10^5 \text{MPa} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}} = 59,5 \text{ grad}$$

Prin urmare bara poate suporta, în siguranță, temperaturi de până la aproximativ 40°C . Dacă se dorește creșterea temperaturii maxime, atunci trebuie schimbat materialul din care se confecționează bara, alegând una sau mai multe dintre următoarele variante: rezistență admisibilă mai mare, modul de elasticitate mai mic sau/și coeficient de dilatare mai mic.

Trebuie observat că în condiția de rezistență nu apar în vreun fel dimensiunile barei, deci acestea nu influențează comportarea piesei în condițiile date!

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Teoreme energetice: Teoremele lui Castigliano

Dacă se consideră un sistem elastic încărcat cu forțe și momente exterioare, sunt adevărate următoarele enunțuri:

1. Derivata expresiei energiei potențiale de deformare înmagazinată în sistem, în raport cu forța concentrată F_i ce acționează în punctul P al sistemului, este egală cu deplasarea lui P, pe direcția și în sensul forței F_i .

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta(P)$$

2. Derivata expresiei energiei potențiale de deformare înmagazinată în sistem, în raport cu momentul concentrat M_i ce acționează în P, este egală cu rotirea (pe direcția și în sensul momentului M_i) a secțiunii duse prin P.

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \varphi(P)$$

Dacă rezultatele acestor calcule sunt **pozitive** înseamnă că deplasarea, respectiv rotirea ce formează obiectul calculului se produc în sensul în care acționează sarcina concentrată în raport cu care se face derivarea.

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Metode energetice

Au fost dezvoltate și anumite metode de calcul, numite tot *energetice*, folosite la stabilirea deplasărilor și la rezolvarea nedeterminărilor din sistemele elastice, care trebuie să fie *conservative* (fără pierderi de energie prin frecări sau degajare de căldură), iar solicitările să nu depășească *domeniul elastic* al deformabilității materialelor ce apar în construcția sistemului.

Metoda Mohr-Maxwell pentru calculul derivatelor eforturilor

Aplicarea teoremelor lui Castigliano presupune inclusiv calculul derivatelor (parțiale ale) unor expresii ale eforturilor interioare (folosite la stabilirea energiei potențiale de deformare), în raport cu sarcina concentrată dintr-un punct al sistemului; metoda de față conduce la simplificarea acestor calcule, introducând următoarea regulă de calcul (pentru cazul solicitării axiale):

Derivata expresiei $N(x_i)$ – efortul axial de pe regiunea i a sistemului – în raport cu forța concentrată F din punctul P , este egală cu expresia $n(x_i)$ a efortului de pe regiunea i , în cazul solicitării (**fictive** a) sistemului doar printr-o forță concentrată egală cu o unitate (fără dimensiuni!), aplicată în P , pe direcția și în sensul lui F .

$$\frac{\partial N(x_i)}{\partial F} = n(x_i)$$

Relații și enunțuri similare se scriu pentru celelalte solicitări simple, iar aplicarea concretă a metodei va fi prezentată în aplicații ulterioare.

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Metoda eforturilor

Propune un algoritm special pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate; dacă se notează cu n gradul nedeterminării sistemului studiat, atunci pentru aplicarea metodei vor fi parcurse următoarele etape de lucru (*aceleași*, indiferent câte necunoscute sunt de calculat!):

1. Se transformă sistemul static nedeterminat într-unul static determinat, numit **sistem de bază**, îndepărtând n legături ale sale și înlocuind reacțiunile care corespundeau acelor legături cu *forțele* sau *momentele* notate X_i , $i = 1, 2, \dots, n$; acestea vor reprezenta noile necunoscute ale problemei.
2. Se studiază *eforturile* de pe regiunile sistemului de bază, în $n+1$ stări de solicitare aplicate acestuia, adică
 - starea “zero” – păstrând solicitarea exterioară și făcând necunoscutele $X_i=0$;
 - stările “1, 2, ..., n” – cu sistemul eliberat complet și încărcat cu forța (sau momentul) $X_i=1$, celelalte necunoscute rămânând nule.
3. Se determină coeficienții δ_{ij} ai metodei eforturilor, cu relații de calcul proprii fiecărui tip de solicitare.
4. Se scriu cele n ecuații “canonice” ale metodei, sub forma

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

5. Rezolvând acest sistem de ecuații se află cele n necunoscute inițiale ale problemei.

Metoda are avantajul că poate fi aplicată, parcurgând aceleași etape de lucru, unor sisteme cu grad de nedeterminare oricât de mare, inclusiv folosind programe de calcul automatizat.

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Energia potențială de deformare la solicitarea axială

Pornind de la relația lucrului mecanic de deformare elastică, dedusă anterior sub forma $L=(F \Delta L)/2$, se pot înlocui mărimile specifice solicitărilor axiale $F=A \sigma$ și $\Delta L=(N L)/(A E)=(\sigma L)/E$; ținând seama că energia potențială de deformare trebuie să egaleze lucrul mecanic exterior, se obține relația căutăată, sub forma:

$$U = L = \frac{F \cdot \Delta L}{2} = \frac{1}{2} A \cdot \sigma \cdot \frac{\sigma \cdot L}{E} = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot A \cdot L$$

Produsul $A L$ reprezintă volumul V al barei studiate, încât se poate stabili energia de deformare (U_1) ce revine unității de volum a corpului, numită **energie specifică** de deformare elastică; pentru barele solicitate axial, această mărime are expresia:

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma}{2} \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}$$

Energia specifică de deformare este deci egală cu semi-produsul dintre tensiunea apărută prin solicitare în elementul de volum al unei bare și deformația specifică a acelu element. Relații similare se stabilesc pentru fiecare tip de solicitare și sunt valabile pentru porțiunea inițială (aproximativ liniară) a curbelor caracteristice ale materialelor; aspectul ultimei egalități arată că energia specifică de deformare este *aria* domeniului, aproximativ triunghiular, din zona de elasticitate a curbelor caracteristice. Datorită modului specific în care se comportă materialele *tenace*, pentru acestea se admite că energia specifică de deformare poate fi calculată ca arie a suprafeței de sub curba caracteristică chiar și *peste* limita de curgere.

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Considerând o bară de arie transversală $A(x)$ și lungime L , cu efortul secțional $N(x)$ și tensiunea $\sigma(x)=N(x)/A(x)$, se poate scrie energia ei potențială *specifică* de deformare sub forma:

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{N^2(x)}{2E \cdot A^2(x)}$$

Energia potențială *totală* de deformare elastică va fi:

$$U = \iiint_{(V)} U_1 \, dV = \int_{(L)} U_1 \cdot A(x) \, dx = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2E \cdot A(x)} \, dx$$

Aplicarea teoremelor lui Castigliano la barele solícitate axial

Este aplicabilă doar prima teoremă (nu se produc deformații unghiulare!); pe baza ei și folosind ultima egalitate de mai sus, se poate calcula deplasarea unui punct P de pe axa barei, pe direcția și în sensul forței axiale \mathbf{F} existente în acel punct:

$$\delta(P) = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_{(L)} \frac{2N(x)}{2E \cdot A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F} \, dx = \int_0^L \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F} \, dx$$

Observații:

1. S-a calculat derivata în raport cu forța \mathbf{F} a expresiei energiei potențiale de deformare, ca pentru o funcție compusă, înainte de efectuarea integralei.
2. Pentru un sistem de n bare, integrala se desface în n integrale pe lungimile L_i ale barelor, iar termenii de sub integrale se particularizează pentru barele sistemului.
3. Dacă rezultatul calculului este *negativ*, deplasarea punctului P se produce în sens *contrar* forței \mathbf{F} .
4. Când se calculează deplasarea unui punct Q în care nu există o forță concentrată exterioară, teorema se aplică introducând o forță axială *fictivă* \mathbf{K} în acel punct, apoi exprimând elementele de calcul (reacțiuni și

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

eforturi secționale) în funcție de \mathbf{K} ; după derivarea parțială a eforturilor $N(x)$ față de K , se fac înlocuirile în relația deplasării, dând forței fictive valoarea reală $K=0$ (ca în aplicația de mai jos).

5. La solicitarea axială simplă, deplasarea lui P va fi egală cu a tuturor punctelor din secțiunea transversală a lui P .

Primele patru observații sunt valabile și pentru celelalte solicitări, inclusiv în calculele de la solicitările compuse!

Aplicarea teoremei Mohr-Maxwell

Teorema a fost explicată anterior chiar pentru cazul solicitărilor axiale, încât nu sunt necesare alte precizări, în afara expresiei pentru calculul deplasării punctului P , unde se aplică forța unitară axială; derivatele parțiale din expresia se calculează din stări fictive de solicitare, astfel că se obține relația:

$$\delta(P) = \int_0^L \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F} dx = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \frac{N(x_i)}{E(x_i) \cdot A(x_i)} n(x_i) dx$$

Indicele i arată că termenii de sub integrală sunt de pe regiunea i a sistemului studiat, pe care se delimitează m regiuni. (A se vedea aplicația de mai jos.)

Aplicarea metodei eforturilor

Rămân valabile explicațiile anterioare, cu precizarea că factorii δ_{ij} vor fi:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^m \int_0^{L_k} \frac{n^i(x_k) \cdot n^j(x_k)}{E(x_k) \cdot A(x_k)} dx$$

Indicele regiunilor este k , iar eforturile de sub integrală corespund stărilor de solicitare i și j ale sistemului de bază (a se vedea aplicarea metodei la rezolvarea barelor și sistemelor de bare de tip static nedeterminat).

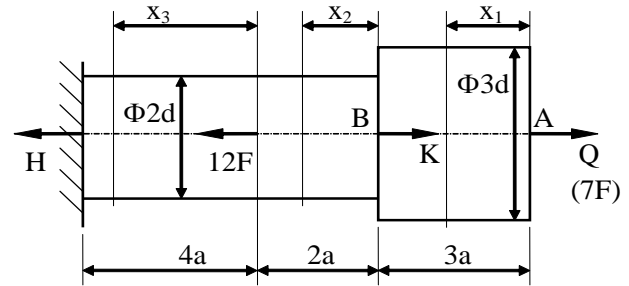
Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Aplicație la calculul deplasărilor prin metode energetice

Pentru bara pe care s-au făcut calculele de rezistență și de rigiditate, se calculează pe baze energetice deplasările punctelor A și B de pe regiunea x_1 .

A. Rezolvare pe baza teoremei lui Castigliano

Este necesară existența, în punctele precizate, a unor forțe concentrate axiale, exprimate independent de celelalte forțe din sistem: se notează Q forța $7F$ din capătul liber al barei, iar în B se introduce o forță fictivă K (de mărime reală zero), alegându-i sensul spre dreapta; regiunile se iau ca în aplicația precedentă, iar eforturile axiale și derivatele lor parțiale în funcție de forțele considerate vor fi:



Regiunea	$N(x_i)$	$\frac{\partial N(x_i)}{\partial Q}$	$\frac{\partial N(x_i)}{\partial K}$
$(\forall) x_1 \in (0; 3L)$	Q	1	0
$(\forall) x_2 \in (0; 4L)$	$Q + K$	1	1
$(\forall) x_3 \in (0; 2L)$	$Q + K - 12F$	1	1

Deplasarea lui A se obține introducând în relația deplasării (dată mai sus) termenii corespunzători forței Q și dând eforturilor $N(x_i)$ valoarea lor reală (obținută pentru $Q=7F$ și $K=0$):

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

$$\begin{aligned}\delta(A) &= \frac{\partial U}{\partial Q} = \sum_{i=1}^3 \int_{(L_i)} \frac{N(x_i)}{E \cdot A(x_i)} \frac{\partial N(x_i)}{\partial Q} dx = \int_0^{3L} \frac{7F}{E \cdot 9A} \cdot 1 dx + \int_0^{2L} \frac{7F}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx + \\ &+ \int_0^{4L} \frac{(-5F)}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx = \frac{F}{E \cdot A} \left(\frac{7}{9} \cdot 3L + \frac{7}{4} \cdot 2L - \frac{5}{4} \cdot 4L \right) = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \frac{14 + 21 - 30}{6} = \frac{5}{6} \frac{F \cdot L}{E \cdot A}\end{aligned}$$

Un calcul analog, în raport cu forța K, duce la aflarea deplasării lui B:

$$\begin{aligned}\delta(B) &= \frac{\partial U}{\partial K} = \sum_{i=1}^3 \int_{(L_i)} \frac{N(x_i)}{E \cdot A(x_i)} \frac{\partial N(x_i)}{\partial K} dx = \int_0^{3L} \frac{7F}{E \cdot 9A} \cdot 0 dx + \int_0^{2L} \frac{7F}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx + \\ &+ \int_0^{4L} \frac{(-5F)}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx = \frac{F}{E \cdot A} \left(\frac{7}{4} \cdot 2L - \frac{5}{4} \cdot 4L \right) = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \frac{7 - 10}{2} = -\frac{3}{2} \frac{F \cdot L}{E \cdot A}\end{aligned}$$

Rezultatele coincid cu cele de la calculul prin metoda geometrică; semnul **negativ** al deplasării lui B arată că secțiunea cu centrul în acel punct se deplasează spre stânga (*invers* forței fictive K), ceea ce s-a obținut și prin calculul anterior.

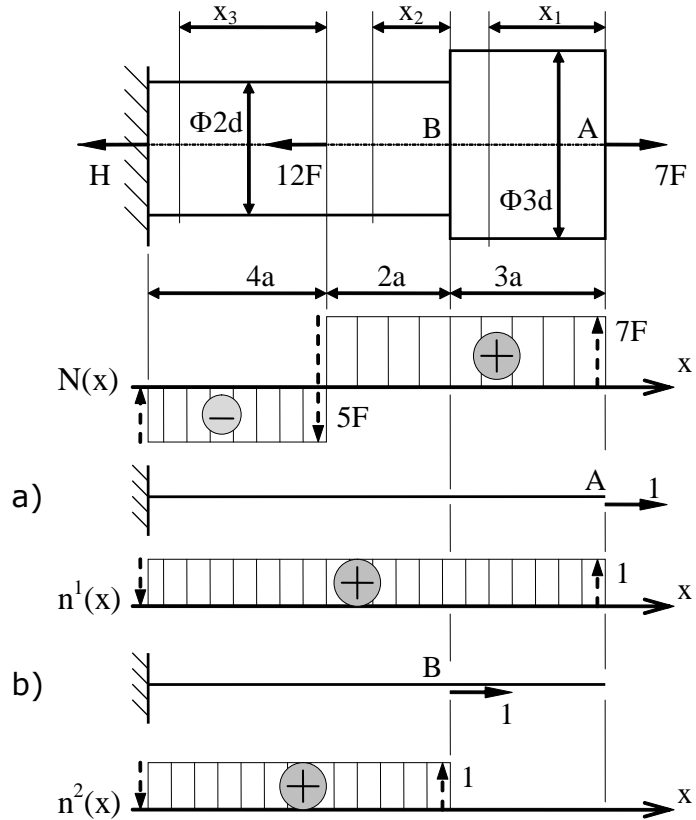
Rezolvarea problemelor static nedeterminate

B. Rezolvare prin metoda Mohr-Maxwell

Se introduc succesiv forțe concentrate fictive egale cu o unitate în punctele de calcul, cu bara eliberată de alte sollicitări (stări de solicitare imaginare, fictive, notate pe figură cu a și b – bara fiind simbolizată prin axa ei); păstrând împărțirea în regiuni de mai sus, se obțin următoarele valori ale eforturilor axiale:

$$n^1(x_1) = n^1(x_2) = n^1(x_3) = 1;$$

$$n^2(x_1) = 0; \quad n^2(x_2) = n^2(x_3) = 1$$



Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Se poate observa coincidența (prevăzută chiar în enunțul teoremei Mohr-Maxwell) dintre aceste valori ale eforturilor secționale, din cele două stări fictive de solicitare și derivatele parțiale care le corespund, din tabelul de la aplicarea teoremei lui Castigliano!

Aceste valori se introduc în câte o relație a deplasărilor, ca mai sus, pentru fiecare dintre cele două stări fictive de încărcare, încât deplasările căutate se vor calcula astfel.

$$\delta(A) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{N(x_i)}{E \cdot A(x_i)} n^1(x_i) dx = \int_0^{3L} \frac{7F}{E \cdot 9A} \cdot 1 dx + \int_0^{2L} \frac{7F}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5F)}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx$$

$$\delta(B) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{N(x_i)}{E \cdot A(x_i)} n^2(x_i) dx = \int_0^{3L} \frac{7F}{E \cdot 9A} \cdot 0 dx + \int_0^{2L} \frac{7F}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5F)}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx$$

Integralele obținute coincid cu cele care s-au obținut la aplicarea teoremei lui Castigliano, adică diferența în aplicarea celor două metode constă numai în modul cum se calculează derivatele parțiale în raport cu încărcările exterioare concentrate.

1.5

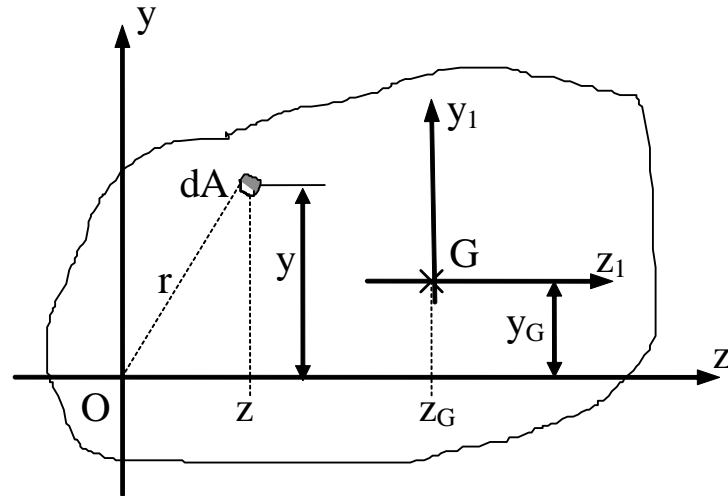
Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Calcululele ingineresti necesită cunoașterea unor mărimi caracteristice ale secțiunilor transversale sau mediane ale diverselor corpuri studiate; aceste mărimi sunt, în principiu, cunoscute de la geometrie sau mecanică tehnică, iar cele de mai jos sunt doar o sistematizare a noțiunilor de bază ce vor fi utilizate ulterior în rezolvarea problemelor.

Definiții

Considerând o suprafață plană oarecare, cu centrul de greutate G , se alege un sistem de axe reciproc perpendiculare yOz (x fiind axa longitudinală a corpului); fie un element de arie dA , la distanțele y și z față de axele de coordonate, respectiv r – în raport cu originea axelor; caracteristicile suprafeței se definesc după cum urmează.



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

1. Aria

$$A = \iint_A dA \quad [\text{mm}^2]$$

Este o mărime strict pozitivă (fiind zero dacă suprafața se reduce la un punct).

2. Momentele statice (față de axe)

$$S_z = \iint_A y dA = y_G \cdot A \quad S_y = \iint_A z dA = z_G \cdot A \quad [\text{mm}^3]$$

Momentele statice sunt nule în raport cu axele care trec prin centrul de greutate G.

Pentru o suprafață complexă, descompusă în n figuri elementare, la care se pot calcula ariile A_i și pozițiile centrelor de greutate G_i , momentele statice globale sunt:

$$S_z = \sum_{i=1}^n (y_{G_i} A_i) \quad \text{respectiv} \quad S_y = \sum_{i=1}^n (z_{G_i} A_i)$$

Din aceste relații se stabilesc *coordonatele centrului de greutate* pentru suprafețele complexe, pe baza egalării momentelor statice globale cu ultima formă care le corespunde din relațiile de definiție.

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{G_i} A_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{G_i} A_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad [\text{mm}]$$

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

3. Momentele de inerție

a) axiale $I_z = \iint_A y^2 dA$ respectiv $I_y = \iint_A z^2 dA$ [mm⁴]

Dacă sistemul de axe este dus în centrul de greutate (axe centrale), atunci momentele axiale se numesc **centrale**.

b) polar $I_p = \iint_A r^2 dA$ [mm⁴]

Momentele axiale și polare sunt mărimi strict pozitive, având valoarea zero numai pentru suprafețele reduse la un punct.

c) centrifugal $I_{zy} = \iint_A yz dA$ [mm⁴]

Dacă una dintre axe este și axă de simetrie a suprafeței, momentul centrifugal este nul.

Deoarece raza polară r este legată de coordonatele y și z prin relația $r^2 = y^2 + z^2$ – ca laturi ale unui triunghi dreptunghic, între momentele de inerție axiale și cel polar este mereu adevărată relația:

$$I_p = I_z + I_y$$

Rezultă că, pentru un anumit pol, suma momentelor axiale este un invariant, de valoarea momentului polar, nedepinzând de alegerea axelor de coordonate.

Pentru o suprafață de formă complexă ce poate fi descompusă în n figuri elementare, momentele de inerție globale se vor calcula (cum se calculează și aria totală) ca sume *algebrice* ale momentelor suprafețelor componente (luând cu semn negativ termenii ce corespund unor decupări), cu condiția ca toate momentele să fie calculate față de același sistem de axe.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Variația momentelor de inerție la translația axelor de coordonate

Dacă se duc, în centrul de greutate G al suprafeței din figura anterioară, axele de coordonate y_1 și z_1 , care se găsesc la distanțele z_G , respectiv y_G , față de axele inițiale, atunci între momentele de inerție calculate față de aceste perechi de axe sunt adevărate relațiile de legătură demonstrate de **Steiner** (cunoscute din mecanica tehnică) și care în acest caz se scriu sub forma:

$$I_z = I_{z_1} + A \cdot y_G^2 \quad I_y = I_{y_1} + A \cdot z_G^2 \quad I_{zy} = I_{z_1 y_1} + A \cdot y_G z_G$$

Aceste relații sunt utile la calculul momentelor globale ale suprafețelor complexe, cum se va vedea inclusiv în aplicațiile care vor urma.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Momentele de inerție principale centrale

Se imaginează o bară prismatică, de secțiune dreptunghiulară (forma unei rigle de plastic); este ușor de înțeles că ea se poate îndoi mult mai ușor în jurul laturii lungi a secțiunii transversale, decât pe direcția laturii mai scurte; rezultă că, pentru astfel de bare, rezistența la solicitarea descrisă (încovoiere) depinde în mod direct de orientarea secțiunii transversale față de direcția solicitării.

Se va arăta că mărimea hotărâtoare în această privință este **momentul de inerție** al secțiunii în raport cu axa de îndoire: secțiunea transversală conduce la rezistența maximă a barei la încovoiere, dacă momentul său de inerție față de direcția momentului încovoietor are valoarea maximă posibilă. Trebuie precizat că barele se consideră a fi rezemate și solicitate pe axa lor geometrică, care reprezintă în fapt șirul centrelor de greutate ale secțiunilor transversale; dintre toate punctele unei secțiuni, în rezistența materialelor este important centrul ei de greutate.

Caracteristicile de inerție ale secțiunii vor fi deci calculate în raport cu axe care trec prin G (axe *centrale*), iar discuția ce urmează, deși valabilă pentru oricare punct al unei suprafețe finite plane, se va face cu referire la G . Se pune problema să se determine valorile extreme (*principale*) ale momentelor de inerție axiale.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Momentele de inerție principale centrale

Teoremă:

Orice axă de simetrie a unei secțiuni este axă principală centrală a ei!

