

Rezistența materialelor 2

Sinteze de cursuri

Conf. dr.ing. Marian MAREȘ

CUPRINS

2.1_Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri	p. 3
2.2_Calculul grinzilor plane cu zăbrele	p. 22
2.3_Caracterizarea stărilor de solicitare	p. 38
2.4_Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere	p. 54
2.5_Teorii și criterii de rupere	p. 66
2.6_Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)	p. 81
2.7_Solicitări compuse de tip ($\tau + \tau$)	p. 97
2.8_Bare cotite – nedeterminări interioare	p. 110
2.9_Bare în formă de arc de cerc	p. 120
2.10_Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații	p. 137
2.11_Răsucirea barelor cu secțiuni transversale necirculare	p. 158
2.12_Vase de revoluție cu pereți subțiri	p. 171
2.13_Tuburi cilindrice cu pereți groși	p. 183
2.14_Discuri (de grosimi mici și uniforme) în mișcare de rotație	p. 201
2.15_Solicitări mecanice aplicate prin șocuri	p. 207
2.16_Aspecte privind oboseala materialelor	p. 214

2.1

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Starea de echilibru stabil

Se spune despre un corp solid că se află în echilibru stabil dacă, atunci când o perturbare exterioară îl scoate din echilibru, această modificare va fi eliminată prin încetarea acțiunii elementului perturbator, corpul revenind în starea inițială.

Pentru barele drepte comprimate care au secțiuni transversale de dimensiuni relativ mici față de lungime, axele lor tind să se curbeze și forțele axiale care le încarcă produc *îndoirea* barelor, cu intensitate proporțională cu mărimile forțelor; când încărcările ating un anumit nivel (denumit *critic*), deformațiile de încovoiere cresc peste limita de suportabilitate a barei, care cedează instantaneu; desigur că cedarea nu se produce din cauza depășirii limitelor de rezistență ale materialului său, ci datorită unei stări de deformare elastică *instabilă*.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Se produce astfel un *fenomen* particular, denumit *flambaj (longitudinal)*, care are consecințe catastrofale și trebuie evitat; fenomenul este ireversibil și incomplet stăpânit prin metode de calcul: ceea ce se poate stabili este doar *nivelul solicitării critice* (F_{cr}), având valori specifice fiecărei bare concrete; se admite că pentru încărcările mai mici decât acest nivel flambajul barei respective nu se produce.

Din necesități de calcul se definește și *tensiunea critică de flambaj* (σ_{cr}) a unei bare – tensiunea normală ce corespunde sarcinii ei critice; este interesant că această tensiune se poate afla sub limita de proporționalitate (sau de elasticitate) a materialului, când se produce flambajul *elastic* al barei, dar poate fi și deasupra acestei limite – pentru flambajul numit *elasto-plastic*.

Problema calculelor la flambajul elastic al barelor drepte a fost rezolvată (fără realizarea unor experimente) la mijlocul secolului XVIII, de către savantul elvețian Leonhard Euler (1707-1783). În schimb, pentru flambajul elasto-plastic, deși s-au stabilit diferite soluții teoretice, acestea au un caracter predominant empiric, fiind adică bazate exclusiv pe rezultate și observații experimentale.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Ideea fundamentală în calculul de flambaj este că solicitarea reală (F_{ef}) trebuie să se afle la o anumită distanță (de siguranță) față de sarcina critică (F_{cr}) a barei analizate; aceasta implică impunerea unei valori minime a raportului celor două mărimi, sub formă de **coeficient de siguranță la flambaj** (c) – mărime definită atât în legătură cu forțele F , cât și cu tensiunile normale, astfel:

$$c = \frac{F_{cr}}{F_{ef}} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{ef}}$$

Coeficientul de siguranță la flambaj este **supraunitar**, cu atât mai mare cu cât piesa este mai importantă la locul de utilizare sau în ansamblul din care face parte; pentru barele din construcțiile de mașini valorile uzuale ale coeficientului sunt teoretic cuprinse între 2 și 28, dar în mod obișnuit el se limitează la 3-4 unități.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Calculul forței critice în cazul flambajului elastic

Spre deosebire de calculele ingineresti obișnuite, cele de stabilitate pornesc de la *efectele* fenomenului de flambaj către cauzele lui, încât rezolvările au în vedere cazuri particulare de pierdere a stabilității barelor drepte.

În privința flambajului **elastic** (la care σ_{cr} este sub limita de proporționalitate σ_p de pe curba caracteristică la compresiune a materialului) analiza pornește de la apariția încovoierii pe barele comprimate lungi și subțiri; din ecuația (dată de Euler a) fibrei medii a barei astfel deformată se obține o ecuație diferențială, care depinde ca aspect de modul în care este rezemată bara; rezolvarea ecuației, pe baza condițiilor la limită, conduce la aflarea forței critice de flambaj a barei analizate.

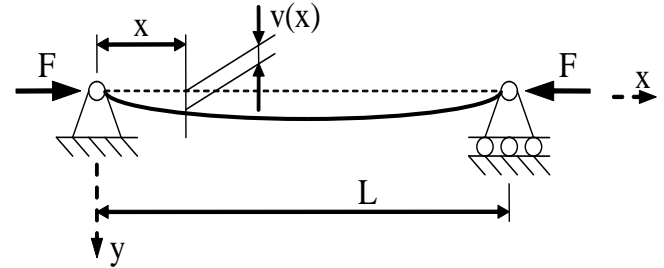
Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Cazul barei articulate la capete

Pe bara deformată apare, în orice secțiune x , un efort de încovoiere $M_{iz}(x) = F \cdot v(x)$, iar ecuația lui Euler se va scrie astfel:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{F \cdot v(x)}{E \cdot I_z}$$

Se face notația $\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$ încât ecuația devine $\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot v(x) = 0$



Soluția acestei ecuații diferențiale va avea forma $v(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$ iar coeficienții se determină din condițiile de deformabilitate a barei (*condițiile la limită*), date de împiedicarea deplasării pe verticală în secțiunile de la capete:

$$v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A \cdot \sin(\alpha L) = 0 \Leftrightarrow \alpha L = k \pi$$

Ultima condiție rezultă din evitarea soluției banale a ecuației diferențiale, $v(x)=0$, iar constanta k poate fi orice număr natural (diferit de zero); considerând prima soluție posibilă ($k=1$), bara deformată are aspect de sinusoidă dată de ecuația:

$$v(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) = v_{\max} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Cazul barei articulate la capete

În această expresie valoarea maximă (v_{\max}) a deplasării rămâne nedeterminată, ceea ce menține posibilitatea de evoluție catastrofală a fenomenului de flambaj; din $\alpha \cdot L = \pi$ rezultă constanta α , care este înlocuită în notația de mai sus, astfel:

$$\frac{\pi^2}{L^2} = \frac{F}{EI} \Rightarrow F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$$

Introducerea lui I_{\min} (cel mai mic dintre momentele de inerție principale centrale ale secțiunii transversale) în formulă conduce la cea mai mică dintre posibilele forțe critice de flambaj ale barei studiate; se poate intui că încovoierea barei (sub forță axială) se produce preferențial în jurul axei principale a secțiunii transversale având momentul de inerție (și deci rezistența la încovoiere) de valoare minimă.

Ultima relație reprezintă **formula lui Euler** pentru cazul *fundamental* de flambaj, fiind folosită la calculul forței critice pentru bara comprimată ca în figura de mai sus.

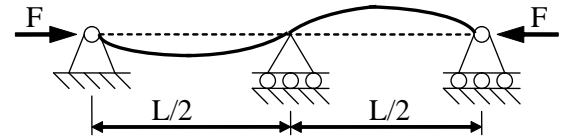
Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Cazul barei articulate la capete

Atenție: Forța critică este acel nivel al solicitării de comprimare până la care se admite că **nu se produce** pierderea stabilității elastice a barei, adică trebuie evitate încărcările ce ar atinge această limită!

Se pot scrie noi soluții ale ecuației diferențiale dând lui **k** alte valori decât **1**; dacă se adoptă $k=2$, se obține $\alpha \cdot L = 2\pi$ și a doua forță critică a barei:

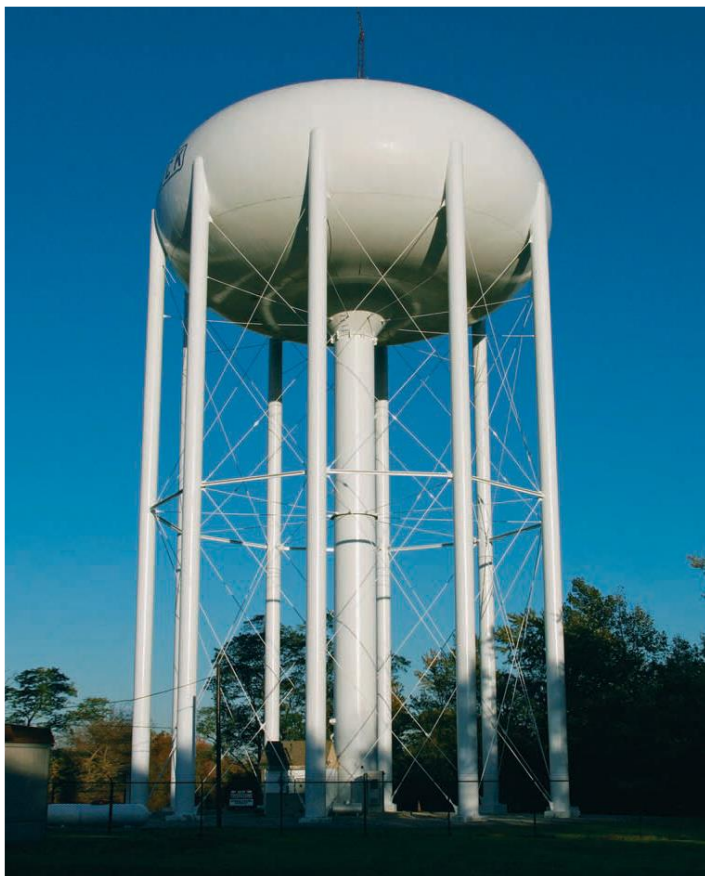
$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L^2}$$



Aceasta corespunde situației în care lungimea barei se înjumătățește prin rezemare suplimentară (cum se arată în imaginile din pagina următoare), la mijlocul lungimii, cu o articulație mobilă; noua variantă de rezemare este o soluție practică relativ simplă pentru a mări (de 4 ori) forța critică de flambaj, deci intervalul de funcționare sigură a barei.

Pentru următoarele soluții ale ecuației diferențiale (obținute din condiția $\alpha \cdot L = k\pi$) se folosesc, analog, un număr de **k-1** reazeme mobile *intermediare*, obținând creșterea de **k²** ori a forței critice a barei; trebuie însă observat că orice defectare a unuia sau unora dintre aceste reazeme duce la scăderi importante ale forței critice și pune în pericol stabilitatea barei!

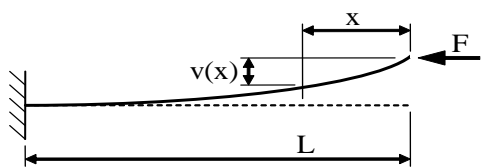
Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

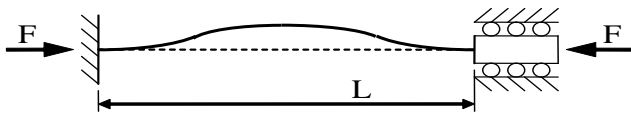


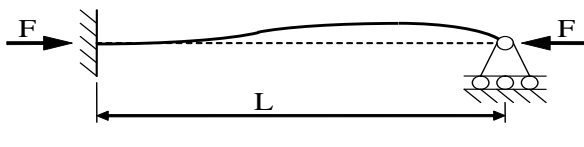
Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Calculul forței critice pentru alte cazuri de rezemare

Procedând analog (cu ecuații diferențiale neomogene, pentru ultimele două variante) se rezolvă încă trei cazuri de rezemare pentru barele comprimate – în consolă, încastrare la ambele capete, respectiv încastrare la un capăt și articulație la celălalt; forța critică se obține, pentru fiecare caz, din relația scrisă în dreptul figurii respective.


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(2L)^2}$$


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Formula lui EULER pentru calculul forței critice de flambaj

Analizând relațiile forței critice pentru cazurile de rezemare studiate se observă că ele se diferențiază prin mărimea de la numitor; aceasta se notează cu L_f^2 , numită *lungime de flambaj* a barei pentru fiecare variantă de încărcare; din relațiile de mai sus se extrag lungimile de flambaj pentru situațiile respective:

⇒ pentru bara dublu articulată	$L_f = L$
⇒ pentru bara în consolă	$L_f = 2L$
⇒ pentru bara dublu încastrată	$L_f = L/2$
⇒ pentru bara articulată și încastrată	$L_f = 0,707 \cdot L$

Se ajunge la o formă unică a relației lui Euler, pentru calculul forței critice (în [N]) în cele patru tipuri de rezemare de mai sus:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(L_f)^2}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Formula lui EULER - Observații

1. Pentru toate discuțiile de față se admite că factorul EI (rigiditatea barei la încovoiere) este constant pe lungimea L a barei studiate, iar această lungime este practic egală, în starea deformată, cu cea inițială! În plus, greutatea proprie a barei se neglijează.
2. Prezența la numitor a lungimii de flambaj arată că barele cu lungimi mari au forțe critice mici, deci un pericol mare de distrugere prin flambaj.
3. Din compararea valorilor L_f pentru cele 4 cazuri rezultă că bara în consolă se află în situația cea mai periculoasă, având cea mai mare lungime de flambaj ($L_f = 2L$), cea mai sigură fiind bara dublu încastrată ($L_f = L/2$).
4. Pentru barele care flambează elastic forța critică depinde, în raport cu materialul barei, numai de modulul de elasticitate E , care are valori similare pentru cele mai multe oțeluri; pentru astfel de bare (având flambajul amenințare principală) nu este rațional să se folosească oțeluri aliate, scumpe, încât ele se fac din oțeluri laminate obișnuite!
5. Forța critică a unei bare crește proporțional cu momentul de inerție al secțiunii sale față de axa de încovoiere; secțiunile cele mai avantajoase au materialul dispus simetric (astfel ca $I_z = I_y$) și la distanță cât mai mare de axele de simetrie, pentru ca momentul de inerție să fie cel mai mare posibil, pentru un consum de material stabilit.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicabilitatea formulei lui Euler

S-a precizat că în cazurile de mai sus flambajul barelor este de tip *elastic*: pierderea stabilității se produce în domeniul deformabilității elastice a materialului, adică tensiunea maximă din bară nu depășește limita de proporționalitate (σ_p) de pe curba caracteristică. Dacă se definește, pe baza forței critice dată de formula Euler, o *tensiune critică de flambaj* σ_{cr} (raportul forței critice la aria secțiunii transversale a barei), ținând

seama de definiția razei de inerție $\frac{I_{\min}}{A} = i_{\min}^2$ rezultă:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{\min}}{A}}{(L_f)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(L_f)^2}$$

Această relație devine mai simplă făcând notația $\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}}$ adică $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$

Numărul λ , *coeficientul de subțirime* (sau *de zveltețe*) al barei analizate, este raportul între două lungimi (nu are dimensiuni!) și reprezintă indicatorul principal al modului în care o bară concretă se calculează la flambaj.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicabilitatea formulei lui Euler

Observații:

- 1. Calculele de stabilitate elastică sunt specifice fiecărei bare, inclusiv în privința materialului și încărcărilor ei.*
- 2. Coeficientul λ introduce în calculele de flambaj influențele asupra stabilității barei date de lungime, rezemare, respectiv forma și dimensiunile secțiunii transversale.*
- 3. Două bare caracterizate prin aceeași valoare a coeficientului de subțirime își vor pierde stabilitatea elastică în același fel.*

Pornind de la ultima relație de mai sus se poate construi o curbă de dependență între tensiunea critică de flambaj și coeficientul λ ; principial, graficul acestei funcții reprezintă o *hiperbolă echilaterală*, dar trebuie remarcat că numai o porțiune din grafic este relevantă pentru calculul barei: relația se referă la flambajul *elastic*, deci partea *hiperbolică* a graficului este valabilă numai în zona aflată **sub** limita de proporționalitate a materialului ($\sigma_{cr} < \sigma_p$). Granița acestei zone pe axa absciselor depinde exclusiv de caracteristicile materialului barei și se obține extrăgând din relație valoarea lui λ ce corespunde tensiunii limită σ_p :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicabilitatea formulei lui Euler

Prin urmare, deși coeficientul λ ține seama în mod complex de bara concretă, granița λ_0 a domeniului în care bara se poate calcula cu formula lui Euler este dată numai de materialul barei; de exemplu, pentru oțelul laminat OL37 (având $\sigma_p=190$ și $E=21 \times 10^4$ [MPa]) această graniță va fi:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}}{190 \text{ MPa}}} = 10 \pi \sqrt{\frac{210}{19}} = 104,44$$

Pentru calculele uzuale această valoare se admite a fi $\lambda_0 \cong 105$; domeniul de pe grafic aflat la dreapta acestei granițe corespunde *flambajului elastic*, cel de la stânga (diferit de hiperbola de mai sus!) urmând să descrie dependența dintre tensiunea critică și coeficientul λ în cazurile de *flambaj elasto-plastic*.

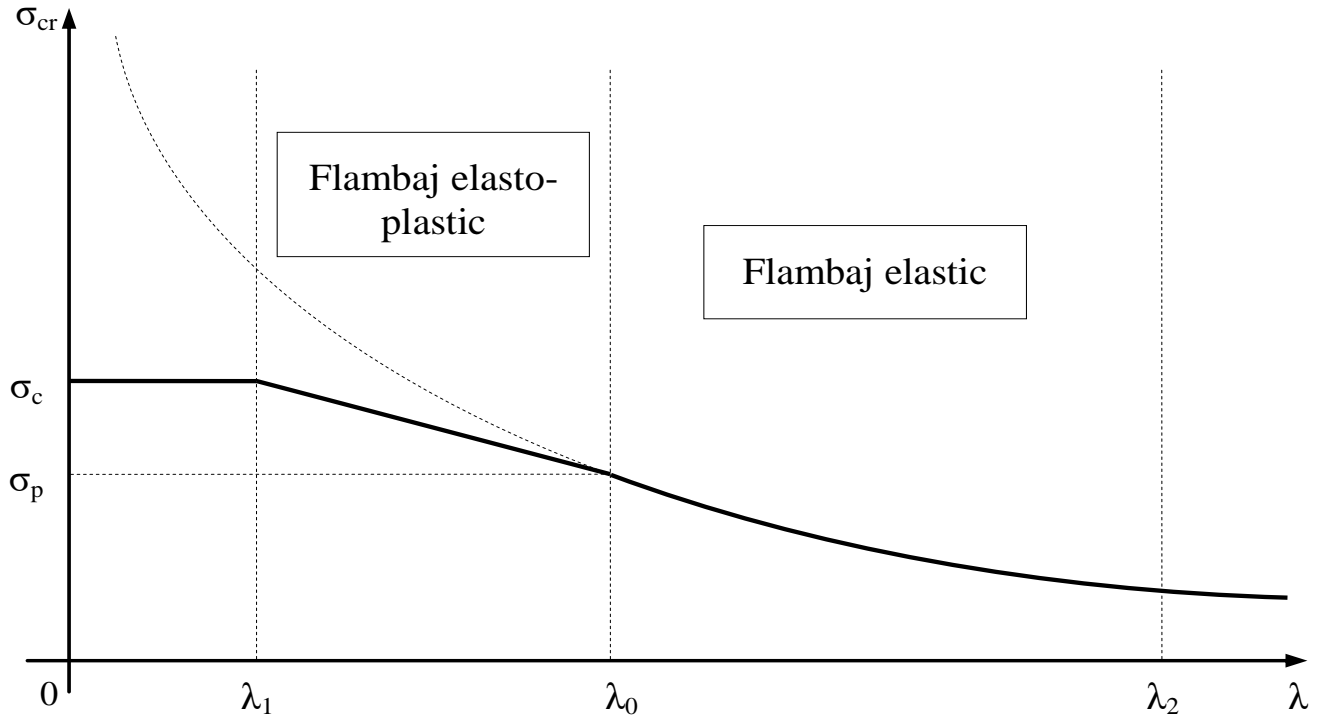
Observații:

1. Pentru fiecare bară și mod de rezemare există **o singură valoare** a lui λ , deci oricărei bare concrete îi corespunde **un punct** reprezentativ pe axa absciselor din grafic; poziția lui arată cum trebuie făcut calculul de stabilitate pentru bara studiată!
2. Cu cât materialul barei are o valoare mai mare a lui σ_p , cu atât valoarea limitei λ_0 va fi mai mică, adică domeniul în care bara flambează **elastic** va fi mai întins!

Trebuie remarcat că λ este cu atât mai mare cu cât bara este mai zveltă (mai lungă față de dimensiunile transversale); graficul arată că, dacă λ crește mult, domeniul încărcărilor permise scade drastic, iar bara nu mai poate fi, practic, încărcată cu forțe de compresiune. Rezultă că domeniul real de flambaj elastic trebuie limitat și în partea sa dreaptă: barele nu pot avea coeficientul de subțirime mai mare decât un anumit λ_2 , ales în funcție de aplicația analizată; astfel, pentru barele din oțeluri obișnuite, în construcțiile de mașini sau construcții metalice, limita recomandată este $\lambda_2 = 150$.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicabilitatea formulei lui Euler



Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Tensiunea critică pentru flambajul elasto-plastic

S-a constatat că dependența (hiperbolică) dintre σ_{cr} și λ în cazul flambajului *elastic* modelează corect datele obținute în practică, pentru toate tipurile de materiale; în schimb, pentru domeniul *elasto-plastic* nu s-a putut stabili o exprimare matematică unică a acestei dependențe. Modelările luate de obicei în considerare au ca punct de pornire rezultatele experimentale (deci au un caracter *empiric*) și sunt exprimate prin funcții specifice, pentru diverse categorii de materiale.

Pentru oțeluri **Tetmajer** și **Iasinski** au propus o lege de dependență liniară *descrescătoare*, sub forma: $\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda$ [MPa]

unde coeficienții **a** și **b** (în unități de tensiuni) depind de caracteristicile oțelului utilizat; astfel, pentru *lamine* se iau $a=304$ și $b=1,12$ [MPa]; pentru cele *aliante* valorile coeficienților dau tensiuni critice mai mari (și o probabilitate mai mică de producere a flambajului): de exemplu, pentru un oțel aliat cu 5% Ni se iau $a=461$ și $b=2,26$, iar $\lambda_0=86$; rezultă că barele făcute din oțeluri cu calități bune de rezistență sunt avantajoase – în cazurile în care ele flambează *elasto-plastic*!

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Tensiunea critică pentru flambajul elasto-plastic

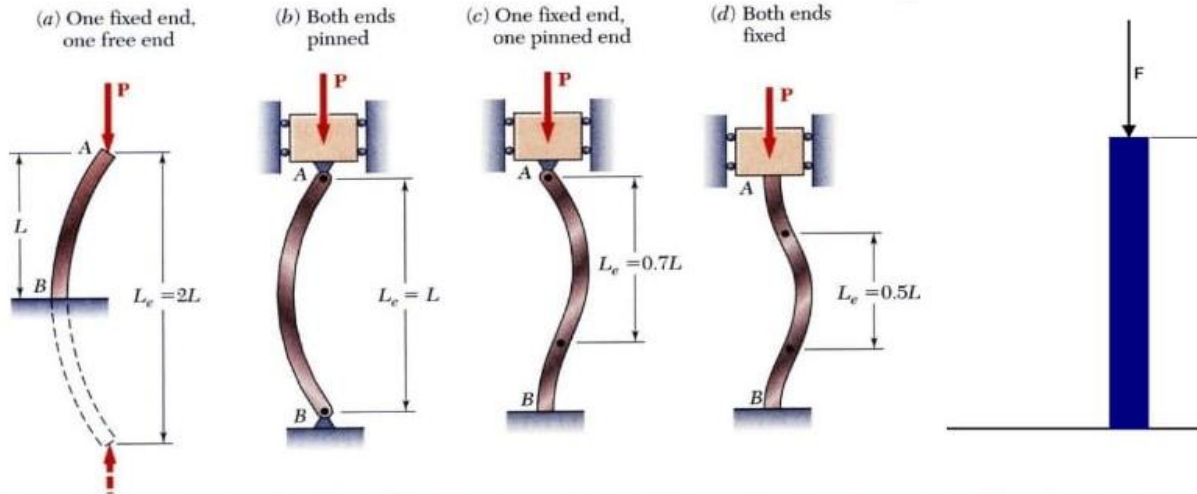
Pentru alte materiale legea de modelare și coeficienții pe care îi conține se pot găsi în cărți sau în baze de date, ca și valorile lui λ ce mărginesc domeniile de pe graficul tensiunii critice de flambaj.

Desigur că relațiile de acest tip nu sunt valabile pentru întreaga parte de grafic aflată la stânga limitei λ_0 : dacă pentru o bară tensiunea critică de flambaj se află deasupra limitei de curgere a materialului ei ($\sigma_{cr} \geq \sigma_c$), bara va ceda prin *pierderea capacității de rezistență la compresiune*, iar problema flambajului nu mai trebuie pusă; porțiunea modelată empiric a graficului apare deci la dreapta lui λ_1 de pe abscisă (corespunzând limitei de curgere a materialului), iar între origine și λ_1 tensiunea limită permisă în bară va fi egală cu σ_c ; valoarea de graniță λ_1 depinde și ea de caracteristicile materialului barei și se obține luând în formulă tensiunea critică egală cu limita de curgere σ_c :

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_c}{b}$$

Coeficienții recomandați pentru oțelurile laminate dau pentru λ_1 valorile 57.1 – dacă $\sigma_c=240\text{MPa}$, 39.3 – pentru $\sigma_c=260\text{MPa}$, respectiv 21.4 – dacă $\sigma_c=280\text{MPa}$; astfel, pentru oțelurile obișnuite, limita λ_1 este admisă a fi cuprinsă între 20 și 60.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri



2.2

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Definirea subiectului

Construcțiile (static determinate) numite grinzi cu zăbrele sunt rețele de *triunghiuri* formate din bare drepte prinse *articulat* în noduri și alcătuind structuri (schelete) plane sau spațiale; acestea pot înlocui cu succes plăci sau volume structurale masive, față de care au capacități similare de a prelua încărcări mecanice, dar consumuri mult mai mici de material și implicit greutate mult reduse.

Prezentarea de față se referă la construcțiile **plane**, cu forțe exterioare aplicate exclusiv în noduri; principiile de calcul rămân valabile și se extind cu relativă ușurință pentru alte categorii de grinzi cu zăbrele; trebuie observat că rezemarea articulată a barelor componente și plasarea forțelor care le încarcă doar la capetele lor determină ca ele să fie solificate numai la *întindere* sau la *comprimare*.

Într-o primă instanță necunoscutele dintr-o problemă de grinzi cu zăbrele sunt **eforturile** secționale din bare, care se calculează prin două metode analitice de bază, descrise mai jos; fiecare dintre ele pornește de la *secționarea imaginară* a barelor grinzii, pentru a fi puse în evidență eforturile necunoscute.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele



Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Principii de secționare

Existența eforturilor este semnalată grafic prin **săgeți**, pe axa fiecărei bare care se secționează, în apropierea *traseului de secționare* indicat pe desenul grinzii; sensul săgeților este de la nodul care prinde bara către tăietura făcută, ceea ce fizic arată că bara respectivă este solicitată la *întindere*. Eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele vor rezulta cu semn *pozitiv*, pentru barele *întinse*, încât despre barele pentru care se obțin eforturi *negative* se va înțelege că sunt solicitate la *comprimare*.

Pentru identificarea precisă a acestor eforturi se începe prin a fi marcate, cu *numere* sau cu *litere mari*, **nodurile** grinzii analizate, astfel că se va nota cu N_{ij} efortul din bara ce are la capete nodurile „i” și „j”; ordinea în care se scriu aici indicii nu are importanță, dar se preferă ordonarea lor crescătoare, respectiv alfabetică.

Trebuie remarcat că de obicei *unghiurile* formate între barele unei grinzi cu zăbrele au valori oarecare (depinzând inclusiv de lungimile barelor folosite), iar ele influențează direct scrierea ecuațiilor de echilibru din care se calculează eforturile necunoscute. Este însă de subliniat că *mărimile* propriu-zise ale acelor unghiuri nu sunt importante, întrucât în calcule apar doar valorile unor *funcții trigonometrice* ale lor, care de regulă pot fi aflate prin metode geometrice simple!

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Criterii constructive

Grinzile cu zăbrele trebuie să fie **static determinate** și **nelabile** (să nu aibă comportare de *mecanism*); statica determinare se referă și la *rezemarea* grinzilor, care deci trebuie să conțină cel mult un reazem simplu și o articulație. Stabilirea eforturilor din bare necesită inclusiv cunoașterea *reacțiunilor* din reazeme, care sunt calculate încă de la începutul rezolvării problemelor.

Cele două condiții constructive ale oricărei grinzi cu zăbrele se consideră verificabile prin două **criterii** care trebuie îndeplinite *simultan*:

- a. întrucât în fiecare nod se pot scrie **două** ecuații de echilibru, iar necunoscutele sunt eforturile din bare și cele trei reacțiuni din reazemele grinzii, rezultă că numerele N (de noduri) și B (de bare) ale construcției trebuie să verifice relația $2N = B + 3$;
- b. construcția trebuie să fie alcătuită pornind de la trei bare, prinse într-un *triunghi*, la care să se adauge succesiv câte *două* bare noi, având un nod *comun* (care eventual nu exista înainte de adăugarea lor).