Consecințe:

1. Dacă o suprafață plană are o *axă de simetrie*, aceasta este axă principală centrală, cea de-a doua fiind perpendiculară pe prima, în centrul de greutate.
2. Secțiunile cu *mai mult decât două axe de simetrie* (cum sunt poligoanele regulate și, la limită, cercul), au o infinitate de axe principale centrale; în plus, cum valorile maxime și minime ale momentelor principale sunt egale, rezultă că $I_1 = I_2 = I_z = I_y = ct$, adică momentele de inerție axiale ale acestor secțiuni au o singură valoare, față de orice axă centrală.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

În directă legătură cu momentele principale centrale se definesc alte două caracteristici ale suprafețelor plane, după cum urmează.

Razele de inerție (de rotație)

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \text{respectiv} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad [\text{mm}]$$

Modulii de rezistență

Reprezintă raportul între momentul de inerție axial sau polar și distanța maximă a unui punct de pe secțiune până la axa (sau punctul) reper; sunt de două categorii:

$$\text{a) axiali} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad \text{respectiv} \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad [\text{mm}^3]$$

$$\text{b) polar} \quad W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} \quad [\text{mm}^3]$$

Atenție: Pentru suprafețele compuse, razele de inerție și modulii de rezistență nu se pot calcula ca sume algebrice ale valorilor corespunzătoare suprafețelor elementare, ci numai prin aplicarea definiției!

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici ale figurilor geometrice elementare

Dreptunghiul de laturi h și b

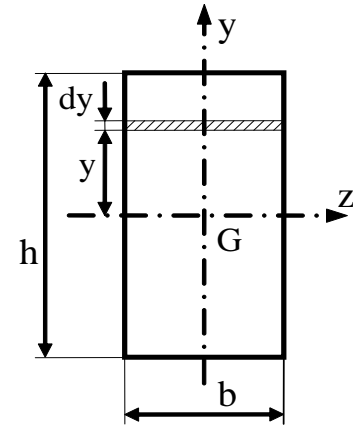
Această secțiune are două axe de simetrie, care vor fi axele principale centrale y și z . Se definește, la distanța y de axa z , un element de arie dA , de formă dreptunghiulară și laturi b și dy . Rezultă că aria lui va fi: $dA = b dy$

Pentru a verifica dacă abordarea este corectă, se calculează aria dreptunghiului, după definiție:

$$A = \iint_A dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b dy = b \left[\frac{h}{2} - \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = b \cdot h$$

Momentul de inerție față de axa z fi:

$$I_z = \iint_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Procedând analog, se obține momentul față de axa y :

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

Razele de inerție:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h\sqrt{3}}{6} \quad \text{respectiv} \quad i_y = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

Modulii de rezistență:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{1}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad \text{respectiv} \quad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^2 h}{6}$$

Observație: Caracteristicile polare sunt importante și calculate doar la secțiunile circulare!

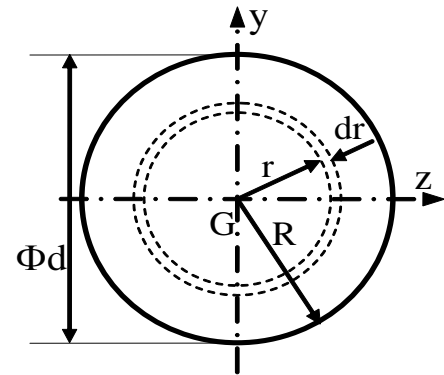
Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici ale figurilor geometrice elementare

Cercul de rază R și diametru d

Cercul are o infinitate de axe de simetrie, deci orice diametru coincide cu o axă principală centrală; se alege elementul de arie sub formă de *inel* de rază r și grosime dr , cu aria: $dA = 2\pi r dr$

Aria cercului:
$$A = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$



Momentul de inerție polar este:

$$I_p = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Folosind relația de legătură dintre momentele de inerție, precum și egalitatea $I_z = I_y$, se

pot afla momentele axiale:

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Razele de inerție:

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4}$$

Modulii de rezistență:

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici ale figurilor geometrice elementare

Secțiunea inelară cu $d_{int} = d$ și $d_{ext} = D$

Pe baza rezultatelor de mai sus, momentele de inerție se calculează prin “scăderea” cercului interior din cel exterior:

$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$
$$I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{I_p}{2}$$

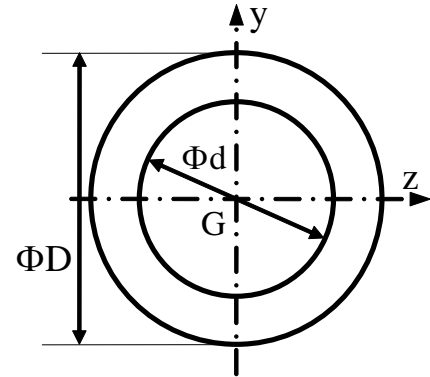
Razele de inerție:

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi(D^2 - d^2)}} = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

Modulii de rezistență se calculează după relațiile de definiție:

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$$



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici ale figurilor geometrice elementare

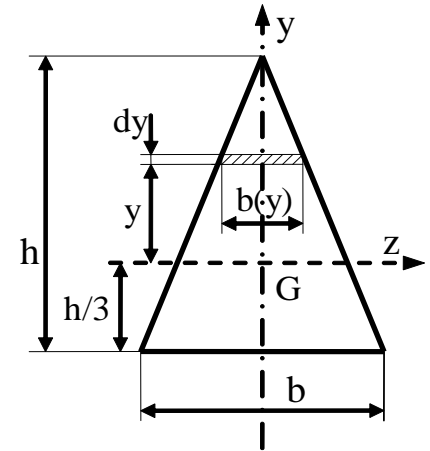
Triunghiul isoscel, cu baza b și înălțimea h

Elementul de arie este dreptunghiular, de laturi $b(y)$ și dy ;
din asemănarea unor triunghiuri rezultă că:

$$\frac{b(y)}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h} \Rightarrow b(y) = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right)$$

Aria triunghiului se va calcula sub forma:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy = \frac{b}{h} \left\{ \frac{2h}{3} \left[\frac{2h}{3} - \left(-\frac{h}{3} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{4h^2}{9} - \frac{h^2}{9} \right) \right\} = \\ &= \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} \cdot h - \frac{1}{2} \frac{h^2}{3} \right) = \frac{b}{h} \frac{4h^2 - h^2}{6} = \frac{b h}{2} \end{aligned}$$



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

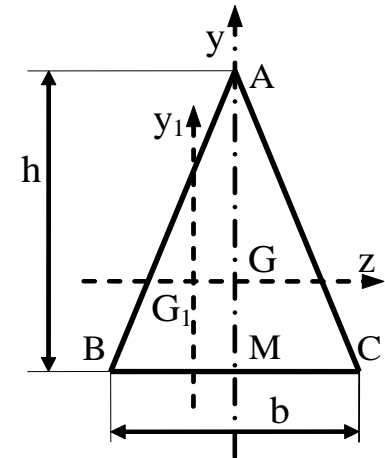
Momentul de inerție față de axa principală centrală z va fi

$$I_z = \frac{b}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy = \frac{b}{h} \left\{ \frac{2h}{3} \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2h}{3} \right)^3 - \left(-\frac{h}{3} \right)^3 \right] - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2h}{3} \right)^4 - \left(-\frac{h}{3} \right)^4 \right] \right\} =$$

$$= \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{9} \cdot \frac{9h^3}{27} - \frac{1}{4} \cdot \frac{15h^4}{81} \right) = \frac{bh^3}{27} \left(2 - \frac{5}{4} \right) = \frac{bh^3}{36}$$

Se observă că la această secțiune nu se poate scrie momentul față de axa y prin permutarea laturilor, axele având poziții diferite față de laturi (axa z este paralelă cu una dintre ele).

Pentru a folosi, totuși, rezultatul precedent, se fac notațiile din figură, unde M este mijlocul lui BC , iar axa y_1 trece prin centrul de greutate G_1 al triunghiului ABM ; în aceste condiții momentul $I_{y_1}(ABM)$ se poate afla din relația de la triunghi după care, din relația lui Steiner, se calculează $I_y(ABM)$, așa cum se arată în expresia de mai jos:



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

$$\begin{aligned} I_y (\text{ABC}) &= 2 I_y (\text{ABM}) = 2 \left[I_{y_1} (\text{ABM}) + \frac{\text{BM} \cdot \text{AM}}{2} \cdot \left(\frac{b}{6}\right)^2 \right] = \\ &= 2 \left[\frac{h \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3}{36} + \frac{\frac{b}{2} \cdot h}{2} \cdot \frac{b^2}{36} \right] = 2 \cdot \frac{h \cdot b^3}{4 \cdot 36} \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{b^3 h}{48} \end{aligned}$$

Modulii de rezistență se obțin astfel:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{b h^3}{36}}{\frac{2h}{3}} = \frac{b h^2}{24} \quad \text{respectiv} \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{b^3 h}{48}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2 h}{24}$$

Razele de inerție se calculează tot folosind definițiile lor:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{h^2}{18}} = \frac{h\sqrt{2}}{6} \quad \text{respectiv} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b^2}{24}} = \frac{b\sqrt{6}}{12}$$

1.6

Răsucirea barelor de secțiuni transversale circulare

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Principalele elemente de calcul

Răsucirea este solicitarea din barele încărcate cu vectori de tip **moment**, care au direcția axei lor longitudinale. După definiția momentului forței în raport cu o axă, răsucirea este produsă de forțele care nu sunt nici paralele și nici concurente cu axa geometrică a barei pe care acționează; efectul produs în bare este **rotirea** reciprocă a secțiunilor transversale, în jurul axei **x** (care trece prin centrele lor de greutate).

Barele cilindrice supuse la răsucire se numesc de obicei **arbori** (organe de mașini care preiau și transmit putere, sub formă de mișcare de rotație); antrenarea lor se face, de regulă, prin motoare electrice și prin transmiterea mișcării între arbori, cu ajutorul unor roți dințate (fixate pe arbori prin pene longitudinale). *Momentul de răsucire* care solicită un arbore se exprimă prin caracteristicilor *motorului* scriind relația dintre putere, moment și viteza unghiulară:

$$P = M \cdot \omega = M \cdot \frac{2\pi n}{60}$$

Ultima fracție este exprimarea vitezei unghiulare ω (în radiani pe secundă), în funcție de turația **n** (în rotații pe minut), iar *momentul de răsucire* produs de un motor cu puterea nominală **P** (în Watt) și turația **n** va fi:

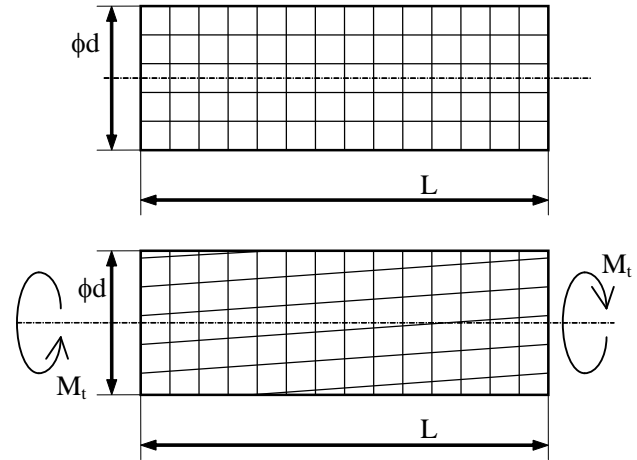
$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Tensiuni și deformații specifice

Fie o bară cilindrică, de lungime L și diametru d , având pe suprafață o rețea de linii - generatoare și circumferințe; ochiurile rețelei au formă de pătrate curbilinii. Când la capetele barei se aplică doi vectori moment de mărimi egale și sensuri contrare, bara este solicitată la răsucire, efectele solicitării fiind următoarele:

- ⇒ Dimensiunile barei nu se schimbă, pe nici o direcție, după solicitare.
- ⇒ Secțiunile inițial plane și perpendiculare pe axa barei păstrează aceste calități după solicitare, deși se rotesc în jurul axei x , adică la răsucirea barelor de secțiuni circulare se respectă în mod riguros ipoteza lui Bernoulli.
- ⇒ Se produc doar rotații reciproce ale secțiunilor transversale, generatoarele devin elicoidale, iar pătratele inițiale ale rețelei ajung paralelamente curbilinii; în bară se produc numai deformații specifice de lunecare, adică *lunecări specifice* γ , cărora le corespund *tensiuni tangențiale* τ .



Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Deducerea condiției de rezistență

Se poate demonstra că, pe orice secțiune transversală a unei bare de acest fel, tensiunile de răsucire τ variază liniar pe raza secțiunii, fiind 0 în centru și maxime pe circumferință ($r=R$); punctele de pe secțiune care au aceeași distanță față de centru (raza r) au aceeași valoare a tensiunii tangențiale; formula finală pentru calculul *tensiunilor tangențiale efective* dintr-un punct din secțiunea x , la distanța r de axa barei se obține sub forma:

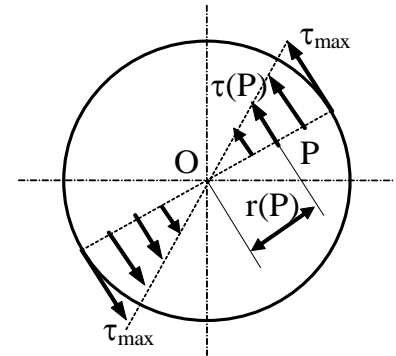
$$\tau_{\text{ef}}(x, r) = \frac{M_t(x) \cdot r}{I_p(x)} \quad [\text{MPa}]$$

valoarea maximă a tensiunilor dintr-o secțiune se obține în punctele cele mai depărtate de axa barei, adică:

$$\tau_{\text{max}}(x) = \frac{M_t(x) \cdot r_{\text{max}}}{I_p(x)}$$

Dacă se transferă r_{max} la numitorul numitorului, se obține relația modulului de rezistență polar W_p ; pentru o bară sau un tronson de bară de secțiune transversală *constantă*, solicitarea periculoasă va fi în secțiunea unde momentul este maxim, iar condiția de rezistență se va scrie astfel:

$$\tau_{\text{max}}(x) = \max \left| \frac{M_t(x)}{W_p(x)} \right| \leq \tau_a \quad (*)$$



Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Calculare bazate pe criteriul de rezistență

Aceste calcule se pot face urmărind trei aspecte:

a) **Verificarea** corectitudinii proiectării barei, adică a respectării inegalității (*); dacă sensul inegalității nu se respectă, atunci se măresc dimensiunile secțiunii de calcul (deci modulul ei de rezistență), până la obținerea rezultatului dorit.

b) Aflarea momentului de răsucire *maxim* care poate fi suportat de bara studiată, adică **momentul capabil** al ei:

$$M_{t\text{cap}} = W_{p\text{ef}}(x) \cdot \tau_a \geq M_{t\text{ef}}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

c) **Dimensionarea** barei, adică stabilirea dimensiunilor *minime* necesare ale secțiunilor ei transversale, după relația:

$$W_{p\text{nec}} = \frac{M_t(x)}{\tau_a} \leq W_{p\text{ef}}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Relații pentru calculul de rigiditate

Se introduce mărimea fizică numită *rotire specifică* a unui tronson de bară – rotirea reciprocă a capetelor unui segment de o unitate de lungime (de ex. de 1 metru) din bara analizată; se calculează din relația:

$$\theta(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t(x)}{G \cdot I_p(x)} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

Pe această bază se deduce relația cu care se calculează *unghiul de rotire* a unei secțiuni transversale aflate la capătul unui tronson de bară de lungime L , astfel:

$$\Delta\varphi = \int_{(L)} \theta(x) dx = \int_{(L)} \frac{M_t(x)}{G \cdot I_p(x)} dx$$

Regulă de calcul: Rotirea unei secțiuni arbitrare x este determinată numai de deformarea părții de bară dintre acea secțiune și capătul fixat al barei (unul dintre capete, dacă ambele sunt fixate); prin urmare, deplasarea unghiulară este *suma algebrică a deformațiilor* tronsoanelor din acea porțiune de bară.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Consecințe

1. Dacă pe un tronson de bară se mențin *constante* mărimile $M_t(x)=M$ și $I_p(x)=I$, atunci deformația *totală* a lui, rotirea reciprocă a capetelor tronsonului se scrie:

$$\Delta\varphi = \frac{M \cdot L}{G \cdot I} \quad [\text{rad}]$$

2. Dacă pe o regiune se produc *variații* (după funcții de variabilă x) ale celor două mărimi, atunci rotirea secțiunii arbitrare x , în raport cu secțiunea de la originea lui x , se calculează din relația:

$$\Delta\varphi(x) = \int_0^x \frac{M_t(x) dx}{G \cdot I_p(x)}$$

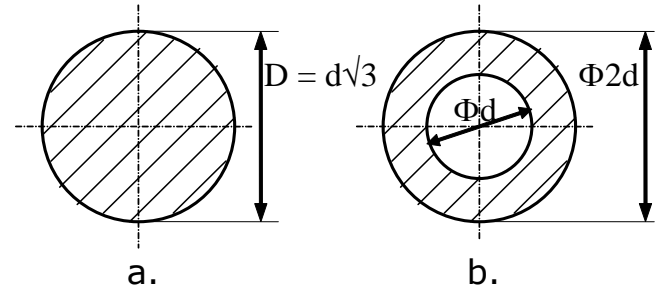
3. De aici rezultă că, dacă mărimea secțiunii transversale este constantă pe porțiuni ale barei (adică variază în trepte pe lungimea ei), atunci **gradul funcției rotirilor** $\Delta\varphi(x)$ **este cu o unitate mai mare decât al funcției** $M_t(x)$; această remarcă ușurează studiul și trasarea *diagramei de variație*, pe lungimea barei, a *rotirilor* secțiunilor transversale, în problemele care cer acest lucru.

4. Produsul $G \cdot I$ reprezintă *rigiditatea* (sau modulul de rigiditate) la răsucire a(l) barei.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Comparație între barele pline și tubulare

Repartizarea pe secțiuni a tensiunilor de răsucire arată că materialul din jurul axei longitudinale este puțin sollicitat, încât secțiunile **inelare** sunt mai potrivite pentru răsucire; se compară momentul maxim ce poate fi preluat de două bare cu același consum de material, una *cilindrică*, cealaltă *tubulară*. Barele au aceeași lungime, iar egalitatea consumului de material înseamnă *arii transversale egale*, $A_1=A_2=A$; pentru secțiunile din figură ariile vor fi:



secțiunea plină $A_1 = \frac{\pi(d\sqrt{3})^2}{4} = 3\frac{\pi d^2}{4}$

secțiunea inelară $A_2 = \frac{\pi}{4}(4d^2 - d^2) = 3\frac{\pi d^2}{4}$

Se confirmă egalitatea consumului de material în cele două variante de bară, iar raportul momentelor capabile ale celor două variante de bară va fi:

$$\frac{M_{t\text{ cap2}}}{M_{t\text{ cap1}}} = \frac{W_{p2} \cdot \tau_a}{W_{p1} \cdot \tau_a} = \frac{W_{p2}}{W_{p1}} = \frac{\frac{\pi}{16 \cdot 2d}(16d^4 - d^4)}{\frac{\pi}{16}(d\sqrt{3})^3} = \frac{\frac{15}{2}d^3}{3\sqrt{3}d^3} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1,44337$$

Atenție: Cu un consum identic de material, bara de secțiune **tubulară** poate suporta (în cazul dat) un moment de răsucire mai mare cu 45% față de bara circulară **plină**! Pentru preluarea solicitărilor de torsiune sunt deci preferabile barele sub formă de țevă!

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Energia potențială de deformare la solicitarea de răsucire

La fel ca la solicitarea axială, se poate calcula energia de deformare (U_1) ce revine unității de volum a barei supuse la răsucire, adică *energia potențială specifică de deformare elastică*:

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$$

Fiind cunoscută forma curbei caracteristice la răsucire pentru materialele tenace, rămân valabile considerațiile anterioare privind legătura dintre aria de sub curbă și calculul energiei U_1 ; pentru bara de arie transversală A și lungime L , a cărei solicitare este caracterizată prin efortul secțional $M_t(x)$ și tensiunea $\tau(x) = M_t(x) \cdot r / I_p(x)$, se poate scrie energia ei potențială totală de deformare sub forma:

$$U = \iiint_{(V)} U_1 \, dV = \int_{(V)} \frac{\tau^2(x)}{2G} \cdot (dA \, dx) = \int_{(L)} \frac{M_t^2(x)}{2G \cdot I_p^2(x)} \, dx \iint_{(A)} r^2 \, dA$$

Ultima integrală reprezintă relația de definiție a momentului polar de inerție $I_p(x)$, mărime ce conduce la simplificarea numitorului fracției de sub integrala simplă, iar relația finală va fi:

$$U = \int_0^L \frac{M_t^2(x)}{2G \cdot I_p(x)} \, dx$$

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Aplicarea teoremei lui Castigliano la solicitarea de răsucire

Este aplicabilă numai a doua teoremă a lui Castigliano (în barele răsucite nu se produc deformații liniare!); rotirea secțiunii transversale \mathbf{x} a barei, pe direcția și în sensul momentului \mathbf{M} ce acționează în acea secțiune se poate calcula, pe baza exprimării generale a teoremei și folosind ultimul rezultat de mai sus, astfel:

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} = \int_{(L)} \frac{2 M_t(\mathbf{x})}{2 G \cdot I_p(\mathbf{x})} \frac{\partial M_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{M}} dx = \int_0^L \frac{M_t(\mathbf{x})}{G \cdot I_p(\mathbf{x})} \frac{\partial M_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{M}} dx$$

Observații:

1. S-a calculat derivata, în raport cu \mathbf{M} , a expresiei energiei potențiale de deformare, ca pentru o funcție compusă, înainte de efectuarea integralei.
2. Dacă rezultatul calculului este **negativ**, înseamnă că rotirea secțiunii \mathbf{x} se produce în sens *contrar* momentului \mathbf{M} .
3. Dacă se calculează rotirea unei secțiuni lipsite de moment concentrat, teorema se aplică după introducerea unui moment de răsucire fictiv \mathbf{K} în acea secțiune și exprimarea elementelor de calcul (reacțiuni și eforturi secționale) în funcție de \mathbf{K} ; după efectuarea derivatelor parțiale ale eforturilor $M_t(\mathbf{x})$ în raport cu \mathbf{K} , se fac înlocuirile în relația teoremei, dând momentului fictiv valoarea reală $\mathbf{K}=0$.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Aplicarea teoremei Mohr-Maxwell

Reprezintă o metodă alternativă pentru calculul derivatelor parțiale din relația de mai sus: derivata parțială a expresiei $M_t(x_i)$ – efortul de pe regiunea i a barei – față de momentul concentrat M , aplicat în secțiunea transversală arbitrară \mathbf{x} , este egală cu expresia $\mathbf{m}(\mathbf{x}_i)$ a efortului secțional de la solicitarea barei **doar** printr-un moment de mărime **1** care se aplică în secțiunea \mathbf{x} , în același sens cu \mathbf{M} .

$$\frac{\partial M_t(x_i)}{\partial M} = \mathbf{m}(x_i)$$

Prin urmare, rotirea secțiunii de calcul se determină, considerând bara formată din p regiuni, printr-o variantă modificată a relației anterioare, astfel:

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^L \frac{M_t(\mathbf{x})}{G \cdot I_p(\mathbf{x})} \frac{\partial M_t(\mathbf{x})}{\partial M} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \int_0^{L_i} \frac{M_t(x_i)}{G(x_i) \cdot I_p(x_i)} \mathbf{m}(x_i) d\mathbf{x}$$

Aplicarea metodei eforturilor

Rămân valabile explicațiile anterioare, doar că necunoscutele \mathbf{X}_i (deci și încărcările din stările de încărcare fictive) vor fi *momente de răsucire*, iar factorii δ_{ij} se vor calcula prin relații de forma:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^p \int_0^{L_k} \frac{\mathbf{m}^i(x_k) \cdot \mathbf{m}^j(x_k)}{G(x_k) \cdot I_p(x_k)} d\mathbf{x}$$

Indicele regiunilor este aici \mathbf{k} , iar eforturile secționale $\mathbf{m}(\mathbf{x}_k)$ corespund stărilor de solicitare \mathbf{i} și \mathbf{j} ale sistemului de bază; a se vedea aplicarea metodei la rezolvarea barelor static nedeterminate.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Rezolvarea problemelor static nedeterminate

Deoarece momentele de răsucire acționează pe direcția axei longitudinale a barelor, *echilibrul sistemului se exprimă printr-o singură ecuație, cea de proiecții ale momentelor pe axa x*; rezultă că problemele cu bare fixate la ambele capete, pentru care sunt de determinat **două** reacțiuni de tip moment, vor fi *static nedeterminate*.