Aceste condiții sunt verificate și de construcțiile ce reunesc două grinzi cu zăbrele viabile, dacă sunt legate printr-un nod comun și o bară unind câte un nod din fiecare grindă, sau conectate prin trei bare care nu sunt nici toate paralele și nici toate concurente între ele (două câte două pot să se afle în aceste situații!).

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Calcul de rezistență

După ce ajung să fie cunoscute eforturile, calculul barelor trebuie făcut din două puncte de vedere:

- *rezistența* la solicitarea *axială* propriu-zisă, deci **calculul la întindere sau comprimare** pentru bara cu efortul maxim în valoare absolută;
- *stabilitatea elastică longitudinală*, **verificată** pentru bara cu efortul de comprimare de valoarea cea mai mare.

Ca principiu ar trebui să se facă pre-dimensionarea barelor, din solicitarea axială, urmată de verificarea la flambaj a barei cu cea mai mare solicitare de comprimare; dacă însă aceasta este chiar bara cu solicitare maximă *absolută* din grinda cu zăbrele, atunci se poate face direct dimensionarea ei la flambaj.

La final se adoptă dimensiunea transversală a barelor grinzii, în mod obișnuit cu aceeași valoare pentru toate barele, inclusiv pentru cele care, eventual, nu sunt deloc solicitate (au efortul axial egal cu zero!); este important că aceste bare nu pot lipsi din construcția analizată, iar eventuala lor deteriorare (din cauze diverse) poate provoca cedarea întregii structuri!

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Calculul deplasării unui nod al grinzii cu zăbrele

Ca la orice structuri elastice, se poate calcula cu cât și pe ce direcție se deplasează un nod oarecare, sub acțiunea încărcărilor exterioare; teoretic, metoda de calcul se bazează pe principiul lucrului mecanic virtual (d'Alembert), dar în aplicare ea se apropie de calculul deplasărilor, la solicitările simple, folosind teorema Mohr-Maxwell.

Trebuie să fie cunoscute lungimile L_i și rigiditățile axiale $E_i A_i$ ale celor N bare ale grinzii, dar și eforturile N_i din bare, produse când grinda suportă încărcările reale; se desenează o stare *fictivă* de solicitare, cu grinda încărcată doar cu o forță egală cu 1 (fără dimensiuni!), așezată (cu sens arbitrar!) în nodul de calcul P , pe direcția Δ pe care trebuie calculată deplasarea; se calculează eforturile n_i din toate barele, iar relația pentru calculul deplasării este:

$$\delta_{\Delta}(P) = \sum_{i=1}^N \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i} \cdot n_i$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Calculul deplasării unui nod al grinzii cu zăbrele

Se observă că fracția de sub sumă are *dimensiune de lungime*, iar factorul n_i este adimensional (pentru că așa este și forța fictivă!), deci rezultatul acestui calcul este pertinent, ca dimensiuni; desigur că eventualul semn *pozitiv* al rezultatului arată că deplasarea nodului se produce chiar în sensul ales pentru forța unitară fictivă. Mai trebuie spus că, dacă se calculează deplasări în mai multe noduri ale unei grinzi, fracția de sub sumă din această relație nu se schimbă (se modifică doar factorul n_i , obținut din încărcarea fictivă, care este proprie calculului respectiv)!

Dacă trebuie stabilită *deplasarea totală* δ_{tot} a nodului P, se aplică algoritmul de două ori, pe două direcții *perpendiculare* între ele, convenabil alese; de obicei se folosesc verticala și orizontala, iar relația va fi:

$$\delta_{\text{tot}}(P) = \sqrt{[\delta_V(P)]^2 + [\delta_H(P)]^2}$$

Cu aceste valori se poate stabili și *direcția* pe care se deplasează P; notând cu α unghiul făcut *cu verticala* de direcția deplasării totale, *tangenta* acestui unghi, aplicând definiția ei, este:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\delta_H(P)}{\delta_V(P)}$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Stabilirea eforturilor din bare prin metoda izolării nodurilor

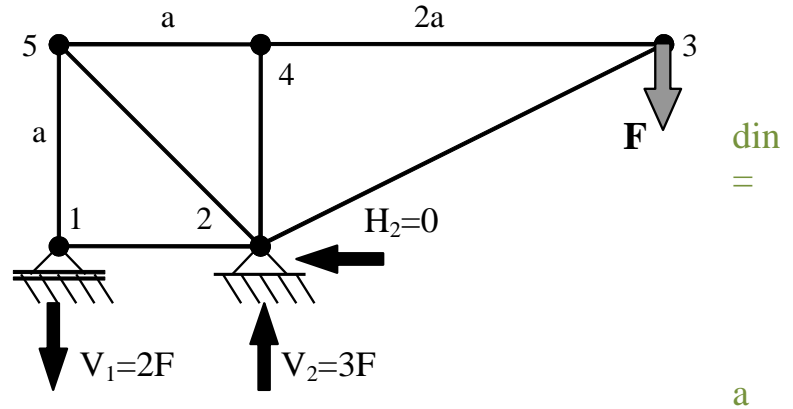
Se fac *secționări*, succesiv, pentru barele intersectate în câte un nod al grinzii; eforturile au direcții concurente, iar momentele lor față de nodul comun se echilibrează de la sine; ecuațiile de echilibru se obțin *proiectând* (și sumând) eforturile (inclusiv eventualele forțe exterioare – adică și reacțiunile – ce apar în nodul de calcul!) pe două direcții reciproc perpendiculare, convenabil alese (de obicei orizontala și verticala).

Rezultă câte *două* ecuații de echilibru în fiecare nod, din care se găsesc pe rând eforturile din bare; eficiența maximă se obține dacă nodurile se aleg așa încât între barele secționate să fie mereu *cel mult două* cu eforturi necunoscute (primul nod va avea doar două bare!); din condiția $2N = B+3$ respectată de orice grindă cu zăbrele, se înțelege că se obțin *3 ecuații în plus* față de numărul de bare (pentru că reacțiunile se calculează din ecuații de echilibru *globale* ale construcției); după ce se stabilesc eforturile, ultimele 3 ecuații de echilibru (care se vor scrie, în principiu, în nodurile cele mai „complicate” ale grinzii!) sunt folosite pentru *verificarea* rezultatelor obținute până în acel moment.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicație

Cât este forța maximă F_{\max} pe care o poate suporta construcția din figură, bare cu secțiuni circulare pline cu $d = 30\text{mm}$, din oțel laminat cu $E = 21 \times 10^4$ și $\sigma_a = 160$ [MPa]; se cunosc $a = 400\text{mm}$ și coeficientul de siguranță la flambaj $c = 2,5$; să se determine și deplasarea pe verticală nodului 3, când încărcarea este egală cu forța maximă de mai sus.



Rezolvare

Reacțiunile din reazeme au fost deja calculate și trecute pe desen (cu sensurile reale); se face verificarea criteriilor constructive: sunt 7 bare și 5 noduri, care îndeplinesc condiția $2 \times 5 = 7 + 3$; în plus, analizând structura pornind de la triunghiul 125, se admite că s-au adăugat barele 24 și 54, prinse în nodul 4, apoi barele 23 și 43, prinse în nodul 3; criteriile sunt verificate, construcția este *static determinată* și *nelabilă*, se pot aplica metodele de rezolvare de la grinzi cu zăbrele.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

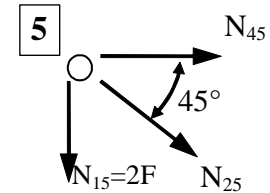
Aplicație

a. Calculul eforturilor – prin metoda izolării nodurilor

Expresiile din **nodul 1** sunt banale: $N_{12} = 0$, respectiv $N_{15} = 2F$

Nodul 5 este intersecția a trei bare, iar ecuațiile de echilibru se prezintă astfel:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : N_{45} + N_{25} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y_i = 0 : N_{15} + N_{25} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$



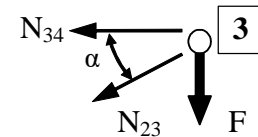
Folosind un rezultat anterior se ajunge la:

$$N_{25} = -N_{15} \cdot \sqrt{2} = -2\sqrt{2} \cdot F$$

$$N_{45} = -N_{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2F$$

Pentru **nodul 4** se scrie că: $N_{34} = N_{45} = 2F$, și $N_{24} = 0$

Nodul 3 conține două bare și forța exterioară F , aspectul particular fiind unghiul α dintre bare; cum s-a arătat, mărimea acestui unghi nu trebuie stabilită, e suficient să fie cunoscute valorile funcțiilor sale trigonometrice; acestea pot fi calculate, exemplu, din triunghiul dreptunghic 234, folosind relațiile lor definiție:



de
de

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

$$\sin \alpha = \frac{[24]}{[23]} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{respectiv} \quad \cos \alpha = \frac{[34]}{[23]} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Cunoscând, din trigonometrie, relația $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin \alpha$, rezultă:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{34} + N_{23} \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum Y_i = 0: N_{23} \cdot \sin \alpha + F = 0 \end{cases}$$

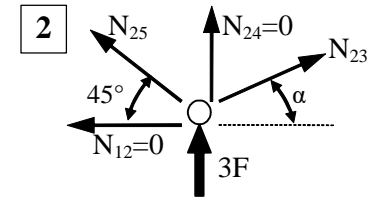
Din rezultatele anterioare se obține: $N_{23} = -F \cdot \sqrt{5}$ respectiv $N_{34} = -N_{23} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2F$

Ultima valoare confirmă un rezultat de mai sus, iar a doua ecuație din nodul 3 este deja una de verificare, deoarece au fost calculate toate eforturile secționale din bare; tot pentru verificare se vor scrie și ecuațiile din **nodul 2**, lăsat la urmă ca fiind cel mai complex, singurul în care se întâlnesc 4 bare ale construcției:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{25} \cdot \cos 45^\circ = N_{23} \cdot \cos \alpha \\ \sum Y_i = 0: N_{23} \cdot \sin \alpha + N_{25} \cdot \cos 45^\circ + 3F = 0 \end{cases}$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2} \cdot F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= -F\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -F\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{2} \cdot F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3F &= 0 \end{aligned}$$



Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicație

Se observă că s-au obținut două identități, adică se poate admite că valorile calculate ale eforturilor N_{ij} din bare sunt corecte; ele sunt cuprinse în tabelul ce urmează, împreună cu eforturile n_{ij} din starea fictivă de încărcare (în care forța F este înlocuită de o forță identică, de mărime 1), pentru calculul deplasării pe verticală în nodul unde acționează forța F .

Bara	12	15	23	24	25	34	45
N_{ij}	0	2F	$-F\sqrt{5}$	0	$-2F\sqrt{2}$	2F	2F
n_{ij}	0	2	$-\sqrt{5}$	2	$-2\sqrt{2}$	2	2
L_{ij}	a	a	$a\sqrt{5}$	a	$a\sqrt{2}$	2a	a

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicație

b. Calculul de rezistență

Valorile eforturilor secționale arată că solicitarea periculoasă pentru barele grinzii este de *comprimare* și are loc în bara oblică 25, pentru care avem:

$$N_{\max} = N_{25} = -2F\sqrt{2} \quad \text{și} \quad L_f = a\sqrt{2} .$$

De această dată construcția barelor este cunoscută – ele au secțiuni circulare pline, cu diametrul $d = 30\text{mm}$ și parametrul $a = 400\text{mm}$, deci poate fi stabilit modul în care bara 25 tinde să flambeze; cunoscând că raza de inerție a secțiunilor circulare este un sfert din diametru rezultă:

$$\lambda_{\text{ef}} = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot 400\text{mm} \cdot \sqrt{2}}{30\text{mm}} = \frac{160 \cdot \sqrt{2}}{3} = 75,4$$

Bara tinde să flambeze în domeniul *elasto-plastic*, iar coeficientul de siguranță se scrie:

$$c_{\text{ef}} = \frac{F_{\text{cr}}}{F_{\text{ef}}} = \frac{A \cdot \sigma_{\text{cr}}}{2F \cdot \sqrt{2}} = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (304 - 1,12 \cdot \lambda_{\text{ef}})}{2F \cdot \sqrt{2}}$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicație

De aici rezultă forța maximă care poate fi preluată de grinda cu zăbrele:

$$F_{\max} = \frac{\pi \cdot (30\text{mm})^2 \cdot (304 - 1,12 \cdot 75,4) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{2,5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot 900 \cdot 219,55}{5\sqrt{2}} \text{ N} = 87789,15 \text{ N}$$

Pentru simplificarea calculelor finale, se adoptă $F_{\max} = 87700\text{N}$.

c. Calculul deplasării, pe verticală, a nodului 3 al grinzii

Pentru situația de față calculul trebuie făcut chiar în punctul și pe direcția în care acționează singura forță exterioară F de pe grindă, iar starea fictivă este perfect echivalentă stării reale de solicitare, în care trebuie luată valoarea $F = 1$ (număr fără dimensiuni). În aceste condiții, eforturile secționale fictive n_{ij} au valorile din tabelul de rezultate de mai sus, în care sunt trecute (în funcție de parametrul a) și lungimile tuturor barelor grinzii; folosind relația (7.16) și reamintind că barele au aceeași rigiditate axială EA , deplasarea cerută se calculează astfel:

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

$$\begin{aligned}\delta_v(3) &= \frac{1}{E \cdot A} \left[2F \cdot 2 \cdot a + (-F\sqrt{5}) \cdot (-\sqrt{5}) \cdot a\sqrt{5} + (-2F\sqrt{2}) \cdot (-2\sqrt{2}) \cdot a\sqrt{2} + 2F \cdot 2 \cdot 2a + 2F \cdot 2 \cdot a \right] = \\ &= \frac{F \cdot a}{E \cdot A} (4 + 5\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 8 + 4) = 38,494 \cdot \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = 38,494 \cdot \frac{87700 \text{ N} \cdot 400 \text{ mm}}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot 900}{4} \text{ mm}^2}\end{aligned}$$

Se obține astfel că nodul 3 se deplasează (în jos!) cu 0,236mm.

Câteva concluzii despre construcțiile din grinzi cu zăbrele

Panourile din grinzi cu zăbrele sunt extrem de avantajoase, fiind capabile de a înlocui structuri masive, mult mai grele dar echivalente ca portanță; ele permit realizarea unor deschideri ample (ca la podurile de cale ferată), înălțimi mari (ca la scheletul macaralelor) și forme constructive diverse, în condiții de economicitate maximă; dezavantajul lor principal este că sunt sensibile la orice deteriorare a barelor ce le compun: dacă una singură dintre barele grinzii cedează, chiar dacă este dintre cele cu eforturi secționale nule, este probabil că întreaga construcție își va pierde, în mod catastrofal, capacitatea de a prelua încărcările pe care le susține.

2.3

Caracterizarea stărilor de solicitare

Caracterizarea stărilor de solicitare

Starea de tensiuni în jurul unui punct

Atunci când un corp solid oarecare suportă încărcări mecanice, legăturile fizice dintre particulele lui sunt puse la încercare cu o *intensitate* (numită **tensiune**) depinzând de *solicitările* care se produc, de *poziția* în volumul corpului a punctului analizat, precum și de *direcția* pe care se evaluează tensionarea materialului.

Tensiunea se notează generic cu **p**, se măsoară în unități de presiune ($1\text{MPa} = 1\text{N}/\text{mm}^2$) și se studiază prin componentele ei – **normală** (σ), respectiv **tangențială** (τ) – din punctul unde tensiunea acționează. Valorile acestei mărimi rezultă diferite, atunci când se măsoară (sau se calculează) pe direcții diferite, în jurul punctului ales pentru studiu; ansamblul acestor valori formează **starea de tensiuni din acel punct** al corpului.

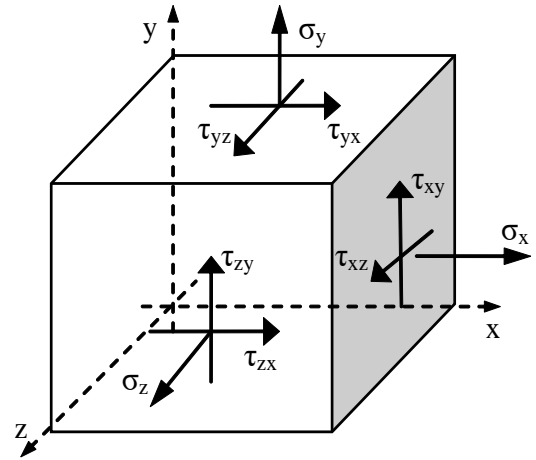
Observație: Procedând analog, cu referire la schimbările de poziții și de dimensiuni ale segmentelor de particule din jurul unui punct, în volumul unui corp solicitat mecanic, se definește **starea de deformații specifice din acel punct**. Componentele pe care se bazează studiul sunt **alungirile** specifice (ϵ) și **lunecările** specifice (γ), iar analiza prezintă multe similitudini cu ceea ce se discută aici despre stările de tensiuni.

Caracterizarea stărilor de solicitare

Tensorul tensiunilor

Se imaginează trei plane reciproc perpendiculare (determinând axele de coordonate folosite în analiză), intersectate în punctul arbitrar P, ales pentru studiu; pe baza lor se construiește un paralelipiped drept, cu laturi ce se consideră de *dimensiuni infinite mici*, adică fiind reductibil, la limită, la însuși punctul P.

Admițând că solicitările exterioare duc la apariția unor componente de tensiuni pe orice direcție în jurul lui P, adică starea de tensiuni din acel punct este **spațială** (tri-dimensională), rezultă că pe fiecare față a prisme pot fi identificate trei componente ale tensiunilor – una normală și două tangențiale, fiecare paralelă cu câte una dintre axele de coordonate (muchiile prisme), ca în figură; tensiunile tangențiale se notează cu doi indici, primul al axei *perpendiculară* pe planul tensiunilor, al doilea – al axei cu care componenta este *paralelă*. Pe această bază tensiunile normale ar fi notate cu doi indici identici, încât se admite ca indicele lor să fie scris o singură dată.



Caracterizarea stărilor de solicitare

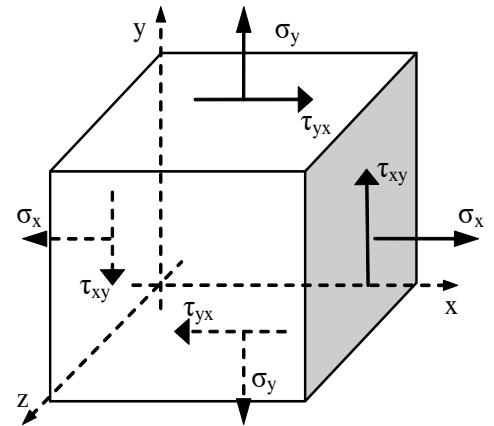
Starea de tensiuni din P se consideră cunoscută în totalitate dacă se cunosc cele 9 componente din figura anterioară; valorile lor se prezintă de obicei sub formă de matrice, notație denumită **tensorul tensiunilor** din P:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Observație: Noțiunea de tensor (având 9 componente) este cunoscută din matematică și fizică, fiind definită ca generalizare a noțiunii de vector (caracterizat prin trei componente – proiecțiile lui pe axele de coordonate).

Desigur că, în funcție de specificul unei stări de tensiuni, o parte dintre cele **nouă** componente pot să fie nule; în această ordine de idei, dacă starea de tensiuni este **plană**, având deci valori nenule pentru doar **patru** componente, paralele cu două dintre axele de coordonate, tensorul tensiunilor se scrie:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}$$



Caracterizarea stărilor de solicitare

Studiul stărilor plane de tensiuni

Una dintre temele importante în acest studiu este stabilirea valorilor *extreme* (**principale**) ale tensiunilor **normale** din jurul punctului P. Se poate demonstra că – dacă se notează cu α unghiul făcut de direcția tensiunilor principale cu axa de coordonate x – există următoarea legătură între acest unghi și parametrii stării plane de tensiuni:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Soluția acestei ecuații trigonometrice se scrie:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

adică se găsesc *două direcții principale, perpendiculare între ele!*

Pe de altă parte, valorile celor două tensiuni principale (cea mai mare și cea mai mică, în sensul așezării lor pe *axa numerelor reale*, dintre tensiunile normale din jurul punctului analizat) se calculează tot în funcție de cei trei parametri din tensorul tensiunilor, din relația:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{2}$$

Caracterizarea stărilor de solicitare

Studiul stărilor plane de tensiuni

Se reamintește că s-a pornit de la cunoașterea componentelor de tensiuni de pe direcția unor axe alese arbitrar, atașate elementului de volum construit în punctul analizat.

Observație: Adunând între ele cele două variante ale ultimei expresii de mai sus se obține că $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = ct$, adică suma valorilor tensiunilor normale de pe oricare două direcții perpendiculare între ele este un număr fix, reprezentând deci un **invariant** al oricărei stări plane de tensiuni!

Punând aceeași problemă pentru tensiunile **tangențiale** de pe elementul de volum, se obține că **normalele** la planele lor **principale** îndeplinesc condiția:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

Ultima fracție este inversă celei din relația de la tensiunile normale, ceea ce duce la soluțiile $\alpha_{3,4}$ care au legătură cu direcțiile principale ale tensiunilor σ , adică cu unghiurile $\alpha_{1,2}$ de mai sus: $\alpha_{3,4} = \alpha_{1,2} + 45^\circ$; prin urmare, valorile extreme ale tensiunilor tangențiale se obțin tot pe două plane *perpendiculare* între ele, ale căror normale sunt **bisectoare** pentru direcțiile principale ale tensiunilor σ din aceeași stare plană de tensiuni!

Caracterizarea stărilor de solicitare

Studiul stărilor plane de tensiuni

La fel ca mai sus se stabilesc *valorile* tensiunilor tangențiale principale, pentru care se demonstrează următoarea relație de calcul:

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{2}$$

Valoarea absolută a acestor tensiuni principale poate fi ușor pusă în legătură cu valorile principale ale tensiunilor normale date de relația anterioară, în sensul că $|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Rezultatele de mai sus privind distribuția tensiunilor (în starea plană!) în jurul unui punct din volumul unui corp solicitat într-un mod oarecare pot fi regăsite într-o reprezentare grafică, bazată pe un sistem de axe σ - τ ; se poate admite că fiecare punct dintr-un astfel de plan corespunde unei anumite stări de solicitare, iar coordonatele punctului se află în legătură cu valorile tensiunilor normale principale, astfel:

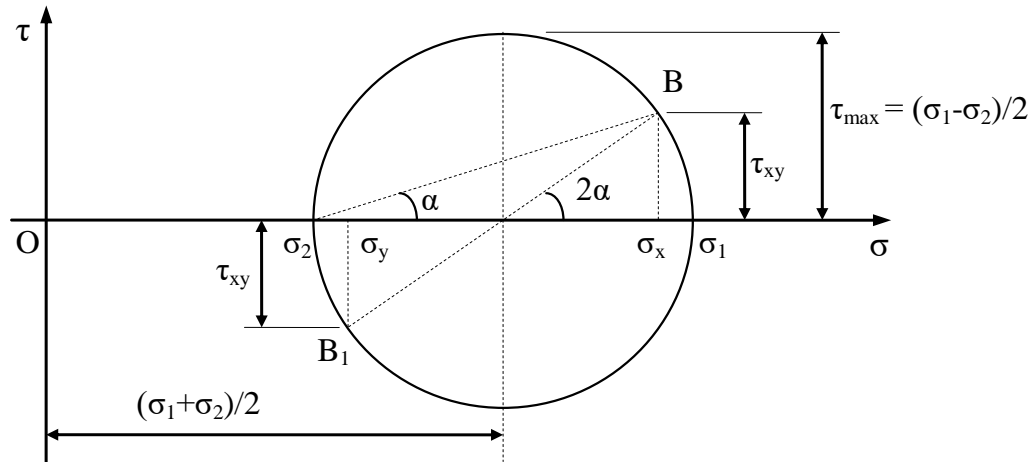
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

Caracterizarea stărilor de solicitare

Studiul stărilor plane de tensiuni

Se observă că în sistemul de axe σ - τ aceasta este ecuația unui **cerc**, având **raza** de mărime

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ și centrul pe axa } \sigma, \text{ la poziția } \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$



Această reprezentare grafică a unei stări plane de tensiuni este numită **cercul lui Mohr**; se observă că el cuprinde informații importante asupra solicitării la care se referă, începând cu mărimile tensiunilor ei principale σ și τ .

Caracterizarea stărilor de solicitare

Studiul stărilor plane de tensiuni

Coordonatele oricărui punct B de pe cerc, notate σ_x și τ_{xy} , sunt valorile tensiunilor ce acționează pe un plan înclinat cu unghiul α față de axa x atașată elementului de volum studiat, iar coordonatele σ_y și $(-\tau_{xy})$ ale punctului B_1 , așezat tot pe cerc, diametral opus lui B, sunt tensiunile de pe un plan perpendicular pe cel reprezentat de B.

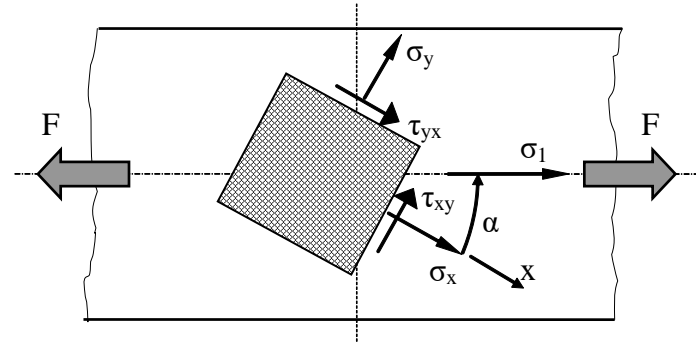
Cunoscând valorile tensiunilor normale principale ale stării de tensiuni, ele se plasează pe axă și se figurează cercul, iar tensiunile pe suprafața înclinată la unghiul α și pe cea normală la aceasta vor fi reprezentate prin punctele B, respectiv B_1 , de la capetele diametrului înclinat la unghiul 2α față de axa orizontală σ .

Tot prin această metodă grafică se poate rezolva și problema inversă în care, cunoscând componentele σ_x , σ_y și τ_{xy} de pe două plane *perpendiculare* între ele duse prin punctul analizat, trebuie aflate tensiunile principale și direcțiile lor: se plasează pe desen punctele B și B_1 , cu acest segment luat ca diametru se trasează cercul, cu centrul în punctul lui de intersecție cu axa σ ; cercul taie axa în dreptul mărimilor σ_1 și σ_2 , iar prima direcție principală face unghiul α (jumătate din înclinarea segmentului B_1B față de axa σ) cu suprafața simbolizată de punctul B.

Caracterizarea stărilor de solicitare

Aplicații

1. Pe un volum elementar dintr-o bară întinsă de forțele F se cunosc $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 30$ [MPa] și aria transversală a barei $A = 300\text{mm}^2$; să se afle tensiunea τ_{xy} ; încărcarea exterioară F ; tensiunea principală τ_{\max} ; înclinarea α a elementului de volum, față de axa barei.



Rezolvare

Se pornește de la observația că tensiunile principale σ_1 vor avea direcția forțelor F , în vreme ce σ_2 trebuie să fie zero! Folosind relația tensiunilor normale principale, în care se înlocuiesc cele două componente de tensiuni date în enunț (măsurate în MPa), se obține:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{50+30}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(50-30)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = 0 = \frac{50+30}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(50-30)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

A doua egalitate permite aflarea componentei de tensiune τ_{xy} :

$$\frac{1}{2}\sqrt{400 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = 40 \Leftrightarrow 100 + \tau_{xy}^2 = 1600 \Rightarrow \tau_{xy} = \sqrt{1500} = 38,73\text{MPa}$$

Caracterizarea stărilor de solicitare

Aplicații

Pentru a se stabili mărimea încărcărilor F , se introduce valoarea tocmai găsită în prima egalitate de mai sus, de unde rezultă:

$$F = 300\text{mm}^2 \cdot \left(40 + \frac{1}{2} \sqrt{400 + 4 \cdot 1500} \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 300 \cdot (40 + \sqrt{1600}) \text{N} = 24 \text{ kN}$$

Din relația dată mai sus și sistemul anterior de egalități se calculează valoarea tensiunilor tangențiale principale:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(50 - 30)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{400 + 4 \cdot 1500} \text{ MPa} = 40 \text{ MPa}$$

În fine, folosind relația corespunzătoare se calculează funcția *tangentă* a unghiului α dintre axa x atașată elementului de volum ales și direcția tensiunii principale σ_1 , astfel:

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 38,73 \text{ MPa}}{(50 - 30) \text{ MPa}} = 3,873 \Rightarrow 2\alpha = 75^\circ 31' \Rightarrow \alpha = 37^\circ 46'$$

Se reamintește că acest unghi are sensul *pozitiv* de măsurare de tip *trigonometric*, pornind de la axa inițială x , către axa tensiunilor normale principale σ_1 .

Caracterizarea stărilor de solicitare

Aplicații

2. Pe un volum elementar prismatic, decupat dintr-un corp încărcat într-un mod oarecare, se cunosc tensiunile $\sigma_x = 120$, $\sigma_y = 40$ și $\tau_{xy} = 50$ [MPa]. Să se stabilească valorile tensiunilor principale din acel punct, precum și direcțiile acestora.