Calcululele au multe asemănări cu cele din problemele static nedeterminate de la solicitările axiale; este necesară o *ecuație suplimentară* de legătură între necunoscute și încărcările barei.

O astfel de ecuație se obține, de exemplu, pe cale *geometrică*, din condiția ca deplasarea unghiulară reciprocă a capetelor barei să fie nulă (deoarece nici unul nu se poate roti); aceasta înseamnă suma deformațiilor celor **n** regiuni, adică:

$$\Delta\varphi_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_t(x_i) \cdot L_i}{I_p(x_i) \cdot G} = 0$$

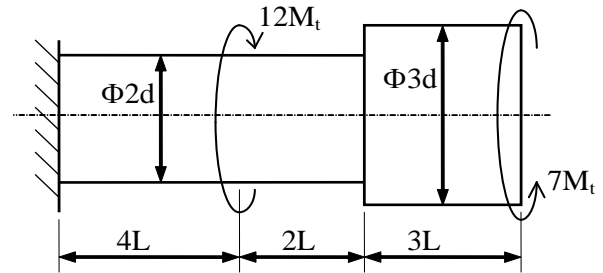
Pe de altă parte, ecuația suplimentară se poate scrie și aplicând una dintre metodele energetice enunțate anterior, pe principiile aplicate la rezolvările similare pentru barele solicitate axial.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Aplicații

1. Fie o bară cilindrică în consolă, din două tronsoane de dimensiuni diferite, solicitată prin momente de răsucire; să se dimensioneze bara (valoarea minimă a parametrului d), dacă se cunosc valorile $M_t=20\text{kNm}$ și $\tau_a=120\text{MPa}$.

Similitudinea raționamentelor la solicitările axiale și la răsucire apare pentru că aceste solicitări sunt ambele produse prin vectori (forțe, respectiv momente) care acționează pe direcția axei longitudinale a barei!



Rezolvare

Punctele unde se aplică momentele delimitează pe bară două regiuni, iar saltul de secțiune de la interfața tronsoanelor conduce la apariția celei de-a treia; se cotează variabila x de la capătul din dreapta al fiecărei regiuni; bara este solicitată numai prin *momente axiale*, deci în încastrare există *un singur tip de reacțiune*, **momentul M** , iar *singura ecuație de echilibru* semnificativă se scrie:

$$M - 12M_t + 7M_t = 0 \quad \text{de unde rezultă} \quad M = 5M_t.$$

Rezultatul pozitiv arată că reacțiunea are, în mod real, sensul indicat pe desen.

A. Trasarea diagramelor

Se stabilesc parametrii solicitării, pe regiuni; deoarece nu există o diferență de efecte între cele două sensuri posibile ale momentelor de răsucire, *semnele eforturilor de acest tip sunt arbitrare!* Pentru ca rezultatul calculelor să fie același, indiferent din ce parte față de secțiune se sumează încărcările, *convenția de semne pentru partea din dreapta trebuie să fie inversă celei din partea stângă!*

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Pentru $x_1 \in (0; 3L)$ $M_t(x_1) = 7M_t = \text{ct.}$

S-a calculat din **dreapta** față de secțiune, luând pozitiv momentul din capătul barei – care, privind din dreapta, rotește *antiorar*. Dacă se sumează momentele din **stânga**, *inversând* convenția de semne, se obține: $M_t(x_1) = -5M_t + 12M_t = 7M_t$ ceea ce confirmă regula menționată mai sus.

Simplificând scrierea prin *notația* $W = \frac{\pi d^3}{16}$ se calculează modulul polar al secțiunilor de pe primul tronson, astfel: $W_p(x_1) = \frac{\pi(3d)^3}{16} = 27 \frac{\pi d^3}{16} = 27W$

Tensiunile maxime din această regiune vor fi:

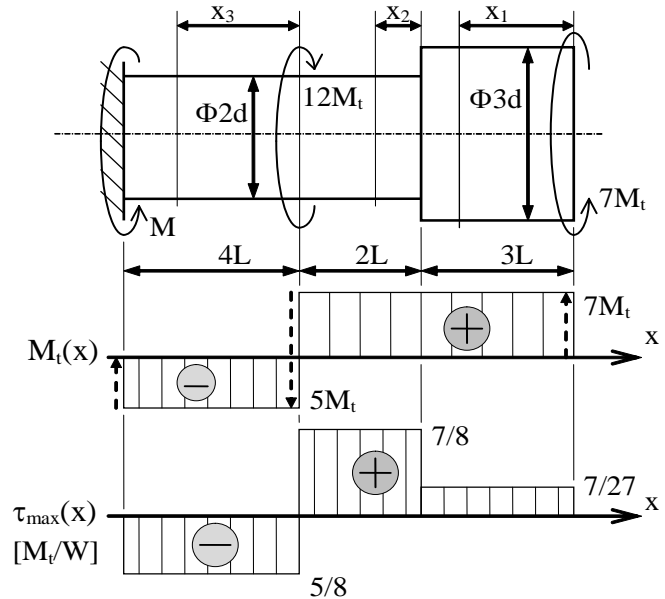
$$\tau_{\max}(x_1) = \frac{M_t(x_1)}{W_p(x_1)} = \frac{7M_t}{27W}$$

Pentru a doua regiune, cu $x_2 \in (0; 2L)$, se obține că

$$M_t(x_2) = 7M_t = \text{ct.} \quad W_p(x_2) = \frac{\pi(2d)^3}{16} = 8 \frac{\pi d^3}{16} = 8W \quad \tau_{\max}(x_2) = \frac{7M_t}{8W}$$

În fine, pentru $x_3 \in (0; 4L)$, valorile sunt:

$$M_t(x_3) = 7M_t - 12M_t = -5M_t = \text{ct.} \quad W_p(x_3) = 8W \quad \tau_{\max}(x_3) = -\frac{5M_t}{8W}$$



Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Folosind aceste rezultate se trasează diagramele, ca mai sus, făcând și câteva observații:

Pentru *diagrama eforturilor de răsucire* $M_t(x)$

- Pe bară există două zone distincte, ca sens al eforturilor secționale.
- Graficul prezintă trei puncte de discontinuitate (salturi – indicate pe desen prin săgeți punctate), care coincid ca punct de apariție, mărime și sens cu momentele concentrate de pe bară.
- Saltul din dreptul reazemului confirmă valoarea reacțiunii M , precum și sensul ei, același cu al momentului $7M_t$ din capătul barei.

Se observă că reacțiunea se poate determina direct, din diagrama de efort, fără a se mai scrie ecuația de echilibru, făcând rezolvarea mai rapidă. Mai trebuie spus că simpla cunoaștere a efortului din secțiunile barei nu ajunge pentru a se evidenția solicitarea maximă; ea va fi influențată de modulul de rezistență al secțiunii unde apare efortul, adică de valorile tensiunilor maxime din bară.

Pentru *diagrama tensiunilor maxime* $\tau_{\max}(x)$

- Valorile sunt diferite pe regiunile barei; discontinuitățile provin din modificările mărimilor $M_t(x)$ și $W_p(x)$, iar salturile nu au semnificație fizică!
- Solicitarea periculoasă (unde bara poate să cedeze) apare în oricare secțiune de pe regiunea de mijloc, de lungime $2L$.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Calculul de rezistență se bazează pe o relație de forma cunoscută:

$$\tau_{\text{ef max}}(x) = \tau_{\text{max}}(x_2) = \frac{7}{8} \frac{M_t}{W} = \frac{7}{8} \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{14 M_t}{\pi d^3} \leq \tau_a \quad (*)$$

Alte observații

1. Este interesant de subliniat că în relație nu apare parametrul L , deci calculele de rezistență nu sunt influențate de lungimea barei.
2. Semnele eforturilor de răsucire fiind arbitrare, se scrie o singură condiție de rezistență, folosind valoarea maximă, *în modul*, a tensiunii efective din piesă.

B. Dimensionarea barei

Din condiția de mai sus rezultă, pe baza datelor problemei, că:

$$d_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{14 M_t}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{14 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{\pi \cdot 120 \text{ N/mm}^2}} = 90,56 \text{ mm}$$

De aici se adoptă o valoare convenabilă pentru piesa concretă a parametrului d , de exemplu $d_{\text{ad}} = 100 \text{ mm}$.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

2. Pentru bara de mai sus să se traseze diagrama de variație, pe axa longitudinală, a funcției rotirilor secțiunilor transversale $\Delta\varphi(\mathbf{x})$; se mai cer următoarele:
- Să se calculeze valoarea celei mai mari rotiri a unei secțiuni, dacă se cunosc $L=0,1\text{m}$, $G=8\cdot 10^4\text{MPa}$, $M_t=20\text{kN}\cdot\text{m}$ și $d=100\text{mm}$ (adoptat anterior).
 - Să se determine cât de mare poate fi valoarea parametrului M_t pentru ca rotirea maximă să nu depășească **o zecime de grad**.

Rezolvare

Bara fiind solicitată numai la răsucire, secțiunile ei se vor deplasa prin **rotire**, în sens *orar* sau *trigonometric*, față de poziția pe care o au în bara lipsită de încărcări; din studiul anterior rezultă, pe baza consecințelor 1 și 3 de mai sus, că:

- ⇒ deformația absolută a fiecărui tronson se calculează cu formula deplasărilor unghiulare;
- ⇒ funcția rotirilor $\Delta\varphi(\mathbf{x})$ are gradul cu o unitate mai mare ca al funcției $M_t(\mathbf{x})$, deci va fi o funcție de *gradul întâi* (liniară);
- ⇒ întrucât nu interesează expresia analitică a acestei funcții, ci valorile (deci *graficul*) ei, e suficient să se calculeze aceste valori pentru *secțiunile de capăt* ale celor trei regiuni de pe bară, iar graficul se obține prin unirea, cu *segmente de dreaptă*, a acestor trei puncte.

Este clar că unul dintre punctele de pe grafic este cunoscut de la început, deoarece capătul prins în reazem al barei *nu se poate roti*, încât graficul va începe de la valoarea zero; studiul se continuă apoi, cu regula de calcul de mai sus, parcurgând imaginar bara, din reazem către capătul liber, cu păstrarea notațiilor din etapa anterioară de rezolvare a problemei.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Mai întâi se calculează momentele polare de inerție ale secțiunilor transversale:

$$I = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_p(x_1) = \frac{\pi(3d)^4}{32} = 81 \frac{\pi d^4}{32} = 81 \cdot I; \quad I_p(x_2) = I_p(x_3) = \frac{\pi(2d)^4}{32} = 16I$$

Păstrând convenția de a exprima toate mărimile în funcție de anumiți parametri literali, unghiurile cu care se rotesc (față de reazem, sau de poziția lor în bara nesolicitată) secțiunile de capăt, dinspre dreapta, ale celor trei tronsoane de bară, calculate folosind relația cunoscută, vor fi următoarele:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x_3=0) &= \frac{M_t(x_3) \cdot 4L}{G \cdot I_p(x_3)} = \frac{(-5M_t) \cdot 4L}{G \cdot 16I} = -\frac{5}{4} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \\ \Delta\varphi(x_2=0) &= \left[\Delta\varphi(x_3=0) + \frac{M_t(x_2) \cdot 2L}{G \cdot I_p(x_2)} \right] = -\frac{5}{4} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} + \frac{7M_t \cdot 2L}{G \cdot 16I} = -\frac{3}{8} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \\ \Delta\varphi(x_1=0) &= \left[\Delta\varphi(x_2=0) + \frac{M_t(x_1) \cdot 3L}{G \cdot I_p(x_1)} \right] = -\frac{3}{8} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} + \frac{7M_t \cdot 3L}{G \cdot 81I} = -\frac{25}{216} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \end{aligned}$$

Aceste valori se regăsesc pe diagrama de mai jos a rotirilor secțiunilor transversale ale barei; semnul rotirilor este dat de eforturile secționale (pentru care semnul a fost ales arbitrar), deci rotirile tuturor secțiunilor se produc în sensul momentului concentrat considerat negativ, adică $12M_t$; rotirea *maximă* are loc în secțiunea de la capătul tronsonului de lângă reazem.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Este remarcabil că *exprimarea rotirii oricărei secțiuni depinde de reperul ales*; calculele s-au făcut față de secțiunea din reazem, care nu se poate roti (se exprimă rotirile față de pozițiile secțiunilor în bara fără solicitare). Luând ca reper, de ex., secțiunea $x_3=0$, se obțin rotiri de semn pozitiv ale celorlalte două secțiuni de calcul (fracțiile de pe regiunile din dreapta sunt pozitive).

a) Calculul unghiului maxim de rotire efectivă

Se introduc datele din enunț în expresia valorii maxime:

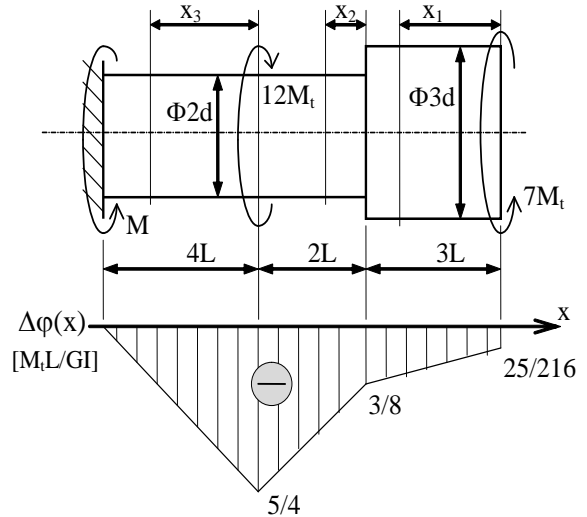
$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{5}{4} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{5}{4} \frac{32 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ N mm} \cdot 100 \text{ mm}}{8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot (100 \text{ mm})^4} = \frac{1}{100 \pi} \text{ rad} = 0,182 \text{ grd}$$

b) Calculul momentului admisibil, dacă se limitează deformația unghiulară

Din criteriul de rigiditate se determină valoarea maximă permisă a parametrului momentelor de răsucire; egalând expresia de mai sus a unghiului maxim cu rotirea admisibilă $\Delta\varphi_a = 0,1 \text{ grd}$, se obține:

$$M_{t \text{ cap}} = \frac{4}{5} \frac{G \cdot \pi d^4 \cdot \Delta\varphi_a}{32 L} = \frac{4}{5} \frac{8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi (100 \text{ mm})^4 \cdot \left(0,1 \text{ grd} \frac{\pi}{180 \text{ grd}}\right)}{32 \cdot 100 \text{ mm}}$$

Ultima paranteză de la numărător reprezintă relația de transformare, din grade în radiani, a valorii unghiului de rotire maxim admis; efectuând calculele se obține $M_{t \text{ cap}} = 10966 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$ deci, pentru a se respecta limita de deformabilitate impusă, valoarea parametrului M_t nu trebuie să depășească 11 kNm .



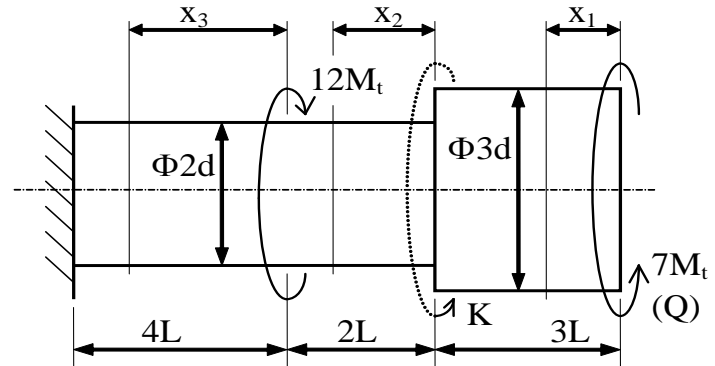
Răsucirea barelor de secțiuni circulare

3. Se ia în considerare tot schema de solicitare anterioară, la care s-au făcut calcule de rezistență și de rigiditate; să se afle, folosind *teoremele energetice*, **rotirile** secțiunilor de la capetele tronsonului de diametru $3d$.

A. Rezolvare pe baza teoremei lui Castigliano

Pentru aplicarea teoremei este necesar ca în secțiunile de calcul să acționeze momente concentrate de răsucire, *exprimate independent de celelalte încărcări din sistem*; în acest sens se notează Q momentul $7M_t$ din capătul liber al barei, iar în capătul celălalt al tronsonului din dreapta se introduce un moment fictiv K (de mărime reală zero), alegând să aibă sensul lui Q ; regiunile se iau la fel ca în aplicația precedentă, iar eforturile secționale și derivatele lor

parțiale în funcție de momentele considerate vor fi:



Regiunea	$M_t(x_i)$	$\frac{\partial M_t(x_i)}{\partial Q}$	$\frac{\partial M_t(x_i)}{\partial K}$
$(\forall) x_1 \in (0; 3L)$	Q	1	0
$(\forall) x_2 \in (0; 4L)$	$Q + K$	1	1
$(\forall) x_3 \in (0; 2L)$	$Q + K - 12M_t$	1	1

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

Rotirea capătului liber ($x_1=0$) se obține introducând în relația teoremei termenii corespunzători lui Q și dând eforturilor $M_t(x_i)$ valoarea lor reală ($Q=7M_t$ și $K=0$):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x_1=0) &= \frac{\partial U}{\partial Q} = \sum_{i=1}^3 \int_{(L_i)} \frac{M_t(x_i)}{G \cdot I_p(x_i)} \frac{\partial M_t(x_i)}{\partial Q} dx = \\ &= \int_0^{3L} \frac{7M_t}{G \cdot 81 \cdot I} \cdot 1 dx + \int_0^{2L} \frac{7M_t}{G \cdot 16 \cdot I} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5M_t)}{G \cdot 16 \cdot I} \cdot 1 dx = \\ &= \frac{M_t}{G \cdot I} \left(\frac{7}{81} \cdot 3L + \frac{7}{16} \cdot 2L - \frac{5}{16} \cdot 4L \right) = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \frac{56 + 7 \cdot 27 - 10 \cdot 27}{27 \cdot 8} = - \frac{25}{216} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I}\end{aligned}$$

Un calcul analog, în raport cu momentul fictiv K , duce la aflarea rotirii secțiunii de la celălalt capăt ($x_2=0$) al tronsonului din dreapta, astfel:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x_2=0) &= \frac{\partial U}{\partial K} = \sum_{i=1}^3 \int_{(L_i)} \frac{M_t(x_i)}{G \cdot I_p(x_i)} \frac{\partial M_t(x_i)}{\partial K} dx = \\ &= \int_0^{3L} \frac{7M_t}{G \cdot 81 \cdot I} \cdot 0 dx + \int_0^{2L} \frac{7M_t}{G \cdot 16 \cdot I} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5M_t)}{G \cdot 16 \cdot I} \cdot 1 dx = \\ &= \frac{M_t}{G \cdot I} \left(\frac{7}{16} \cdot 2L - \frac{5}{16} \cdot 4L \right) = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \frac{7 - 10}{8} = - \frac{3}{8} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I}\end{aligned}$$

Valorile obținute coincid cu cele de la calculul prin metoda geometrică; semnul lor **negativ** arată că secțiunile de calcul se rotesc **invers** față de momentele concentrate care le încarcă, ceea ce s-a observat și din calcule anterioare.

Răsucirea barelor de secțiuni circulare

B. Rezolvare prin metoda Mohr-Maxwell

Se introduc momente *fictive egale cu 1* în secțiunile de calcul, bara fiind *eliberată* de alte solicitări; păstrând împărțirea anterioară în regiuni, se obțin eforturile secționale de răsucire:

$$m^1(x_1)=m^1(x_2)=m^1(x_3)=1; \quad m^2(x_1)=0; \quad m^2(x_2)=m^2(x_3)=1$$

Atenție: Pentru ca metoda să se aplice corect, se păstrează obligatoriu aceeași împărțire în regiuni și aceeași convenție de semne pentru toate stările de solicitare studiate!

Valorile eforturilor se introduc în câte o relație a acestei teoreme, pentru fiecare dintre cele două stări fictive de încărcare; deplasările unghiulare căutate se vor calcula astfel:

$$\Delta\varphi(x_1 = 0) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{M_t(x_i)}{G \cdot I_p(x_i)} m^1(x_i) dx = \int_0^{3L} \frac{7M_t}{G \cdot 81I} \cdot 1 dx + \int_0^{2L} \frac{7M_t}{G \cdot 16I} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5M_t)}{G \cdot 16I} \cdot 1 dx$$

$$\Delta\varphi(x_2 = 0) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \frac{M_t(x_i)}{G \cdot I_p(x_i)} m^2(x_i) dx = \int_0^{3L} \frac{7M_t}{G \cdot 81I} \cdot 0 dx + \int_0^{2L} \frac{7M_t}{G \cdot 16I} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(-5M_t)}{G \cdot 16I} \cdot 1 dx$$

Integralele coincid cu cele obținute la rezolvarea pe baza metodei anterioare, iar diferența în aplicarea celor două teoreme apare exclusiv la calculul derivatelor parțiale.

1.7

Calculul convențional la forfecare

Calculul convențional la forfecare

Forfecarea este solicitarea produsă de două forțe, de mărimi egale și de sensuri opuse (numite *forțe tăietoare*), acționând de o parte și de alta a unei bare, într-o aceeași secțiune transversală, pe direcție perpendiculară pe axa ei longitudinală.

Efectul produs în bară este *dislocarea* părților de corp separate de respectiva secțiune transversală, care devine *aria de forfecare* a barei.

Pentru a se putea produce forfecarea, adică lunecarea reciprocă a celor două fețe ale ariei de forfecare, este necesar să existe o distanță infinit mică ($\varepsilon \rightarrow 0$) între direcțiile celor două forțe (care deci nu pot fi coliniare)! Acest lucru se remarcă în construcția foarfecilor sau a ghilotinei, ale căror lame tăietoare nu se pot afla în același plan.

Calculul convențional la forfecare

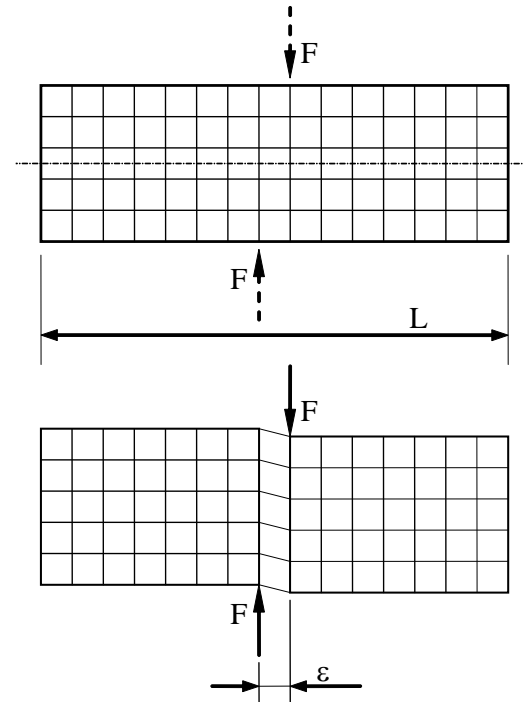
Tensiuni și deformații

Se consideră o bară prismatică de lungime L , pe a cărei suprafață se trasează o rețea de pătrate egale. Aplicând asupra ei două forțe de forfecare, conform definiției, se observă efectele solicitării:

⇒ În secțiunea de lucru apare un plan de dislocare, pe care fețele secțiunii se deplasează reciproc. Rezultă că în bară (mai precis în secțiunea de forfecare) se produc deformații specifice de alunecare (alunecări specifice) γ , produse de niște tensiuni de tip tangențial τ .

⇒ Cu excepția dislocării, dimensiunile și forma barei nu suportă modificări.

⇒ Mărind forțele, dislocarea continuă, până la ruperea barei, aria de rupere fiind egală cu aria secțiunii de forfecare.



Calculul convențional la forfecare

Deducerea relației pentru calculul de rezistență

În principiu, pe suprafețele de forfecare din barele uzuale particulele de material nu preiau în mod egal solicitarea, adică tensiunile nu se distribuie uniform pe secțiuni. Totuși, fiind o solicitare tipică elementelor de îmbinare, care au dimensiuni mici, se admite o distribuție aproximativ uniformă a tensiunilor, pentru toate punctele secțiunilor de forfecare, ceea ce permite un calcul simplu al mărimii efective a tensiunilor.

Secțiunea de forfecare trebuie să se afle în echilibru, sub acțiunea forței F și a forței date de sumarea efectelor tensiunilor tangențiale, ceea ce se exprimă printr-o ecuație de forma:

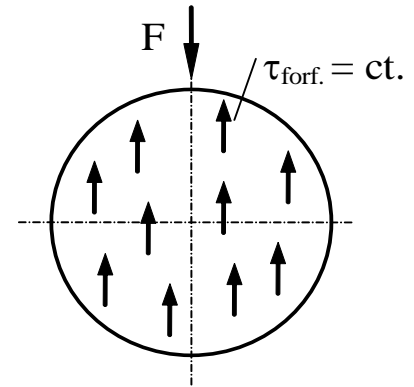
$$F = \iint_A \tau(x) dA$$

Tensiunile $\tau(x)$ sunt considerate constante și se extrag în afara integralei din dreapta, care va fi chiar mărimea ariei de forfecare, iar relația pentru calculul tensiunilor se scrie:

$$\tau_{\text{ef forf}} = \text{ct.} = \frac{F_{\text{forf}}}{A_{\text{forf}}} \quad [\text{MPa}]$$

Așadar, tensiunile tangențiale de forfecare se calculează ca raport între forța care produce solicitarea și mărimea ariei de material care tinde să se disloce.

Acest mod de lucru se bazează pe o aproximare (grosieră, pentru piesele de dimensiuni mari) a realității și este numit **calcul convențional la forfecare**; pentru categoriile de aplicații de mai jos, calculul convențional este într-un totu acceptabil; pentru alte cazuri de solicitare, cum sunt lunecările longitudinale ce apar la încovoierea grinzilor compuse, se folosesc metode riguroase de calcul.



Calculul convențional la forfecare

Calculule bazate pe criteriul de rezistență

Pentru orice bară solicitată la forfecare, valorile tensiunilor tangențiale nu trebuie să depășească rezistența admisibilă (τ_{af}) a materialului său.

În funcție de scopul urmărit, calculele de rezistență pot avea trei forme:

a) **Verificarea** corectitudinii proiectării piesei, adică a respectării inegalității

$$\tau_{ef \max} \leq \tau_{af}$$

Dacă sensul inegalității nu se respectă, se măresc dimensiunile secțiunii de calcul, sau se produce piesa din material cu rezistență la forfecare mai mare decât a celui inițial.

b) Aflarea forței *maxime* de forfecare (**forța capabilă**) pentru bara studiată:

$$F_{cap} = A_{forf} \cdot \tau_{af} \geq F_{forf}$$

c) **Dimensionarea** piesei - stabilirea dimensiunilor necesare ale secțiunii de forfecare:

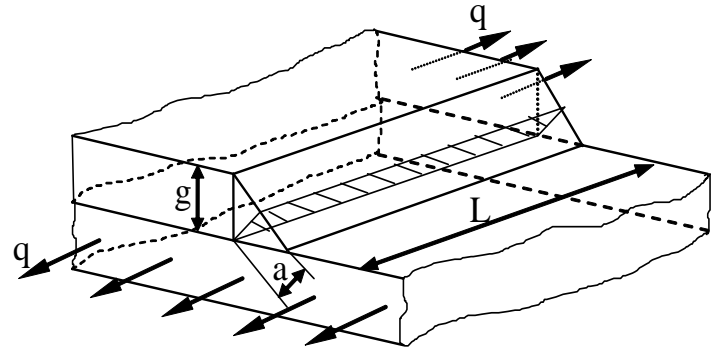
$$A_{nec} = \frac{F_{forf}}{\tau_{af}} \leq A_{ef \text{ forf}}$$

Problema cea mai importantă în aceste calcule este definirea corectă a forței care produce solicitarea, respectiv a suprafeței ariilor de forfecare. Exemple tipice de astfel de solicitări sunt întâlnite la diverse categorii de îmbinări (între două sau mai multe foi de tablă, între arbori și piesele pe care le pun în mișcare s.a.m.d.), dar și în procesele tehnologice de tăiere a materialelor, pe diferite contururi.

Calculul convențional la forfecare

A. Calculul îmbinărilor sudate

Sudurile sunt îmbinări *nedemontabile*, având ca element principal “cordonul” din material de adaos, care solidarizează niște elemente metalice. Distrugerea sudurilor se produce, în general, sub acțiunea unor solicitări de forfecare.



Se consideră un cordon de sudură “de colț”, în formă de prismă dreaptă, cu baza *triunghi dreptunghic isoscel*, îmbinând două table suprapuse, solicitate prin forțe de tracțiune; se admite, din observațiile experimentale, că ruperea prin forfecare a cordonului se produce de-a lungul planului longitudinal ce conține înălțimea triunghiului de bază a ; *aria de forfecare* a cordonului de sudură are formă de *dreptunghi*, o latură fiind lungimea sudurii L_s , iar cealaltă înălțimea $a = g\sqrt{2}/2$, g fiind grosimea tablei mai subțiri.

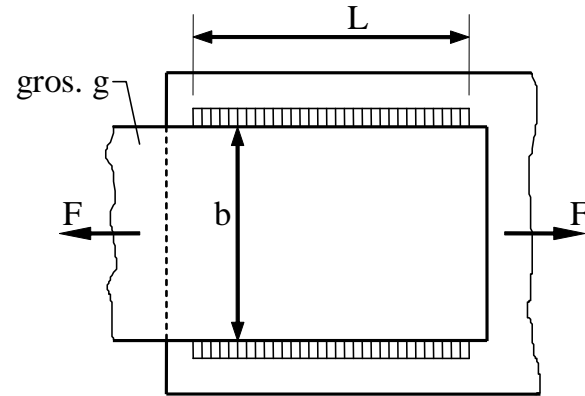
Întrucât sunt posibile imperfecțiuni tehnologice ale cordonului, se recomandă ca lungimea lui reală să se adopte ceva mai mare decât lungimea de calcul a sudurii: $L = L_s + 2a$.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu de calcul

Pentru îmbinarea din figură se dau lățimea $b=300\text{mm}$, grosimea tablei mai subțiri $g=5\text{mm}$, rezistența admisibilă a tablelor la tracțiune $\sigma_{\text{atb}}=150\text{MPa}$ și a cordoanelor de sudură, la forfecare, $\tau_{\text{as}}=80\text{MPa}$; se cer:

- Forța *maximă* aplicabilă tablelor.
- Dimensionarea cordoanelor de sudură, pentru ca forța *capabilă* a îmbinării să fie egală cu a tablelor.



Rezolvare

Trebuie remarcat, asupra tablelor îmbinate, că e suficient calculul de rezistență pentru tabla de lățime mai mică, rezistența celeilalte fiind garantată implicit, prin dimensiunile mai mari ale secțiunii transversale; acest raționament se va regăsi, pentru ansamblurile ce conțin mai multe piese de același fel: calculul lor se face o dată, pentru piesa cea mai sensibilă, sau care este solicitată cel mai puternic.

Calculul convențional la forfecare

a) Tensiunea de calcul, la tracțiune, pentru table, este: $\sigma_{\text{ef tb}} = \frac{F}{A_{\text{ef}}} = \frac{F}{b \cdot g} \leq \sigma_{\text{atb}}$

Forța capabilă a tablelor va fi:

$$F_{\text{cap tb}} = b \cdot g \cdot \sigma_{\text{atb}} = 300 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 225 \text{ kN}$$

b) Calculul la forfecare pentru cordoanele de sudură se face din relația următoare:

$$\tau_{\text{ef sud}} = \frac{F_f}{A_f} = \frac{F}{2(L_s \cdot a)} = \frac{F}{2L_s \frac{g\sqrt{2}}{2}} = \frac{F}{L_s g\sqrt{2}} \leq \tau_{\text{as}}$$

Mărimea necunoscută este lungimea L_s a cordoanelor:

$$L_{s \text{ min}} = \frac{F}{\tau_{\text{as}} \cdot g\sqrt{2}} = \frac{225 \cdot 10^3 \text{ N}}{80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 5 \text{ mm} \sqrt{2}} = 397,75 \text{ mm}$$

Pe baza acestui calcul și a observațiilor anterioare, se adoptă o valoare convenabilă a lungimii cordoanelor, cum ar fi, de exemplu, $L=42\text{cm}$.

Calculul convențional la forfecare

B. Calculul forțelor tehnologice la operația de tăiere

Tăierea metalelor și a altor materiale livrate ca table sau foi se face în două moduri:

⇒ din aproape în aproape, pe contururi formate din linii drepte, cu ajutorul unor utilaje de tip *foarfece* (ghilotine);

⇒ pe un contur de formă complexă, dintr-o singură apăsare cu forța activă, prin intermediul unor utilaje numite ștanțe, care pot fi de *retezare*, de *decupare* (pe un contur deschis) sau de *perforare* (pe un contur închis).

Pentru tăierea tablei trebuie depășită, prin solicitarea aplicată, **rezistența la rupere** prin forfecare (τ_{rf}) a materialului; se notează g - grosimea tablei, L_C - lungimea totală a conturului tăiat, la o singură aplicare a forței active; forța necesară pentru tăiere va fi:

$$F_{nec} = L_C \cdot g \cdot \tau_{rf}$$

De obicei, mai ales la producția de serie, operațiile de tăiere se execută prin montarea ștanțelor pe mașini de presare (prese) ce dezvoltă forțe suficient de mari pentru prelucrarea simultană a mai multor piese, sau pentru tăierea tablelor de grosimi mari. Pentru realizarea corectă și în condiții de siguranță a operației, se consideră că forța dezvoltată de presă (**forța tehnologică**) trebuie să fie măcar cu 30% mai mare decât forța de calcul, ceea ce se scrie sub forma:

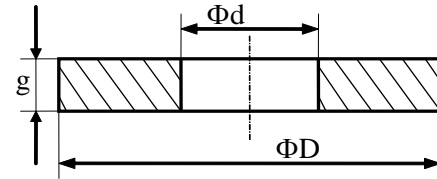
$$F_{t \min} = 1,3 \cdot F_{nec}$$

Pe această bază se alege mașina (presa) pe care se execută operația proiectată.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu de calcul

Să se determine forța tehnologică pentru fabricarea, prin perforare, a șaibe din figură, având diametrele $d=8\text{mm}$ și $D=20\text{mm}$. Piesa se prelucerează din tablă de oțel, cu grosimea $g=2,5\text{mm}$ și rezistența la forfecare $\tau_{rf}=280\text{MPa}$. Să se precizeze câte șaibe se pot prelucra simultan, dacă este folosită o presă cu forța maximă de 50tf.



Notă: Kilogramul-forță și tona-forță sunt unități vechi de măsură, care în prezent nu mai sunt acceptate în Sistemul Internațional. Totuși ele se regăsesc, de exemplu, în exprimarea informală a caracteristicilor mașinilor-unelte; transformările de unități se fac astfel: $1\text{tf}=10^3\text{kgf}=9,81\cdot 10^3\text{N}\approx 10^4\text{N}$.

Rezolvare

Lungimea conturului prelucrat la o apăsare, pentru o șaibă, va fi: $L_C = \pi d + \pi D$

Relația pentru calculul forței tehnologice minime se scrie: $F_{t\min} = 1,3 \pi (D + d) \cdot g \cdot \tau_{rf}$
iar datele numerice ale problemei conduc la:

$$F_{t\min} = 1,3 \pi (20\text{mm} + 8\text{mm}) \cdot 2,5\text{mm} \cdot 280\text{N/mm}^2 = 8 \cdot 10^4\text{N}$$

Rezultă că pe o presă de 50tf se pot prelucra simultan un număr de șase piese.

Calculul convențional la forfecare

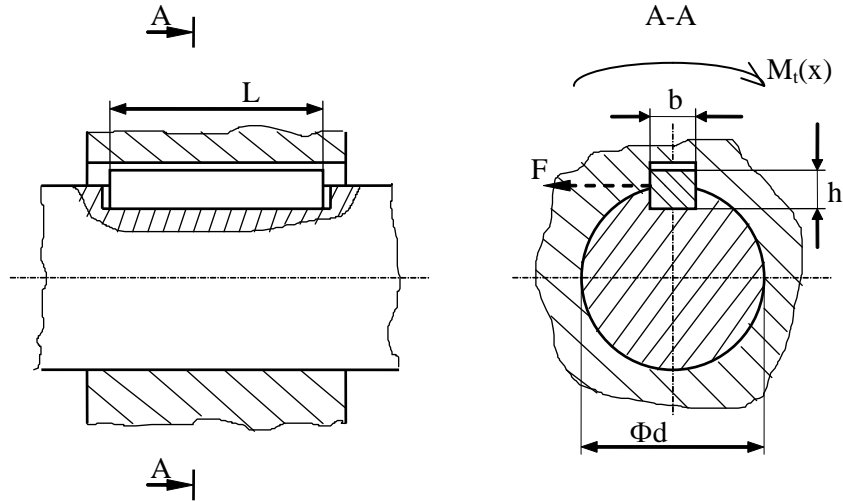
C. Calculul penelor longitudinale

Penele longitudinale sunt folosite pentru îmbinarea demontabilă a arborilor de transmisie cu piesele pe care le pun în mișcare, așa cum sunt roțile dințate.

Desenul prezintă o astfel de îmbinare, în două vederi: arborele are diametrul d , iar pana este prismatică, de dimensiuni L , b , h ; pentru a stabili forța care soliciță

pana, se scrie echilibrul momentelor din îmbinare, calculate în raport cu axa longitudinală a arborelui. Momentul transmis de arbore are mărimea $M_t(x)$, iar forța de reacțiune asupra penei (notată F) are – față de axa luată ca reper – brațul $d/2$:

$$M_t(x) = F \cdot \frac{d}{2} \Leftrightarrow F = \frac{2 M_t(x)}{d}$$



Calculul convențional la forfecare

Penele longitudinale trebuie să suporte două feluri de solicitări:

- a) **Forfecare** – aria de rupere (A_f) este secțiunea mediană longitudinală a penei, având lățimea b și lungimea L , adică $A_f = b \cdot L$.
- b) **Strivire** – pe suprafața laterală de contact dintre pană și arbore, în formă de dreptunghi, de dimensiuni L și $h/2$, adică $A_{str} = L \cdot h/2$.

Cunoscând caracteristicile de rezistență ale materialului și calculând forța F , se stabilesc dimensiunile necesare ale penei; la fel ca alte elemente de îmbinare, penele longitudinale sunt *standardizate*, în corespondență cu diametrul arborelui de destinație, încât ultima etapă a proiectării îmbinării este adoptarea din standard a penei cu dimensiuni imediat superioare celor calculate.

Trebuie remarcată orientarea ariilor de rupere ale barelor în diferite cazuri de solicitare: la solicitările *axiale* (inclusiv la strivire) cedarea se produce în plane *perpendiculare* pe direcția forței active, pe când la *forfecare* (a se vedea și cazul penelor longitudinale) aria de rupere se află într-un plan care include forța de forfecare (dislocarea și ruperea se produc *pe direcția forței*); aceste concluzii simplifică raționamentele pentru stabilirea solicitărilor pe care trebuie să le suporte o piesă dată.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu de calcul

Să se determine momentul maxim $M_{t\text{ cap}}$ ce poate fi transmis de un arbore cu diametrul $d=40\text{mm}$, prin intermediul penei cu $b=8\text{mm}$, $h=7\text{mm}$ și $L=50\text{mm}$; se cunosc rezistențele admisibile ale materialului penei: $\tau_a=85\text{MPa}$ și $p_{a\text{ str}}=200\text{MPa}$.

Rezolvare

Se calculează forța maximă pe care o poate prelua pana, pentru fiecare dintre cele două solicitări, astfel:

a) pentru *forfecare*

$$\tau_{\text{ef}} = \frac{F}{b \cdot L} \leq \tau_a \Rightarrow F_{\text{cap f}} = b \cdot L \cdot \tau_a = 8\text{mm} \cdot 50\text{mm} \cdot 85 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 34000\text{N}$$

b) pentru *strivire*

$$p_{\text{ef}} = \frac{F}{L \cdot \frac{h}{2}} \leq p_{\text{astr}} \Rightarrow F_{\text{cap}} = \frac{1}{2} L \cdot h \cdot p_{\text{astr}} = \frac{1}{2} 50\text{mm} \cdot 7\text{mm} \cdot 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 35000\text{N}$$

Forța ce poate fi admisă este *cea mai mică* dintre aceste valori, adică $F_{\text{cap}}=34\text{kN}$, încât momentul maxim transmisibil de către arborele considerat va fi:

$$M_{t\text{ cap}} = F_{\text{cap}} \cdot \frac{d}{2} = 34000\text{N} \cdot \frac{40\text{mm}}{2} = 680 \cdot 10^3 \text{Nmm} = 680\text{Nm}$$

1.8

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Încovoierea este solicitarea produsă în barele încărcate cu vectori de tip **moment** perpendiculari pe axa lor longitudinală; efectul produs în bare este **rotirea axei**, în jurul direcției momentului încovoietor.

Dacă această direcție reprezintă una dintre *axele principale centrale* ale secțiunii transversale a barei, se spune că se produce o încovoiere **simplică**; în caz *contrar* vectorul moment se descompune, pe direcțiile axelor principale **y** și **z**, iar solicitarea este **compusă**, fiind numită încovoiere **dublă** (oblică); aspectele abordate aici se referă la încovoierea **simplică**.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

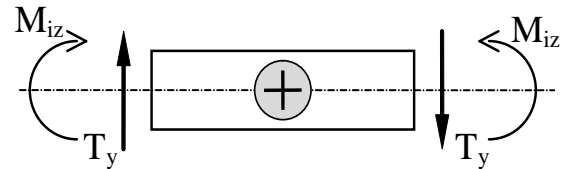
Forțe tăietoare și momente de încovoiere

Barele care preiau încovoiere se numesc de obicei *grinzi*; este de remarcat că această solicitare este produsă nu doar de către momentele concentrate propriu-zise, ci și de forțele care nu au direcția axei barei, dar se află într-un plan longitudinal al ei (yGx sau zGx), încât eforturile din secțiunile grinzilor vor fi de două categorii:

⇒ forțe tăietoare, $T_y(x)$ sau $T_z(x)$;

⇒ momente încovoietoare, $M_{iy}(x)$ sau $M_{iz}(x)$.

Trebuie observat că forțele de pe axa y produc momente dirijate perpendicular pe planul (yGx), deci având direcția axei z ; reciproc, forțele aflate în planul (zGx) produc momente de încovoiere dirijate pe direcția axei y ; prezentarea de mai jos se referă în principiu la încovoierea din planul (yGx), caracterizată de eforturile secționale $T_y(x)$ și $M_{iz}(x)$; se înțelege că, pentru încovoierea produsă în celălalt plan principal, raționamentele vor fi cu totul similare.



Pentru încovoierea din planul (yGx), sensurile încărcărilor care produc, în expresiile eforturilor secționale, efecte considerate (prin convenție) **pozitive**, sunt indicate în figura de mai sus, separat pentru calculul făcut din partea stângă, respectiv din dreapta, în raport cu secțiunea de calcul.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Relații diferențiale între eforturi

Se poate demonstra că sunt întotdeauna adevărate următoarele relații diferențiale, între expresiile eforturilor din orice secțiune transversală a unei bare supuse la încovoiere:

$$\frac{dT_y(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM_{iz}(x)}{dx} = T_y(x)$$

Reguli de calcul:

- ◇ Derivata în raport cu variabila de poziție x a expresiei efortului tăietor $T_y(x)$ este expresia forței distribuite $q(x)$ din secțiunea considerată.
- ◇ Derivata în raport cu x a expresiei efortului de încovoiere $M_{iz}(x)$ este expresia matematică a forței tăietoare $T_y(x)$ din secțiunea considerată.