Rezolvare

Se aplică mai întâi relația pentru calculul tensiunilor normale principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{120 + 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(120 - 40)^2 + 4 \cdot 50^2} = 80 \pm \frac{1}{2} \sqrt{6400 + 10000} = 80 \pm 64 \text{ [MPa]}$$

Se obțin deci valorile $\sigma_1 = 144$, respectiv $\sigma_2 = 16$ [MPa]; direcțiile lor se exprimă prin:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 50 \text{ MPa}}{(120 - 40) \text{ MPa}} = \frac{10}{8} = 1,2 \Leftrightarrow 2\alpha = 50^\circ 12' \Rightarrow \alpha = 25^\circ 6'$$

Acesta este unghiul, măsurat *în sens orar*, făcut de direcția tensiunilor σ_1 cu axa x atașată elementului de volum. Tensiunile *tangențiale* principale au, în modul, valoarea:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2} (144 - 16) = 64 \text{ MPa}$$

Direcțiile lor se obțin rotind cu 45° , în oricare sens, direcțiile principale ale tensiunilor normale; se reamintește că cele două direcții principale sunt reciproc perpendiculare, pentru ambele categorii de tensiuni.

Caracterizarea stărilor de solicitare

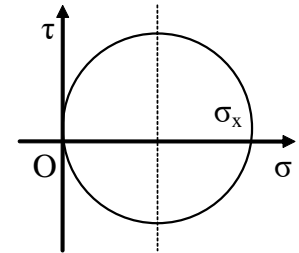
Cazuri particulare de stări plane de tensiuni

Pentru multe situații de solicitări mecanice stările tipice de tensiuni sunt *plane*, astfel că este util să fie discutate câteva cazuri mai des întâlnite.

A. Starea liniară de tensiuni – apare la *tracțiune* sau *comprimare uniaxială*, respectiv la *încovoiere pură*; considerând axa **x** pe direcția solicitării, se constată că $\sigma_y = 0$ și $\tau_{xy} = 0$; rezultă imediat că $\text{tg}2\alpha = 0$; prima direcție principală este dirijată chiar pe axa **x**, iar expresiile tensiunilor principale sunt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{\sigma_x}{2} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_x; \quad \sigma_2 = 0; \quad \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_x}{2}$$

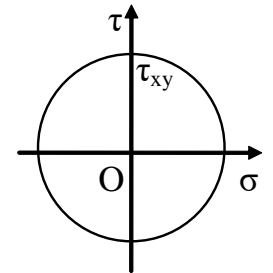
Aceste proprietăți sunt observabile și pe cercul lui Mohr trasat alăturat pentru această stare de tensiuni.



B. Starea de forfecare pură – întâlnită și la răsucirea tuburilor cu pereți subțiri; pentru un volum elementar din pereții tubului se alege axa **x** paralelă cu axa lui, iar componentele normale de pe fețele elementului sunt nule: $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Pentru acest caz se obține $\text{tg}2\alpha = \infty$, adică $2\alpha = 90^\circ$, respectiv $\alpha = 45^\circ$; tensiunile principale sunt înclinate la 45° , respectiv 135° față de axa **x**, iar valorile lor sunt:

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}$$

Tensiunile principale sunt de **întindere**, respectiv **comprimare**, de valori egale cu tensiunea tangențială ce produce forfecarea pură și care va fi chiar raza cercului Mohr pentru această solicitare.



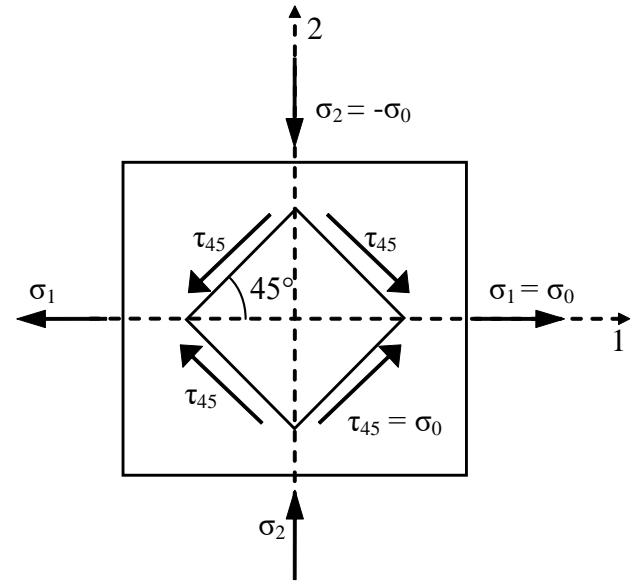
Caracterizarea stărilor de solicitare

Cazuri particulare de stări plane de tensiuni

Starea de tensiuni astfel descrisă are proprietăți foarte interesante și cu efecte importante pentru practică. Privită în mod direct, dacă pe un volum elementar, cu proiecțiile fețelor înclinate la 45° față de axele de coordonate, se aplică o stare de forfecare pură (cu tensiuni tangențiale τ_{xy} și tensiuni normale nule), atunci pe un element de volum rotit, cu fețele orizontale și verticale, apar tensiuni de întindere, respectiv de comprimare, de valori egale cu τ_{xy} .

Pentru situația inversă, se imaginează o placă dreptunghiulară de grosime constantă, din material omogen și izotrop, aflată în stare plană de tensiuni sub acțiunea unor încărcări de *întindere*, pe o direcție principală și de *comprimare*, pe cealaltă, având mărimi egale (dar semne contrare!), notate cu σ_0 .

O astfel de încărcare (reprezentată în schița alăturată) produce în placă o stare de *forfecare pură*, în elemente de volum mărginite de plane înclinate la 45° față de direcțiile principale ale tensiunilor normale – pe care tensiunile σ sunt nule, iar cele tangențiale egalează în mărime tensiunile principale ce produc întindere și comprimare pe elementul inițial!



Caracterizarea stărilor de solicitare

C. Starea de **încovoiere cu forfecare** – este caracteristică pentru încovoierea *simplă* (în care apar și momente de încovoiere și forțe tăietoare de valori nenule), adică pentru cele mai multe dintre grinzile reale; elementul de volum se alege cu axa \mathbf{x} în lungul axei grinzii, componenta σ_x va fi tensiunea de încovoiere din acea fibră a barei, calculată din relația lui Navier, tensiunea τ_{xy} este dată de relația lui Juravski, iar componenta σ_y , perpendiculară pe axa barei, va fi nulă.

Direcțiile și tensiunile principale ale acestei stări de solicitare vor fi:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x} \quad \text{respectiv} \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

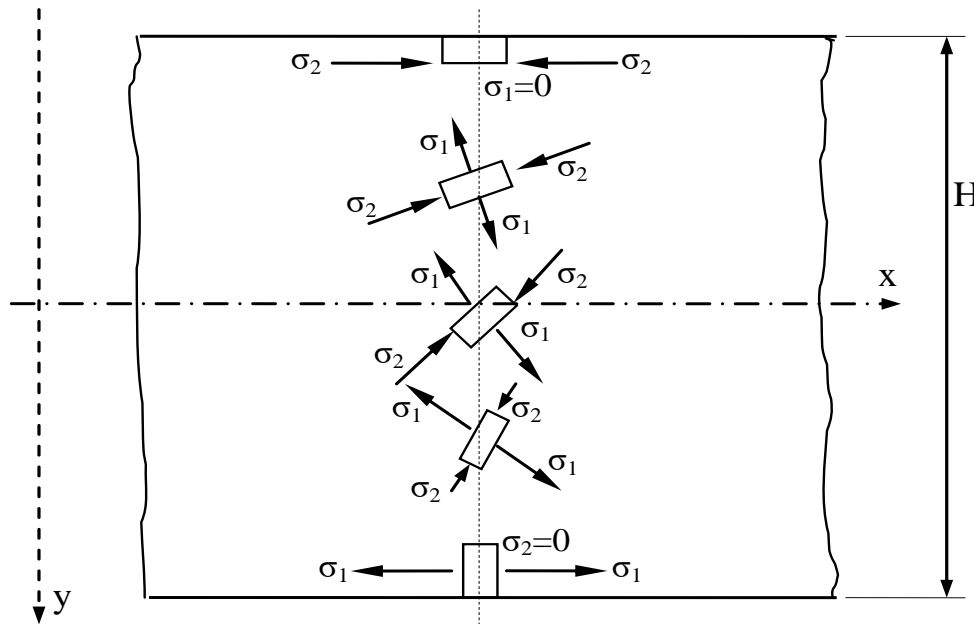
Este remarcabil că tensiunile principale se modifică, la translarea elementului de volum de la o fibră la alta a grinzii, perpendicular pe axa longitudinală a barei (și pe axa ei de încovoiere \mathbf{z}), adică pe direcția axei inițiale \mathbf{y} ; se schimbă și direcția axelor principale, care practic se rotesc cu 90° , așa cum se arată în continuare.

Folosind noțiunile de la solicitările simple și admitând o secțiune *simetrică* față de axa de îndoire (încât tensiunile să varieze pe secțiune ca mai jos) și cu efort de încovoiere de sens *pozitiv*, în secțiunea transversală aleasă, adică producând întindere în fibrele aflate sub planul neutru al grinzii, rezultă următoarele:

- pentru elementul de volum din *fibra cea mai de sus* ($\mathbf{y} = -\mathbf{H}/2$) tensiunea tangențială τ_{xy} este zero, iar starea de tensiuni este **liniară**; componenta *normală* are valoarea maximă negativă, fiind a doua tensiune principală $\sigma_2 = -\sigma_{\max \text{ inc}}$, întrucât $\sigma_1 = 0$, adică prima direcție principală este *verticală*;
- dacă volumul elementar este *pe axa neutră* a secțiunii ($\mathbf{y} = 0$), atunci tensiunea normală este zero, iar tensiunile tangențiale au valoarea maximă, este adică o stare de **forfecare pură**, cu direcțiile principale *înclinate la 45°* față de axa barei;

Caracterizarea stărilor de solicitare

- c. pentru elementul de volum plasat în fibra *cea mai de jos* ($y = H/2$) starea de tensiuni este din nou **liniară**, în care componenta normală are valoarea maximă pozitivă, adică $\sigma_1 = \sigma_{\max inc}$, iar $\sigma_2 = 0$, prima direcție principală fiind *orizontală*;
- d. dacă volumul elementar este în *poziții intermediare* față de cele descrise, valorile tensiunilor și direcțiile principale vor fi cuprinse între cele ce corespund stărilor care le sunt vecine.



2.4

**Mărimi fizice folosite la
stabilirea teoriilor de rupere**

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Particularități ale stărilor spațiale (3-D) de tensiuni

Pentru o astfel de stare de solicitare *tensorul tensiunilor* are **9** componente – așa cum s-a arătat, acționând pe fețele unui element de volum arbitrar, prismatic, construit în punctul P din corpul studiat; cunoscând aceste componente se pot stabili, prin relații de calcul potrivite, componentele de tensiuni de pe orice plan dus prin punctul considerat.

Trebuie subliniat că acest tensor este întotdeauna **simetric** față de diagonala lui principală, atât pentru stările *spațiale*, cât și pentru stările *plane* de tensiuni, deci numărul componentelor de tensiuni independente este de 6, în loc de 9, respectiv 3, în loc de 4!

Prin analogie cu stările plane de tensiuni, dacă pe o suprafață cu orientare arbitrară, conținând punctul ales P, componenta tangențială τ a tensiunilor este **nulă**, se spune că acea suprafață este un **plan principal** pentru starea spațială de tensiuni

Tensiunile normale principale din punctul P sunt în număr de 3, iar valorile lor se așează pe *axa numerelor reale* și se numerează în sens descrescător: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; direcțiile pe care sunt dirijate aceste tensiuni se stabilesc prin algoritmi de calcul speciali.

La fel ca la starea plană, se obțin 3 direcții *perpendiculare* între ele și, așezând pe fiecare direcție tensiunea principală care îi corespunde, se poate defini locul geometric al vârfurilor tuturor tensiunilor din jurul punctului P, denumit **elipsoidul tensiunilor** (al lui Lamé) din acel punct.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Particularități ale stărilor spațiale (3-D) de tensiuni

Pentru tensiunile tangențiale se demonstrează că valorile lor *extreme* au loc în plane ale căror normale fac unghiuri de 45° cu câte două direcții principale ale tensiunilor normale și sunt paralele cu a treia, iar valorile principale propriu-zise se calculează folosind relații similare cu cele din starea plană:

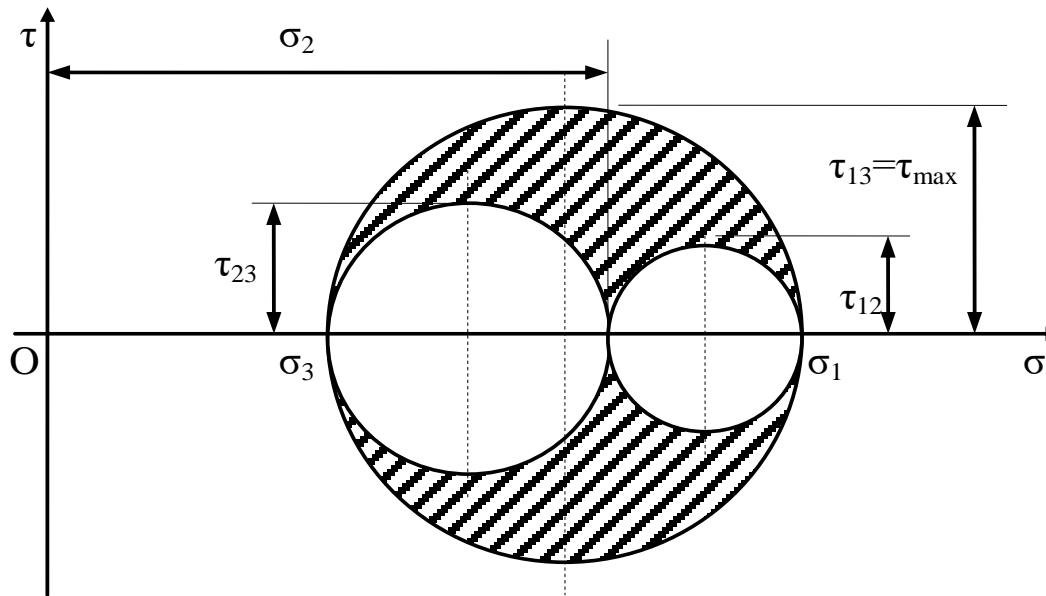
$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} ; \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} ; \quad \tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Parametrii principali ai stărilor spațiale de tensiuni se pot reprezenta grafic la fel ca la starea plană, dar folosind **trei cercuri Mohr** – unul mare, definit de valorile principale σ_1 și σ_3 și două mici, înglobate de către primul cerc; regulile trasării cercurilor sunt aceleași ca la starea plană, dar „vârfurile” tensiunilor (care pornesc din originea axelor de coordonate) nu ocupă tot spațiul din interiorul cercului mare, ci doar pe cel hașurat, dinafara cercurilor mici.

Pe baza calculelor și din reprezentarea grafică se obține că valoarea τ_{13} este cea mai mare în modul dintre cele 3 tensiuni tangențiale principale, cea mai mare tensiune tangențială din jurul punctului P.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Tot de pe grafic se observă că tensiunile normale din jurul punctului P au valoarea maximă σ_1 și cea minimă σ_3 , iar despre σ_2 se mai spune că este tensiunea „mini-max”, adică este cea mai mică valoare în planul pe care îl formează cu σ_1 , dar cea mai mare în planul făcut cu σ_3 .



Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Concluzii privind studiul stărilor de tensiuni

1. Pe fețele oricărui paralelipiped elementar, separat imaginar în vecinătatea unui punct P din volumul unui corp solicitat mecanic, acționează **9** componente de tensiuni, dintre care **3** normale și **6** tangențiale; acestea din urmă sunt egale două câte două (dualitatea tensiunilor tangențiale), încât rămân 6 componente independente ale stării de tensiuni din punctul P.
2. Pentru stările plane de tensiuni sunt 4 componente – 2 normale și 2 tangențiale, adică 3 componente independente între ele.
3. În fiecare caz, cu aceste componente se formează tensorul tensiunilor T_{σ} , în care componentele ce acționează pe o aceeași *față* a paralelipipedului elementar sunt așezate pe o aceeași *linie* din matrice, în vreme ce pe o aceeași *coloană* se așează componentele care sunt paralele cu aceeași *direcție* (axă de coordonate).
4. Dacă se cunosc mărimile tuturor termenilor din tensorul tensiunilor, atunci starea de tensiuni este în totalitate cunoscută, în sensul că se pot calcula valorile tensiunilor ce acționează pe orice plan care trece prin punctul P.
5. Dintre toate aceste *plane* există câteva, numite **principale**, pe care se constată că acționează numai *tensiuni normale* (cele tangențiale fiind nule), care la rândul lor sunt numite *principale*.
6. Oricum ar fi solicitat un corp solid, în fiecare punct din volumul său există **3** plane principale, reciproc perpendiculare, deci și **3** tensiuni normale principale, de asemenea reciproc perpendiculare, ale căror mărimi și direcții se găsesc prin metode de calcul bine stabilite.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Concluzii privind studiul stărilor de tensiuni

7. Pentru stările *plane* de tensiuni, în orice punct există *două* tensiuni normale principale ale căror direcții, numite tot principale, sunt și ele perpendiculare una pe alta; atât mărimile, cât și direcțiile tensiunilor principale se stabilesc pe baza unor relații de calcul, tot în funcție de componentele din tensorul tensiunilor.
8. Toate direcțiile paralele cu tensiunile principale se numesc direcții (axe) principale ale tensiunilor, în punctul studiat.
9. O stare oarecare de tensiuni este **liniară, plană, sau spațială**, după cum *una, două, respectiv trei* dintre tensiunile ei normale principale sunt *diferite de zero*, celelalte fiind *nule*.
10. Valori principale se calculează și pentru tensiunile **tangențiale** din jurul lui P; planele și direcțiile pe care ele acționează au orientări care *bisectează* planele, respectiv direcțiile tensiunilor *normale* principale din acel punct.

Observație: Aspectele discutate până aici privind analiza stărilor de tensiuni sunt valabile inclusiv pentru domeniul în care materialele se deformează **plastic** (adică permanent), întrucât nu s-au folosit și nu au fost necesare ipoteze privind comportarea lor elastică și nu s-au făcut referiri la constantele elastice ale materialelor; ceea ce urmează în acest capitol, în schimb, se *bazează* pe elasticitatea materialelor și poate fi valabil în domeniul plastic numai prin excepție, așa cum se va preciza în text.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Legea lui Hooke pentru stările spațiale de tensiuni

În pregătirea studiului solicitărilor simple s-a prezentat (pentru solicitări uniaxiale) *legea fundamentală a elasticității*, intuită mai întâi de fizicianul englez Robert Hooke (1678) și referitoare la proporționalitatea dintre încărcările aplicate barelor și efectele (deformările) produse asupra lor. S-a precizat că această lege se respectă (cu o anumită aproximație, pentru multe materiale concrete), doar în măsura în care deformațiile sunt *reversibile*, adică dispar la îndepărtarea încărcărilor exterioare, proprietate fizică numită **elasticitate**.

Pentru stările de tensiuni care nu sunt *liniare* este de așteptat ca deformațiile să apară în volumul corpului pe mai multe direcții simultan, iar mărimile lor să nu fie independente; pentru materialele *neomogene* și *anizotrope* dependențele sunt complexe, proprietățile lor mecanice și elastice având valori diferite pe direcții diferite din volumul materialului; această situație nu face obiectul prezentării de față, încât discuția se restrânge la materialele **omogene** și **izotrope**; multe materiale reale se încadrează în aceste categorii, inclusiv în virtutea unei ipoteze de bază din rezistența materialelor, care enunță acest lucru.

Se pornește deci de la ideea că materialul se comportă *la fel*, indiferent de *direcția* solicitării mecanice; pentru a analiza dependențele dintre tensiuni și deformațiile specifice în stările *spațiale* de tensiuni, se vor imagina efectele produse de diversele componente ale tensiunilor pe un volum elementar prismatic, orientat cu muchiile după direcțiile axelor de coordonate.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Legea lui Hooke pentru stările spațiale de tensiuni

Presupunând mai întâi că prisma se află doar sub acțiunea tensiunilor σ_x (pentru simplitate, toate tensiunile normale se iau de întindere); paralel cu axele de coordonate x, y, z se produc *numai* deformații specifice *liniare* – una de întindere ε_x , pe direcția tensiunii exterioare și două de comprimare (*constricție transversală*), pe direcțiile *perpendiculare* pe a tensiunii σ_x ; după regulile de la stările liniare de tensiuni, alungirile specifice sunt:

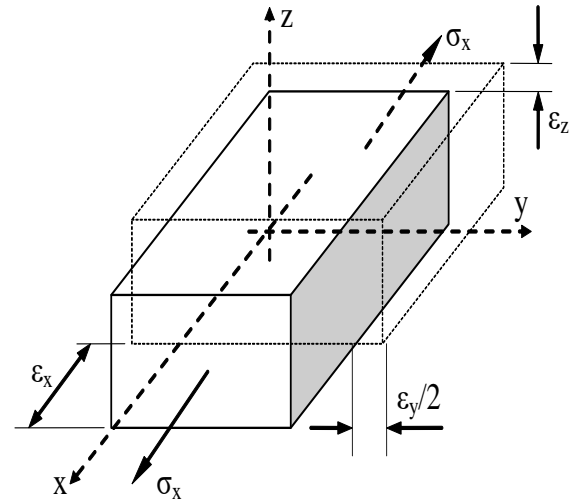
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

Desigur, E și ν sunt constantele elastice (modulul longitudinal și coeficientul de constricție transversală) ale materialului, având aceleași valori în orice direcție; analog, dacă prisma e solicitată doar de componentele σ_y , respectiv σ_z , alungirile relative pe direcțiile de măsurare sunt:

$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{respectiv} \quad \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Dacă elementul de volum se solicită *simultan* de cele trei componente de tensiuni, pe direcțiile axelor de coordonate apar câte *trei componente* de deformații specifice liniare ce pot fi adunate algebric astfel:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

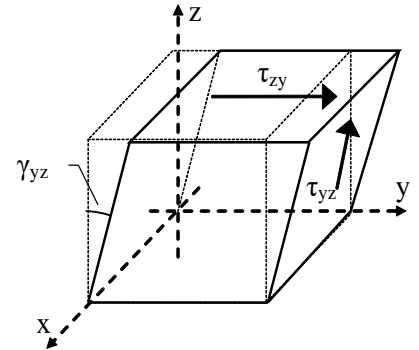


Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Legea lui Hooke pentru stările spațiale de tensiuni

Când elementul de volum e sollicitat, succesiv, ca singură încărcare, de perechile de tensiuni **tangențiale** paralele cu planele de coordonate τ_{yz} - τ_{zy} , τ_{xz} - τ_{zx} și τ_{xy} - τ_{yx} , au loc *lunecări specifice* pe direcțiile respective și nu se produc nici un fel de deformații liniare, adică:

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



G este modulul de elasticitate *transversal* al materialului, iar ultimele șase relații de mai sus reprezintă **legea lui Hooke, generalizată** pentru stările *spațiale* de tensiuni, adică pentru cazul în care sunt nenule toate componentele tensorului \mathbf{T}_σ ; dacă în relațiile alungirilor specifice se ia $\sigma_z = 0$ și starea de tensiuni devine **plană**, alungirile specifice se vor produce *tot pe trei direcții*, adică:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

Rezultă că starea de deformații *nu este tot plană*, decât în cazuri particulare!

Tot pentru stările plane de tensiuni sunt importante și folositoare inclusiv relațiile inverse, de legătură între alungirile specifice și componentele de tensiuni ce le produc, care se scriu astfel:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \quad \text{respectiv} \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x)$$

Observație: Pentru materialele **anizotrope** valorile caracteristicilor elastice **E**, **G** și **\nu** depind de direcțiile de sollicitare și de măsurare a deformațiilor, încât relațiile de mai sus se complică tot mai mult, pe măsură ce anizotropia materialului analizat devine mai pronunțată.

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Expresiile generale ale energiei de deformare elastică

S-a arătat că energia *specifică* de deformare elastică, revenind unității de volum din materialul sollicitat mecanic se exprimă distinct, după felul încărcării: sollicitările produse prin tensiuni *normale* introduc în

expresie termeni de tip $\frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2}$, iar cele date de tensiuni *tangențiale* termeni ca $\frac{\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}}{2}$.

Pentru starea *generală* de sollicitare, însumând efectele unor stări *elementare* cu tensiuni normale și tangențiale orientate după direcțiile axelor de coordonate atașate elementului de volum, se obține că:

$$U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz})$$

Dacă se înlocuiesc expresiile deformațiilor specifice date de legea generalizată a lui Hooke se ajunge la:

$$U_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2]$$

Dacă axele de referință se aleg chiar pe *direcțiile principale* ale stării de tensiuni, atunci tensiunile tangențiale vor lipsi și expresia energiei specifice de deformare elastică devine:

$$U_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Folosind un volum elementar reprezentativ pentru starea de tensiuni studiată, energia *totală* de deformare acumulată în corp în urma sollicitării lui (de tip elastic) prin încărcările pe care trebuie să le preia va fi:

$$U = \iiint_V U_1 \cdot dV .$$

Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Energia specifică de deformare modificatoare de formă

Pentru modelarea mai detaliată a fenomenelor de deformare elastică în cazul unui corp solid sollicitat mecanic se admite că o parte din energia totală de deformare este consumată pentru a se modifica *volumul* corpului, partea rămasă fiind cheltuită pentru schimbarea *forme* lui în urma sollicitării.

Separarea imaginară a celor două procese energetice se face admițând că starea de sollicitare cu tensiunile normale principale σ_1 , σ_2 și σ_3 este obținută prin însumarea a două stări elementare, de asemenea orientate pe direcțiile principale ale tensiunilor normale.

În *prima stare* tensiunile principale sunt toate egale cu media σ_m a tensiunilor reale:

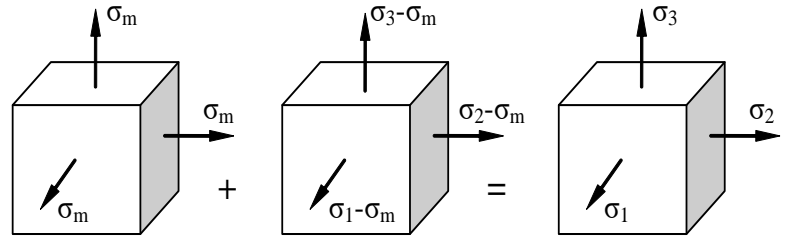
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

În această situație alungirile relative se produc la fel în toate direcțiile, adică *forma* prisme elementare nu se schimbă prin sollicitare, iar energia de deformare se consumă doar pentru modificarea *volumului* elementar! Cu acești parametri ai stării de tensiuni se obține *energia specifică modificatoare de volum*:

$$U_{1v} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\nu(3 \cdot \sigma_m^2) \right] = \frac{1-2\nu}{2E} \cdot 3 \cdot \sigma_m^2 = \frac{1-2\nu}{2E} \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

sau, în forma finală

$$U_{1v} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$



Mărimi fizice folosite la stabilirea teoriilor de rupere

Energia specifică de deformare modificatoare de formă

În *a doua stare* elementară, pe fețele prisme acționează tensiuni principale egale cu diferența între tensiunile *reale* și valoarea lor *medie*, ca în figură; se admite că acțiunea acestei combinații de tensiuni nu afectează mărimea volumului elementar, în schimb îi afectează forma, iar înlocuind valorile tensiunilor în relația generală a energiei se obține expresia *energiei specifice de deformare modificatoare de formă*:

$$U_{\text{If}} = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 - 2\nu [(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m)] \right]$$

După înlocuirea tensiunii medii prin valoarea ei și reducerea termenilor asemenea se ajunge la forma concentrată a expresiei:

$$U_{\text{If}} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

Aceste expresii sunt importante, de exemplu, în stabilirea **criteriilor de rupere** folosite în inginerie, așa cum se va arăta în continuare.

2.5

Teorii și criterii de rupere

Teorii și criterii de rupere

Aspecte generale cu privire la teoriile de rupere

Pentru solicitările simple, momentul în care materialele nu mai suportă în condiții corecte încărcările pe care trebuie să le preia, adică „cedează”, este definit relativ ușor, fiind asimilat cu atingerea unei *limite maxime admise* (tensiunea de **curgere**, respectiv de **rupere** ale materialului la solicitarea dată), de către *cea mai mare tensiune* produsă într-o piesă dată. Se impune o graniță superioară (numită **rezistență admisibilă** a aceluși material) pentru domeniul tensiunilor permise; aceasta se ia *mai mică* de un număr **c** de ori (*coeficientul de siguranță* adoptat pentru solicitarea respectivă) decât *limita de curgere* (pentru materialele tenace și ductile), respectiv *de rupere* (pentru cele fragile), valori obținute prin determinări experimentale numite încercări mecanice.

Mult mai dificilă este stabilirea unui nivel periculos al încărcărilor atunci când un corp trebuie să preia mai multe solicitări simple *simultan*, adică este supus unor **solicitări compuse**; este practic imposibilă efectuarea unor încercări mecanice pentru gama foarte largă de stări de tensiuni posibile, acestea având adeseori un grad mare de complexitate. Ar fi necesare, chiar și pentru studiul unui singur material, încercări foarte multe (deci o durată mare a experimentelor), pe mașini de construcții complicate și cu epruvete numeroase și greu de executat. Este deci necesară o metodă de *aproximare* a stărilor limită, echivalând *gradul de pericol* pe care îl prezintă, pentru integritatea corpului analizat, solicitarea lui compusă, cu *nivelul periculos* al unei solicitări simple monoaxiale.