Semnul membrului drept din expresii va fi direct influențat de convenția de semne definită mai sus: dacă expresiile sunt stabilite pentru încărcările *din partea dreaptă*, față de secțiunea de calcul, atunci cele două eforturi au convenții de semne *inverse* (forțele tăietoare pozitive produc momente de semn negativ față de secțiune), iar derivata expresiei momentului va fi egală cu $[-T_y(x)]!$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Relații diferențiale între eforturi

Se deduc două *consecințe* privind *expresiile* eforturilor secționale de încovoiere:

1. Între expresiile matematice $M_{iz}(x)$ și $T_y(x)$, respectiv între $T_y(x)$ și $q(x)$ din orice secțiune transversală a unei bare sollicitate la încovoiere există toate legăturile dintre o funcție matematică și derivata ei (panta graficului, monotonia funcției, puncte de extrem).
2. Dacă expresiile sunt de tip polinomial, atunci funcția $M_{iz}(x)$ are gradul *cu o unitate mai mare* decât funcția $T_y(x)$, iar aceasta are gradul *cu o unitate mai mare* față de funcția $q(x)$, pe orice regiune a barei calculate.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

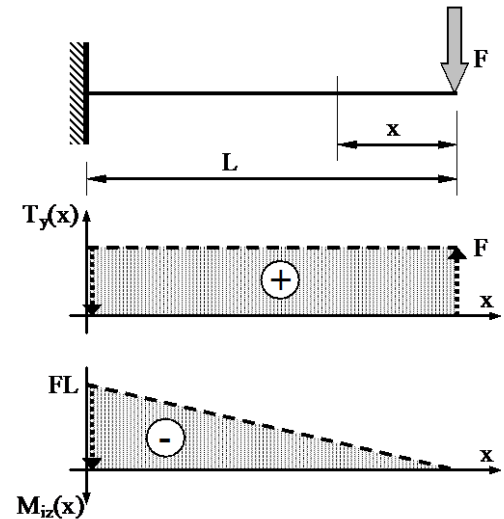
Pentru înțelegerea schemelor de mai jos trebuie precizat că diagramele momentelor de încovoiere sunt singurele care se reprezintă cu *valorile pozitive sub axa x* (astfel așezată, diagrama are forma pe care o va lua axa barei după ce se va produce încovoierea)!

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

1. Bare în consolă

Aceste două cazuri de solicitare sunt simplu de studiat, după regulile generale și convențiile de semne arătate anterior, încât schemele de mai jos pot fi considerate suficiente pentru înțelegerea rezolvării lor.

Este remarcabil că, pentru solicitarea cu **forță concentrată** F , eforturile *tăietoare* sunt constante, pe toată lungimea barei, încât eforturile *de încovoiere* trebuie să varieze *liniar*, crescând de la stânga către dreapta (pentru că derivata acestei funcții de gradul întâi este pozitivă!) și având valoarea maximă (în modul!) în dreptul reazemului.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

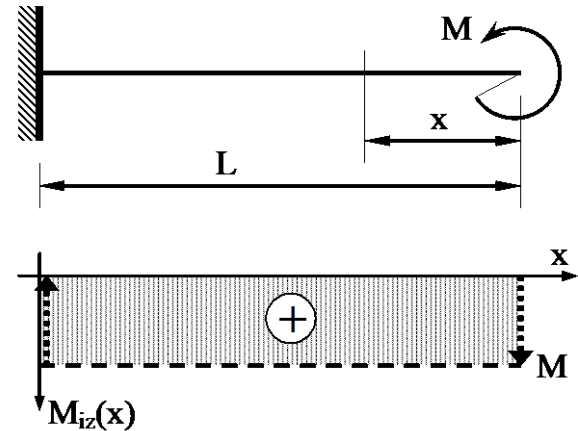
Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

1. Bare în consolă

Dacă încărcarea este un **moment** de încovoiere **concentrat** M , eforturile tăietoare sunt nule pe lungimea grinzii, implicând o funcție constantă a momentelor.

Aceste evoluții apar indiferent ce formă are axa unei grinzi în consolă, încât sunt valabile, de la punctul unde acționează momentul și până la reazem, inclusiv pentru barele *curbe* sau *cotite* care au ca singură încărcare un moment concentrat de încovoiere.



$$M_{iz}(x) = ct = M \quad T_y(x) = ct = 0$$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

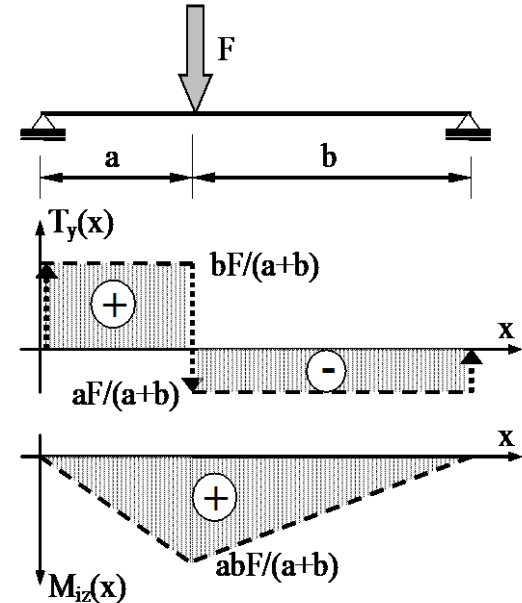
2. Bare așezate pe reazeme simple

a. Solicitarea de încovoiere în trei puncte

La modul general încărcarea se face într-un punct oarecare de pe grindă, iar solicitarea în ansamblu, ca și diagramele de eforturi ce îi corespund *nu prezintă simetrii!*

Forțele tăietoare sunt constante, pe regiuni, la valoarea uneia dintre reacțiuni (cea din reazemul de la capătul regiunii), încât cele trei *salturi* de pe diagrama $T_y(x)$ sunt date de reacțiuni și de forța exterioară F .

Pe diagrama momentelor de încovoiere este de remarcat că, funcția fiind *liniară* pe regiuni (și pornind obligatoriu în capetele barei de la 0, întrucât în acele secțiuni nu apar momente concentrate), momentul maxim se obține chiar în secțiunea unde acționează forța exterioară.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

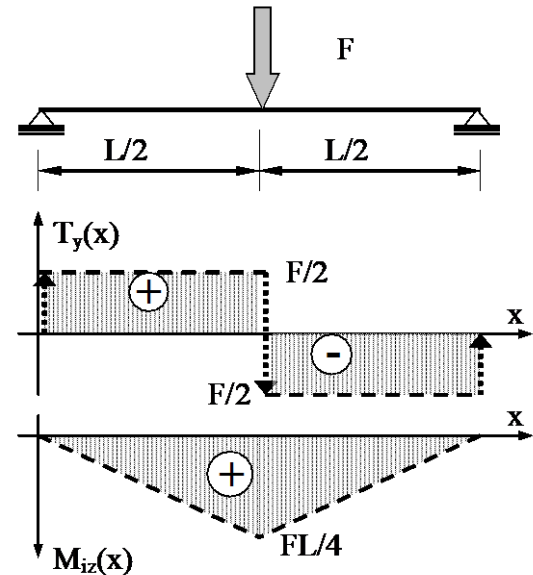
2. Bare așezate pe reazeme simple

a. Solicitarea de încovoiere în trei puncte

În mod frecvent se folosește solicitarea **simetrică** cu forța F aplicată la mijlocul lungimii grinzii; evoluțiile eforturilor secționale se produc după aceleași principii ca în cazul nesimetric, cu particularitatea importantă că diagrama de momente se obține *simetrică*, iar cea de forțe tăietoare – *antisimetrică*. Aceste calități se vor regăsi pentru orice construcție formată din bare (drepte, cotite sau curbe), astfel:

- pentru construcțiile *simetrice*, solicitate *simetric*, diagramele $N(x)$ și $M_i(x)$ sunt *simetrice*, iar diagrama $T(x)$ – *antisimetrică*;
- pentru construcțiile *simetrice*, solicitate *antisimetric*, diagramele $N(x)$ și $M_i(x)$ sunt *antisimetrice*, iar diagrama $T(x)$ – *simetrică*.

Schema de solicitare simetrică în trei puncte este folosită în mod tipic la realizarea în laborator a încercărilor mecanice de încovoiere, cu precădere dacă materialele testate sunt de tip fragil (așa cum în mod tipic se comportă lemnul uscat).



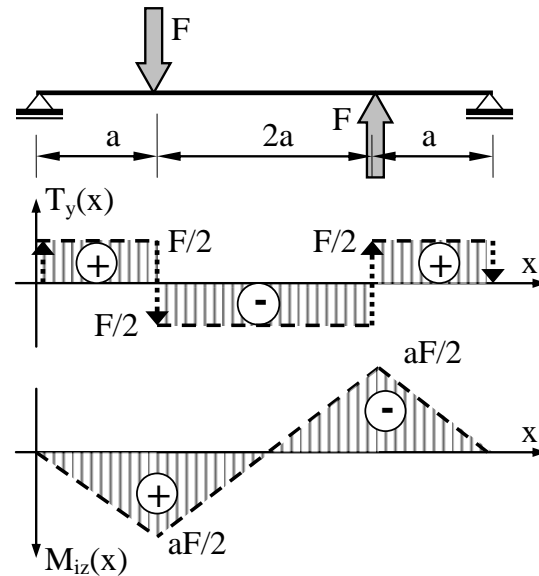
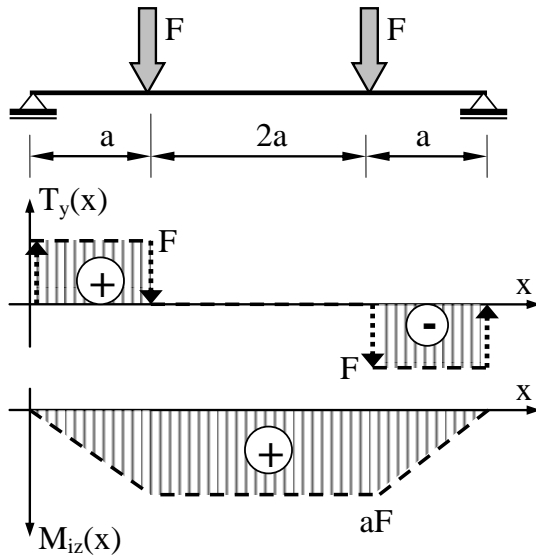
Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

2. Bare așezate pe reazeme simple

b. Solicitarea de încovoiere în patru puncte



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

A. Cazul grinzilor cu încărcări concentrate

2. Bare așezate pe reazeme simple

b. Solicitarea de încovoiere în patru puncte

Diagramele respectă regulile de simetrie, respectiv antisimetrie; valorile forțelor tăietoare pe regiunile de lângă reazeme sunt egale cu reacțiunile din reazemul ce le este alăturat, astfel că *salturile* figurate pe diagramele $T_y(x)$ coincid cu forțele concentrate ce acționează pe grindă în acele puncte; ușor se verifică și legăturile dintre expresiile eforturilor de pe orice regiune, inclusiv că urmărind dinspre stânga spre dreapta, graficul $M_i(x)$ este *crescător* pe regiunile unde forțele tăietoare sunt *pozitive*, respectiv *descrescător*, unde sunt *negative*.

Se remarcă două particularități de solicitare, prin care încovoierea în patru puncte este în mod deosebit utilă pentru încercările mecanice: la schema *simetrică*, pe porțiunea dintre forțele F , eforturile sunt numai de încovoiere (cele tăietoare sunt nule!), adică se produce **încovoiere pură**. La schema *nesimetrică*, eforturile de încovoiere sunt zero la mijlocul grinzii, pe axa de antisimetrie a solicitării, dar apar eforturi tăietoare ($F/2$), caracterizând o **forfecare pură** (greu de realizat, în laborator, cu mijloace tehnice uzuale), încât schema este utilizată în studiul proprietăților de forfecare, mai ales pentru materialele care se comportă ductil (tenace) la temperatura ambiantă (precum oțelurile de duritate medie).

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

B. Cazul grinzilor cu încărcări distribuite (uniform)

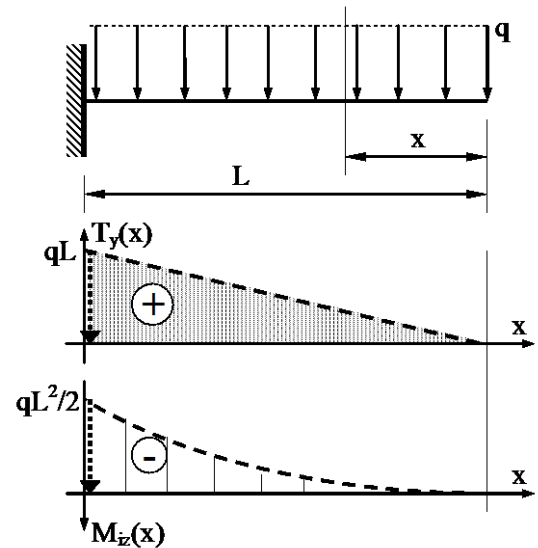
Se abordează aici doar solicitările care au *constantă* intensitatea q pe toată lungimea L a grinzii analizate, încât eforturile *tăietoare* sunt funcții de **gradul întâi**, iar cele de *încovoiere* – funcții de **gradul al doilea**.

1. Bare în consolă

Această solicitare are particularitatea că eforturile *tăietoare* sunt nule în capătul liber al barei, unde eforturile de *încovoiere* ating punctul de extrem (un maxim, tot de valoare zero!); ca atare, secțiunea periclitată este în dreptul încastrării (la fel ca la solicitarea prin forța F); pe toată lungimea barei, expresiile eforturilor sunt:

$$T_y(x) = q \cdot x \qquad M_{iz}(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$

iar pe baza lor se obțin diagramele alăturate.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

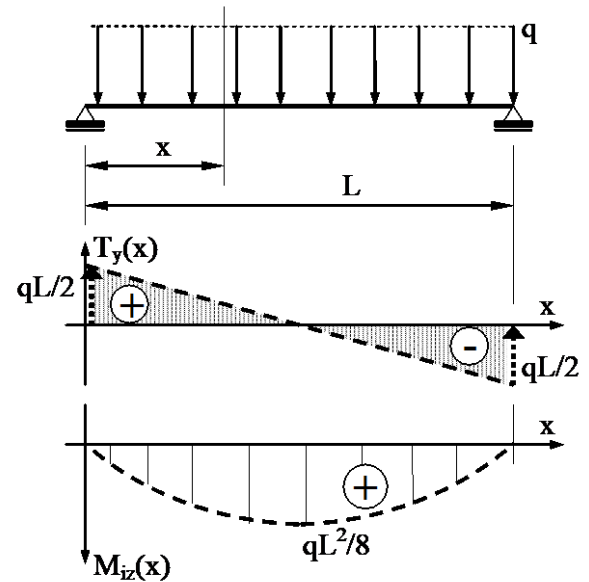
Exemple tipice de încărcări și de diagrame de eforturi la încovoiere

B. Cazul grinzilor cu încărcări distribuite (uniform)

2. Bare așezate pe reazeme simple

Schema de încărcare este *simetrică*: diagrama *antisimetrică* a eforturilor *tăietoare* începe și se termină cu salturi, de valoarea reacțiilor, ambele dirijate în sus, egale fiecare cu o jumătate din încărcarea grinzii. Solicitarea maximă apare în secțiunea de la mijlocul lungimii, unde graficul $T_y(x)$ trece prin valoarea zero.

Efectul maxim de încovoiere pe care îl produc forțele distribuite q este, ca mărime, doar o jumătate din cel al forței lor rezultante ($F=qL$), acționând concentrat! Pentru astfel de încărcări momentul maxim este $FL/4 = (qL^2)/4$, adică dublu față de $(qL^2)/8$; prin urmare, o anumită mărime de forță, acționând perpendicular pe axa unei grinzi, va fi preluată mai eficient dacă forța este distribuită pe lungimea barei, decât dacă acționează concentrat!



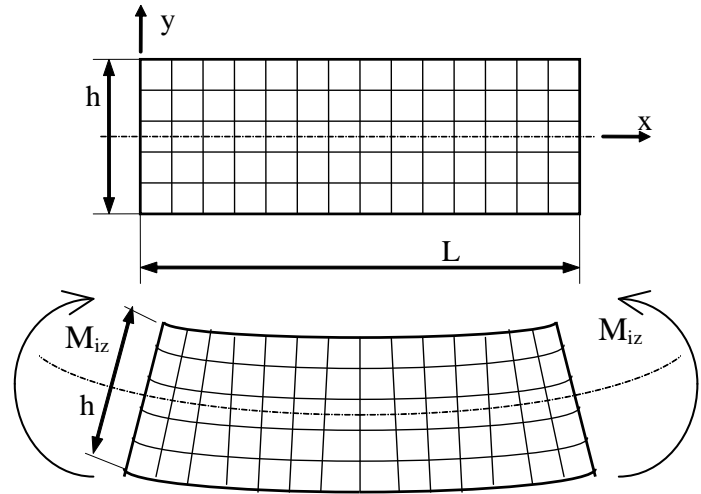
Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Tensiuni și deformații specifice

Se consideră o bară prismatică având lungimea L și secțiune transversală de înălțime h , pe a cărei suprafață se trasează o rețea de linii echidistante, longitudinale și transversale, încât ochiurile rețelei astfel obținute au formă de pătrate egale.

La capetele barei, perpendicular pe planul desenului, se aplică doi vectori moment de mărimi egale și sensuri contrare, încât bara se soliciță la încovoiere; analizând efectele acestei solicițări se observă următoarele:

- ⇒ Marginile barei se ridică față de mijloc, iar axa longitudinală și “fibrele” de material paralele cu ea capătă forme aproximative de *arce de cerc*.
- ⇒ Aceste arce au *lungimi inegale* (mai mari către exteriorul curburii).
- ⇒ Cantitatea de material nu se modifică, deci o parte dintre fibre trebuie să se *scurteze*, iar altele să se *lungescă*, existând și unele care nu se deformează.

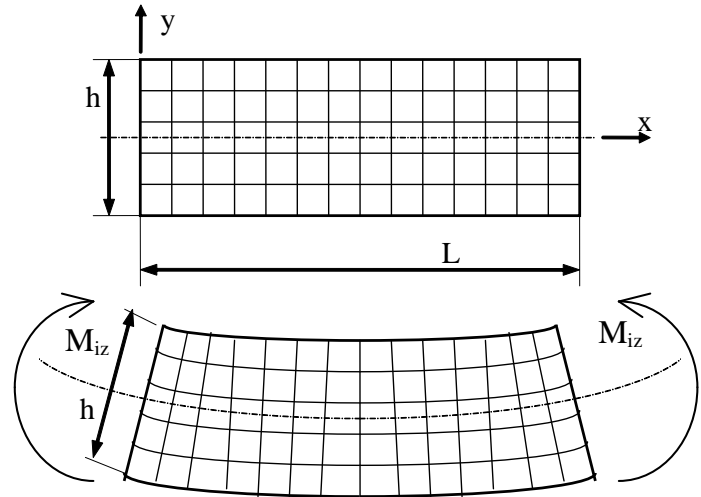


Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Tensiuni și deformații specifice

⇒ Se poate spune că fibrele din jumătatea de sus a barei sunt *comprimate*, cele din partea de jos *întinse* (tensiunile sunt de tip **normal**, $\sigma(x)$ – ca la solicitările axiale), iar fibrele din planul median (planul neutru) nu sunt sollicitate; cele mai periclitate sunt extremitățile de sus și de jos ale secțiunilor transversale.

⇒ Secțiunile care erau inițial *plane* și *perpendiculare* pe axa barei își păstrează, în principiu, aceste caracteristici, după producerea solicitării, chiar dacă se rotesc în jurul axei lor transversale **z**; rezultă că la încovoierea simplă a barelor prismatice se admite ca adevărată ipoteza lui Bernoulli, ceea ce simplifică mult calculele de rezistență și de rigiditate la încovoiere.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Relații pentru calculul de rezistență

Pentru orice bară dreaptă solicitată un moment pozitiv de încovoiere se poate demonstra că **tensiunile** din fibre și **deformațiile specifice**, sunt *direct proporționale cu distanța fibrelor la axa neutră a grinzii*, cu valoarea maximă de **tracțiune** în fibra extremă *inferioară* (unde y are cea mai mare valoare *pozitivă*), iar valoarea maximă de **comprimare** la extremitatea *superioară*; în plus, mărimile σ și ε sunt nule în planul neutru al grinzii (unde $y=0$).

Observație: Pentru calculele de încovoiere este util și preferabil să se aleagă sensul axei y către *exteriorul curburii* barei îndoite, încât fibrele unde se produce (pentru momentele considerate a fi *pozitive*) **întindere** (tensiuni *pozitive*) corespund valorilor **pozitive** ale coordonatei y !

În plus, pentru barele cu secțiuni transversale *simetrice* față de planul neutru, *tensiunile maxime* de întindere și comprimare din orice secțiune sunt **egale** în valoare absolută.

Tot pe cale matematică se obține relația *tensiunilor normale efective* din fibra y , a secțiunii arbitrare x , dintr-o bară solicitată la încovoiere (relația lui **Navier**):

$$\sigma_{\text{ef}}(x, y) = \frac{M_{iz}(x) \cdot y}{I_z(x)} \quad [\text{MPa}]$$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Relații pentru calculul de rezistență

Din analiza ultimei relații rezultă că:

- ◇ Tensiunile normale sunt *direct proporționale* cu momentul încovoiitor din secțiunea de calcul $M_{iz}(x)$ (valoare citită pe diagrama de efort) și cu distanța y a fibrei de calcul până la axa neutră a barei, dar *invers proporționale* cu momentul de inerție axial al secțiunii considerate $I_z(x)$.
- ◇ Grinda suportă cu atât mai bine solicitarea cu cât e mai mare *momentul de inerție* al secțiunii ei transversale, față de direcția momentului încovoiitor (*axa de îndoire* a barei, pentru secțiunea respectivă).

Pentru calculele de rezistență este importantă valoarea maximă a tensiunii (din fibrele cele mai distanțate de axa de îndoire) în secțiunea cea mai solicitată a barei:

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M_{iz\max}(x) \cdot y_{\max}}{I_z(x)}$$

Trecând y_{\max} la numitorul numitorului se obține acolo relația de definiție a *modulului de rezistență* axial $W_z(x)$ și se deduce *condiția de rezistență*, pentru barele solicitate la încovoiere:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{M_{iz\max}}{W_z(x)} \leq \sigma_a \quad (*)$$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Principial, în rezolvarea problemelor de încovoiere se parcurg următoarele etape:

- Trasarea diagramei momentelor de încovoiere $M_{iz}(x)$ – pentru stabilirea secțiunilor transversale în care solicitarea este maximă.
- Trasarea diagramei forțelor tăietoare $T_y(x)$ (dacă este *necesară!*).
- Verificarea *corelațiilor* dintre diagrame, dar și dintre acestea și încărcările de pe grindă, pe baza relațiilor diferențiale între eforturi.
- Particularizarea *condiției de rezistență*, pentru secțiunea periculoasă a barei.
- Efectuarea calculelor finale cerute de problemă.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Calculul bazate pe criteriul de rezistență

După cum s-a arătat, calculul de rezistență se poate face urmărind trei aspecte:

a) **Verificarea** proiectării corecte a barei, adică a respectării inegalității (*); dacă ea nu se respectă, trebuie să se aleagă un material mai rezistent, sau să se mărească dimensiunile secțiunii (modulul de rezistență), până la obținerea rezultatului dorit.

b) Aflarea momentului de încovoiere *maxim* ce poate fi suportat de bara studiată, adică **momentul capabil** al barei:

$$M_{izcap} = W_{zef}(x) \cdot \sigma_a \geq M_{izef}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

c) **Dimensionarea** piesei, stabilirea dimensiunilor *minime* necesare ale secțiunilor ei transversale:

$$W_{znec} = \frac{M_{iz}(x)}{\sigma_a} \leq W_{zef}(x) \quad (\forall) x \in [0, L]$$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Optimizarea constructivă a grinzilor

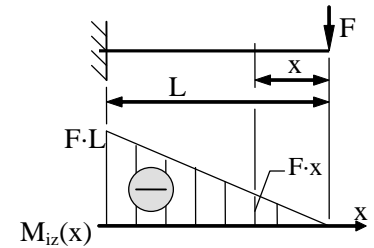
S-a arătat că tensiunile normale de încovoiere se distribuie neuniform pe secțiunile grinzilor, cu valorile maxime în fibrele cele mai distanțate de axa de îndoire z , cum rezultă din relația lui Navier: tensiunile sunt direct proporționale cu distanța y a fibrei de calcul la planul neutru al grinzii; pentru ca materialul să fie folosit rațional, lățimea secțiunii trebuie să fie mai mare la extremitățile ei decât în preajma axei neutre, încât grinzile din profile laminate “I” sau “U” sunt mai avantajoase decât cele de secțiune dreptunghiulară sau circulară. Consumul optim de material se obține dacă secțiunile au o valoare cât mai mare a fracției W_z/A (modulul de rezistență față de axa de îndoire raportat la aria secțiunii).