Teorii și criterii de rupere

Aspecte generale cu privire la teoriile de rupere

Se pune deci problema să se poată folosi **rezistența admisibilă**, stabilită pe baza încercării la *tracțiune*, în calculul de la solicitările cu stări de tensiuni *plane* sau *spațiale*.

Trebuie semnalat că *intensitatea* solicitării dintr-un punct al corpului tensionat poate fi caracterizată folosind mărimi diverse: tensiunea normală maximă (σ_{\max}), alungirea specifică maximă (ϵ_{\max}), tensiunea tangențială maximă (τ_{\max}), energia specifică de deformare elastică (U_{1ef}) acumulată prin solicitare s.a.m.d. Diversele teorii de rupere se particularizează tocmai prin alegerea unei anume mărimi (care dă numele teoriei) ca determinantă pentru pierderea capacității materialului de a suporta încărcările mecanice; se consideră că probabilitatea cedării este maximă atunci când valoarea mărimii respective ajunge la nivelul ei considerat periculos pentru starea *monoaxială* de tensiuni luată ca reper.

Teoriile au fost elaborate de autori diferiți, în momente diferite ale istoriei și evoluției cercetărilor inginerești, încât criteriile de cedare la care se ajunge pe baza lor cresc în complexitate, de la prima teorie către ultima dintre cele ce se vor enunța mai jos; mai trebuie precizat că nici una dintre acestea nu este potrivită, în aceeași măsură, pentru toate materialele și pentru orice fel de stare de tensiuni sau de solicitare, astfel că se menționează, în fiecare caz, pentru care situații practice se recomandă a se folosi un anumit criteriu.

Teorii și criterii de rupere

Enunțarea teoriilor clasice de rupere

O stare complexă de tensiuni este la fel de periculoasă, pentru integritatea corpului în care se produce, ca starea de la o solicitare de întindere uniaxială, atunci când una dintre următoarele mărimi are aceeași valoare în cele două stări de tensiuni:

I. Tensiunea normală maximă (G.Galilei, 1638; W.Rankine, 1858)

Se consideră că tensiunea principală σ_1 (respectiv σ_3 , dacă aceasta are valoarea absolută maximă) determină cedarea materialului, când atinge nivelul asumat ca periculos pentru întinderea uniaxială a unei epruvete din materialul respectiv.

Teoria neglijează influența pe care o au, asupra funcționării stabile și reversibile a corpului analizat, două dintre tensiunile normale principale ale stării de tensiuni; este deci explicabil că estimările bazate pe această teorie sunt confirmate practic doar pentru o clasă de materiale, cele *foarte fragile* (piatră, cărămidă, oțel de scule, ceramice etc.), despre care se mai spune că au diagrame *similare* (și rezistență la fel de mică) la întindere și la comprimare.

O contestare practică importantă a teoriei e dată de *comprimarea hidrostatică* (solicitare uniformă pe cele trei direcții principale ale tensiunilor), la care ruperea probelor nu se produce (se modifică doar volumul), indiferent cât crește presiunea; pe baza teoriei σ_{\max} ruperea ar trebui să apară la același nivel de tensiune ca la comprimarea într-o singură direcție; încercările de torsiune pe epruvete cindrice de metal au arătat că ruperea apare mai devreme față de estimările teoriei, atunci când tensiunile τ_{\max} ajung (aproximativ) la nivelul $\sigma_0/2$ (proba *nu rezistă* până când tensiunile σ_{\max} ajung la nivelul σ_0).

Teorii și criterii de rupere

Enunțarea teoriilor clasice de rupere

II. Alungirea specifică maximă (E.Mariotte, 1682; Saint-Venant, 1864)

Se admite că deteriorarea materialului începe atunci când, într-un punct din volumul corpului studiat, alungirea specifică ϵ_{\max} atinge (în termeni absoluți) valoarea din momentul cedării epruvetei sollicitate la întindere monoaxială.

Aduce noutatea *corelării* efectelor celor trei tensiuni normale principale, fiind utilizabilă pentru o grupare mai largă de *materiale fragile* (fonte aliate, oțeluri de înaltă rezistență); nu poate fi aplicată pentru materialele care, când sunt deformate elastic, nu respectă legea lui Hooke, sau pentru care starea dată de tensiuni *excede* limita lor de proporționalitate de pe curba caracteristică la sollicitarea respectivă.

III. Tensiunea tangențială maximă (Ch.Coulomb, 1773; H.Tresca, 1868)

Se enunță asemănător cu prima teorie, este considerată potrivită pentru materialele *tenace* care se comportă la fel la întindere și la comprimare; este criticabilă pentru că neglijează efectele valorii mediane σ_2 a tensiunilor normale principale.

Se admite că exprimă cel mai bine (nefiind influențată de domeniul elastic și de respectarea de material a legii lui Hooke) momentul de început al „curgerii” (dacă ea există), în care apar deformații plastice, când tensiunile tangențiale din material ating o valoare anume; ca urmare, criteriul $\sigma_{\text{ech III}} = \sigma_c$ este adoptat adesea, drept condiție de cedare, pentru materialele metalice tenace și ductile.

Teorii și criterii de rupere

Enunțarea teoriilor clasice de rupere

IV. Energia potențială specifică de deformare elastică (E.Beltrami, 1885)

Este stabilit ca determinant pentru cedare momentul în care, în dreptul unui punct din volumul corpului, energia specifică U_1 atinge valoarea din starea periculoasă a epruvetei solicitate la tracțiune uniaxială.

Este puțin folosită în practica inginerescă, deși dă rezultate mulțumitoare pentru *metalele tenace* în stările de solicitare având *pozitivă* valoarea medie σ_{med} a tensiunilor principale (adică starea de tensiuni este *preponderent de întindere*); dacă aceasta e *negativă* (pentru stările cu *comprimare preponderentă*), se folosește criteriul teoriei următoare.

V. Energia potențială specifică de modificare a formei

(M.T.Huber, 1904; R. von Mises, 1913; H.Hencky, 1923)

Criteriul Huber-Hencky-von Mises e folosit pe scară largă în modelarea numerică (deci și în proiectarea asistată de computer), în mod fundamental pentru materiale *nefragile*, în stări de tensiuni pentru care $\sigma_{med} < 0$ dar și, prin extensie, pentru orice fel de materiale și stări de tensiuni; se pornește de la observația că materialele suportă mai bine (fără să atingă o stare limită de rezistență) comprimarea *hidrostatică* (egal distribuită triaxial) – care produce doar modificare de volum, nu și de formă, față de cea monoaxială, care modifică în mod clar și forma epruvetelor.

Teorii și criterii de rupere

Enunțarea teoriilor clasice de rupere

V. Energia potențială specifică de modificare a formei (continuare)

Hotărâtoare pentru cedare ar fi așadar atingerea nivelului de energie specifică modificatoare de formă U_{1f} ce se acumulează, în momentul cedării, în epruveta din acel material solicitată la *compresiune* monoaxială.

Pe lângă avantajele că se exprimă printr-o *relație unică* și că se iau în seamă inclusiv efectele tensiunii principale σ_2 , criteriul U_{1f} concordă cu datele experimentale pentru încercările la răsucire și la comprimare uniformă tri-axială; în schimb, el nu modelează corect comportarea materialelor la *tracțiune* uniformă *tri-axială*, pentru care estimează (fals) o rezistență nelimitată a lor, la fel cum se întâmplă (în mod real) la polul opus, la comprimare hidrostatică

Exprimarea criteriilor de rupere

Aceste criterii pun în legătură mărimea fizică (aici introdusă, pentru caracterizarea unei solicitări) numită *tensiune echivalentă* σ_{ech} cu parametrii reali ai stării de tensiuni vizate; formulările se obțin egalând, cu valoarea din starea monoaxială admisă la fel de periculoasă, expresia mărimii desemnate prin teoria respectivă, pentru starea complexă de tensiuni ce se analizează (folosind **tensiunile ei normale principale**); practic se folosesc, cum se arată mai jos, relații de calcul stabilite anterior, puse în corespondență cu particularizarea lor pentru o stare *liniară* de tensiuni, produsă prin solicitarea monoaxială *echivalentă*.

Teorii și criterii de rupere

Exprimarea criteriilor de rupere

Criteriul

Starea reală de tensiuni

(cu tensiunile principale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

Starea echivalentă

(*monoaxială*)

σ_{\max}

$$\max \{|\sigma_1|, |\sigma_3|\}$$

σ_{ech}

ε_{\max}

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_{\text{ech}} = \frac{\sigma_{\text{ech}}}{E}$$

τ_{\max}

$$\tau_{13} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_{\text{ech}}^{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\text{ech}}$$

U_1

$$U_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

$$U_{1\text{ech}} = \frac{1}{2E} \cdot \sigma_{\text{ech}}^2$$

U_{1f}

$$U_{1f} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

$$U_{1f\text{ech}} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_{\text{ech}}^2$$

Teorii și criterii de rupere

Exprimarea criteriilor de rupere

Egalând mărimile din ultimele coloane și de pe o aceeași linie se ajunge la relațiile de calcul pentru *tensiunile echivalente* date de cele 5 teorii, astfel:

$$\sigma_{\text{ech I}} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_3| \} \quad \sigma_{\text{ech II}} = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \quad \sigma_{\text{ech III}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{ech IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad \sigma_{\text{ech V}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}$$

Cu aceste formule se finalizează calculul la solicitările compuse: condiția de rezistență se scrie pentru starea de tensiuni *cea mai periculoasă* (cu tensiunile principale cele mai mari), dintre cele prezente în diverse puncte din volumul corpului studiat; folosind parametrii acelei stări de tensiuni și criteriul dat de teoria de rupere cea mai potrivită cu starea de solicitare analizată, se calculează *tensiunea echivalentă* din punctul respectiv; calculul de rezistență impune condiția ca acest σ_{ech} să nu depășească *rezistența admisibilă* σ_a a materialului dat, stabilită prin încercarea lui la solicitarea *monoaxială* respectivă.

Teorii și criterii de rupere

Particularizări pentru stările plane de tensiuni

După cum s-a observat, criteriile de rupere conduc la relații diferite pentru calculul de rezistență; acestea limitează valorile tensiunii σ_{ech} prin rezistența admisibilă a materialului la sollicitările monoaxiale de *tracțiune* σ_{at} , respectiv *comprimare* σ_{ac} ; folosind relațiile tensiunii echivalente de la fiecare criteriu, particularizate la stările de tensiuni în care $\sigma_3 = 0$, se obțin condițiile de rezistență ce corespund stărilor *plane*, pentru fiecare dintre teoriile de rupere descrise:

Criteriul

Condiții de rezistență pentru starea plană de tensiuni

(cu tensiunile principale $\sigma_1 > \sigma_2$ și $\sigma_3 = 0$)

σ_{max}	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{at}$	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{at}$	
ϵ_{max}	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 \leq \sigma_{at}$	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1 \leq \sigma_{at}$	
τ_{max}	- pt. $\sigma_1 / \sigma_2 > 0$	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{at}$	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{at}$
	- pt. $\sigma_1 / \sigma_2 < 0$	$-\sigma_{ac} \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{at}$	
U_1	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \cdot \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_a$		
U_{1f}	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_a$		

Teorii și criterii de rupere

Particularizări pentru stările plane de tensiuni

Observații

1. Primele două criterii sunt exprimate prin câte două condiții deoarece nu se poate afirma cu precizie care dintre mărimile cuprinse între inegalități are cea mai mare valoare absolută, așa încât limitele se impun pentru amândouă.
2. La al treilea criteriu, dacă cele două valori principale au *același semn*, atunci $\sigma_3 = 0$ nu este cuprins între ele și τ_{\max} rămâne egal cu σ_1 sau cu σ_2 ; dacă au *semne diferite*, atunci criteriul duce la limitarea *diferenței* lor.

Aceste relații de calcul pot fi folosite în rezolvarea oricărei probleme cu privire la o stare **plană** de tensiuni, desigur alegând criteriul recomandat în literatura tehnică ca fiind potrivit pentru materialul corpului solid care trebuie proiectat.

Teorii și criterii de rupere

Particularizări pentru stările de tensiuni cu $\sigma_y = 0$

Astfel de stări se întâlnesc frecvent, fiind caracteristice pentru barele solicate *simultan* la **încovoiere și la răsucire**; în cele ce urmează se adoptă notațiile: $\sigma_x = \sigma$ și $\tau_{xy} = \tau$

Tensiunile normale principale se vor calcula folosind relațiile clasice:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad \text{respectiv} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Pe această bază, criteriile de rupere vor da următoarele relații pentru σ_{ech} :

I) criteriul σ_{max}

$$\sigma_{ech I} = \sigma_1 = 0,5 \cdot \sigma + 0,5 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

II) criteriul ϵ_{max}

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} - \nu \cdot \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \right) \right] = \frac{1-\nu}{2} \cdot \sigma + \frac{1+\nu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Ultima relație poate fi încă particularizată, admitând că materialul este un metal, având coeficientul de contracție de valoare aproximativă $\nu = 0,3$ pentru care se obține:

$$\sigma_{ech II} = 0,35 \cdot \sigma + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

III) criteriul τ_{max}

$$\sigma_{ech III} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

Teorii și criterii de rupere

IV) criteriul U_1
$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 + \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 - 2\nu \cdot \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right) \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)}$$

După efectuarea operațiilor de sub radical și reducerea termenilor asemenea se ajunge la:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \sigma^2 + 8 \cdot \tau^2 + 8\nu \cdot \tau^2} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau^2}$$

Particularizarea pentru metale cu $\nu = 0,3$ duce la relația: $\sigma_{ech IV} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6 \cdot \tau^2}$

V) criteriul U_{1F}

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 + \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)^2 - \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right) \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\right)}$$

Procedând ca mai sus se obține: $\sigma_{ech} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \sigma^2 + 8 \cdot \tau^2 + 4 \cdot \tau^2} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$

de unde relația finală se scrie: $\sigma_{ech V} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$

Este remarcabilă *similitudinea* relațiilor date de ultimele 3 criterii, deosebite doar prin valoarea coeficientului de sub radical; pe baza argumentelor discutate anterior, calculele de rezistență se fac cel mai frecvent cu teoria τ_{max} , despre care se observă că duce și la valoarea cea mai mare pentru σ_{ech} , dintre cele 3 criterii care au relații similare. Totuși, nu este de neglijat a se analiza eventualitatea ca unul dintre celelalte două criterii să fie mai potrivit cu materialul și situația de solicitare din problema care se abordează, întrucât o posibilă valoare mai mică pentru tensiunea echivalentă va conduce la dimensiuni mai zvelte ale piesei proiectate și deci la economii de material.

Teorii și criterii de rupere

Posibilitatea de evaluare a tensiunilor tangențiale admisibile

O problemă conexă cu cele discutate mai sus este obținerea, pe baza relațiilor tensiunii echivalente, a unor estimări ale *rezistenței admisibile* τ_a a materialelor, la solicitările prin tensiuni tangențiale, cunoscând rezistența lor σ_a de la *întindere uniaxială*; astfel de evaluări sunt utile, întrucât fac să nu mai fie necesară încercarea mecanică de *forfecare pură*, destul de greu de pus în practică.

Se pornește de la relația σ_{ech} pentru fiecare criteriu de cedare de la stările *plane* de tensiuni (folosind valoarea aproximativă $\nu = 0,3$ – potrivită materialelor metalice, a coeficientului de contracție transversală), în care se pun $\sigma_x = \sigma = 0$, adică se abordează o stare de solicitare dată doar prin tensiuni tangențiale τ_{xy} (*forfecare pură*); se scrie apoi condiția clasică de rezistență, din care va rezulta *valoarea maximă permisă* a tensiunilor tangențiale, care este tocmai valoarea estimată a rezistenței admisibile τ_a .

I) criteriul σ_{max}

$$\sigma_{ech I} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \tau_{xy}^2} = \tau_{xy} \leq \sigma_a \cong \tau_a$$

II) criteriul ϵ_{max}

$$\sigma_{ech II} = 0,65 \cdot \sqrt{4 \cdot \tau_{xy}^2} = 1,3 \cdot \tau_{xy} \leq \sigma_a \Rightarrow \tau_{xy} \leq \frac{10}{13} \cdot \sigma_a = 0,77 \cdot \sigma_a \cong \tau_a$$

Teorii și criterii de rupere

Posibilitatea de evaluare a tensiunilor tangențiale admisibile

Criteriul se consideră adecvat pentru calculul de rezistență la materialele **fragile**, încât ultima estimare a lui τ_a este valabilă pentru materialele care se rup casant prin forfecare.

III) criteriul τ_{\max} $\sigma_{\text{ech III}} = \sqrt{4 \cdot \tau_{xy}^2} = 2 \cdot \tau_{xy} \leq \sigma_a \Rightarrow \tau_{xy} \leq 0,5 \cdot \sigma_a \cong \tau_a$

IV) criteriul U_1 $\sigma_{\text{ech IV}} = \sqrt{2,6 \cdot \tau_{xy}^2} \Rightarrow \tau_{xy} \leq 0,62 \cdot \sigma_a \cong \tau_a$

V) criteriul U_{1f} $\sigma_{\text{ech V}} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2} \Rightarrow \tau_{xy} \leq 0,577 \cdot \sigma_a \cong \tau_a$

Lăsând deoparte primul criteriu, utilizabil la o gamă relativ restrânsă de aplicații, ca și pe al doilea, deja discutat, se obține că pentru materialele tenace valorile τ_a pot fi considerate a fi cuprinse, ca fracții din σ_a , între **0,5** și **0,62**; alegerea pentru o rezolvare concretă se va baza, în principiu, pe ipoteza de rupere recomandată pentru materialul piesei calculate.

2.6

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Calculul tensiunilor globale

Încărcările din această categorie produc *simultan*, în punctele unor anumite secțiuni transversale ale barelor, tensiuni de două *naturi diferite*, adică **normale** și **tangențiale**; indiferent cum sunt orientate, acestea *nu pot fi adunate* algebric, efectele globale fiind calculate exclusiv pe baza uneia dintre teoriile de rupere; pentru barele uzuale efectele produse prin *forfecare* sunt de obicei puțin semnificative ca intensitate, în raport cu cele produse prin *încovoiere* sau prin *întindere-comprimare*, astfel încât cel mai frecvent se combină solicitările de *încovoiere* și de *răsucire*.

Aspectele discutate mai jos sunt în principiu valabile și dacă răsucirea se aplică unor bare de secțiuni *necirculare*, care vor fi abordate într-un capitolul separat; pe de altă parte, când încovoierea și răsucirea se aplică simultan barelor cu *secțiuni circulare*, relațiile *tensiunilor echivalente* **pot** fi aduse la forme interesante, care apropie această solicitare compusă de calculul la încovoierea simplă.

Se consideră o secțiune transversală de formă *circulară* plină, cu diametrul **d**, dintr-o bară solicitată la răsucire și la încovoiere; eforturile din secțiunea aleasă sunt *momentele* $\mathbf{M}_t(\mathbf{x})$ – orientat pe direcția axei *longitudinale*, respectiv $\mathbf{M}_{iz}(\mathbf{x})$ – pe axa principală centrală *orizontală* a secțiunii.

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Calculul tensiunilor globale

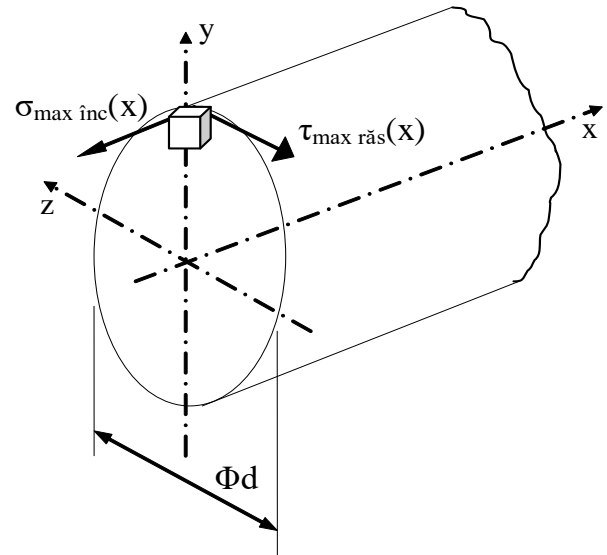
Tensiunile produse de cele două solicitări sunt *simultan maxime* în două puncte ale secțiunii, cele aflate la capetele diametrului ei vertical; valorile lor absolute se scriu:

$$\sigma_{\max \text{ inc}}(x) = \frac{M_{iz}(x)}{W_z} \quad \tau_{\max \text{ răs}}(x) = \frac{M_t(x)}{W_p}$$

Punctele respective sunt cele mai solicitate din secțiune, acolo se va calcula tensiunea globală (**echivalentă**) *maximă*, cu una dintre teoriile de rupere; s-a arătat anterior că criteriile folosite cel mai frecvent sunt cele cu numerele III, IV și V, pentru care relațiile lui σ_{ech} diferă între ele doar prin coeficientul **k** de sub radical:

$$\sigma_{\text{ech III,IV,V}} = \sqrt{\sigma_x^2 + k \cdot \tau_{xy}^2}$$

Acest coeficient are valorile **4**, **2.6** și respectiv **3**, ceea ce conduce la posibilitatea de a scrie compact relația finală pentru tensiunea echivalentă maximă, pentru cele trei criterii amintite.



Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

Calculul tensiunilor globale

Se introduc în ultima relație expresiile de mai sus ale tensiunilor maxime, apoi se ține seama că modulii de rezistență la încovoiere și la răsucire nu sunt independenți între ei, la secțiunile circulare:

$$W_p(x) = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad W_z(x) = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad \Rightarrow \quad W_p(x) = 2 \cdot W_z(x)$$

Prin urmare, relația căutată se scrie astfel:

$$\sigma_{\text{ech max}}(x) = \sqrt{\left[\frac{M_{iz}(x)}{W_z} \right]^2 + k \cdot \left[\frac{M_t(x)}{W_p} \right]^2} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M_{iz}^2(x) + \frac{k}{4} \cdot M_t^2(x)}$$

Se observă că ultimul radical poate fi asimilat cu un *moment echivalent de încovoiere* $M_{i \text{ ech}}(x)$, iar *relația calculului de rezistență* pentru solicitarea compusă de încovoiere și răsucire, la barele de secțiuni **circulare** (pline sau inelare), poate fi scrisă sub forma de la încovoierea simplă:

$$\sigma_{\text{ech max}}(x) = \frac{M_{i \text{ ech}}(x)}{W_z} \leq \sigma_a$$

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Calculul tensiunilor globale

Particularizarea pentru cele trei criterii de rupere se face prin intermediul acestui moment echivalent de încovoiere, astfel:

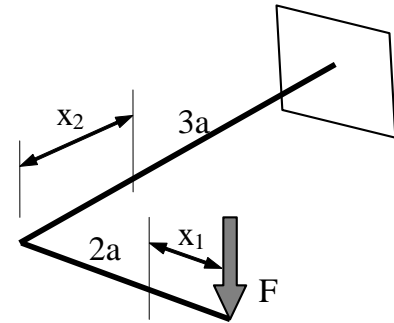
$$M_{\text{iech}}(x) = \sqrt{M_{\text{iz}}^2(x) + \alpha \cdot M_{\text{t}}^2(x)} \quad \text{cu} \quad \alpha = \frac{k}{4} = \begin{cases} 1 & \text{pt. crit. } \tau_{\text{max}} \\ 0,65 & \text{pt. crit. } U_1 \\ 0,75 & \text{pt. crit. } U_{1f} \end{cases}$$

Alegerea criteriului potrivit pentru o solicitare dată se face în funcție de materialul piesei calculate; cel mai frecvent e folosit criteriul τ_{max} , în special pentru piesele din metale *tenace*; pentru a evalua, chiar și orientativ, diferențele dintre rezultate, în rezolvarea aplicației următoare se vor face calculele de rezistență cu cele trei variante ale acestei relații, analizând comparativ dimensiunile astfel obținute.

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Aplicații

1. Se consideră o bară cotită în L încastrată la un capăt și liberă la celălalt, unde acționează forța concentrată $F = 2\text{kN}$, perpendiculară pe planul axei longitudinale a barei; secțiunile transversale sunt circulare pline cu diametrul d , iar lungimile sunt marcate în funcție de parametrul $a = 0,2\text{m}$. Să se dimensioneze bara, cunoscând că este din oțel, cu caracteristicile $\sigma_a = 160$ și $E = 21 \cdot 10^4$ [MPa]; să se mai calculeze și cu ce distanță se deplasează, pe verticală, secțiunea de la capătul barei, în care acționează forța exterioară F .



Rezolvare

a) Dimensionarea barei

Se analizează întâi eforturile secționale, la fel ca la solicitările simple; admitând că axa x este mereu pe axa longitudinală, rezultă ca axa verticală y e neschimbată, ca direcție, pe întreaga bară, în vreme ce axa orizontală z se rotește cu 90° , odată cu axa x (pe care este perpendiculară), în secțiunea de la cotitura barei; se observă că F se proiectează numai pe axa y , adică efectele ei de tip forță sunt exclusiv tăietoare (de mărime F), practic fără influență în calculele de rezistență ale barei.

Pe desen s-au marcat cele două tăieturi imaginare pentru calculul momentelor secționale; pe prima regiune se produce moment doar față de axa z , adică încovoiere în plan vertical, în vreme ce pe a doua apar momente față de z , dar și față de x , adică are loc solicitarea compusă de încovoiere cu răsucire:

$$\text{a) } x_1 \in (0, 2a): \quad M_{iz}(x_1) = -F \cdot x_1 \quad M_{iz}(0) = 0, \quad M_{iz}(2a) = -2aF$$

$$\text{b) } x_2 \in (0, 3a): \quad M_{iz}(x_2) = -F \cdot x_2 \quad M_{iz}(0) = 0, \quad M_{iz}(3a) = -3aF, \quad M_t(x_2) = 2aF = ct$$

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Aplicații

Reprezentările grafice ale rezultatelor (diagramele de momente) arată solicitarea periculoasă a barei în secțiunea din încastrare, unde momentul de încovoiere atinge valoarea maximă; aceasta se introduce fără semn în relațiile pentru calculul $M_{i\text{ ech}}(x)$, întrucât în toate variantele eforturile secționale apar la puterea a doua; prin urmare, momentul echivalent *maxim* de pe bara considerată este:

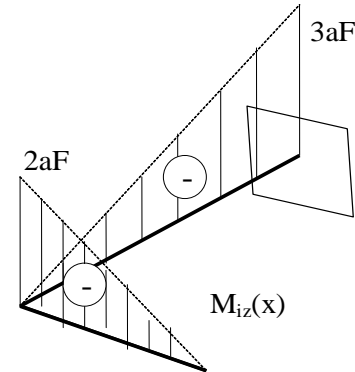
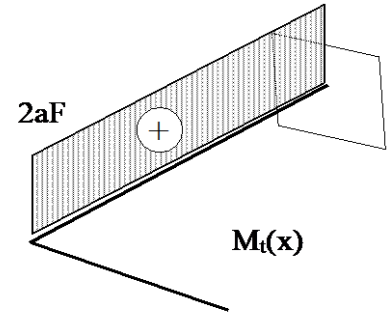
$$M_{i\text{ ech max}}(x) = \sqrt{(3aF)^2 + \alpha \cdot (2aF)^2} = aF\sqrt{9 + 4 \cdot \alpha}$$

În funcție de criteriul de rupere ales, valorile acestei mărimi vor fi:

- pentru criteriul τ_{max} $M_{i\text{ ech max III}} = aF\sqrt{9 + 4 \cdot 1} = aF\sqrt{13} \cong 3,61 \cdot aF$
- pentru criteriul U_1 $M_{i\text{ ech max IV}} = aF\sqrt{9 + 4 \cdot 0,65} = aF\sqrt{11,6} \cong 3,41 \cdot aF$
- pentru criteriul U_{1f} $M_{i\text{ ech max V}} = aF\sqrt{9 + 4 \cdot 0,75} = aF\sqrt{12} \cong 3,46 \cdot aF$

Valoarea cea mai mare o dă criteriul III, celelalte două fiind mai mici cu 5,5%, respectiv cu 4%; se verifică diferența între *dimensiunile* obținute prin calcule, în cele 3 variante; dacă se notează β factorul înmulțit cu (aF) în rezultatele de mai sus, din condiția calculului de rezistență se

obține relația:
$$W_{z\text{ nec}} = \frac{M_{i\text{ ech max}}}{\sigma_a} \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\beta \cdot aF}{\sigma_a} \Rightarrow d_{\text{ min}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \beta \cdot aF}{\pi \cdot \sigma_a}}$$



Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

Aplicații

Prin înlocuirea datelor problemei în ultima relație se obține:

$$d_{\min} = \sqrt[3]{\beta} \cdot \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 200 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = \sqrt[3]{\beta} \cdot \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 2 \cdot 10^3}{\pi}} \text{ mm} = 20 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ mm} \cdot \sqrt[3]{\beta} = 29,42 \text{ mm} \cdot \sqrt[3]{\beta}$$

Dimensiunile de calcul după cele trei criterii de mai sus sunt:

$$d_{\min \text{ III}} = \sqrt[3]{3,61} \cdot 29,42 \text{ mm} = 45,13 \text{ mm}; \quad d_{\min \text{ IV}} = \sqrt[3]{3,41} \cdot 29,42 \text{ mm} = 44,28 \text{ mm};$$
$$d_{\min \text{ V}} = \sqrt[3]{3,46} \cdot 29,42 \text{ mm} = 44,5 \text{ mm};$$

Ultimele două rezultate reprezintă 98,1% și respectiv 98,6% din primul; diferența lor față de valoarea maximă e mai mică de 2% și se încadrează în limitele erorilor acceptabile pentru calculele inginerești. Rezultă, mai întâi, că oricare dintre cele trei criterii menționate poate fi utilizat, la fel de eficient, în calculul de rezistență la solicitarea compusă de încovoiere și răsucire, la secțiunile circulare pline; apoi, alegerea criteriului τ_{\max} , despre care s-a arătat că se folosește cel mai frecvent, se dovedește acoperitoare pentru celelalte două criterii.

Dimensiunea finală a barei studiate se poate alege la valoarea **$d_{\text{ad}} = 46 \text{ mm}$**

Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

Aplicații

b) Calculul *deplasării* verticale la capătul barei

Având în vedere că singura încărcare exterioară a barei este chiar forța F , în al cărei punct de aplicare (notat, în continuare, cu P) și pe a cărei direcție trebuie stabilită valoarea deplasării, metoda de calcul cea mai potrivită este bazată pe una dintre teoremele lui Castigliano; luând în considerare solicitările ce apar în bară, expresia teoremei este următoarea:

$$\delta_v(P) = \frac{\partial L_e}{\partial F} = \int_{(L)} \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F} \cdot dx + \int_{(L)} \frac{M_t(x)}{G \cdot I_p} \cdot \frac{\partial M_t(x)}{\partial F} \cdot dx$$

Folosind rezultatele anterioare, calculul propriu-zis se face astfel:

$$\begin{aligned} \delta_v(P) &= \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^{2a} (-F \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx + \int_0^{3a} (-F \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx \right] + \frac{1}{G \cdot I_p} \cdot \int_0^{3a} (2aF) \cdot 2a \cdot dx = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[F \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} + F \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{3a} \right] + \frac{1}{G \cdot I_p} \cdot 4a^2 \cdot F \cdot x \Big|_0^{3a} = \frac{F \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I_z} (8 + 27) + \frac{F \cdot a^3}{G \cdot I_p} \cdot 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

Aplicații

Întrucât bara este metalică se obține că $E = G \cdot 2(1+\nu) \approx 2,6 \cdot G$ și având în vedere că pentru secțiuni circulare pline $I_p = 2I_z$, se ajunge la:

$$\delta_v(P) = \frac{F \cdot a^3}{E \cdot I_z} \left(\frac{35}{3} + \frac{2,6}{2} \cdot 4 \cdot 3 \right) = 27,27 \cdot \frac{F \cdot a^3}{E \cdot I_z}$$

Calculul final se face înlocuind în ultima relație datele numerice ale problemei:

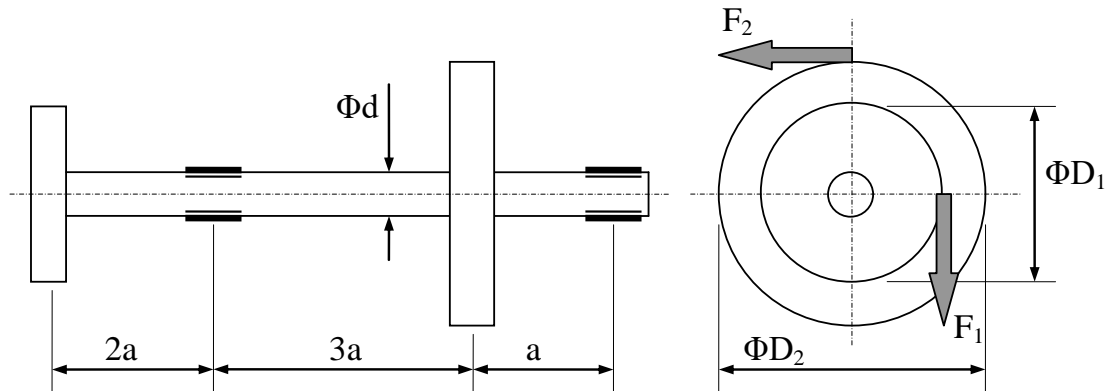
$$\delta_v(P) = 27,27 \cdot \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (200 \text{ mm})^3}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot (46 \text{ mm})^4}{64}} = 27,27 \cdot \frac{64 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 10^5}{21 \cdot \pi \cdot 46^4} \text{ mm} = 9,453 \text{ mm}$$

Deplasarea calculată reprezintă o valoare pertinentă, având în vedere dimensiunile barei și mărimea forței ce i se aplică, încât se admite că nu este depășit domeniul de deformabilitate elastică a materialului său; se reamintește că rezultatul *pozitiv* arată că punctul P, unde F acționează asupra barei, se deplasează vertical **în jos**, adică în chiar sensul forței exterioare, ceea ce este evident și din punct de vedere fizic.

Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

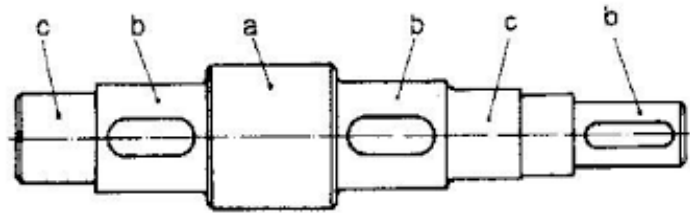
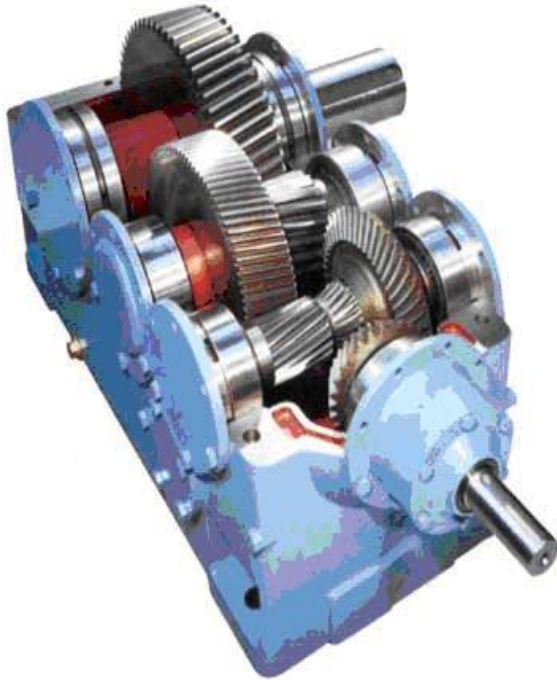
Aplicații

2. Se consideră un arbore de transmisie, de secțiune circulară plină cu diametrul d , făcut din oțel cu $\sigma_a = 160\text{MPa}$, rezemat prin lagăre de rostogolire (rulmenți) și încărcat cu două forțe concentrate acționând pe circumferința unor roți, solidarizate pe arbore, cum se arată în desenul alăturat.



Să se dimensioneze arborele, știind $a = 100$; $D_1 = 60$; $D_2 = 80$ [mm] și $F_1 = 2\text{kN}$.

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$



Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

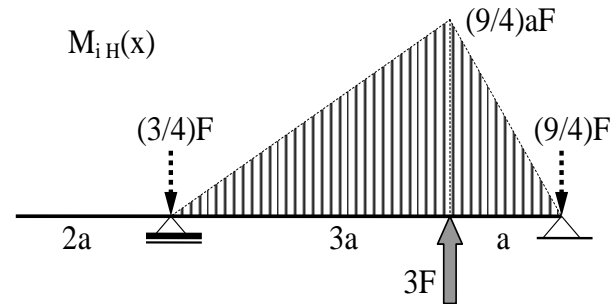
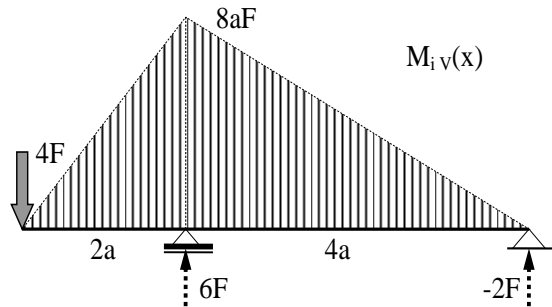
Aplicații

Rezolvare

Valoarea celei de-a doua forțe exterioare se stabilește din echilibrul momentelor date de cele două forțe, în raport cu axa arborelui:

$$\frac{F_1 \cdot D_1}{2} = \frac{F_2 \cdot D_2}{2} \Rightarrow F_2 = \frac{D_1}{D_2} \cdot F_1 \Rightarrow F_2 = \frac{60\text{mm}}{80\text{mm}} \cdot 2\text{kN} = 1,5\text{kN}$$

Pentru simplificarea scrierii la rezolvarea literală se introduce un parametru de forță, notat de exemplu $F = 0,5\text{kN}$ și ducând la $F_1 = 4F$, respectiv $F_2 = 3F$; în același scop se observă că diametrele roților se pot scrie în funcție de parametrul a al distanțelor, astfel: $D_1 = 3a/5$, respectiv $D_2 = 4a/5$. Forțele acționează în plane diferite, perpendiculare între ele, ce pot fi considerate *vertical*, respectiv *orizontal*; arborele e solicitat la **încovoiere** în ambele plane și folosind notațiile de mai sus se pot face calculele pentru trasarea celor două diagrame de momente.



Solicitări compuse de tip ($\sigma + \tau$)

Aplicații

Diagramele s-au schițat pe schemele de încărcare din cele două plane, indicând inclusiv valorile reacțiunilor din reazeme; cele două eforturi de încovoiere acționează în plane perpendiculare între ele și produc, în fiecare secțiune a arborelui (după criteriul τ_{\max}), un *moment de încovoiere rezultant* $M_{i\text{rez}}(x)$:

$$M_{i\text{rez}}(x) = \sqrt{M_{iV}^2(x) + M_{iH}^2(x)}$$

Valorile maxime (relative) ale acestei mărimi se pot înregistra fie în dreptul reazemului din stânga, unde $M_{iH}(x) = 0$, adică $M_{i\text{rez}}(x) = 8aF$, fie în secțiunea (la distanța a de capătul barei) unde acționează F_2 și unde $M_{iV}(x) = 2aF$ (un sfert din valoarea maximă M_{iV}); se obține că în acea secțiune momentul rezultant este:

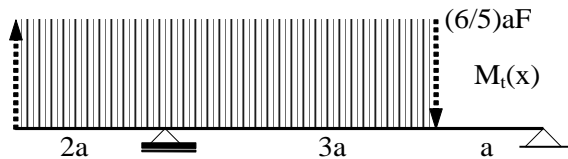
$$M_{i\text{rez}}(x = a) = \sqrt{(2aF)^2 + \left(\frac{9}{4}aF\right)^2} = 3,01 \cdot aF$$

Această valoare este mult mai mică decât $8aF$, care rămâne ca $M_{i\text{rez max}}(x)$. Pe de altă parte, roțile fiind solidarizate pe arbore, cele două forțe tind să rotească arborele în sensuri contrare, adică îl solicită la **răsucire** (pe porțiunea dintre secțiunile unde sunt montate roțile) cu un moment constant, având mărimea:

$$M_t(x) = ct = \frac{F_1 \cdot D_1}{2} = \frac{4F \cdot \frac{3}{5}a}{2} = \frac{6}{5}aF \Rightarrow M_t(x) = \frac{6}{5} \cdot 100\text{mm} \cdot 500\text{N} = 60\text{Nm}$$

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$

Aplicații



În scop orientativ s-a aflat valoarea numerică a momentului, deși în cele de mai jos calculele se fac tot sub formă literală; pe de altă parte, pe diagrama de efort s-au marcat și *saltarile* pe care le determină, la capetele graficului, cele două momente de răsucire concentrate produse de forțele F_1 și F_2 .

Analizând rezultatele de până acum, se constată că solicitarea periculoasă are loc în secțiunea din reazemul din stânga, unde ambele tipuri de eforturi secționale ating valorile lor maxime; relația (9.3), bazată pe criteriul τ_{\max} , duce la următoarea formă a momentului echivalent maxim:

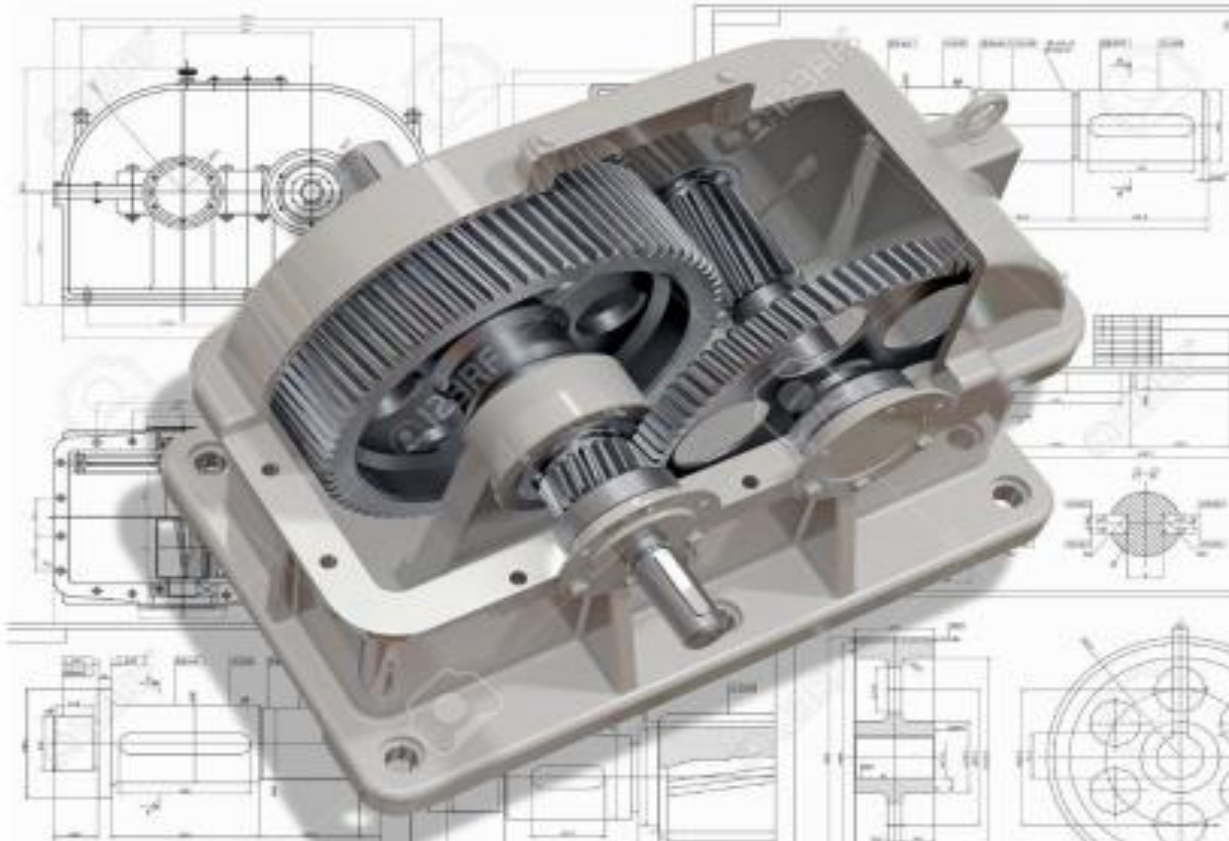
$$M_{\text{iech max}}(x) = \sqrt{M_{\text{irez max}}^2(x) + M_t^2(x)} = \sqrt{(8aF)^2 + \left(\frac{6}{5}aF\right)^2} \cong 8,1 \cdot aF$$

Din condiția de rezistență (5.2) se va scrie că:

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{8,1 \cdot aF}{\sigma_a} \Rightarrow d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8,1 \cdot 100 \text{ mm} \cdot 500 \text{ N}}{\pi \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 29,54 \text{ mm}$$

Pe această bază, dimensiunea finală a arborelui calculat va fi **$d_{\text{ad}} = 30 \text{ mm}$** .

Solicitări compuse de tip $(\sigma + \tau)$



2.7

Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Generalități

Gruparea aceasta de solicitări este slab reprezentată în practică, întrucât rezultă din suprapunerea unor încărcări ce produc *forfecare* și *răsucire*, iar tensiunile tangențiale de forfecare sunt de obicei mult mai slabe, ca intensitate, față de cele de la răsucire; există o excepție importantă în această privință, discutată în detaliu în continuare.

Tensiunile produse de cele două solicitări au aceeași natură și se pot aduna algebric, pentru că în principiu sunt orientate în același fel, cel puțin parțial, pe secțiunile de calcul; se obține astfel tensiunea rezultantă $\tau_{rez}(\mathbf{x})$, a cărei valoare maximă se introduce în condiția de rezistență, în care este comparată cu rezistența admisibilă τ_a a materialului piesei calculate.

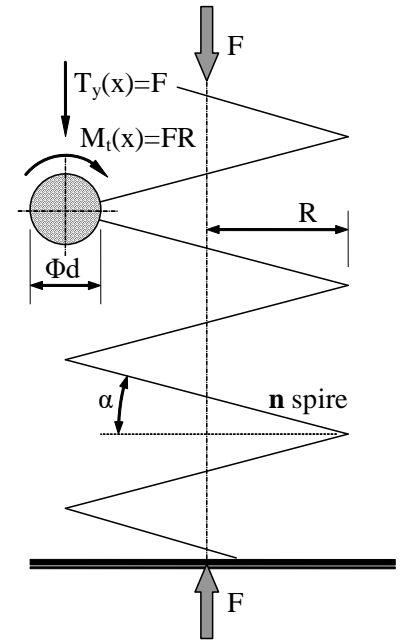
Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

Acestea sunt elemente constructive de tip elastic, folosite ca amortizoare de șocuri și vibrații, dar și ca elemente de închidere în circuite de comandă sau de siguranță, hidraulice și pneumatice; în mod tipic sunt fabricate prin înfășurarea unor sârme metalice, de obicei din oțeluri aliate (numite chiar *oțeluri de arc*) foarte rezistente, formând un număr n de *spire* suprapuse *cilindric* sau (mai rar) în alte forme.

Alte caracteristici ale arcurilor sunt diametrul d al sârmei și raza R a înfășurării (de mărime constantă, la arcul cilindric), care devine raza arcului; este important și unghiul α al înfășurării, în funcție de care se stabilesc eforturile secționale din spire.

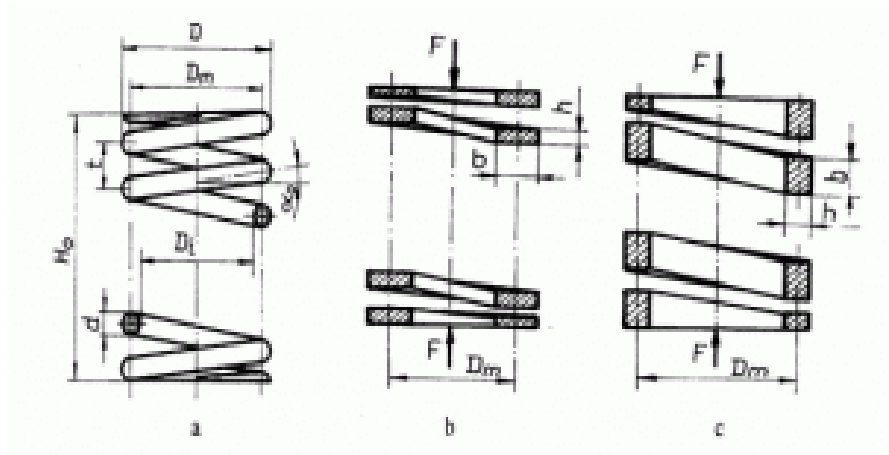
Dacă unghiul este relativ mic (între 10° și 30°), atunci arcul se numește „cu spire strânse”, iar eforturile de *încovoiere* din spire sunt *neglijabile* față de cele de forfecare și răsucire; acestea sunt produse de *forța tăietoare* F , având aceeași mărime în orice secțiune a spirei, pe direcția diametrului ei vertical, respectiv de *momentul de răsucire* $M_t = FR$, constant și el în orice secțiune.



Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$



Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$



Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

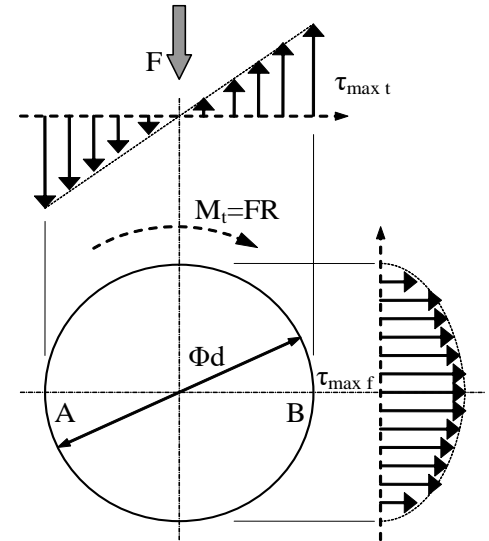
Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

Tensiunile tangențiale de forfecare τ_f sunt orientate *vertical* și au sens opus forțelor F care le produc, iar pe înălțimea spirei se distribuie după o lege *parabolică*, obținută prin aplicarea relației lui Juravski; pe această bază s-a arătat că tensiunile sunt **nule** la marginile secțiunii și ating valoarea maximă pe axa ei principală centrală, care se plasează *perpendicular* pe forțele tăietoare F ; pentru secțiunile circulare pline se poate demonstra că această valoare este:

$$\tau_{\max f} = (4/3) \cdot (F/A)$$

Tensiunile de răsucire τ_t variază *liniar* pe orice diametru al secțiunii spirei, având mărimi proporționale cu distanțele lor până la centrul secțiunii și sensuri care, ca tendință de rotire în jurul centrului secțiunii, se opun lui M_t ; valorile maxime apar pe circumferința secțiunii și sunt calculate folosind relația cunoscută:

$$\tau_{\max t} = M_t/W_p$$



Solicitări compuse de tip ($\tau + \tau$)

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

Cele două categorii de tensiuni conduc la valori maxime ale rezultantei lor atunci când au aceeași direcție, ceea ce se întâmplă numai în punctele de pe *diametrul orizontal* AB al secțiunii, la *capetele* căruiia au simultan valori maxime; sensurile tensiunilor coincid pe *jumătatea din dreapta* a diametrului, adică valoarea cea mai mare a tensiunilor rezultante se obține în punctul B (cel mai apropiat de pe secțiune de axa longitudinală a arcului):

$$\tau_{\text{rez max}} = \tau_{\text{rez}}(B) = \tau_{\text{max t}} + \tau_{\text{max f}} = \frac{M_t}{W_p} + \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{A} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Ultima sumă poate fi scrisă compact dacă se scoate în factor în mod forțat prima fracție, iar *condiția de rezistență* va fi:

$$\tau_{\text{rez max}} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \left(1 + \frac{d}{3R} \right) \leq \tau_a$$

Arcurile obișnuite au valori *foarte mici* pentru fracția din paranteză și pondere mică a forfecării în calcule, încât *pre-dimensionarea* arcurilor se face neglijând paranteza din membrul stâng al condiției, urmând ca după stabilirea dimensiunii spirei să se facă *verificarea* ei în relația exactă. Este important că, spre deosebire de alte piese metalice folosite în ingineria mecanică, arcurile se fac din oțeluri aliate *de mare rezistență*, pentru care τ_a la forfecare (statică) are valori mari, cuprinse de obicei între 400 și 800MPa, iar modulul de lunecare se consideră a fi $G = 85\text{GPa}$.

Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Calculul deformației (*săgeții*) la arcurile elicoidale cu spire strânse

Un parametru important în exploatarea arcurilor este deformația lor *axială* sub încărcările pe care le suportă; calculul ei se poate face, de exemplu, folosind *teorema de conservare a energiei* (a lui Clapeyron), care stabilește că *energia potențială* de deformare elastică U acumulată într-un arc (construit și încărcat ca în figura de mai sus), atunci când el se *comprimă* axial cu cantitatea δ , este egală în mărime cu *lucrul mecanic* elastic L_e consumat pentru producerea respectivei deformații.

S-a arătat la studiul solicitărilor simple că acest lucru mecanic se calculează sub forma $L_e = (1/2)F \cdot \delta$, în timp ce pentru energia potențială se ține seama că este acumulată în materialul arcului în mod preponderent prin torsiune, astfel încât se calculează folosind relația stabilită la acea solicitare:

$$U = \int_L \frac{M_t^2(x)}{2G \cdot I_p(x)} dx$$

Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Calculul deformației (săgeții) la arcurile elicoidale cu spire strânse

Se observă că, pentru arcul considerat, mărimile de sub integrală sunt constante pe lungimea lui (egală cu lungimea unei spire $2\pi R$ înmulțită cu numărul de spire n); cu notațiile anterioare, energia potențială acumulată în arc va fi:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot L_{\text{arc}}}{2G \cdot I_p} = \frac{(F \cdot R)^2 \cdot (2\pi R \cdot n)}{2G \cdot I_p} = \frac{\pi R^3 \cdot n \cdot F^2}{G \cdot I_p}$$

Egalând ultima fracție cu expresia de mai sus a lucrului mecanic elastic, se obține relația pentru calculul deformației δ (numită și „săgeata” arcului sub forța F):

$$\delta_{\text{arc}} = \frac{F \cdot 2\pi R^3 \cdot n}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{F \cdot 64R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \quad [\text{mm}]$$

Din fizică se știe că, pentru orice element elastic, raportul dintre forța F care îl încarcă și deformația δ pe care i-o produce reprezintă o *constantă* a elementului, se notează de obicei k și este o caracteristică importantă a lui; pe această bază se poate vorbi despre *constantă arcului* elicoidal studiat mai sus, calculată astfel:

$$k_{\text{arc}} = \frac{F}{\delta} = \frac{G \cdot d^4}{64n \cdot R^3} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

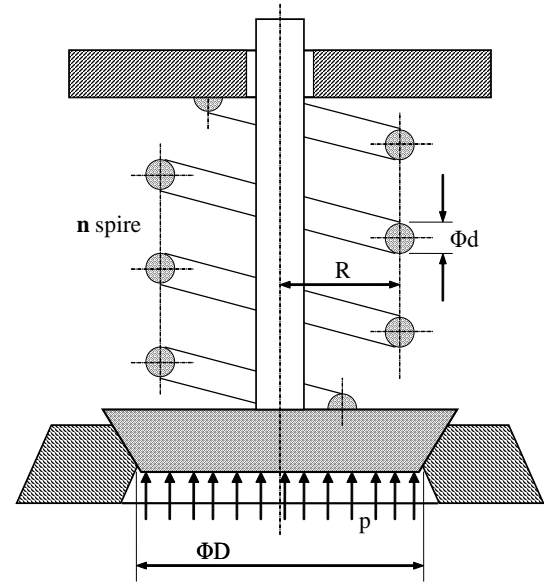
Solicitări compuse de tip $(\tau + \tau)$

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse. Aplicație

O supapă de siguranță având diametrul nominal $D=60\text{mm}$ este reglată să se deschidă când presiunea din instalație ajunge la $p_0=12\text{atm}$; supapa este menținută închisă cu un arc elicoidal cilindric cu spire strânse și raza $R = 20\text{mm}$; arcul este din oțel aliat cu rezistența $\tau_a=500\text{MPa}$ și modulul de elasticitate $G=85\text{GPa}$, iar la momentul montării este comprimat cu o deformație $\delta = 8\text{mm}$. Să se dimensioneze arcul (să se stabilească parametrii lui \mathbf{d} și \mathbf{n}), cunoscând că deschiderea maximă a supapei este de 3mm .

Rezolvare

Arcul trebuie dimensionat astfel încât să suporte, în condiții de funcționare stabilă și reversibilă, distanța de deschidere maximă a supapei, corespunzând comprimării lui cu 3mm în plus, față de deformația de regim notată cu δ .



Solicitări compuse de tip ($\tau + \tau$)

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse. Aplicație

Se calculează mai întâi *forța minimă* de apăsare la care se deschide supapa, corespunzând presiunii p_0 (la scrierea căreia se folosește relația de transformare $1\text{atm} = 0,1\text{MPa}$) care acționează pe suprafața circulară cu diametrul D a supapei:

$$F_{\min} = p_0 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 1,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\pi \cdot (60\text{mm})^2}{4} = 3393\text{N}$$

La această forță comprimarea arcului este de 8mm și aplicând regulile simple ale proporționalității se calculează *forța maximă* pe care trebuie să o suporte arcul, care va corespunde comprimării de 11mm:

$$F_{\max} = \frac{11\text{mm}}{8\text{mm}} \cdot F_{\min} = 4665\text{N}$$

Pentru stabilirea unei valori *inițiale* a diametrului necesar al spirei (pre-dimensionare) se folosește **condiția de rezistență** de mai sus, cu neglijarea fracției din paranteză (adică a efectului produs de forfecare), din care rezultă următoarele:

$$\frac{16F \cdot R}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16F_{\max} \cdot R}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4665\text{N} \cdot 22\text{mm}}{\pi \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = \sqrt[3]{1045,381\text{mm}} = 10,15\text{mm}$$

Solicitări compuse de tip ($\tau + \tau$)

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse. Aplicație

Se adoptă diametrul $d_{ad}=10.2\text{mm}$ și condiția riguroasă de rezistență se va scrie astfel:

$$\tau_{\text{rez max}} = \frac{16 \cdot 4665 \text{ N} \cdot 22\text{mm}}{\pi \cdot (10,2\text{mm})^3} \left(1 + \frac{10,2\text{mm}}{3 \cdot 22\text{mm}} \right) = 577,5\text{MPa} > \tau_a$$

Acest rezultat arată că dimensiunea adoptată *nu este suficientă* și arcul nu poate funcționa corect; aceasta se întâmplă deoarece raportul d/R este în acest caz destul de consistent, astfel încât fracția din paranteză (efectul produs în spire de solicitarea de *forfecare*) nu are o valoare neglijabilă, așa cum s-a presupus când s-a făcut pre-dimensionarea arcului. Rezultă așadar că diametrul spirei trebuie *crescut* în mod treptat, repetând operațiile de verificare până când condiția de rezistență este îndeplinită.