Un caz special îl reprezintă grinzile din materiale (cum sunt cele *fragile*) care au rezistențe diferite la întindere și comprimare, ceea ce face necesară distribuirea de material suplimentar în secțiune, către extremitatea părții cu rezistență mai mică (cea solicitată la întindere); prin urmare, aceste grinzi au secțiuni nesimetrice față de axa z , distanțele y_{\max} ale fibrelor extreme fiind *proporționale* cu rezistențele admisibile ale materialului la cele două solicitări.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Optimizarea constructivă a grinzilor

Analizând solicitarea grinzii în consolă prin forță concentrată pe capătul ei liber, se observă că eforturile de încovoiere variază liniar pe lungimea barei, cu valoarea maximă în încastrare (unde se face calculul de rezistență); dacă secțiunea transversală este constantă pe întreaga bară, materialul e folosit la capacitate maximă doar în dreptul reazemului, celelalte secțiuni fiind *supra-dimensionate*; pentru a crește eficiența construcției, ar trebui adaptată mărimea secțiunilor transversale la solicitarea care le corespunde.



Dacă se urmărește ca tensiunile maxime de încovoiere să fie la fel în toate secțiunile grinzii, adică $\sigma_{ef \max}(x) = ct. = \sigma_0$, cum momentul este variabil de la o secțiune la alta, modulul de rezistență al secțiunilor transversale trebuie să fie și el variabil, după o funcție de forma

$$W_z(x) = \frac{1}{\sigma_0} |M_{iz}(x)|$$

O asemenea construcție este o *grindă de egală rezistență la încovoiere*; forma ei depinde de încărcarea și rezemarea barei, dar și de felul secțiunii ei transversale; pentru bara de mai sus, dacă se adoptă secțiunea dreptunghiulară de lățime **b** și înălțime **h**, construcția de eficiență maximă se realizează în două variante, după dimensiunea care variază pe lungimea grinzii.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Grinda de lățime variabilă $b(x)$

Folosind relația pentru calculul modulului de rezistență la secțiuni dreptunghiulare, ecuația de mai sus devine:

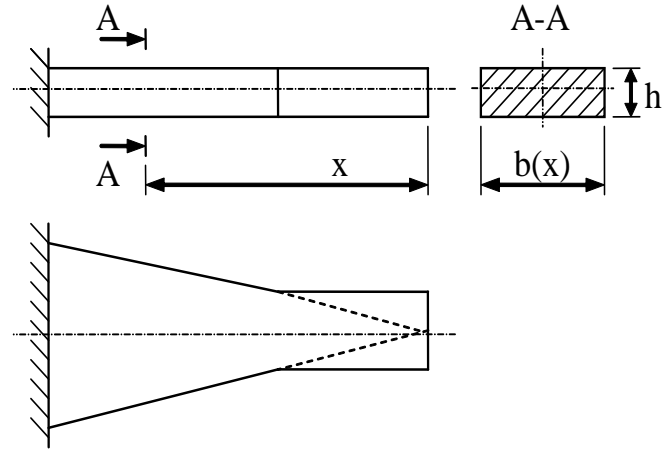
$$\frac{b(x) \cdot h^2}{6} = \frac{F \cdot x}{\sigma_0}$$

de unde funcția de variație a lățimii

$$b(x) = \frac{6F \cdot x}{\sigma_0 \cdot h^2}$$

adică lățimea variază *liniar* pe lungimea barei. Grinda poate fi *simetrică* sau *nesimetrică*, iar porțiunea de la capătul liber nu este ascuțită (nu pornește de la lățime nulă), pentru că trebuie să suporte efortul de tip forță tăietoare $T_y(x) = ct. = F$.

Altfel spus, partea de lățime constantă de la capătul grinzii se dimensionează din considerente de *rezistență la forfecare*.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

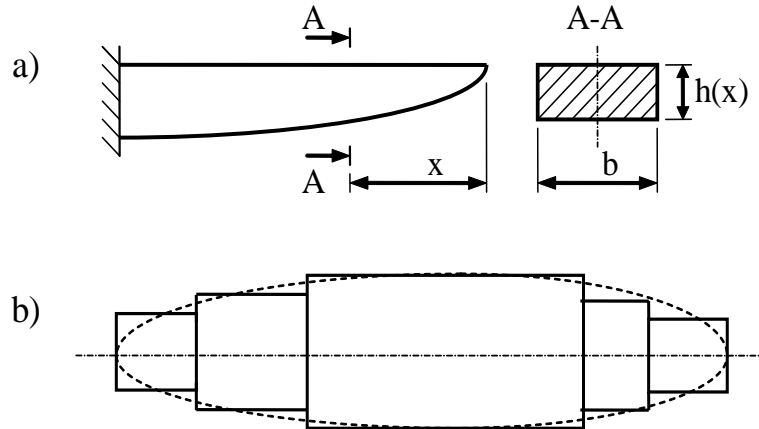
B. Grinda de înălțime variabilă $h(x)$

Relația modului de rezistență se va scrie astfel:

$$\frac{b \cdot h^2(x)}{6} = \frac{F \cdot x}{\sigma_0}$$

Conducând la variația înălțimii după relația:

$$h(x) = \sqrt{\frac{6F \cdot x}{b \cdot \sigma_0}}$$



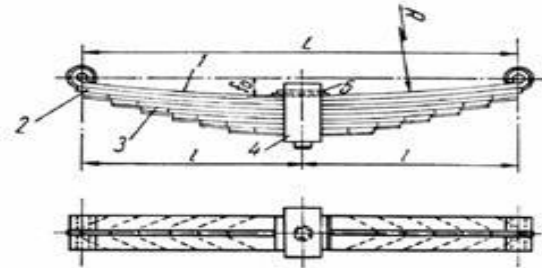
adică o evoluție de tip *parabolic*; la fel ca în cazul precedent, grinda poate fi construită simetric (parabolă bilaterală) sau nesimetric, așa cum sunt realizate în mod tipic **arcurile** (folosite la suspensii) formate **din foi** metalice de lungimi crescătoare, solidarizate între ele și solicitate la încovoiere în trei puncte.

Arborii de transmisie sunt un caz particular de grindă de egală rezistență: forma lor aproximează profilul parabolic bilateral, prin construcția în trepte cilindrice de diametre și lungimi diferite.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

B. Grinda de înălțime variabilă $h(x)$

Arcuri din foi

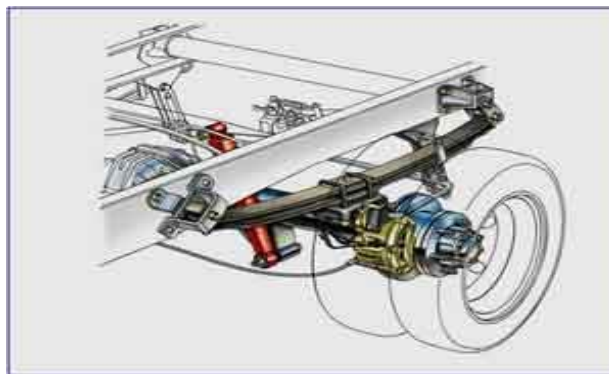
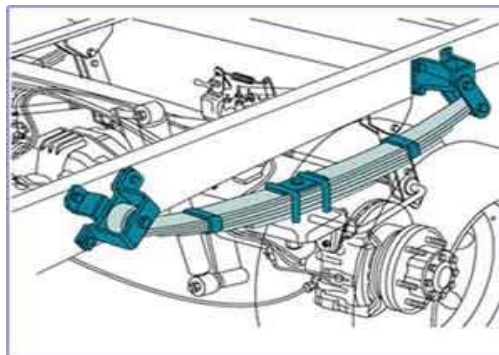
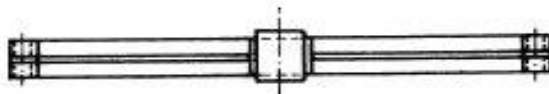


Arc cu foi multiple : 1—foaie principală ; 2—foaie principală de întărire ; 3 — foi secundare ; 4 — legătură de arc ; 5—adaosuri

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

B. Grinda de înălțime variabilă $h(x)$

Arcuri din foi



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

Calculul tensiunilor tangențiale în barele solicitate la încovoiere

Urmărind modul cum se curbează, la solicitarea de încovoiere, o grindă compusă din mai multe plăci prismatice identice, suprapuse (de forma unor scânduri), se observă că suprafețele frontale de la capete nu se găsesc în același plan, ca în starea nedeformată a ansamblului; rezultă că se produc *lunecări* ale plăcilor, pe suprafețele de separație, ceea ce se poate întâmpla doar sub acțiunea unor *tensiuni tangențiale* apărute, pe direcție longitudinală, pe acele suprafețe.

Se imaginează un tronson, de *secțiune transversală constantă* pe toată lungimea, izolat dintr-o bară supusă la încovoiere; se presupune adevărată ipoteza lui Juravski cum că, într-o secțiune *longitudinală* orizontală, situată la distanța y de planul neutru al grinzii, tensiunile tangențiale τ_{yx} *sunt constante pe toată suprafața secțiunii*.

Altfel spus, tensiunile depind numai de coordonata y a punctului de calcul (nu și de poziția punctului pe axele x și z); pe de altă parte, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale, tensiunilor descrise mai sus le corespund, în secțiunile transversale ale barei, tensiuni tangențiale τ_{xy} cu aceeași valoare și aceeași orientare față de muchia comună.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

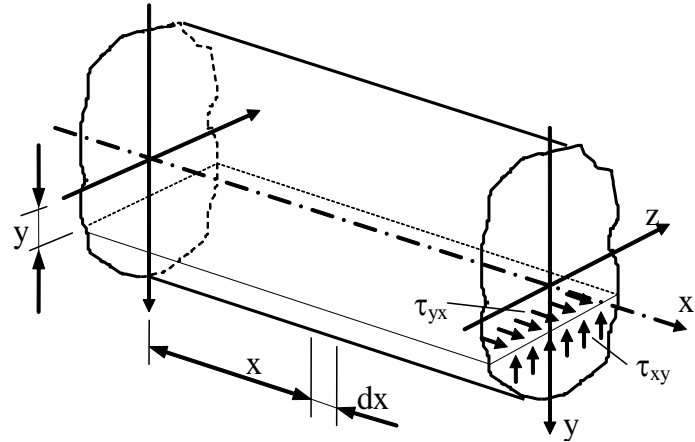
Calculul tensiunilor tangențiale în barele solícitate la încovoiere

Relația stabilită de *Juravski* pentru calculul tensiunilor tangențiale din fibra y se scrie astfel:

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{yx}(x, y) = \frac{T_y(x) \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z(x)}$$

și conține următoarele mărimi fizice:

- $T_y(x)$ =efortul tăietor din secțiunea x unde se face calculul; această valoare se extrage din diagrama de forțe tăietoare;
- $b(y)$ =lățimea secțiunii, în dreptul fibrei y unde se calculează tensiunile;
- $I_z(x)$ =momentul de inerție al întregii secțiuni transversale, în raport cu axa principală centrală z (axa de încovoiere).
- $S_z(y)$ =momentul static, față de axa z , al părții din secțiunea x aflată peste (sau sub) fibra y ; este deci *partea din secțiune care lunecă pe fibra de calcul*, sub acțiunea tensiunilor tangențiale τ_{xy} .



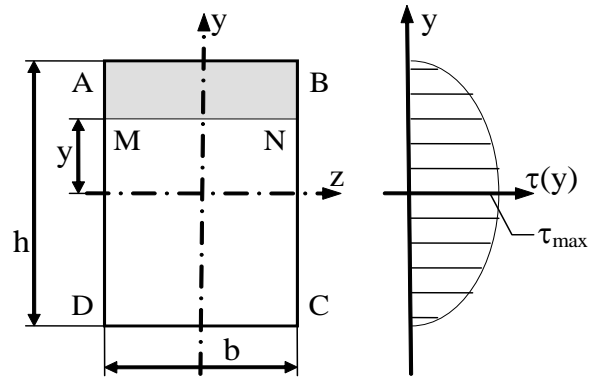
Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

1. Secțiunea dreptunghiulară

Se calculează tensiunea tangențială în fibra orizontală MN a secțiunii ABCD, aflată la distanța y de axa neutră; lățimea ei nu depinde de distanță - $b(y)=ct.=b$; se admite o grindă în consolă cu forță concentrată pe capăt, având efortul tăietor constant pe lungimea barei: $T_y(x)=ct.=F$

Secțiunea dreptunghiulară s-a analizat anterior privind momentele ei principale centrale; $I_z = (b \cdot h^3)/12$, încât dintre mărimile din formula tensiunilor a rămas de stabilit doar momentul static al părții din secțiune care lunecă pe fibra MN; se alege partea de deasupra fibrei (aria ABNM, având centrul de greutate în G_1) și folosind relația de definiție a momentului static se poate scrie că:



$$S_z(y) = y_{G_1} \cdot A_{ABNM} = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(y + \frac{h}{2} \right) \cdot b \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

Se obțin astfel tensiunile din fibra de calcul:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{F \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right)}{b \cdot \frac{b h^3}{12}} = \frac{6F}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

1. Secțiunea dreptunghiulară

Observații:

⇒ Dacă forța F și forma secțiunilor transversale nu variază pe lungimea barei, tensiunile tangențiale depind doar de coordonata y a fibrei de calcul.

⇒ Dacă lățimea secțiunii este constantă, măcar pe porțiuni din înălțime, atunci funcția de variație a tensiunilor tangențiale în raport cu y va fi aceeași cu a momentului static $S_z(y)$ (înmulțită cu niște mărimi constante).

⇒ Variația tensiunilor tangențiale pe secțiunea dreptunghiulară este *parabolică*, având rădăcinile simetrice $y=-h/2$ și $y=h/2$ (a se vedea prima formă a expresiei de mai sus, în care funcția este scrisă “cu rădăcinile separate”); vârful parabolei (mijlocul distanței dintre rădăcini) este $y=0$ (situat pe *axa neutră*, la încovoiere, a secțiunii).

⇒ Valoarea maximă a tensiunilor tangențiale va fi $\tau_{xy \max} = \tau_{(y=0)} = \frac{6F}{bh^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh}$

⇒ Numitorul ultimei fracții este aria secțiunii dreptunghiulare, deci valoarea *extremă* a lui τ e *mai mare cu 50%* decât valoarea aproximată ($\tau=F/A$) de la calculul convențional de forfecare; acel calcul rămâne însă acceptabil pentru elementele de îmbinare, caracterizate prin dimensiuni relativ mici ale secțiunilor de forfecare.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

2. Secțiunea circulară plină

Fibra de calcul este $MN = b(y)$, la distanța y de axa neutră a secțiunii; forța tăietoare se consideră din nou $T_y(x)=ct.=F$; momentul de inerție principal central al secțiunii s-a calculat anterior:

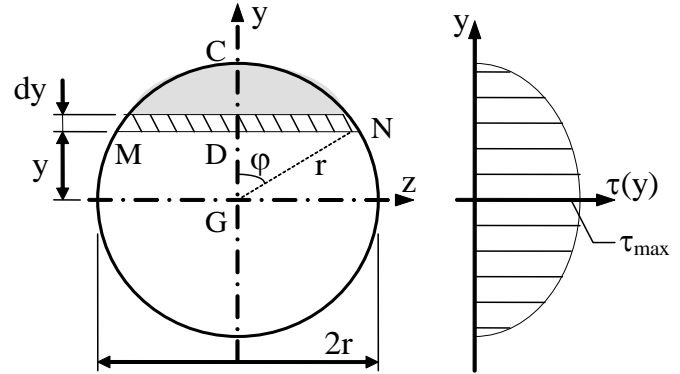
$$I_z = \frac{\pi (2r)^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$$

Se scriu dimensiunile în funcție de raza r și de jumătatea φ a unghiului la centru ce corespunde coardei MN ; dând coordonatei y o creștere infinit mică dy , dimensiunile elementului de arie dA (dreptunghi curbiliniu) vor fi:

$$y = r \cdot \cos \varphi; \quad dy = -r \cdot \sin \varphi \, d\varphi; \quad b(y) = MN = 2 \, MD = 2 \, r \cdot \sin \varphi, \quad dA = b(y) \cdot dy = -2 \, r^2 \cdot \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

Momentul static față de axa z al părții din secțiune ce lunecă pe fibra MN (alegem partea de deasupra fibrei, aria $CMDN$) se va calcula astfel:

$$\begin{aligned} S_z(y) &= \iint_A y \, dA = \int_{\varphi}^0 (r \cdot \cos \varphi) (-2 \, r^2 \cdot \sin^2 \varphi \, d\varphi) = \\ &= 2 \, r^3 \int_0^{\varphi} (\sin^2 \varphi) (\cos \varphi \, d\varphi) = 2 \, r^3 \left. \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right|_0^{\varphi} = \frac{2}{3} \, r^3 \sin^3 \varphi \end{aligned}$$



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

2. Secțiunea circulară plină

Introducând rezultatele în formula lui Juravski, se obține expresia (în funcție de variabila unghiulară φ) a tensiunilor tangențiale din fibra de calcul, sub forma:

$$\tau_{xy}(\varphi) = \frac{F \cdot \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \varphi}{2r \cdot \sin \varphi \frac{\pi r^4}{4}} = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi r^2} \sin^2 \varphi$$

Pentru a se parcurge secțiunea unghiul φ ia valori în intervalul $[0; \pi]$, funcția este pătratul unei sinusoide și rezultă variația tensiunilor ca în figura 6.16; valoarea lor maximă se produce în fibra de pe axa neutră a secțiunii ($\varphi=\pi/2$), adică:

$$\tau_{xy \max} = \tau_{(\varphi=\frac{\pi}{2})} = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi r^2}$$

La numitorul fracției se recunoaște aria cercului de rază r , deci valoarea *extremă* a lui τ este *cu o treime mai mare* decât valoarea aproximată ($\tau=F/A$) luată în considerare la calculele convenționale de forfecare; acele calcule sunt totuși admise pentru piesele de dimensiuni mici (cum sunt niturile sau șuruburile).

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

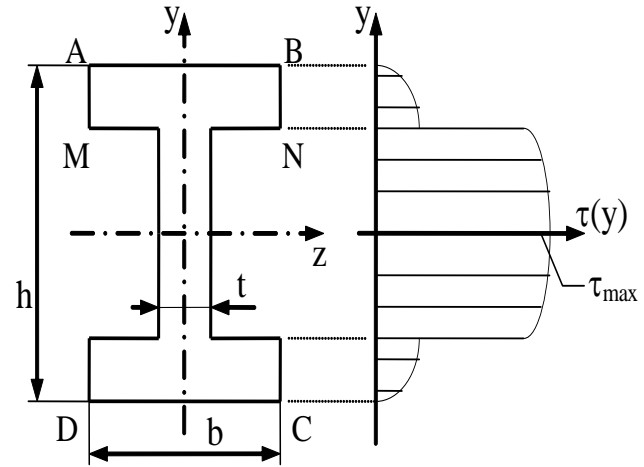
A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

3. Secțiunea de forma literei I

Acesta este aspectul unor profile laminate (bare standardizate cu secțiuni optimizate pentru încovoiere, în formă de I, U, T sau L); secțiunile sunt formate din dreptunghiuri, având variația lui τ_{xy} ca mai sus.

Deosebirea vine din variația bruscă a lățimii $b(y)$ a secțiunii, în dreptul fibrei MN, de la b – la extremități (“tălpi”), la t – în zona de mijloc (“inima” profilului).

Valoarea $b(y)$ apare la numitorul formulei lui Juravski, încât trecerea de la talpă la inimă duce la o creștere bruscă a valorii tensiunilor tangențiale; valorile concrete de pe grafic depind de dimensiunile reale ale secțiunii calculate.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

A. Variația tensiunilor tangențiale pe înălțimea unor secțiuni particulare

Concluzii

1. Tensiunile de forfecare *nu se repartizează uniform* pe secțiunile transversale ale barelor solicitate la încovoiere, iar valorile lor maxime depășesc pe aceea (F/A) luată în considerare la calculul convențional al elementelor de îmbinare.
2. Valorile *maxime* ale tensiunilor *tangențiale* τ_{xy} se produc *la jumătatea înălțimii* secțiunilor; pentru secțiunile la care axa de îndoire este axă de simetrie, deci și axă *neutră* pentru încovoiere, tensiunile *normale* σ sunt **nule** pe această axă; pe de altă parte, tensiunile *normale* sunt *maxime* la *extremitățile* secțiunilor, acolo unde tensiunile τ_{xy} au valoarea **zero**. Prin urmare, cele două tipuri de tensiuni *nu se influențează reciproc* în punctele de pe secțiune în care ele își ating valorile cele mai mari!

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

B. Posibilitatea neglijării tensiunilor tangențiale

Să se compare valorile maxime ale tensiunilor tangențiale și normale pentru o grindă în consolă, cu forță concentrată pe capătul liber, având secțiunile transversale în formă de dreptunghi.

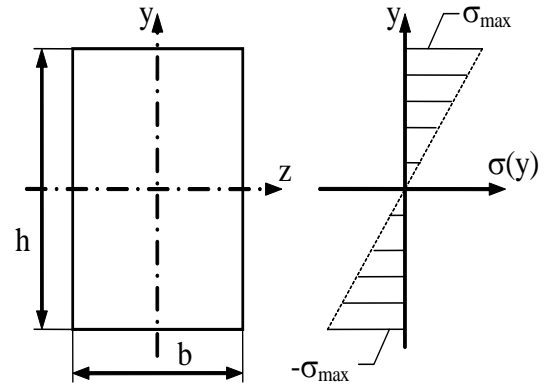
Tensiunile tangențiale au valoarea maximă: $\tau_{\text{ef max}}(x) = \frac{3}{2} \frac{F}{b h}$

Solicitarea maximă de încovoiere este în încastrare, iar tensiunile normale se vor calcula în acea secțiune; graficul alăturat prezintă variația pe înălțimea secțiunii a acestor tensiuni; tensiunile maxime se calculează pe baza valorii știute a modului de rezistență pentru o secțiune dreptunghiulară:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \sigma_{\text{max}}(L) = \frac{|M_{iz}(L)|}{W_z} = \frac{F \cdot L}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{6 F \cdot L}{b \cdot h^2}$$

Se obține raportul dintre valorile maxime ale tensiunilor tangențiale și normale: $\frac{\tau_{\text{max}}(x)}{\sigma_{\text{max}}(x)} = \frac{1}{4} \frac{h}{L}$

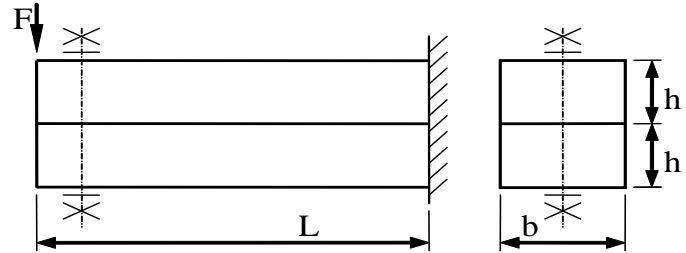
Tensiunile tangențiale au deci valori semnificative doar dacă înălțimea secțiunii este apropiată, ca ordin de mărime, de lungimea barei, adică pentru corpurile *masive* (numite și “blocuri”); la grinzile uzuale raportul h/L are valori mici, iar tensiunile tangențiale *pot fi neglijate* în calculul de rezistență.



Calculul la încovoiere pentru barele drepte

C. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Bara alăturată este formată din două grinzi suprapuse, identice, de secțiune dreptunghiulară; ele pot să participe independent la preluarea solicitării, sau pot fi solidarizate printr-un *bolț* (cilindru alungit cu porțiunile de la capete filetate) de diametru d . Se cere să se compare capacitatea de rezistență a barei, în cele două variante, apoi să se scrie relația cu care se calculează diametrul bolțului folosit la îmbinarea grinzilor.



Rezolvare

Dacă grinzile nu sunt solidarizate, măsura rezistenței lor la încovoiere este dublul modului de rezistență al uneia, adică

$$W_z = 2 \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot h^2}{3}$$

Îmbinarea prin bolț implică o grindă unică, de modul $W_z = \frac{b \cdot (2h)^2}{6} = \frac{2}{3} b \cdot h^2$

adică se *dublează* rezistența la încovoiere (momentul ce poate fi preluat) pentru ansamblul analizat.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

C. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Pentru calculul bolțului se observă că forța care îl solicită face grinzile să alunece una pe suprafața celeilalte, în lipsa îmbinării; această *forță de lunecare* F_L este efectul tensiunilor tangențiale τ_{xy} ce apar pe suprafața de separare (având ca dimensiuni lățimea \mathbf{b} și lungimea \mathbf{L} a grinzilor):

$$F_L = \tau_{xy} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{L} .$$

Cum fibra de calcul se află la jumătatea înălțimii ($y=0$) unei grinzi de secțiune dreptunghiulară, formula lui Juravski – cu momentul static dat de definiție – se scrie sub forma:

$$\tau_{xy(y=0)} = \frac{|T(x)| \cdot S_z(y=0)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{F \cdot b \cdot h \cdot \frac{h}{2}}{b \cdot \frac{(2h)^3}{12}} = \frac{3}{4} \frac{F}{bh}$$

Aria secțiunii compuse este $2bh$; se confirmă valoarea maximă a tensiunilor tangențiale de la dreptunghi.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

C. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Elementul de îmbinare este solicitat la forfecare, iar dacă rezistența admisibilă a materialului său se notează τ_{ab} , atunci condiția de rezistență devine:

$$\tau_{efb} = \frac{F_L}{A_f} = \frac{\tau_{xy} \cdot b \cdot L}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{3F \cdot L}{\pi h \cdot d^2} \leq \tau_{ab}$$

Pe această bază, diametrului bolțului va fi: $d_{\min} = \sqrt{\frac{3 F \cdot L}{\pi h \cdot \tau_{ab}}}$

Trebuie remarcat că dimensiunea bolțului nu este influențată de lățimea grinzilor!

Aplicație numerică: Să se stabilească diametrul bolțului (din oțel cu $\tau_a=120\text{MPa}$) folosit pentru a îmbina două grinzi cu dimensiunile $h=50\text{mm}$, $L=0,5\text{m}$. Ansamblul trebuie să suporte forța $F=3 \cdot 10^4\text{N}$.

Prin înlocuirea acestor valori în relația de mai sus se obține:

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 500 \text{ mm}}{\pi \cdot 50 \text{ mm} \cdot 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 48,86 \text{ mm}$$

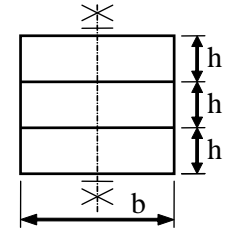
Îmbinarea se poate realiza, de exemplu, cu un bolț cu diametrul de 50 mm.

Calculul la încovoiere pentru barele drepte

C. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Variante ale problemei

Pentru mai mult de două grinzi, se modifică doar tensiunea tangențială pe planele de separare; dacă grinzile sunt în număr **impar**, tensiunile tangențiale maxime se obțin *pe suprafețele de lunecare alăturate grinzii din mijloc*; dacă se îmbină un număr **par** de grinzi, forța maximă de lunecare se produce *pe suprafața mediană* a grinzii (la mijlocul înălțimii secțiunilor).



De ex. dacă se folosesc **trei** grinzi elementare, tensiunile maxime de lunecare (**egale** pe ambele plane de separare dintre grinzi) se calculează pe fibrele aflate la distanța $h/2$ de axa neutră globală, astfel:

$$\tau_{xy} \left(y = \frac{h}{2} \right) = \frac{F \cdot b \cdot h \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right)}{b \cdot \frac{(3h)^3}{12}} = \frac{12}{27} \frac{F}{b \cdot h} = \frac{4}{9} \frac{F}{bh}$$

O altă variantă poate fi îmbinarea cu mai multe bolțuri, montate *la distanțe egale* de-a lungul grinzii; se modifică astfel *suprafața de lunecare* (și deci forța de forfecare) ce corespunde fiecărui bolț: dacă sunt **n** elemente de îmbinare, atunci forța ce revine unuia

dintre ele va fi

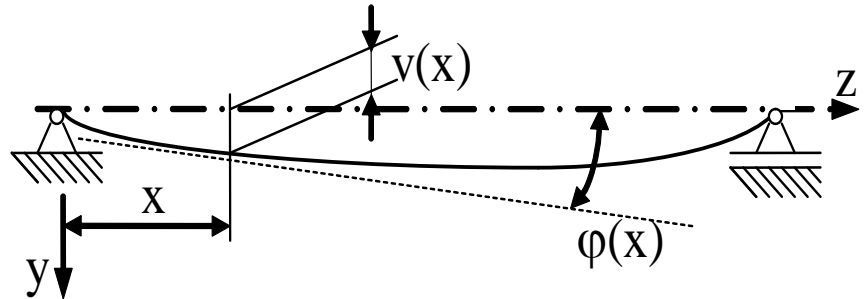
$$F_L = \tau_{xy} \cdot b \cdot \frac{L}{n}$$

1.9

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Dacă se analizează forma la care ajunge, după încovoiere, axa unei bare drepte (axă numită *fibră medie*



deformată a ei) se observă, în fiecare *secțiune transversală* \mathbf{x} , componentele principale ale deformațiilor barei:

- deplasarea *liniară* (“săgeata”) $v(\mathbf{x})$, măsurată în [mm];
- deplasarea *unghiulară* (“rotirea”) $\varphi(\mathbf{x})$, în [rad].

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Energia potențială de deformare elastică la solicitarea de încovoiere

Pe aceleași baze ca la solicitările studiate anterior și făcând observația că tensiunile preponderente sunt de tip axial (perpendicularare pe secțiunile transversale), se poate calcula energia de deformare elastică (U_1) ce revine unității de volum a unei bare supuse la încovoiere, adică *energia potențială specifică de deformare*:

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Se consideră că solicitarea se produce în limitele domeniului de deformabilitate elastică (și proporțională cu nivelul încărcării) a materialului, încât se admite, la fel ca la solicitările axiale, legătura dintre aria de sub curba σ - ε și calculul energiei U_1 ; dacă se consideră o bară de arie transversală A (cu momentul de inerție I_z față de axa de încovoiere) și lungime L , suportând o solicitare de încovoiere cu efortul secțional $M_{iz}(x)$ și tensiunea $\sigma(x, y) = M_{iz}(x) \cdot y / I_z$, se poate scrie *energia potențială totală de deformare* sub forma:

$$U = \iiint_{(V)} U_1 \, dV = \iiint_{(V)} \frac{\sigma^2(x)}{2E} (dA \, dx) = \int_{(L)} \frac{M_{iz}^2(x)}{2E \cdot I_z^2(x)} \, dx \iint_{(A)} y^2 \, dA$$

Ultima integrală este relația de definiție a momentului axial de inerție $I_z(x)$, care duce la simplificarea numitorului fracției de sub integrala simplă:

$$U = \int_0^L \frac{M_{iz}^2(x)}{2E \cdot I_z(x)} \, dx$$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Aplicarea teoremelor lui Castigliano la solicitarea de încovoiere

S-a observat că în secțiunile barelor supuse la încovoiere se produc deplasări *liniare* și *unghiulare*, adică se pot aplica ambele teoreme ale lui Castigliano. Pe o grindă arbitrară se consideră o secțiune transversală cu centrul de greutate în P (aflat pe axa longitudinală a barei), în care acționează încărcările concentrate **M** –moment de încovoiere pe axa **z** și **F** – forță pe axa **y**. Rotirea $\varphi(\mathbf{P})$ și deplasarea liniară $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ale secțiunii, pe direcția și în sensul eforturilor M, respectiv F se pot calcula, folosind teoremele lui Castigliano și expresia energiei potențiale de deformare, astfel:

$$\varphi(\mathbf{P}) = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_{(L)} \frac{2 M_{iz}(x)}{2 E \cdot I_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M} dx = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial M} dx$$

$$\text{respectiv} \quad \mathbf{v}(\mathbf{P}) = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F} dx$$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Aplicarea teoremelor lui Castigliano la solicitarea de încovoiere

Observații:

1. S-au calculat derivatele, în raport cu sarcinile M și F , ale energiei potențiale de deformare, ca pentru o funcție compusă, înainte de integrare.
2. Dacă rezultatul unui calcul bazat pe relația teoremei este *negativ*, deplasarea secțiunii analizate se produce *în sens contrar* sarcinii concentrate M sau F .
3. Când în secțiunea de calcul nu există sarcina concentrată necesară, se introduce o sarcină *fictivă* K , de tipul cerut de algoritm, apoi se exprimă elementele de calcul (reacțiuni și eforturi secționale) în funcție de K ; după derivarea eforturilor $M_{iz}(x)$ în raport cu K , se fac înlocuirile în relația potrivită a teoremei, dând încărcării fictive valoarea $K=0$ (a se vedea aplicația de mai jos).

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Aplicarea teoremei Mohr-Maxwell la solicitarea de încovoiere

Această teoremă furnizează o metodă alternativă pentru calculul derivatelor parțiale din relațiile teoremelor lui Castigliano, astfel:

Derivata parțială a expresiei $M_{iz}(x_i)$ în raport cu sarcina K , aplicată în secțiunea transversală cu centrul de greutate în P , coincide cu *expresia* $m(x_i)$ a efortului secțional (de încovoiere) corespunzător solicitării barei *doar prin sarcina concentrată fictivă* $K=1$, aplicată în secțiunea de calcul.

$$\frac{\partial M_{iz}(x_i)}{\partial K} = m(x_i)$$

Prin urmare, rotirea și săgeata secțiunii analizate (notate mai jos, generic, prin δ) se determină, dacă pe bară se delimitează p regiuni, printr-o variantă modificată a relației teoremelor lui Castigliano, care poate fi scrisă concentrat, astfel:

$$\delta(P) = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z(x)} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial K} dx = \sum_{i=1}^p \int_0^{L_i} \frac{M_{iz}(x_i)}{E(x_i) \cdot I_z(x_i)} m(x_i) dx$$

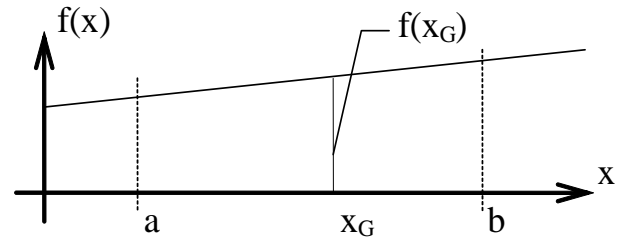
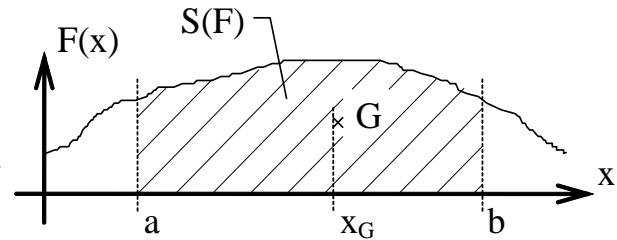
Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Metoda Mohr-Vereșceaghin de integrare grafo-analitică

Aceasta permite calculul rapid al integralei *definite* din produsul a două funcții, $F(x)$ și $f(x)$, cel puțin una fiind *liniară*; este necesar să fie cunoscut graficul funcției neliniare (sau mai complicate, dacă ambele sunt liniare) $F(x)$, precum și abscisa x_G a centrului de greutate al suprafeței $S(F)$, cuprinsă între acel grafic și axa absciselor, pentru intervalul de calcul considerat $[a; b]$.

Integrala menționată se poate calcula făcând produsul dintre aria suprafeței $S(F)$ și valoarea funcției liniare $f(x)$ în punctul x_G :

$$\int_a^b F(x) \cdot f(x) dx = A[S(F)] \cdot f(x_G)$$



Dacă ambele funcții sunt liniare, atunci oricare dintre ele va fi considerată $F(x)$.

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

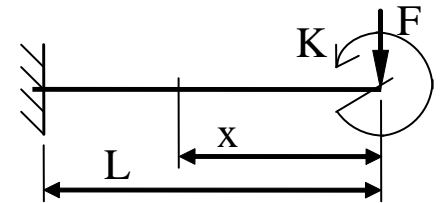
Aplicarea metodelor energetice

Se consideră din nou grinda în consolă solicitată prin forță concentrată pe capătul liber. Se cere să se calculeze, pe baza teoremelor energetice, deplasările efective – unghiulară și liniară – ale secțiunii de la capătul liber al barei.

A. Rezolvare pe baza teoremelor lui Castigliano

Pentru aplicarea corectă a teoremelor, în secțiunea unde sunt calculate deplasările trebuie să acționeze sarcini concentrate, care să poată fi *exprimate independent de celelalte încărcări din sistem*.

Forța F satisface această condiție, iar pentru calculul rotirii capătului barei se introduce un moment *fictiv* K (de mărime reală *zero*), alegând să aibă sens de rotație trigonometric.



Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

A. Rezolvare pe baza teoremelor lui Castigliano

Pe bară există o singură regiune, iar expresia efortului secțional și derivatele ei parțiale în funcție de sarcinile considerate vor fi următoarele:

$$(\forall) x \in [0; L]: \quad M_{iz}(x) = K - F \cdot x; \quad \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial K} = 1; \quad \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F} = -x$$

Rotirea și săgeata capătului liber se obțin introducând în relații termenii potriviți și dând apoi lui K valoarea reală (K=0); se ajunge astfel la expresiile scrise mai jos.

$$\varphi(P) = \frac{\partial U}{\partial K} = \int_{(L)} \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial K} dx = \int_0^L \frac{(-F \cdot x)}{EI_z} \cdot 1 dx = - \frac{F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = - \frac{FL^2}{2EI_z}$$

$$\text{respectiv} \quad v(P) = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^L \frac{(-F \cdot x)}{EI_z} \cdot (-x) dx = \frac{F}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{FL^3}{3EI_z}$$

Atenție: Semnul *pozitiv* al deplasării liniare arată că aceasta se produce *în jos* (în sensul lui F), în vreme ce semnul *negativ* al rotirii indică sensul ei – orar – adică *invers* momentului fictiv K!

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

B. Rezolvare pe baza teoremei Mohr-Maxwell

Pentru aplicarea metodei este necesar ca, după trasarea diagramei $M_{iz}(x)$, să fie studiate *două* stări de încărcare *fictive*, cu sarcini concentrate de *o unitate* aplicate în secțiunea de calcul și bara eliberată de alte încărcări; pentru cele trei stări de solicitare se delimitează pe bară o singură regiune, iar expresiile eforturilor secționale se vor scrie:

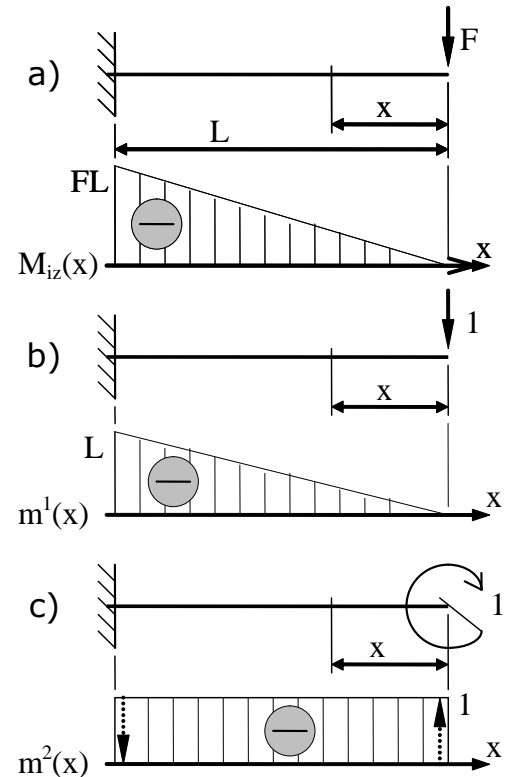
$$(\forall) x \in [0; L]: M_{iz}(x) = -F \cdot x; \quad m^1(x) = -1 \cdot x = -x; \quad m^2(x) = -1$$

Rezultatele se introduc în câte o relație a teoremei, scrisă pentru fiecare dintre stările fictive de încărcare, încât deplasările secțiunii de capăt vor fi:

$$v(P) = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot m^1(x) dx = \int_0^L \frac{(-F \cdot x)}{E \cdot I_z} \cdot (-x) dx = \frac{FL^3}{3EI_z}$$

$$\varphi(P) = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot m^2(x) dx = \int_0^L \frac{(-F \cdot x)}{E \cdot I_z} \cdot (-1) dx = \frac{FL^2}{2EI_z}$$

Valorile coincid cu rezultatele anterioare, deci se poate aprecia că metoda a fost aplicată corect; semnele pozitive ale deplasărilor arată că ele se produc în sensul sarcinilor fictive unitare care le corespund.



Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

C. Rezolvare prin metoda de integrare grafică Mohr-Vereșceaghin

Se folosesc diagramele de momente ale celor trei stări de încărcare – *reală* $M_{iz}(x)$, respectiv *fictive* $m^1, 2(x)$; diagramele sunt *liniare*, iar metoda se aplică, de exemplu, înmulțind **aria** diagramei $M_{iz}(x)$ cu *valorile* funcțiilor fictive în dreptul centrului ei de greutate ($x=2L/3$).

Deplasările secțiunii de la capătul liber al grinzii se calculează cum se arată în relațiile de mai jos; se remarcă, și în acest caz, coincidența rezultatelor cu valorile obținute anterior:

$$v(P) = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot m^1(x) dx = \frac{1}{EI_z} (-F \cdot L) \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} (-L) = \frac{FL^3}{3EI_z}$$
$$\varphi(P) = \int_0^L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot m^2(x) dx = \frac{1}{EI_z} (-F \cdot L) \cdot \frac{L}{2} (-1) = \frac{FL^2}{2EI_z}$$

1.10

**Probleme static nedeterminate
la încovoiere**

Probleme static nedeterminate la încovoiere

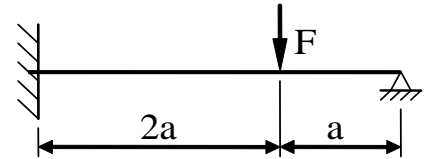
Pentru orice grindă sprijinită pe mai mult de două reazeme simple (sau pe o încastrare și măcar un reazem simplu), calculul reacțiunilor nu se mai poate face doar pe baza ecuațiilor de echilibru din statică, problema fiind *static nedeterminată*; pentru aceste probleme se parcurg următoarele *etape de lucru*:

- ⇒ Scrierea ecuațiilor de echilibru, urmată de alegerea *necunoscutelor* static *nedeterminate* (și exprimarea celorlalte în funcție de acestea).
- ⇒ Obținerea ecuațiilor *suplimentare*, folosind una dintre metodele prin care se calculează deplasările secțiunilor transversale (se scrie că $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ și $\varphi=\mathbf{0}$ – pentru un reazem *încastrat*, respectiv doar $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ – în reazemul *simplu*).
- ⇒ Rezolvarea sistemului de ecuații obținut, pentru calculul reacțiunilor.
- ⇒ Trasarea diagramelor de eforturi.
- ⇒ Efectuarea calculelor de rezistență sau de rigiditate cerute în problemă.

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare)

1. Să se calculeze reacțiunile din reazeme pentru o grindă încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt, solicitată ca în figura alăturată.



Rezolvare

Reazemele introduc trei reacțiuni – două forțe V_1 și V_2 , un moment M_1 ; ecuațiile de echilibru semnificative sunt doar două – suma proiecțiilor de forțe pe verticală și suma momentelor încărcărilor față de secțiunea din încastrare:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0: V_1 + V_2 = F \quad \sum_{i=1}^n (M_i)_1 = 0: V_2 \cdot 3a - F \cdot 2a + M_1 = 0$$

Se alege V_2 ca necunoscută de lucru și se exprimă celelalte două în funcție de ea:

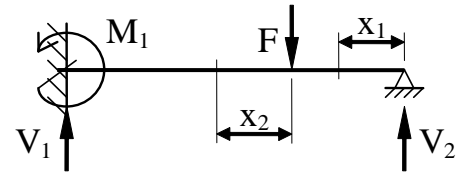
$$V_1 = F - V_2 \quad M_1 = 2aF - 3aV_2$$

Problema este *simplu static nedeterminată*, iar **a treia ecuație** de legătură între reacțiuni se obține aplicând o metodă pentru calculul deplasărilor.