Efectuând calculele necesare se obține că arcul nu rezistă nici pentru valorile de 10.3mm, 10.5mm și 10.6mm ale grosimii de spiră, pentru care tensiunea rezultantă maximă depășește în continuare valoarea rezistenței admisibile a oțelului. Abia adoptarea diametrului $d=10.8\text{mm}$ duce la îndeplinirea condiției de rezistență:

$$\tau_{\text{rez max}} = \frac{16 \cdot 4665 \text{ N} \cdot 22\text{mm}}{\pi \cdot (10,8\text{mm})^3} \left(1 + \frac{10,8\text{mm}}{3 \cdot 22\text{mm}} \right) = 483\text{MPa} < \tau_a$$

Solicitări compuse de tip ($\tau + \tau$)

Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse. Aplicație

Pornind de la această valoare a diametrului va trebui stabilit numărul *neces*ar **n** de spire ale arcului; calculul se face folosind relația de mai sus a săgeții, care poate fi aplicată pentru oricare dintre cele două niveluri ale forței de apăsare, cu valorile corespunzătoare ale deformației δ ; de exemplu, pentru nivelul **minim** al forței se obține:

$$n = \frac{G \cdot d^4 \cdot \delta_{\min}}{64 \cdot F_{\min} \cdot R^3} = \frac{85 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (10,8\text{mm})^4 \cdot 8\text{mm}}{64 \cdot 3393\text{N} \cdot (22\text{mm})^3} = 4,001$$

Prin urmare, arcul de supapă calculat în problemă trebuie făcut cu **4 spire**, din sârmă cu diametrul de 10.8mm.

Observație: Spre deosebire de alte situații de proiectare, la calculul arcurilor elicoidale este nevoie de atenție specială la adoptarea, prin *rotunjire*, atât a diametrului **d** cât și a numărului final de spire **n**; acest număr apare în relația pentru calculul săgeții δ , așa încât dacă se adoptă pentru el o valoare mult mai mare decât cea de calcul, atunci se modifică *tensionarea* arcului în spațiul în care va fi montat, ceea ce va impune să fie refăcută dimensionarea lui.

2.8

Bare cotite – nedeterminări interioare

Bare cotite – nedeterminări interioare

Grade de nedeterminare

Necunoscutele static nedeterminate apar, la barele c3otite, sub forma clasică de **reacțiuni** în reazeme, mai numeroase decât expresiile din care ar putea fi calculate, dar și sub formă de **eforturi secționale**, pentru construcțiile ce conțin segmente grupate în *contururi închise*.

a) Cazul nedeterminărilor exterioare

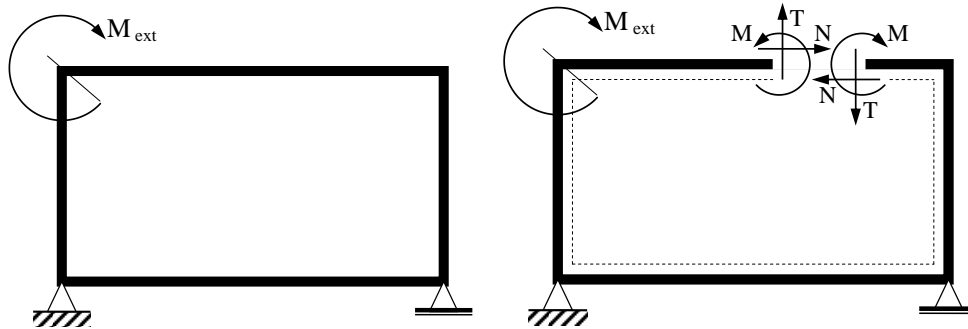
La fel ca la barele drepte, necunoscutele sunt forțe și/sau momente de legătură, adică *reacțiuni* acționând în reazemele construcției analizate; notând cu **N** numărul total al acestora și cu **E** numărul de *ecuații* de echilibru semnificative care pot fi scrise în problemă, *gradul nedeterminării exterioare* a construcției va fi $n = N - E$; admițând că de regulă barele cotite se sprijină pe cel mult două reazeme și că ambele sunt încastrări (adică introduc fiecare trei reacțiuni), știind că în problemele plane se scriu 3 ecuații de echilibru rezultă *gradul maxim* de nedeterminare, pentru barele cotite care se încadrează în aceste descrieri: $n_{\max} = 6 - 3 = 3$

Bare cotite – nedeterminări interioare

Grade de nedeterminare

b) Cazul nedeterminărilor interioare

Orice contur închis, format din segmente de bare drepte sau curbe, introduce în construcția din care face parte **3 necunoscute interioare static nedeterminate**; un astfel de contur nu are, în mod natural, un punct de început, sau de sfârșit, de unde să pornească studiul eforturilor secționale, încât i se face o *decupare imaginară*, într-o secțiune transversală oarecare.



Imaginând o bară reală, pe care încărcările exterioare tind să o tensioneze în fiecare punct, se înțelege că orice secționare va avea tendința să elibereze tensiunile din material, făcând să dispară solicitările pe care le suporta.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Grade de nedeterminare

Pentru ca relaxarea să nu aibă loc și starea de solicitare dinainte de secționare să fie menținută, pe fiecare față a tăieturii, în centrul de greutate (pe axa barei) sunt aplicate (ca în figura de mai sus) 3 eforturi necunoscute (un moment \mathbf{M} , producând rotire în planul problemei și două forțe \mathbf{N} și \mathbf{T} , pe direcția *tangentei*, respectiv *normalei* la axa barei din tăietură).

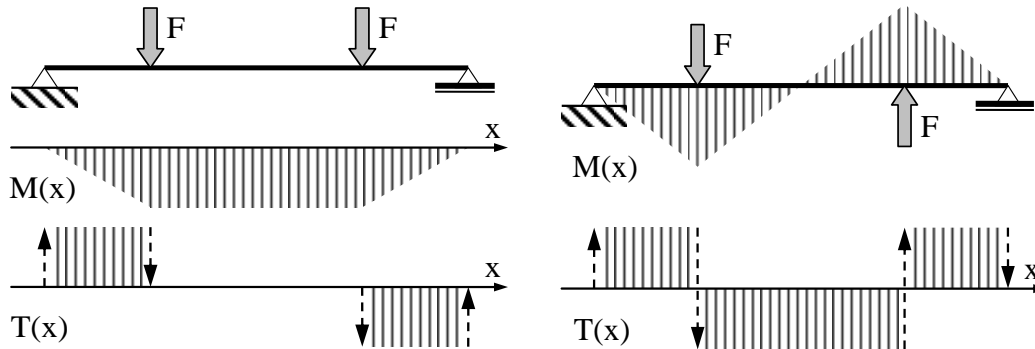
Cele șase eforturi astfel introduse, câte 3 pe fiecare față a secțiunii imaginare, sunt *egale și opuse* în perechi, astfel că în fapt în secțiunile barei apar 3 necunoscute *suplimentare*; valorile lor nu se pot găsi din ecuațiile de echilibru (la care nu participă, întrucât sunt încărcări *interioare*), deci se încadrează între necunoscutele static nedeterminate ale problemei.

Este importantă semnalarea că aceste mărimi reprezintă chiar **valorile eforturilor** secționale din secțiunea făcută, adică se vor regăsi (ca mărime și sens de acțiune) pe diagramele de eforturi ale barei, în dreptul acelei secțiuni.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Efectele produse de simetrii și antisimetrii

Din studiul solicitărilor simple se cunoaște că, dacă o construcție oarecare este *simetrică*, iar solicitările ei exterioare acționează de asemenea *simetric*, atunci diagramele de eforturi $N(x)$ și $M(x)$ vor fi și ele *simetrice*, în vreme ce diagrama $T(x)$ va fi *antisimetrică*; în mod similar, dacă încărcările acționează *antisimetric*, atunci diagramele N și M sunt *antisimetrice*, iar diagrama T este *simetrică*. Trebuie observat că diagramele antisimetrice trec mereu prin zero pe axa de simetrie a construcției, iar dacă o bară cotită conținând contururi închise se încadrează în una dintre situațiile de mai sus, secționarea imaginărie este potrivit să se facă în puncte de pe una din axele ei de simetrie.



Bare cotite – nedeterminări interioare

Rezolvarea nedeterminărilor interioare

Ținând seama de observațiile de mai sus, se obține că într-o secțiune de tipul descris efortul necunoscut T va fi **nul**, dacă încărcările sunt *simetrice*, sau eforturile N și M vor fi **nule**, dacă solicitările barei sunt *antisimetrice*. Pe această cale se ajunge pentru barele cotite la micșorarea gradului de nedeterminare, așa cum se va exemplifica în unele dintre aplicațiile ce urmează.

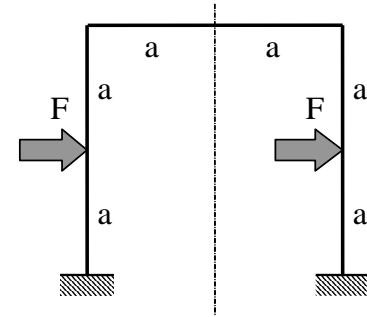
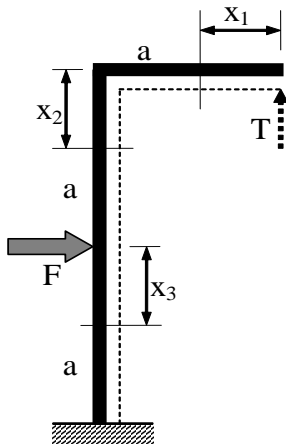
Mai trebuie spus că valorile necunoscutelor *interioare* se găsesc prin calcule similare celor de la barele drepte, bazate pe o teoremă din teoria elasticității (a lui Menabrea) conform căreia necunoscutele static nedeterminate au mereu astfel de mărimi încât conduc la *minimizarea* consumului de lucru mecanic elastic de deformare pentru construcția considerată, sub încărcările pe care le suportă; *derivatele parțiale* în raport cu oricare dintre aceste necunoscute ale energiei potențiale de deformare elastică trebuie deci să fie **nule**, de unde rezultă că și pentru construcțiile de acest fel se pot rezolva nedeterminările la fel ca la calculul barelor drepte, adică folosind teoremele lui Castigliano sau metoda eforturilor.

Bare cotite - nedeterminări interioare

Aplicație

Să se dimensioneze bara alăturată, știind că are secțiunile transversale de formă circulară plină, constantă pe lungime și că este din oțel, cu $E=21 \times 10^4$ și $\sigma_a=160$ [MPa]; se mai cunosc $F=2 \times 10^4$ N și $a=0,2$ m.

Rezolvare



Cele două reazeme încastrate introduc fiecare câte trei reacțiuni, problema fiind **triplu static nedeterminată exterior**. Pe de altă parte construcția este **simetrică** solicitată **antisimetric**; tăierea imaginară pe axa de simetrie scade gradul de nedeterminare: diagramele $N(x)$ și $M(x)$ fiind **antisimetrice**, necunoscutele ce le corespund vor fi nule în tăietură, **singura** necunoscută static nedeterminată rămasă fiind **forța tăietoare T** ; studiul se face pe jumătate din construcția inițială (reprezentată alăturat), iar nedeterminarea se rezolvă simplu cu metoda eforturilor.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicații

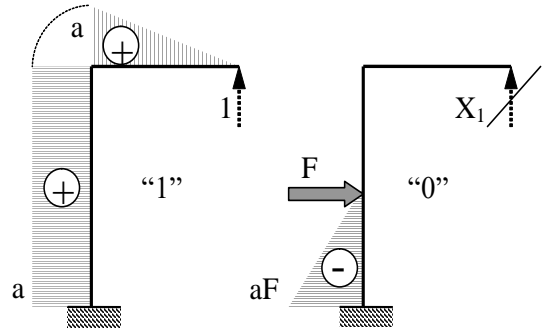
Sistemul de bază și stările fictive se construiesc ca în figură; se observă ușurința trasării diagramelor acestor stări de încărcare, practic fără să fie nevoie de expresiile eforturilor; diagramele sunt *liniare* pe toate regiunile, deci coeficienții δ_{ij} se obțin după regula lui Vereșceaghin:

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a = \frac{7}{3} a^3 ; \quad EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-aF) \cdot a = -\frac{1}{2} a^3 F$$

Din ecuația metodei eforturilor se calculează forța necunoscută:

$$X_1 = T = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2} a^3 F \cdot \frac{3}{7a^3} = \frac{3}{14} F$$

Plasând valoarea pe schema de sus, se găsesc expresiile eforturilor secționale reale, prezentate în pagina următoare. Diagramele de eforturi se trasează mai întâi pentru partea stângă a barei, apoi se prelungesc în partea ei dreaptă prin *simetrie* – pentru forța tăietoare $T(x)$, respectiv prin *antisimetrie* – pe celelalte două diagrame.



Bare cotite - nedeterminări interioare

Aplicații

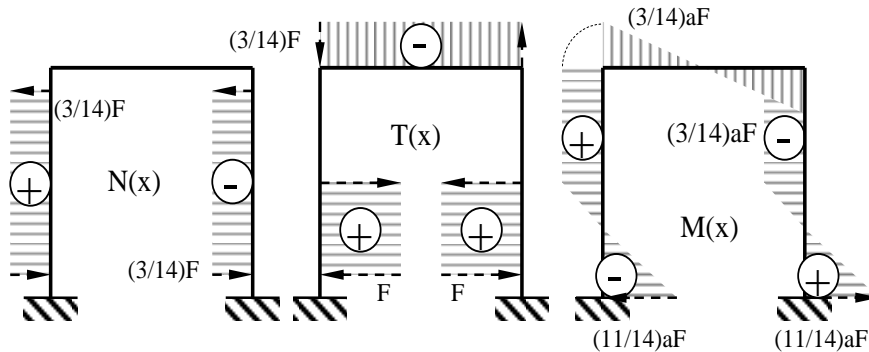
$$\forall x_1 \in (0;a) : N(x_1) = 0, \quad T_y(x_1) = -T = -\frac{3}{14}F = ct,$$

$$M_{iz}(x_1) = +T \cdot x = \frac{3}{14}F \cdot x, \quad \text{deci } M(0) = 0, \quad M(a) = \frac{3}{14}aF$$

$$\forall x_2 \in (0;a) : N(x_2) = T = \frac{3}{14}F = ct, \quad T_y(x_2) = 0, \quad M_{iz}(x_2) = T \cdot a = \frac{3}{14}aF = ct$$

$$\forall x_3 \in (0;a) : N(x_3) = \frac{3}{14}F = ct, \quad T_y(x_3) = F = ct,$$

$$M_{iz}(x_3) = -F \cdot x + T \cdot a = \frac{3}{14}aF - Fx, \quad \text{deci } M(0) = \frac{3}{14}aF, \quad M(a) = -\frac{11}{14}aF$$



Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicații

Solicitarea periculoasă are loc în secțiunile din încastrări și ținând seama că secțiunile transversale sunt circulare pline, condiția calculului de rezistență se va scrie astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{W} = \frac{\frac{3}{14}F}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{\frac{11}{14}aF}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq \sigma_a$$

La fel ca la o aplicație anterioară, se face o pre-dimensionare, din încovoiere:

$$\frac{11}{14}aF \cdot \frac{32}{\pi d^3} \leq \sigma_a \Rightarrow d_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{11 \cdot 16}{7\pi} \cdot \frac{200\text{mm} \cdot 2 \cdot 10^4\text{N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4400}{7\pi}} \text{mm} = 58,48\text{mm}$$

Se mărește puțin acest diametru, de exemplu la valoarea de 60mm și se face verificarea condiției exacte de rezistență:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{6}{7\pi} \cdot \frac{2 \cdot 10^4\text{N}}{3600 \text{mm}^2} + \frac{11 \cdot 16}{7 \cdot \pi} \cdot \frac{200\text{mm} \cdot 2 \cdot 10^4\text{N}}{216000 \text{mm}^3} = 149,722\text{MPa}$$

Tensiunea maximă din bară nu depășește rezistența admisibilă a materialului ei, iar diametrul secțiunilor transversale poate avea valoarea $d = 60\text{mm}$.

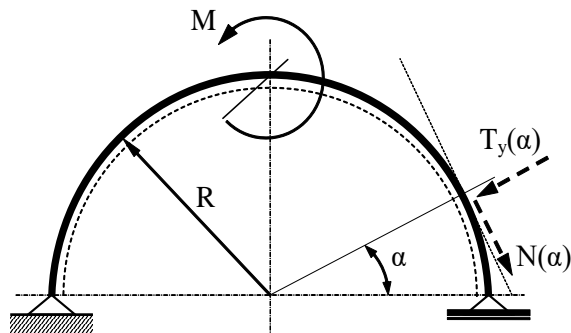
2.9

Bare în formă de arc de cerc

Bare în formă de arc de cerc

Generalități

Pentru analiza barelor cu axă curbă sunt valabile regulile discutate la barele cotite, cu precizarea că, la barele curbe, direcția *tangentei* la axa lor se modifică în mod continuu, de la fiecare secțiune transversală la cea vecină; de la o secțiune la alta se schimbă și valoarea *proiecțiilor* încărcărilor exterioare din expresiile eforturilor secționale; schimbarea se exprimă prin apariția, în acele expresii, a *funcțiilor trigonometrice* (sinus și cosinus) de α - unghiul care definește poziția pe axa barei a secțiunii transversale în care se face calculul.



Dacă axa unei bare este *circulară*, poziția pe axă a punctelor de calcul se exprimă eficient folosind **coordonatele polare**, nu pe acelea *carteziene*; cercurile având raza R constantă, rezultă că la aceste bare variabila α este suficientă pentru marcarea secțiunilor și pentru definirea eforturilor secționale. Mai precis, așa cum se arată în figură, pentru eforturile de tip **forță**, încărcările exterioare se proiectează pe *tangenta* la axa barei din acea secțiune - pentru eforturile **axiale** $N(\alpha)$, respectiv pe direcția *normalei* la axă (adică direcția *razei* cercului) - pentru eforturile **tăietoare** $T(\alpha)$.

Bare în formă de arc de cerc

Influența razelor de curbură

Pentru barele a căror rază de curbură R este *relativ mică* (cum sunt cârligele de macarale), în raport cu înălțimea h a secțiunilor transversale ($R < 5h$), relația cu care se calculează tensiunile *normale* – în fibrele unei secțiuni, diferă de relația de la barele *cotite*, iar valoarea tensiunii nu mai e dată de o funcție *liniară* (ci de una *hiperbolică*) de coordonata y a fibrei de calcul. Astfel de bare sunt considerate *de curbură mare* și nu fac obiectul prezentării de față, care se rezumă la barele *de curbură mică* sau cu **rază de curbură mare** ($R \geq 5h$); la aceste bare calculul tensiunilor se face ca la barele cotite, iar condiția de rezistență se scrie, în secțiunea în care momentul de încovoiere are valoarea absolută maximă, astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}}(\alpha) = \frac{N(\alpha)}{A(\alpha)} + \frac{M_{iz}(\alpha)}{W_z(\alpha)} \leq \sigma_a$$

Tot pentru barele curbe există și aspecte particulare ale operațiilor de derivare și integrare, aplicate unor expresii ale eforturilor din secțiunile transversale; astfel, cum orice *element de lungime* are formă curbă, variabila de integrare nu apare în expresii ca dx , ca la barele formate din segmente de dreaptă, ci ca *element de curbă* $ds = R d\alpha$. Ca urmare, pe orice regiune de pe o bară circulară, relația diferențială între expresiile eforturilor se va scrie:

$$T_y(\alpha) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dM_{iz}(\alpha)}{d\alpha}$$

Bare în formă de arc de cerc

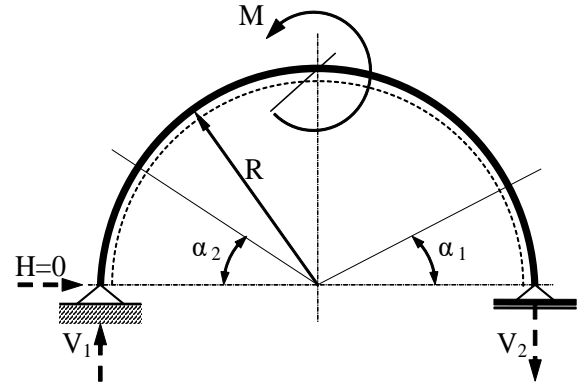
Aplicații

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara în formă de semicerc sollicitată ca în figura de pe prima pagină de mai sus.

Rezolvare

Se observă că sunt mai întâi de calculat reacțiunile din reazeme, care fac ca problema să fie *static determinată*.

Ecuțiile de echilibru arată că forțele V_1 și V_2 sunt egale (cu $M/2R$) și opuse ca sens, iar sollicitarea este *antisimetrică*; prin urmare, cele 3 diagrame de eforturi vor respecta regulile de **antisimetrie** (N și M), respectiv de **simetrie** (T).



Folosind împărțirea în regiuni din figură, expresiile eforturilor se scriu astfel:

$$N(\alpha_1) = V_2 \cdot \cos \alpha = \frac{M}{2R} \cdot \cos \alpha, \text{ deci } N(0) = \frac{M}{2R}; N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$T_y(\alpha_1) = V_2 \cdot \sin \alpha = \frac{M}{2R} \cdot \sin \alpha, \text{ deci } T(0) = 0; T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{M}{2R}$$

Bare în formă de arc de cerc

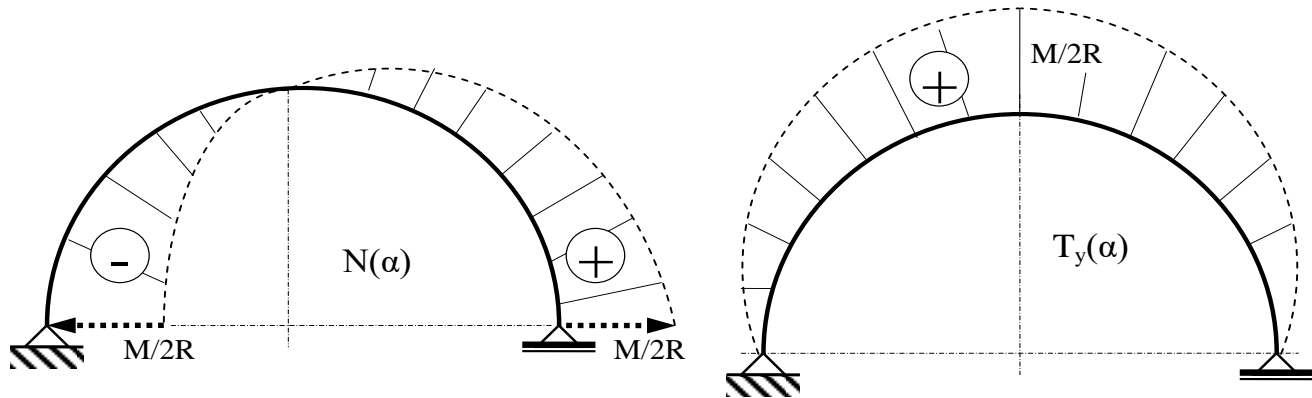
Aplicații

$$N(\alpha_2) = -V_1 \cdot \cos \alpha = -\frac{M}{2R} \cdot \cos \alpha, \text{ deci } N(0) = -\frac{M}{2R}; N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$T_y(\alpha_2) = V_1 \cdot \sin \alpha = \frac{M}{2R} \cdot \sin \alpha, \text{ deci } T(0) = 0; T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{M}{2R}$$

$$M_{iz}(\alpha_1) = -V_2 \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = -\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha), \text{ deci } M(0) = 0; M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{M}{2}$$

$$M_{iz}(\alpha_2) = V_1 \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = \frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha), \text{ deci } M(0) = 0; M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{M}{2}$$



Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Trebuie remarcat la trasarea diagramelor că legile de variație date de funcțiile **sin**α sau **cos**α dau valori ale eforturilor care cresc sau scad *continuu*, de la o secțiune la alta, încât curbele au aspect de *spirală*.

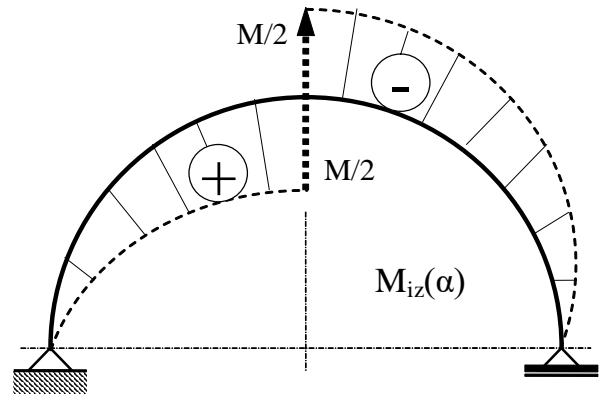
Secțiunea periculoasă se află la *mijlocul* barei, unde efortul *axial* este nul și condiția de rezistență se scrie din încovoiere; dacă secțiunea este pătrată, cu latura **t**, rezultă:

$$\sigma_{\text{ef max}}(\alpha) = \sigma(\alpha = \frac{\pi}{2}) = \frac{M_{\text{max}}(\alpha)}{W_z} = \frac{M}{2} \cdot \frac{6}{t^3} \leq \sigma_a$$

Admițând ca material un oțel, cu rezistența admisibilă de 150MPa și luând momentul exterior la nivelul de 15kNm, dimensiunea minimă a secțiunii va fi:

$$t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 15 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{150 \text{ N/mm}^2}} = 10 \cdot \sqrt[3]{300} \text{ mm} = 66,94 \text{ mm}$$

Rezultă că pătratul cu latura de **67mm** este suficient, ca secțiune a barei, pentru preluarea momentului precizat. Desigur că aceste calcule sunt corecte numai dacă raza de curbură a barei este de cel puțin 5 ori mai mare decât înălțimea secțiunii transversale, deci raza R în acest caz trebuie să fie măcar de 335mm.



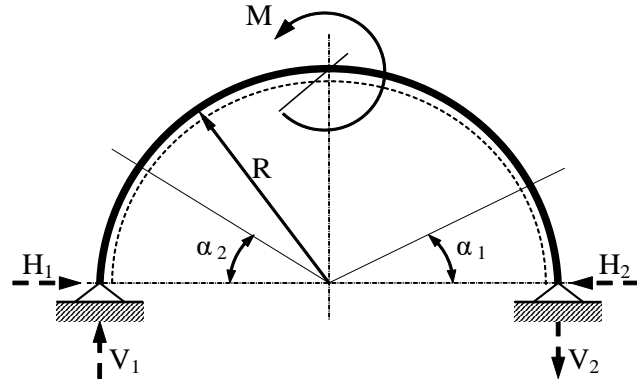
Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

2. Să se analizeze în ce fel se modifică solicitarea barei din aplicația anterioară dacă ambele reazeme sunt articulații.

Rezolvare

Schimbarea principală este că problema devine *static nedeterminată*, fiind necesar calculul suplimentar al valorii reacțiunilor *orizontale*; echilibrul dă $H_1 = H_2 = H$, dar aceste forțe nu apar în ecuațiile de momente scrise față de cele două reazeme, deci modificarea rezemării nu influențează reacțiunile verticale: $V_1 = V_2 = \frac{M}{2R} = V$



Pentru a rezolva nedeterminarea folosind *teorema lui Castigliano*, se începe observând că ambele regiuni ale barei au lungimea de un sfert de cerc, iar expresiile eforturilor secționale se scriu astfel:

$$M_{iz}(\alpha_1) = -V \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) - H \cdot R \cdot \sin \alpha; \quad M_{iz}(\alpha_2) = V \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) - H \cdot R \cdot \sin \alpha$$

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Ecuția suplimentară rezultă din aplicarea teoremei, sub forma următoare:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial H} = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) - H \cdot R \cdot \sin \alpha \right] \cdot (-R \cdot \sin \alpha) \cdot R d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) - H \cdot R \cdot \sin \alpha \right] \cdot (-R \cdot \sin \alpha) \cdot R d\alpha$$

Se observă că termenii reacțiunilor verticale se reduc (solicitarea e antisimetrică), încât ceea ce rămâne din această ecuație se scrie:

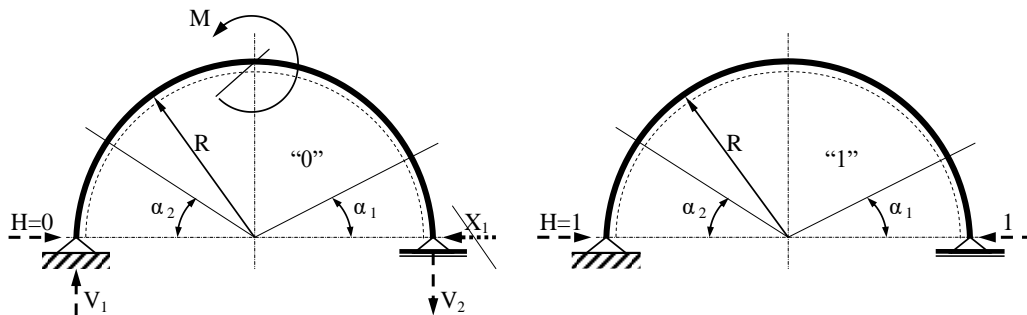
$$2H \cdot R^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\alpha) d\alpha = 0$$

În această ecuație doar necunoscuta H poate fi nulă, deci soluția este $H = 0$ adică, ținând seama de expresiile eforturilor secționale de pe regiunile barei, solicitarea nu este modificată nici într-un fel de transformarea reazemului simplu în articulație!

Același rezultat se va obține, cum este firesc, aplicând *metoda eforturilor* pentru rezolvarea nedeterminării; figura de mai jos prezintă cele două stări de încărcare fictive, cu observația că, dacă reazemul din dreapta este cel transformat în reazem simplu, atunci starea „0” este chiar cazul static determinat din aplicația precedentă.

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații



Pe baza cunoștințelor anterioare se înțelege că în starea „1” diagrama de momente e *simetrică*, starea „0” are diagrama *antisimetrică*, iar înmulțirea diagramelor, la calculul coeficientului δ_{10} , conduce la un rezultat nul! Pentru a obține aceasta prin calcule, se scriu eforturile de încovoiere din cele două stări fictive (cele două regiuni ale barei au din nou lungimea de un sfert de cerc), astfel:

$$m^0(\alpha_1) = -\frac{M}{2R} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha); \quad m^0(\alpha_2) = \frac{M}{2R} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha); \quad m^1(\alpha_1) = m^1(\alpha_2) = -R \cdot \sin \alpha$$

Coeficientul menționat va fi:
$$EI \cdot \delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) (-R \cdot \sin \alpha) \cdot R \, d\alpha \right] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha) (-R \cdot \sin \alpha) \cdot R \, d\alpha \right]$$

Se observă că sub integrale apar exact aceleași expresii, cu semne opuse, deci valoarea coeficientului va fi zero! Cunoscând că $X_1 = \delta_{10}/\delta_{11}$ și că δ_{11} este nenul, rezultă că reacțiunile horizontale sunt și ele nule!

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Dacă ar trebui calculate **deplasările** secțiunii în care acționează momentul exterior M se remarcă întâi că, așa cum s-a arătat, *deplasarea pe verticală* din acea secțiune e nulă: starea fictivă (pentru calculul cu teorema Mohr-Maxwell) cu forță unitară verticală pe axa de simetrie a construcției duce la o diagramă de momente *simetrică*, iar înmulțirea ei cu diagrama reală, *antisimetrică*, duce la rezultatul că deplasarea este zero!

Pe de altă parte, deplasarea unghiulară a acelei secțiuni (*rotirea*) poate fi calculată simplu cu teorema lui Castigliano în raport cu M , astfel:

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{M}{2EI}\right)(1 - \cos \alpha) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \alpha) \cdot R \, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{2EI} (1 - \cos \alpha) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \cdot R \, d\alpha$$

Cele două integrale sunt de fapt identice, iar calculul mai departe duce la:

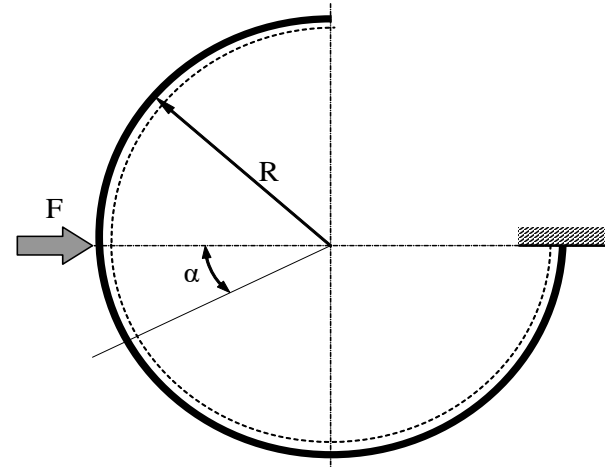
$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = 2 \cdot \frac{MR}{4EI} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \alpha)^2 \, d\alpha = \frac{MR}{2EI} \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) = \frac{3\pi - 8}{8} \cdot \frac{MR}{EI} = 0,178 \cdot \frac{MR}{EI}$$

Rezultatul pozitiv arată că rotirea secțiunii din punctul cel mai de sus al barei se produce chiar în sensul momentului exterior M ; este interesant de precizat că aceste deplasări se produc atât în cazul static determinat, cât și în cel static nedeterminat de solicitare.

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

3. Să se dimensioneze bara în formă de trei sferturi de cerc din figură; secțiunile ei transversale sunt pătrate cu latura t , la fel pe toată lungimea; se cunosc $F=2 \times 10^4 \text{N}$, $R=0,8\text{m}$, $E=2 \times 10^5 \text{MPa}$ și $\sigma_a=160 \text{MPa}$.



Rezolvare

Problema este *static determinată*, iar bara are o singură regiune semnificativă, pentru că partea ei aflată deasupra forței F este practic lipsită de solicitări.

Eforturile secționale de pe jumătatea de cerc din partea inferioară a barei variază după următoarele expresii:

$$N(\alpha) = -F \cdot \sin \alpha, \quad N(0) = N(\pi) = 0, \quad N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -F$$

$$T(\alpha) = F \cdot \cos \alpha, \quad T(0) = F, \quad T(\pi) = -F, \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$M(\alpha) = -FR \cdot \sin \alpha, \quad M(0) = M(\pi) = 0, \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -FR$$

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Evoluția eforturilor pe lungimea barei este ușor de urmărit, iar secțiunea periculoasă este în punctul cel mai de jos al barei, în care ambele eforturi care apar în calculul de rezistență ating valorile maxime; condiția pentru acest calcul se scrie:

$$\sigma_{\text{rez max}}(\alpha) = \sigma_{\text{rez}}\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F}{t^2} + F \cdot R \cdot \frac{6}{t^3} \leq \sigma_a$$

Se reamintește că în astfel de cazuri se face mai întâi dimensionarea numai din încovoiere, sub forma:

$$t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{6F \cdot R}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 800 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{600} \text{ mm} = 84,343 \text{ mm}$$

Pentru dimensionarea finală se mărește puțin această valoare, de exemplu luând **d=85mm** și se face verificarea cu relația exactă de mai sus:

$$\sigma_{\text{ef max}}(\alpha) = \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N}}{85^2 \text{ mm}^2} \left(1 + \frac{6 \cdot 800 \text{ mm}}{85 \text{ mm}}\right) = 159 \text{ MPa} < \sigma_a$$

Dimensiunea adoptată este corectă.

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

4. Să se arate cum se schimbă solicitarea barei de mai sus atunci când în capătul ei liber se plasează un reazem simplu care împiedică translația barei pe orizontală.

Rezolvare

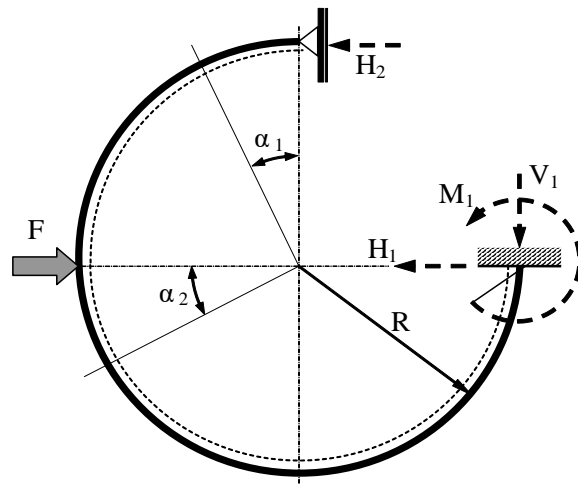
Problema devine *static nedeterminată*, iar cea mai convenabilă cale de rezolvare este bazată pe teorema lui Castigliano, pentru care se pornește de la expresiile eforturilor secționale:

$$\alpha_1 \in (0, \frac{\pi}{2}): M_{iz}(\alpha_1) = H_2 \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha); \quad \alpha_2 \in (0, \pi): M_{iz}(\alpha_1) = H_2 \cdot R \cdot (1 + \sin \alpha) - F \cdot R \cdot \sin \alpha$$

Ecuția suplimentară se obține aplicând teorema în raport cu forța H_2 :

$$H_2 \cdot \left[\int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) d\alpha + \int_0^{\pi} (1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha) d\alpha \right] = F \cdot \int_0^{\pi} (\sin \alpha + \sin^2 \alpha) d\alpha$$

Efectuând calculele se ajunge la valoarea reacțiunii necunoscute: $H_2 = \frac{\pi + 8}{8 \cdot (\pi + 1)} \cdot F = 0,336 \cdot F$



Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Folosind această valoare și schema de solicitare din figura de mai sus, se stabilesc expresiile eforturilor secționale de pe cele două regiuni ale barei:

$$N(\alpha_1) = -H_2 \cdot \cos \alpha; \quad N(0) = -0,336 \cdot F, \quad N(\pi/2) = 0$$

$$T(\alpha_1) = -H_2 \cdot \sin \alpha; \quad T(0) = 0, \quad T(\pi/2) = -0,336 \cdot F$$

$$M_{iz}(\alpha_1) = +H_2 \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha); \quad M(0) = 0, \quad M(\pi/2) = 0,336 \cdot FR$$

$$N(\alpha_2) = (H_2 - F) \cdot \sin \alpha; \quad N(0) = 0, \quad N(\pi/2) = -0,664 \cdot F, \quad N(\pi) = 0$$

$$T(\alpha_2) = (F - H_2) \cdot \cos \alpha; \quad T(0) = 0,664 \cdot F, \quad T(\pi/2) = 0, \quad T(\pi) = -0,664 \cdot F$$

$$M_{iz}(\alpha_1) = +H_2 \cdot R \cdot (1 + \sin \alpha) - FR \cdot \sin \alpha = FR(0,336 - 0,664 \cdot \sin \alpha);$$

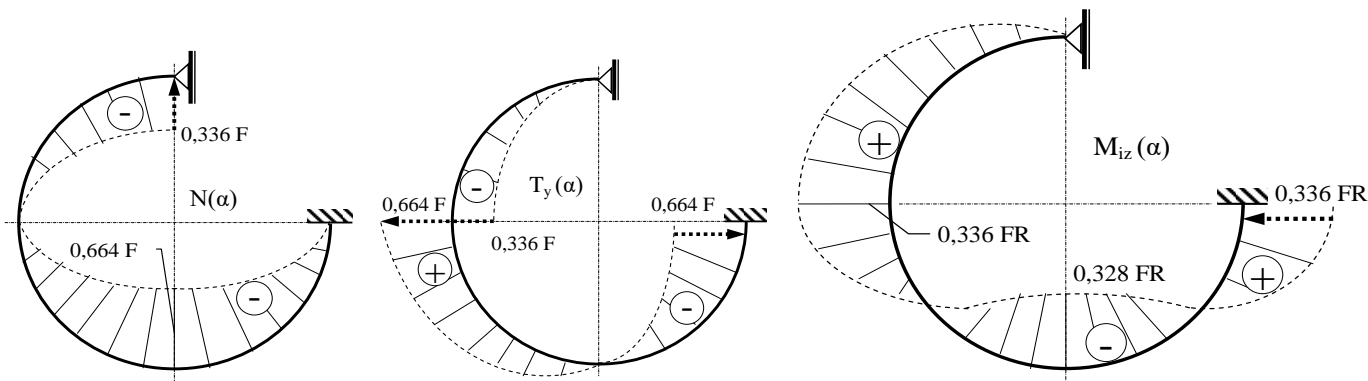
$$M(0) = 0,336 \cdot FR, \quad M(\pi/2) = -0,328 \cdot FR, \quad M(\pi) = 0,336 \cdot FR$$

Diagramele de eforturi reprezentate pe pagina următoare arată că solicitarea periculoasă are loc în punctul cel mai de jos al barei ($\alpha_2 = \pi/2$), unde se ating valorile maxime atât pentru momentul secțional de încovoiere, cât și pentru efortul axial; dimensionarea inițială se face din încovoiere, astfel:

$$\frac{6}{t^3} \cdot 0,328 \cdot FR \leq \sigma_a$$

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații



Folosind datele numerice din aplicația precedentă se obține:

$$t_{\min} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,328 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{196,8 \text{ mm}} = 58,15 \text{ mm}$$

Alegem să mărim această dimensiune până la $t_{ad} = 60 \text{ mm}$, cu care se face verificarea în condiția exactă de rezistență, astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}} = \frac{F}{t^2} \cdot \left(0,664 + \frac{6 \cdot 0,328 \cdot R}{t} \right) = \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N}}{3600 \text{ mm}^2} \cdot \left(0,664 + \frac{6 \cdot 0,328 \cdot 800 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \right) = 149,5 \text{ MPa} < \sigma_a$$

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Condiția de rezistență este îndeplinită, deci dimensiunea adoptată mai sus este corectă. Este interesant de remarcat că introducerea reazemului simplu suplimentar a uniformizat încărcarea barei, dar a și micșorat semnificativ (cu două treimi din valoarea inițială) momentul maxim de încovoiere din bară; aceasta permite scăderea ariei de material din secțiuni, la un nivel calculat astfel:

$$\Delta A = \frac{D^2 - d^2}{D^2} = \frac{85^2 - 60^2}{85^2} = 0,502$$

Prin urmare, consumul de material se reduce la jumătate, adică rezemarea static *nedeterminată* este **mai eficientă economic** decât cea inițială; nu sunt însă de neglijat dificultățile de calcul în varianta modificată.

Ca un exercițiu suplimentar, ne propunem să calculăm și *deplasarea pe orizontală* a punctului unde acționează forța F , în cazul *static determinat*; metoda de rezolvare cea mai rapidă folosește în acest caz teorema lui Castigliano.

Bare în formă de arc de cerc

Aplicații

Forța F este *singura* încărcare exterioară, iar derivarea parțială față de ea e ușor de făcut; se reamintește că, pentru astfel de solicitări compuse, energia potențială de deformare elastică provine mai ales din efectele încovoierii, iar expresia teoremei se scrie:

$$\frac{\partial L_e}{\partial F} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\pi} (-FR \cdot \sin \alpha) \cdot (-R \cdot \sin \alpha) \cdot R \, d\alpha = \frac{F \cdot R^3}{EI} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F \cdot R^3}{EI}$$

Folosind datele numerice de mai sus, deplasarea va avea valoarea:

$$\delta(P) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 8^3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 85^4 \text{ mm}^4} = 18,488 \text{ mm}$$

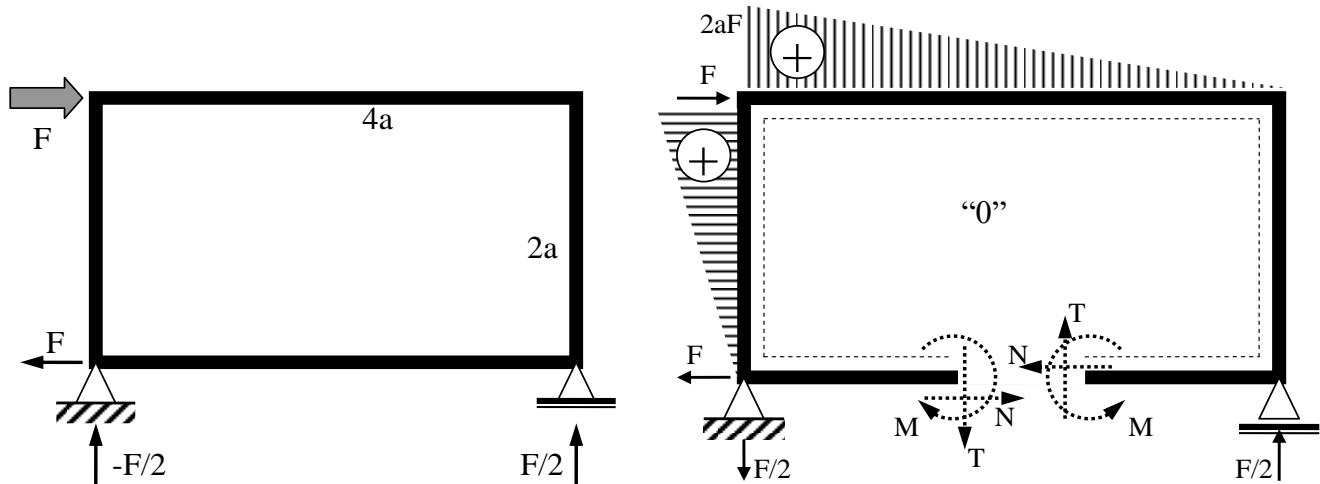
Acest rezultat este pertinent, întrucât deplasarea reprezintă aproximativ 1% din diametrul barei; în plus, dimensiunile stabilite pentru secțiunea barei, în ambele variante de mai sus, se înscriu în condițiile de definiție pentru barele cu rază mare de curbură, deci calculele făcute au fost corecte.

2.10

**Bare cotite care conțin
contururi închise. Aplicații**

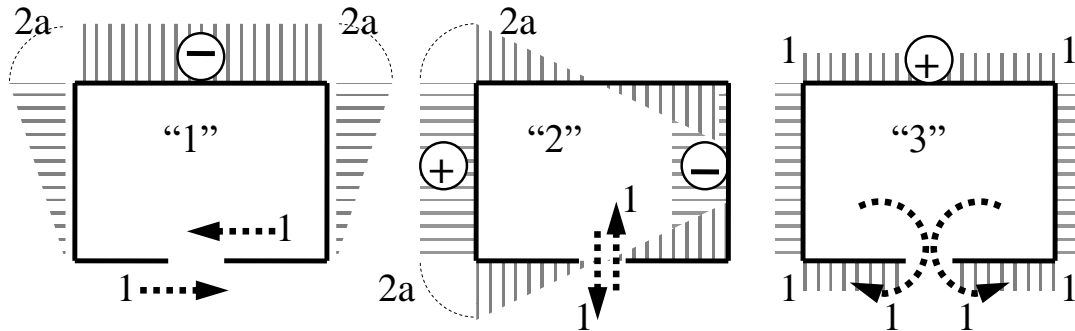
Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

1. Să se traseze diagramele de eforturi pentru construcția de mai jos.



Este abordată o bară cotită închisă, *simetrică* în formă, dar solicitată **nesimetric**, încât nu sunt posibile simplificări majore la rezolvarea nedeterminării statice interioare; secționarea imagină se poate face într-un punct oarecare al conturului, dar e avantajos să se aleagă mijlocul laturii orizontale de jos. Pe schița din partea dreaptă se arată cum se obțin sistemul de bază și diagrama de momente din *starea fictivă* „0” a metodei eforturilor; diagramele celorlalte trei stări imaginare de încărcare sunt date în pagina următoare.

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații



Se observă că secționarea pe axa de simetrie face ca solicitările și diagramele „1” și „3” să fie simetrice, iar cele de la starea „2” – antisimetrice, ceea ce ușurează trasarea graficelor.

În plus, cei nouă coeficienți δ_{ij} se calculează simplu prin înmulțirea grafică a diagramelelor din stările fictive de încărcare, astfel:

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot \frac{2}{3}(-2a) + 4a \cdot (-2a)(-2a) = \frac{64}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot 2a + \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot (-2a) + \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot (-2a) + \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot (-2a) = 0$$

$$EI \cdot \delta_{13} = 2 \cdot \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot 1 + 4a \cdot (-2a) \cdot 1 = -12a^2$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

$$EI \cdot \delta_{22} = 2 \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} 2a + 2 \cdot \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot \frac{2}{3} (-2a) + 2a \cdot 2a \cdot 2a + 2a \cdot (-2a) \cdot (-2a) = \frac{80}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{23} = 2 \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot 1 + 2a \cdot 2a \cdot 1 + 2a \cdot (-2a) \cdot 1 = 0$$

$$EI \cdot \delta_{33} = 1 \cdot (2a + 2a + 4a + 2a + 2a) \cdot 1 = 12a$$

$$EI \cdot \delta_{10} = \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2aF + 4a \cdot (-2a) \cdot aF = -\frac{32}{3} a^3 F$$

$$EI \cdot \delta_{20} = 2a \cdot 2a \cdot aF + \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{5}{3} aF + \frac{2a \cdot (-2a)}{2} \cdot \frac{1}{3} aF = \frac{20}{3} a^3 F$$

$$EI \cdot \delta_{30} = 1 \cdot \left(\frac{2a \cdot 2aF}{2} + \frac{4a \cdot 2aF}{2} \right) = 6a^2 F$$

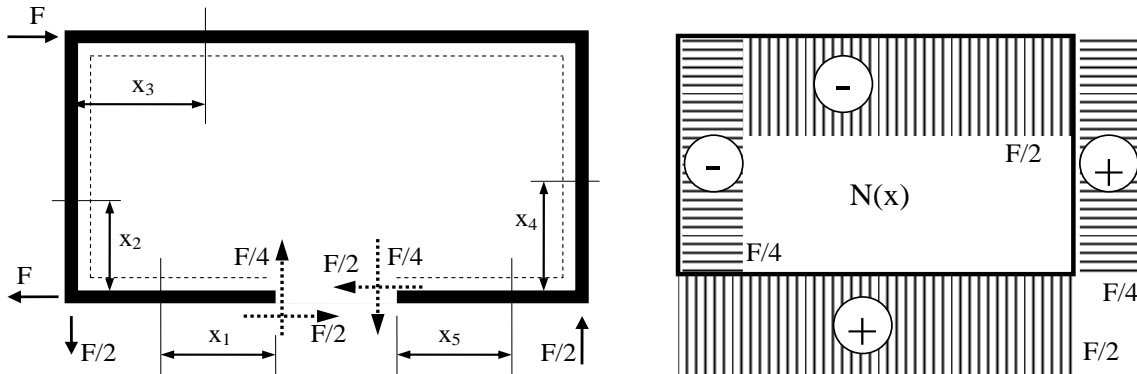
Observație importantă

Doi dintre coeficienții calculați aici au rezultat de valori nule; urmărind cauza acestei situații se înțelege că termenii din sumele respective se reduc, în perechi, pentru că sunt obținuți înmulțind o diagramă *simetrică* („1” sau „3”) cu una *antisimetrică* („2”); astfel de combinații sunt întâlnite și în alte tipuri de aplicații, în care va fi util să se observe direct că rezultatul acestor înmulțiri este zero!

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Cu valorile de mai sus ale coeficienților se scriu cele trei ecuații ale metodei eforturilor (simplificând peste tot prin EI), după cum urmează:

$$\begin{cases} \frac{64}{3} a^3 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + (-12)a^2 \cdot X_3 = \frac{32}{3} a^3 F \\ 0 \cdot X_1 + \frac{80}{3} a^3 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 = -\frac{20}{3} a^3 F \\ (-12)a^2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 12a \cdot X_3 = -6a^2 F \end{cases}$$



Rezolvarea acestui sistem conduce la valorile: $X_1 = \frac{F}{2}$; $X_2 = -\frac{F}{4}$; $X_3 = 0$

Acestea se introduc pe fețele tăieturii imaginare în bara cotită închisă din problemă.

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Trebuie remarcat că toate regiunile au lungimea de $2a$, cu excepția regiunii notate cu (x_3) , care este de lungime $4a$, iar expresiile sunt:

$$N(x_1)=N(x_5)=+F/2 ; N(x_2)=-F/4 ; N(x_3)=-F/2 ; N(x_4)=+F/4$$

$$T(x_1)=T(x_5)=-F/4 ; T(x_2)=+F/2 ; T(x_3)=-F/4 ; T(x_4)=+F/2$$

$$M(x_1)=-F/4x \quad \text{de unde}$$

$$M(0)=0 , M(2a)=-aF/2 ;$$

$$M(x_2)=(F/2)x - (F/4)2a=(F/2)(x-a)$$

$$M(0)=-aF/2 , M(2a)=+aF/2$$

$$M(x_3)=-F/4x + aF/2$$

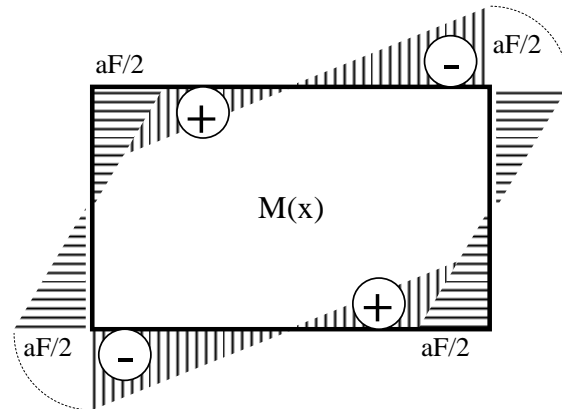
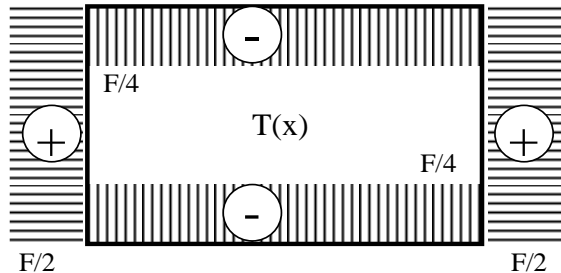
$$M(0)=+aF/2 , M(4a)=-aF/2$$

$$M(x_4)=(F/2)(a-x)$$

$$M(0)=+aF/2 , M(2a)=-aF/2$$

$$M(x_5)=(F/4)x$$

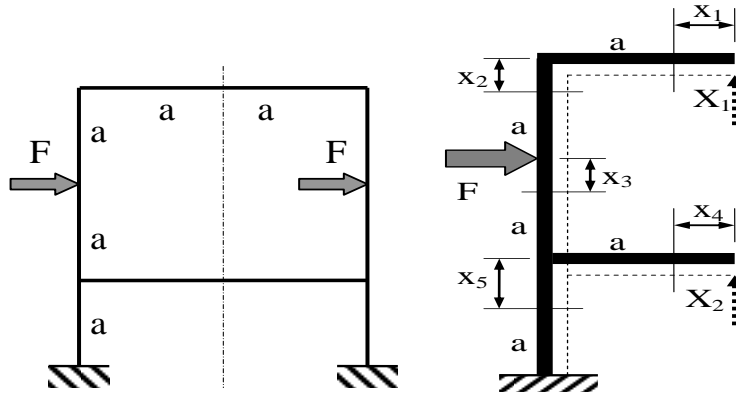
$$M(0)=0 , M(2a)=+aF/2$$



Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Concluzii: Forma diagramelor acestei bare arată, pe de o parte, că se respectă relația diferențială între efortul tăietor și cel de încovoiere; pe de altă parte este interesant de remarcat că diagramele N și M sunt *antisimetrice*, iar T *simetrică*, adică încărcarea barei cotite închise poate fi considerată *antisimetrică*.

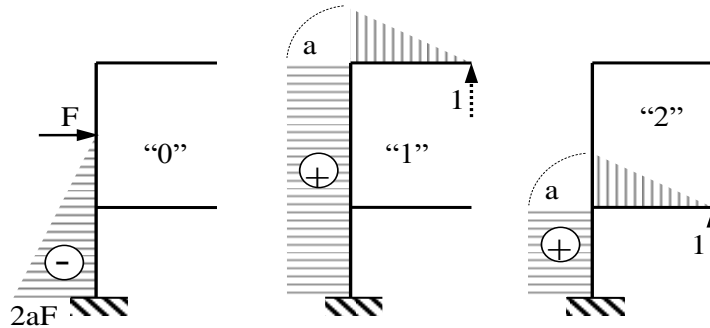
2. Să se traseze diagramele de eforturi pentru construcția alăturată.