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Aplicarea teoremei lui Castigliano

Deoarece reazemul simplu nu permite deplasarea barei pe verticală, prima teoremă a lui Castigliano aplicată în acel punct conduce la ecuația suplimentară:



$$0 = \frac{\partial U}{\partial V_2} = \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{L_i} \frac{M_{iz}(x_i)}{E \cdot I_z} \frac{\partial M_{iz}(x_i)}{\partial V_2} dx \right]$$

Se stabilesc expresiile eforturilor secționale $M_{iz}(x_i)$, apoi derivatele lor în raport cu necunoscuta static nedeterminată, pentru cele două regiuni de pe bară, astfel:

Regiunea	$M_{iz}(x_i)$	$\frac{\partial M_{iz}(x_i)}{\partial V_2}$
$(\forall) x_1 \in (0; a)$	$V_2 \cdot x$	x
$(\forall) x_2 \in (0; 2a)$	$V_2(a + x) - F \cdot x$	$a + x$

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Aplicarea teoremei lui Castigliano

Înlocuind sub integrală valorile din tabel, ecuația devine:

$$0 = \int_0^a \frac{V_2 \cdot x}{E \cdot I_z} \cdot x \, dx + \int_0^{2a} \frac{V_2(a+x) - F \cdot x}{E \cdot I_z} \cdot (a+x) \, dx \Rightarrow$$
$$\frac{1}{E \cdot I_z} \left(V_2 \cdot \frac{a^3}{3} + V_2 \cdot [a^2 \cdot 2a + 2a \cdot \frac{4a^2}{2} + \frac{8a^3}{3}] - a \cdot F \frac{4a^2}{2} - F \frac{8a^3}{3} \right) = 0$$

Se observă că ultima formă a ecuației poate fi înmulțită cu $(E \cdot I_z / a^3)$, ajungând la ecuația suplimentară căutată:

$$V_2 \left(\frac{1}{3} + 2 + 4 + \frac{8}{3} \right) - 2F - \frac{8}{3}F = 0 \quad \text{din care se obține} \quad V_2 = \frac{14}{27}F$$

Prin înlocuirea acestei valori în ecuațiile de echilibru de mai sus rezultă valorile celorlalte două reacțiuni:

$$V_1 = \frac{13}{27}F; \quad M_1 = \frac{4}{9}a \cdot F.$$

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Aplicarea metodei eforturilor

Rămân valabile explicațiile anterioare privind rezolvarea prin această metodă a problemelor static nedeterminate, cu precizarea că necunoscutele X_i (și încărcările din stările fictive) pot fi momente de încovoiere pe axa z sau forțe pe axa y - în funcție de reacțiunea care corespunde legăturii îndepărtate de pe bară.

Coeficienții δ_{ij} se calculează astfel (indicele regiunilor este k , iar eforturile secționale $m(x_k)$ corespund stărilor de solicitare fictive i și j ale sistemului de bază):

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^p \int_0^{L_k} \frac{m^i(x_k) \cdot m^j(x_k)}{E(x_k) \cdot I_z(x_k)} dx$$

Se transformă sistemul dat într-unul static determinat îndepărtând virtual reazemul din dreapta, înlocuit prin forța verticală necunoscută X_1 ; cele două stări de solicitare imaginare, pentru sistemul de bază astfel obținut, sunt:

- starea “zero” – cu solicitarea exterioară prezentă și cu $X_1=0$;
- starea “1” – cu forța exterioară îndepărtată și cu $X_1=1$.

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Aplicarea metodei eforturilor

Pentru aplicarea corectă a metodei, împărțirea barei în regiuni se face identic în toate stările de solicitare, iar eforturile secționale sunt:

- pt. $x_1 \in (0; a)$ $m^0(x_1)=0$; $m^1(x_1)=1 \cdot x=x$
- pt. $x_2 \in (0; 2a)$ $m^0(x_2)=-F \cdot x$; $m^1(x_2)=1 \cdot (a+x)=a+x$

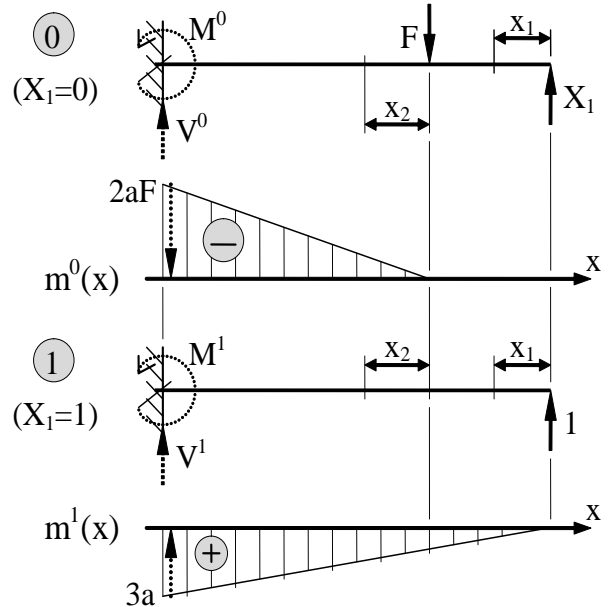
Diagramele stărilor fictive sunt prezentate alăturat; problema e simplu static nedeterminată, se scrie o singură ecuație suplimentară, în necunoscuta X_1 :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

iar cei doi coeficienți vor fi:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_{k=1}^2 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^1(x_k)}{E \cdot I_z} dx = \int_0^a \frac{x \cdot x}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{(a+x) \cdot (a+x)}{E \cdot I} dx = \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{a^3}{3} + a^2 \cdot 2a + 2a \cdot \frac{4a^2}{2} + \frac{8a^3}{3} \right) = 9 \frac{a^3}{E \cdot I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \sum_{k=1}^2 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^0(x_k)}{E \cdot I_z} dx = \int_0^a \frac{x \cdot 0}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{(a+x) \cdot (-F \cdot x)}{E \cdot I} dx = \\ &= - \frac{F}{E \cdot I} \left(a \cdot \frac{4a^2}{2} + \frac{8a^3}{3} \right) = - \frac{14}{3} \frac{F \cdot a^3}{E \cdot I} \end{aligned}$$



Probleme static nedeterminate la încovoiere

Aplicarea metodei eforturilor

Înlocuind valorile în ecuație, se calculează forța necunoscută X_1 , adică reacțiunea V_2 din problema inițială:

$$X_1 = V_2 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{14}{27} F$$

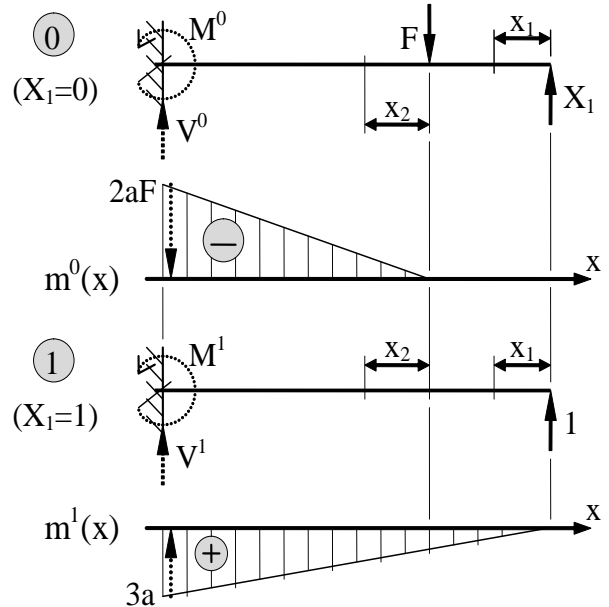
Această soluție coincide cu valoarea obținută la aplicarea teoremei lui Castigliano.

Calculul coeficienților cu teorema Mohr-Vereșceaghin

Coficienții δ_{ij} se pot găsi și prin integrare grafo-analitică a produselor de funcții, folosind diagramele: pentru δ_{11} se poate lua o singură arie (un triunghi cu catetele egale cu $3a$) pe toată lungimea barei; pentru δ_{10} se înmulțește aria diagramei $m^0(x)$ (pe prima regiune are valoarea zero!) cu valoarea lui $m^1(x)$ în $x_2 = (2/3) \cdot 2a$; se obțin aceleași valori ca mai sus:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^1(x_k)}{E \cdot I_z(x_k)} dx = \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{3a \cdot 3a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a \right) = \frac{9a^3}{EI}$$

$$\delta_{10} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^0(x_k)}{E \cdot I_z(x_k)} dx = \frac{1}{E \cdot I} \left[\frac{(-2aF) \cdot 2a}{2} \cdot \left(a + \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \right] = -\frac{14}{3} \frac{Fa^3}{EI}$$



Probleme static nedeterminate la încovoiere

Calculul reacțiunii prin egalarea deplasărilor

Este interesant că reacțiunea din dreapta poate fi imaginată ca acea forță X care readuce punctul B al barei (în care nu ar exista un reazem) la locul său dinaintea de aplicarea forței F .

Primele două schițe alăturate folosesc la calculul deplasării verticale din B, sub acțiunea lui F :

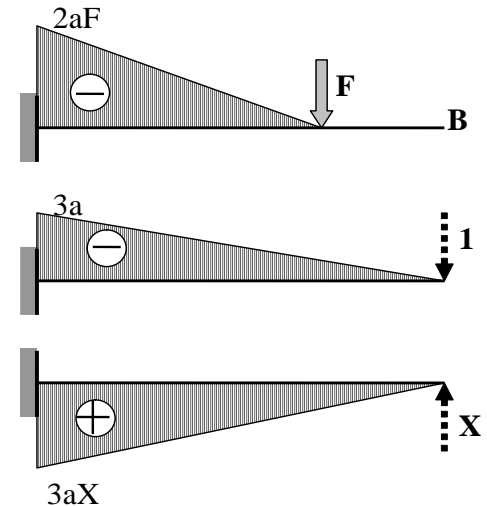
$$EI_z \cdot v(B) = \frac{2a \cdot (-2aF)}{2} \cdot \left(-a - \frac{2}{3} \cdot 2a\right) = \frac{14}{3} a^3 F$$

S-a înmulțit aria diagramei reale cu valoarea de pe graficul cu forță 1, în dreptul centrului de greutate al diagramei reale.

Folosind cele două schițe fictive, se află deplasarea sub forța X :

$$EI_z \cdot v^X(B) = \frac{3a \cdot 3aX}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a = 9a^3 X$$

Scriind condiția de egalitate a celor două deplasări, se ajunge la $X = V_2 = (14/27)F$, adică aceeași valoare ca la metodele aplicate anterior.



Probleme static nedeterminate la încovoiere

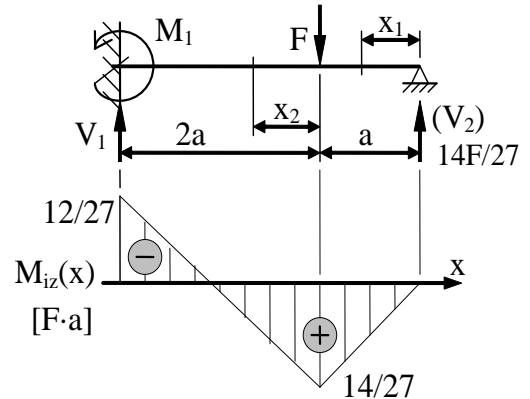
Finalizarea problemei

Pentru a stabili secțiunea periculoasă a barei analizate, se trasează diagrama momentelor de încovoiere; pe grindă se separă două regiuni, expresiile eforturilor secționale sunt liniare pe toată lungimea barei și se scriu sub forma dată mai jos; diagrama de momente se trasează ca în figură, iar secțiunea periculoasă se află la granița dintre regiuni, valoarea maximă a momentului fiind $(14Fa/27)$.

$$(\forall)_{x_1 \in (0;a)}: M_{iz}(x_1) = V_2 \cdot x = \frac{14}{27} F \cdot x; \quad M(0) = 0; \quad M(a) = \frac{14}{27} Fa.$$

$$(\forall)_{x_2 \in (0;2a)}: M_{iz}(x_2) = V_2(a+x) - F \cdot x = \frac{14}{27} Fa - \frac{13}{27} Fx;$$

$$M(0) = \frac{14}{27} Fa; \quad M(2a) = -\frac{12}{27} Fa.$$



Observații

1. Dacă reazemul simplu din dreapta ar lipsi, momentul maxim ar fi în secțiunea din încastrare, cu valoarea $(-2Fa)$; introducerea reazemului suplimentar complică oarecum rezolvarea problemei, dar duce la scăderea cu aproximativ 75% a solicitării maxime.
2. În aceeași proporție scade caracteristica de rezistență necesară a secțiunilor (modulul W_z), adică solicitarea este preluată de o bară cu greutate mai mică și care implică un consum de material mult redus față de simpla rezemare în consolă a barei.

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare)

2. Să se analizeze cum se modifică mărimea solicitării într-o bară simplu rezemată, încărcată pe toată lungimea cu o forță uniform distribuită de intensitate q , atunci când i se adaugă un reazem simplu suplimentar, așezat la mijlocul lungimii barei.

Rezolvare

Al treilea reazem face ca bara să devină static nedeterminată; se studiază pentru început solicitarea reală observând că, la aplicarea metodei eforturilor, aceasta va reprezenta starea „zero” a sistemului de bază – cu reazemul din mijloc îndepărtat, ceea ce sugerează forma celei de-a doua solicitări fictive și necesitatea de a separa pe bară două regiuni simetrice:

$$(\forall)x_1 \in (0;a): T_y(x_1) = qa - qx ; T(0) = qa ; T(a) = 0 ;$$

$$(\forall)x_2 \in (0;a): T_y(x_2) = qx - qa ; T(0) = -qa ; T(a) = 0 ;$$

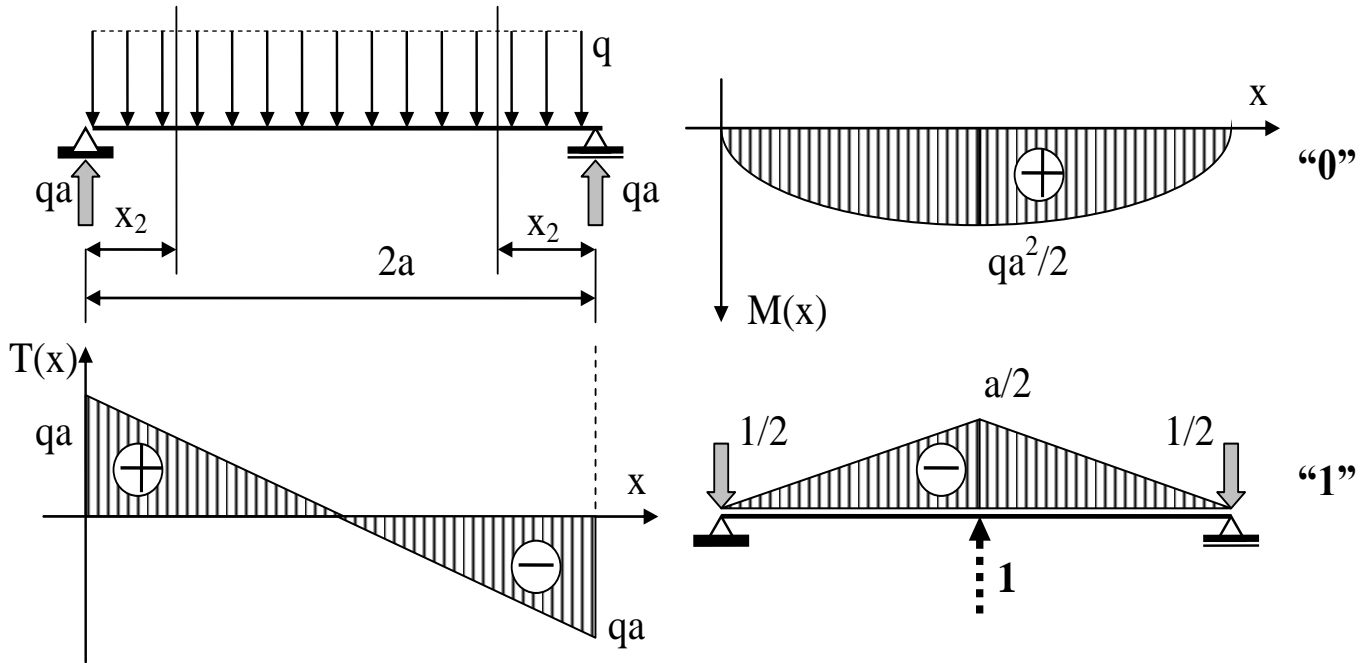
$$M_{iz}(x_1) = M_{iz}(x_2) = qa \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} ; M(0) = 0 ; M(a) = \frac{1}{2} qa^2$$

Diagramele de eforturi bazate pe rezultatele de mai sus sunt trasate în figura alăturată, împreună cu diagrama stării fictive „unu”, pentru care se obține că:

$$m(x_1) = m(x_2) = (-1/2) x = -x/2 ; m(0)=0 ; m(a) = -a/2$$

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare) – Aplicația 2



Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare) – Aplicația 2

Cu rezultatele de mai sus, coeficienții singurei ecuații din metoda eforturilor sunt:

$$EI_z \cdot \delta_{10} = 2 \cdot \int_0^a \left(-\frac{x}{2}\right) \left(qax - q \frac{x^2}{2}\right) dx = (-1) \left(qa \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = -qa^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{5}{24} qa^4$$

$$EI_z \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \int_0^a \left(-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{6} a^3 \quad \text{de unde} \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{5}{4} qa$$

Al doilea coeficient se poate calcula și grafo-analitic, înmulțind pe fiecare regiune diagrama „unu” cu ea însăși:

$$EI_z \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \right] = \frac{1}{6} \cdot a^3$$

Trebuie remarcat că și pentru acest caz este posibil calculul reacțiunii suplimentare prin *egalarea deplasărilor* – cea reală, de la mijlocul grinzii așezate pe două reazeme, respectiv cea produsă de o forță necunoscută X , plasată în poziția forței fictive unitare din figura 6.31 (starea fictivă „1”).

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare) – Aplicația 2

Pentru cazul cu forța concentrată X se obține aceeași diagramă triunghiulară ca în figură, dar cu momentul maxim de valoare $(-aX/2)$; la aplicarea teoremei Mohr-Maxwell se utilizează această diagramă (pentru care se calculează aria celor două triunghiuri simetrice) și cea din starea „1” de mai sus, iar deplasarea din mijlocul barei sub forța X este:

$$EI_z \cdot v(B) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{aX}{2} \right) \right] \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) = \frac{1}{6} a^3 X$$

Pentru a calcula deplasarea de la mijlocul barei așezate pe două reazeme se folosesc din nou diagramele din figura de mai sus și se înmulțește funcția reală a momentelor cu efortul $m(x_i)$ din starea fictivă „1”, cu precizarea că forța unitară trebuie orientată în jos, sensul deplasării căutate (ceea ce schimbă semnele în calculele pentru acea stare fictivă de solicitare); se obține aceeași expresie ca la δ_{10} de mai sus:

$$EI_z \cdot v(B) = 2 \cdot \int_0^a \left(\frac{X}{2} \right) \left(qa x - q \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{5}{24} qa^4; \text{ din } \frac{1}{6} a^3 X = \frac{5}{24} qa^4 \text{ se ajunge la } X = \frac{5}{4} qa$$

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare) – Aplicația 2

Cunoscând că suma celor trei reacțiuni din problema static nedeterminată trebuie să fie $2qa$, valoarea $5qa/4$ a reacțiunii din mijloc conduce la mărirea $3qa/8$ pentru fiecare dintre reacțiunile de la capetele barei; se obțin următoarele variații ale eforturilor secționale pe lungimea barei:

$$(\forall)x_1 \in (0;a): T_y(x_1) = \frac{3}{8}qa - qx; T(0) = \frac{3}{8}qa; T(a) = -\frac{5}{8}qa; T\left(\frac{3}{8}a\right) = 0$$

$$(\forall)x_2 \in (0;a): T_y(x_2) = qx - \frac{3}{8}qa; T(0) = -\frac{3}{8}qa; T(a) = \frac{5}{8}qa; T\left(\frac{3}{8}a\right) = 0$$

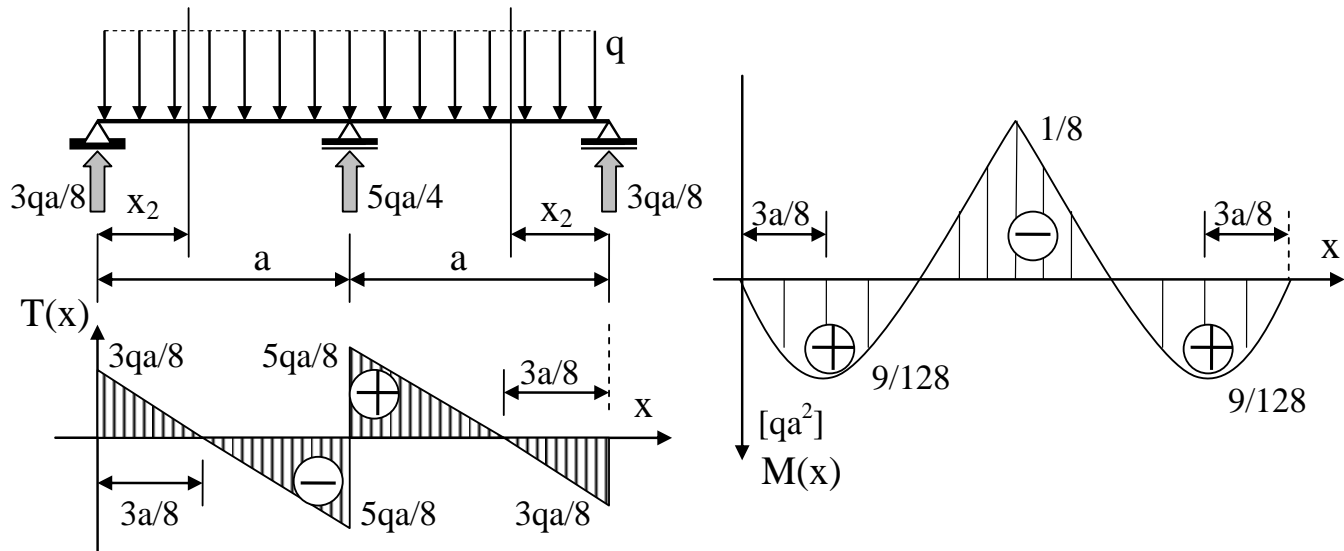
$$M_{iz}(x_1) = M_{iz}(x_2) = \frac{3}{8}qa \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}; M(0) = M\left(\frac{3}{4}a\right) = 0; M(a) = -\frac{1}{8}qa^2$$

$$M_{\max}(x_i) = M\left(\frac{3}{8}a\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 qa^2 = \frac{9}{128}qa^2$$

Aceste evoluții sunt prezentate în diagramele de eforturi de mai jos; trebuie remarcat că efortul maxim de încovoiere este $qa^2/8$, care este *de 4 ori mai mic* față de valoarea de la varianta static determinată a problemei. Pe de altă parte, la fel ca în cazul așezării pe două reazeme a grinzii, construcția și încărcările sunt **simetrice**, încât diagrama de *momente* s-a obținut **simetrică**, iar cea de *forțe tăietoare* – **antisimetrică**.

Probleme static nedeterminate la încovoiere

Exemple (Influența reazemelor suplimentare) – Aplicația 2



La fel ca în exemplul anterior, introducerea reazemului suplimentar a complicat, într-o anumită măsură, calculele pentru stabilirea reacțiunilor barei, dar a condus la micșorarea semnificativă a valorilor maxime ale eforturilor secționale, deci și a consumului de material (datorită dimensiunilor transversale mai mici) necesar pentru realizarea barei.