Construcția simetrică, **triplu static nedeterminată exterior** (2 reazeme încastrate), are și o **triplă nedeterminare interioară** (conturul închis); gradul total de nedeterminare este **6** și se reduce prin secționarea barei pe axa ei de simetrie, care întâlnește conturul barei în două puncte, unde se plasează câte trei eforturi necunoscute; încărcarea *antisimetrică* face ca eforturile **axial** și **încovoiator** să fie **nule**, în ambele tăieturi; gradul de nedeterminare rămâne 2, necunoscutele fiind *forțele tăietoare* din secțiunile de pe axa de simetrie

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Metoda eforturilor este calea cea mai rapidă pentru rezolvarea nedeterminării, iar diagramele de eforturi pentru cele trei stări fictive de încărcare sunt în totalitate liniare și ușor de trasat, încât coeficienții δ_{ij} se pot calcula prin metoda grafică:



$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 3a \cdot a \cdot a = \frac{10}{3} a^3; \quad EI \cdot \delta_{22} = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a = \frac{4}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = a \cdot a \cdot a = a^3; \quad EI \cdot \delta_{20} = a \cdot a \cdot \left(-\frac{3}{2} aF\right) = -\frac{3}{2} a^3 F; \quad EI \cdot \delta_{10} = \frac{2a \cdot (-2aF)}{2} \cdot a = -2a^3 F$$

Ecuțiile metodei se scriu:

$$\begin{cases} \frac{10}{3} a^3 \cdot X_1 + a^3 \cdot X_2 = 2a^3 F \\ a^3 \cdot X_1 + \frac{4}{3} a^3 \cdot X_2 = \frac{3}{2} a^3 F \end{cases}$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Rezolvând sistemul se obțin: $X_1 = (21/62)F$ și $X_2 = (27/31)F$, eforturile tăietoare din secțiunile de pe axa de simetrie a construcției; se plasează aceste forțe pe schema din figura inițială, observând că toate regiunile au lungimea a , iar expresiile eforturilor se vor scrie astfel:

$$N(x_1) = N(x_4) = 0 ; \quad N(x_2) = N(x_3) = N(x_5) = (75/62)F$$

$$T(x_1) = -(21/62)F ; \quad T(x_4) = -(27/31)F ; \quad T(x_2) = 0 ; \quad T(x_3) = T(x_5) = F$$

$$M(x_1) = (21/62)Fx ;$$

$$M(0) = 0 ; \quad M(a) = (21/62)aF$$

$$M(x_4) = (27/31)Fx ;$$

$$M(0) = 0 ; \quad M(a) = (27/31)aF$$

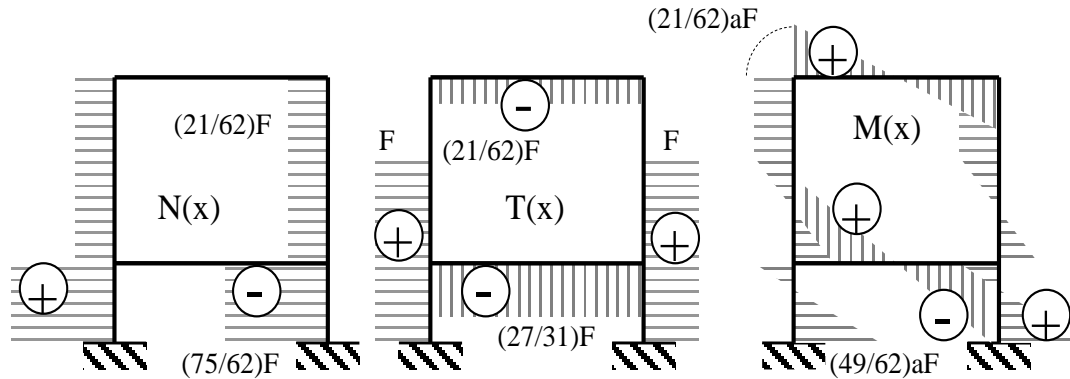
$$M(x_2) = ct = (21/62)aF ; \quad M(x_3) = (21/62)aF - Fx ; \quad M(0) = (21/62)aF ; \quad M(a) = -(41/62)aF$$

$$M(x_5) = -(41/62)aF + (27/31)aF - Fx = (13/62)aF - Fx ;$$

$$M(0) = (13/62)aF ; \quad M(a) = -(49/62)aF$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Cu aceste valori se trasează diagramele de eforturi pe jumătatea din stânga a construcției, apoi se prelungesc prin *antisimetrie* (N și M) și prin *simetrie* (T) pe toată lungimea barei

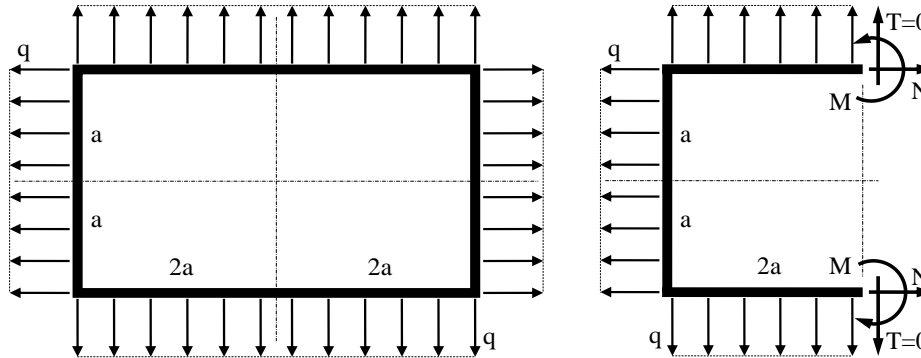


Solicitarea periculoasă are loc în secțiunile din reazemele barei, unde eforturile de încovoiere și axiale ajung la valorile maxime; dacă se admite că secțiunile transversale sunt *pătrate*, cu latura t , **condiția de rezistență** se va scrie astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{75}{62} F + \frac{6}{t^3} \cdot \frac{49}{62} aF \leq \sigma_a$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

3. Să se traseze diagramele de eforturi pentru construcția de mai jos.



Cadrul are două axe de simetrie, inclusiv pentru încărcările lui, forțe distribuite cu intensitatea q ; simetriile se folosesc la secționarea barei, începând de exemplu cu axa verticală, ca în schema din partea dreaptă a figurii; în fiecare tăietură imaginară apare câte un grup de trei eforturi necunoscute N , T și M , simetrice în perechi, datorită existenței celei de-a doua simetrii.

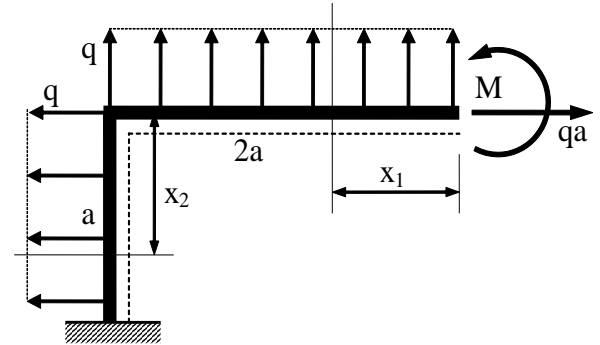
Statica nedeterminare interioară scade la gradul $n=1$ prin două aspecte particulare ale problemei:

- diagrama eforturilor tăietoare trebuie să fie *antisimetrică*, deci valoarea necunoscutelor T trebuie să fie zero;
- din echilibrul pe orizontală al forțelor de pe jumătatea de cadru se obține că

$$\sum X_i = 0: 2N = q \cdot 2a \Leftrightarrow N = qa$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Rămâne astfel de studiat un sfert din cadrul inițial, care se obține tăind imaginar bara pe axa orizontală de simetrie; pentru a evita introducerea unui grup nou de necunoscute interioare, în noua secțiune se imaginează un reazem încastrat; acest artificiu nu contrazice modul în care bara se deformează: din simetria constructivă și de încărcare rezultă că în toate secțiunile aflate pe cele două axe de simetrie deplasările unghiulare (rotirile) sunt egale cu zero!



S-a ajuns la o construcție simplu static nedeterminată, bară formată din două segmente îmbinate în unghi drept și având ca necunoscută valoarea momentului M ; cea mai rapidă metodă pentru stabilirea acestei valori se bazează principal pe *teorema lui Castigliano*; aplicarea acestei metode începe cu stabilirea eforturilor de încovoiere din bara considerată:

$$\forall x_1 \in (0; 2a) : M_{iz}(x_1) = M + \frac{qx^2}{2}; \quad \forall x_2 \in (0; a) : M_{iz}(x_2) = M - qa \cdot x + 2qa \cdot a + \frac{qx^2}{2}$$

S-a arătat că derivatele parțiale ale lucrului mecanic elastic trebuie să fie nule inclusiv în raport cu necunoscutele static nedeterminate interioare, deci se scrie că:

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = 0 = \int_0^{2a} \left(M + \frac{qx^2}{2} \right) \cdot 1 dx + \int_0^a \left(M + 2qa^2 - qax + \frac{qx^2}{2} \right) \cdot 1 dx$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Ecuția astfel obținută se dezvoltă după cum urmează:

$$0 = M \cdot 2a + \frac{q}{2} \cdot \frac{(2a)^3}{3} + (M + 2qa^2) \cdot a - qa \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{q}{2} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$3M \cdot a = qa^3 \cdot \left(-\frac{4}{3} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow M = \frac{qa^2}{3} \cdot \frac{-8 - 12 + 3 - 1}{6} = \frac{qa^2}{3} \cdot \frac{(-18)}{6} = -qa^2$$

Introducând această valoare pe schema de solicitare de mai sus, se ajunge la expresiile eforturilor secționale de pe sfertul de cadru considerat:

$$N(x_1) = +qa = ct; \quad T_y(x_1) = -qx \quad \text{de unde} \quad T(0) = 0, \quad T(2a) = -2qa$$

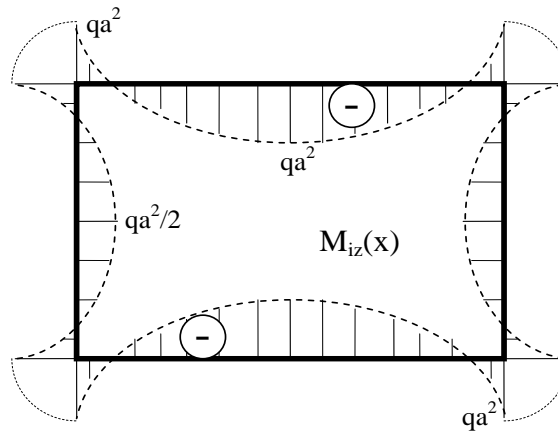
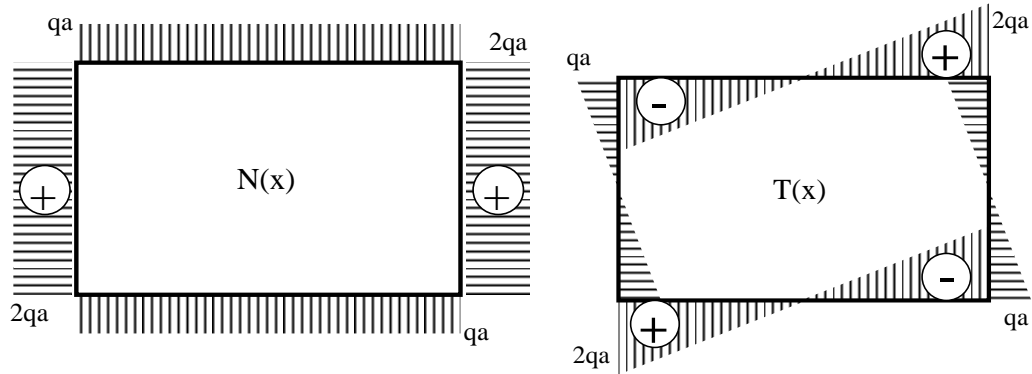
$$N(x_2) = +2qa = ct; \quad T_y(x_2) = qa - qx \quad \text{de unde} \quad T(0) = qa, \quad T(a) = 0$$

$$M_{iz}(x_1) = -qa^2 + \frac{qx^2}{2}, \quad \text{de unde} \quad M(0) = -qa^2, \quad M(a) = -\frac{qa^2}{2}, \quad M(2a) = +qa^2;$$

$$M_{iz}(x_2) = qa^2 - qa \cdot x + \frac{qx^2}{2}, \quad \text{de unde} \quad M(0) = qa^2, \quad M(a) = \frac{qa^2}{2}$$

Diagramele de eforturi, prezentate pe pagina următoare, respectă regulile privind simetria și antisimetria; în plus, valorile celor trei eforturi interioare static nedeterminate introduse la început se regăsesc în diagrame, în dreptul secțiunilor de pe axa de simetrie verticală a construcției.

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații



Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

În finalul acestei discuții sunt necesare câteva precizări privind *calculul deplasărilor* la barele cotite **simetrice**; s-a observat că, la fel ca la rezolvarea nedeterminărilor, eforturile de încovoiere au, dintre toate efectele încărcărilor exterioare ale barelor, influența principală în producerea deplasărilor secțiunilor transversale; prin urmare, la aplicarea teoremei Mohr-Maxwell, solicitarea și diagrama reală de încovoiere se înmulțesc cu cele fictive, date de încărcarea unitară potrivită cazului abordat.

Din constatările asupra înmulțirii diagramelor *simetrice* cu cele *antisimetrice* și observând că solicitarea cu *o forță unitară* pe axa de simetrie a unei construcții, pe direcția acestei axe, duce la o diagramă de momente **simetrică**, în vreme ce cazul similar cu *moment unitar* are diagrama **antisimetrică**, se poate afirma, în legătură cu construcțiile simetrice, că:

- secțiunile aflate pe una dintre axele lor de simetrie nu se vor deplasa (vor avea *deplasări liniare nule*) pe direcția acelei axe, dacă încărcările exterioare ale construcției o solicită antisimetric;
- aceleași secțiuni vor avea *rotiri nule*, în jurul axei perpendiculare pe planul construcției, dacă solicitarea exterioară este simetrică.

Pentru a înțelege mai bine aceste lucruri, se poate analiza cazul barei cotite din aplicația 2 de mai sus: diagrama ei de momente este antisimetrică, iar pentru calculul deplasărilor liniare verticale ale celor două secțiuni de pe axa verticală de simetrie diagramele stărilor fictive vor fi simetrice; înmulțirea lor cu diagrama reală duce la rezultate nule și deci deplasările respective au valoarea zero, așa cum s-a arătat și mai sus.

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Calculul deplasărilor la sistemele static nedeterminate

Pentru aceste sisteme elastice se știe că, după ce s-au aflat valorile necunoscutelor static nedeterminate X_i , sistemul inițial cu încărcările lui este echivalent cu sistemul său de bază având aplicate încărcările inițiale și necunoscutele respective X_i ; se înțelege că diagramele **reale** de eforturi vor fi aceleași, pentru cele două sisteme, iar la aplicarea teoremei Mohr-Maxwell starea *fictivă* de încărcare poate fi construită pe *sistemul de bază*, făcând ca această stare de solicitare să fie static determinată.

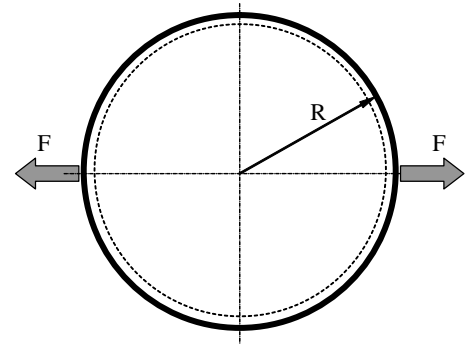
Rezultă de aici că, la calculul deplasării, pe o direcție anumită, a unei secțiuni oarecare dintr-un astfel de sistem, trebuie să se parcurgă următoarele etape:

- se construiește diagrama de eforturi pentru sistemul real (care nu este influențată de metoda de rezolvare folosită);
- se alege în mod convenabil un sistem de bază al celui dat, pe care se aplică o forță (sau un moment, dacă trebuie calculată o rotire) de mărime unitară, în secțiunea și pe direcția în care trebuie stabilită deplasarea;
- se trasează diagrama de momente pentru această solicitare fictivă;
- se calculează deplasarea cerută, folosind teorema Mohr-Maxwell și eventual regula grafică a lui Vereșceaghin, înmulțind diagrama din sistemul real cu diagrama fictivă.

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

4. Pentru inelul din figură se cer diagramele de eforturi și relația tensiunii maxime, apoi să se calculeze cu cât se modifică, sub acțiunea celor două forțe concentrate, lungimea diametrelor orizontal, respectiv vertical ale barei.

Trebuie remarcat că acest inel nu are nevoie de rezemare, fiind în echilibru stabil sub acțiunea celor două forțe concentrate care îl încarcă; se observă și că, bara având conturul închis, apare o *triplă* nedeterminare statică interioară.



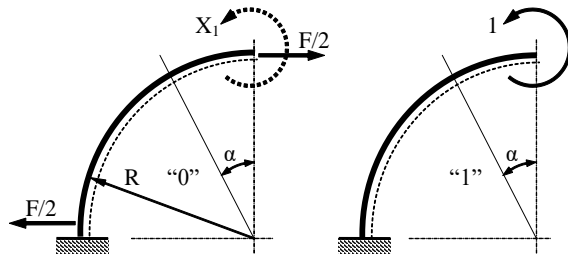
Solicitarea inelului este *simetrică*, deci secționarea cea mai avantajoasă se face pe una dintre axele de simetrie; alegem axa verticală și constatăm că efortul tăietor necunoscut din cele două secțiuni astfel obținute are valoarea zero; mai trebuie figurate efortul axial și cel de încovoiere, ambele cu valori egale între ele și la fel orientate în cele două tăieturi imaginare simetrice.

Specificul construcțiilor care au *două axe de simetrie* (inclusiv pentru solicitările lor) este că din ecuația de echilibru pe orizontală, scrisă de exemplu pentru forțele de pe această jumătate de bară, se poate calcula efortul **axial** necunoscut, egal cu *jumătate* din forța F ; problema rămâne astfel cu *o singură necunoscută static nedeterminată* – efortul de încovoiere M .

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

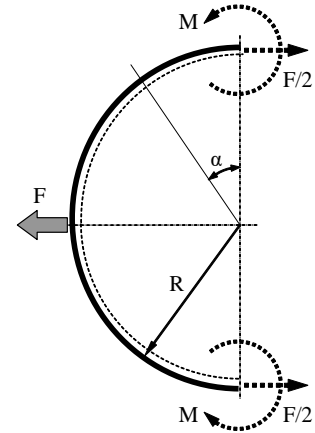
Partea rămasă din bară este simetrică și solicitată simetric, încât vor fi analizate eforturile pe o jumătate a ei; pentru a evita introducerea de necunoscute noi, se plasează o încastrare imaginară în secțiunea de pe axa orizontală de simetrie a inelului; modul în care inelul se deformează este respectat, întrucât în secțiunile de pe axele lui de simetrie nu se produc rotiri!

Cea mai simplă cale pentru rezolvarea nedeterminării pe acest *sfert de inel* folosește metoda eforturilor, pentru care cele două stări fictive de încărcare și modul cum se face secționarea lor sunt reprezentate alăturat; pentru ambele



situații există pe lungimea barei rămase o singură regiune (cu unghiul de poziție cuprins între 0 și $\pi/2$), iar eforturile de încovoiere se scriu:

$$m^0(\alpha) = -\frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha); \quad m^1(\alpha) = +1 = ct$$



Cei doi coeficienți din ecuația metodei se calculează analitic, astfel:

$$EI \cdot \delta_{11} = \int_0^{\pi/2} 1 \cdot 1 \cdot R \, d\alpha = R \cdot \frac{\pi}{2} \quad EI \cdot \delta_{10} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{FR}{2}\right)(1 - \cos \alpha) \cdot R \, d\alpha = -\frac{FR^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

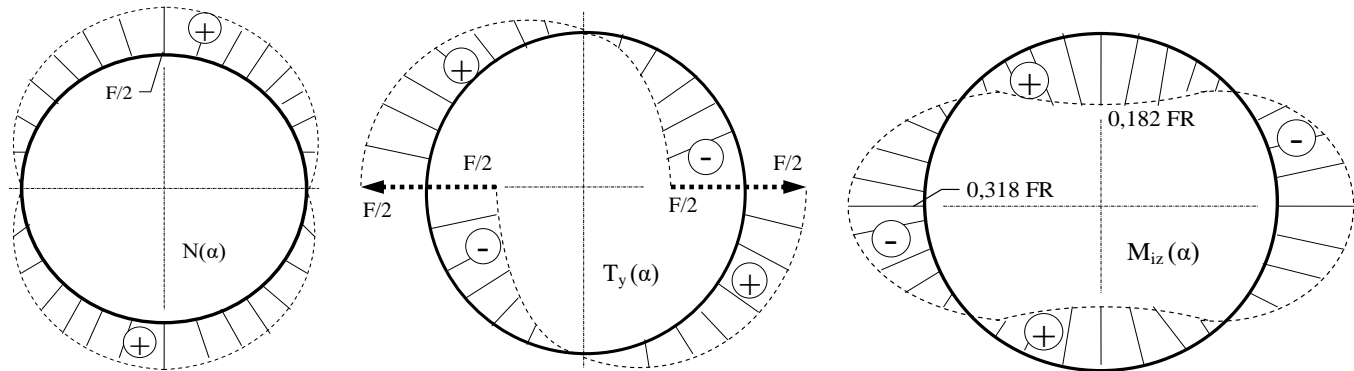
Cu aceste rezultate momentul necunoscut se scrie: $M = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\pi - 2}{2\pi} \cdot FR = 0.182 \cdot FR$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Introducând această mărime pe schița de mai sus a stării fictive „0”, expresiile eforturilor secționale pentru un sfert din inelul real sunt:

$$N(\alpha) = \frac{F}{2} \cdot \cos \alpha, \text{ deci } N(0) = \frac{F}{2}, N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad T(\alpha) = \frac{F}{2} \cdot \sin \alpha, \text{ deci } T(0) = 0, T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{F}{2}$$

$$M_{iz}(\alpha) = M - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = FR \cdot (-0,318 + 0,5 \cdot \cos \alpha), \text{ deci } M(0) = 0,182 FR, M(\pi/2) = -0,318 FR$$



Solicitarea periculoasă a inelului (dinamometric) se produce în secțiunile celor două forțe concentrate, unde se face și calculul de rezistență; relația tensiunii maxime se scrie în forma cunoscută, iar dacă secțiunea transversală a inelului este *pătrată* cu latura t rezultă:

$$\sigma_{\text{rez max}}(\alpha) = \frac{0,5 \cdot F}{t^2} + \frac{6}{t^3} \cdot 0,318 \cdot FR \leq \sigma_a$$

Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Pentru aflarea deformațiilor inelului, pe direcțiile diametrelor orizontal și vertical, sunt de subliniat două aspecte importante ale acestui tip de problemă:

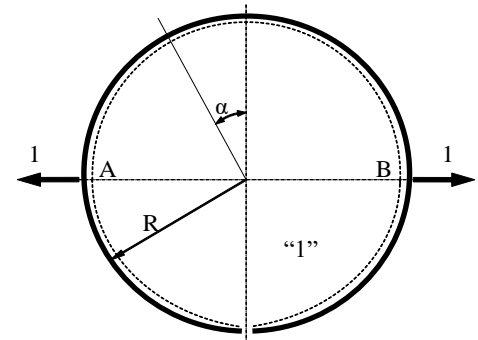
- fiind două forțe F acționând simetric, metodele de calcul aplicate pentru ambele forțe simultan (cum se va vedea mai jos) duc la găsirea deplasărilor **sumate** ale punctelor lor de aplicare (adică direct a deformațiilor *diametrale!*);
- s-a arătat anterior că, la calculul deplasărilor cu teorema Mohr-Maxwell pentru construcții static nedeterminate, se înmulțește starea **reală** de solicitare cu starea **fictivă** aplicată unui *sistem de bază*, convenabil ales, al construcției; această metodă se va folosi în cele ce urmează.

Pentru deformația diametrului *orizontal* AB, o variantă simplă de sistem de bază se obține cu inelul secționat imaginar în secțiunea inferioară de pe diametrul vertical; acest model de solicitare produce eforturi de încovoiere numai pe cele două regiuni –simetrice – din jumătatea superioară a construcției, pentru care:

$$m^1(\alpha) = 1 \cdot R \cdot \cos \alpha$$

Cu ultima formă a expresiei efortului de încovoiere $M_{iz}(\alpha)$ de pe inelul real, alungirea diametrului AB se calculează astfel (cu teorema Mohr-Maxwell):

$$\begin{aligned} EI \cdot \delta_{AB} &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} [FR \cdot (0,5 \cdot \cos \alpha - 0,318)] \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot R \, d\alpha = FR^3 \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \alpha - 0,636 \cdot \cos \alpha) \, d\alpha = \\ &= FR^3 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0,636 \cdot \sin \alpha \Big|_0^{\pi/2} \right) = FR^3 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0,636 \right) \Rightarrow \delta_{AB} = 0,149 \cdot \frac{FR^3}{EI} \end{aligned}$$

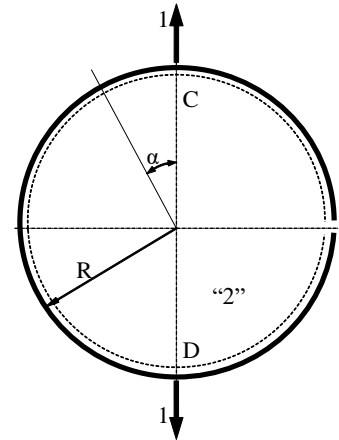


Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații

Analog se fac calculele pentru deformația diametrului *vertical* CD: un sistem de bază simplu e ales similar celui de mai sus, dar rotit cu 90° în sens trigonometric; apar din nou doar două regiuni, simetrice, pe jumătatea din stânga a inelului, pe care există eforturi de încovoiere, cu funcția:

$$m^2(\alpha) = 1 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} EI \cdot \delta_{CD} &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} [FR \cdot (0,5 \cos \alpha - 0,318)] \cdot R \sin \alpha \cdot R d\alpha = FR^3 \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 0,636 \cdot \sin \alpha) d\alpha = \\ &= FR^3 \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} \Big|_0^{\pi/2} - 0,636 \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\pi/2} \right) = FR^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0,636 \right) \Rightarrow \delta_{CD} = -0,136 \cdot \frac{FR^3}{EI} \end{aligned}$$



Valorile astfel obținute pentru deformațiile inelului studiat se folosesc la etalonarea dispozitivelor pentru măsurarea forțelor.

Ca metodă alternativă, deformația de pe diametrul orizontal AB poate fi calculată direct, pe baza expresiei eforturilor secționale de încovoiere de pe inelul real, folosind teorema lui Castigliano în raport cu forțele F:

$$\delta_{AB} = \frac{\partial L_e}{\partial F} = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{M_{iz}(\alpha)}{EI} \cdot \frac{\partial M_{iz}(\alpha)}{\partial F} \cdot R d\alpha = \frac{4}{EI} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{FR}{2} (-0,636 + \cos \alpha) \cdot \frac{R}{2} (-0,636 + \cos \alpha) \cdot R d\alpha$$

După efectuarea calculelor se ajunge la rezultatul de mai sus, $\delta_{AB} = 0,149 FR^3/EI$. Trebuie semnalat că această metodă necesită calcule mai laborioase decât aplicarea teoremei Mohr-Maxwell și că este potrivită doar pentru stabilirea deformației de pe direcția forțelor F.

2.11

Răsucirea barelor cu secțiuni transversale necirculare

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

Aspecte generale

Barele drepte care au secțiuni de formă **circulară**, încărcate cu *momente de torsiune*, se deformează fără ca aspectul lor exterior să se modifice: secțiunile transversale capătă deplasări de rotație, dar nu și deformații liniare; dacă secțiunile transversale *nu sunt circulare*, răsucirea provoacă **deplanări** ale lor, iar aspectul barelor se modifică în mod pregnant și vizibil; calculul riguros al acestor bare este laborios, dar există câteva categorii mari de secțiuni pentru care se pot folosi *generalizări* ale relațiilor de la secțiunile circulare.

Se definesc două caracteristici generalizate (de răsucire) ale secțiunilor - *momentul de inerție* I_t , respectiv *modulul de rezistență* W_t - având formule particulare pentru fiecare categorie de secțiuni.

Pe baza lor se calculează *tensiunile maxime* din oricare secțiune a barei, iar acestea nu trebuie să depășească rezistența materialului barei:

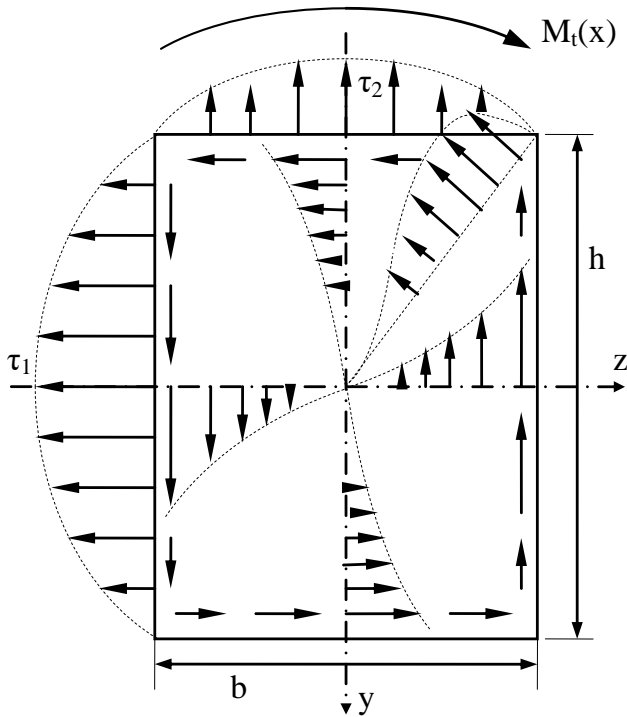
$$\tau_{\max}(x) = \frac{M_t(x)}{W_t(x)} \leq \tau_a \quad [\text{MPa}] \quad (1)$$

respectiv *rotirile* de pe un tronson de bară de lungime L , având la capete momentele M_t , care le rotesc reciproc cu unghiul $\Delta\varphi$; mărimea calculată este *rotirea specifică* θ :

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{L} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \quad (2)$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

1. Bare cu secțiuni dreptunghiulare



Deformarea lor la răsucire poate fi observată la barele din fier forjat prezente în multe construcții, mai mult sau mai puțin ornamentale; principala particularitate este că valorile tensiunilor variază în mod complex în punctele oricărei secțiuni transversale, încât depind de ambele coordonate ale punctelor, iar prezentarea lor grafică se face pe *diagrame multiple*, ca în figură.

Tensiunile sunt **nule** în *centrul* secțiunii, dar și în *colțurile* ei (graficul pe diagonale are un aspect curbiliniu particular), dar variază după legi **parabolice** pe *lungimea fiecărei laturi*; tensiunile cele mai mari de pe o secțiune (τ_1) se obțin la mijlocul laturii cu cea mai mare lungime; pe *axe de simetrie* repartitia tensiunilor este apropiată de cea **liniară**, de la secțiunile circulare.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

1. Bare cu secțiuni dreptunghiulare

Valorile tensiunilor tangențiale maxime sunt legate prin relația $\tau_2 = \gamma \cdot \tau_1$ (3) iar mărimile caracteristicilor de răsucire ale acestor secțiuni se calculează – în funcție de laturile secțiunii (**h** fiind cea verticală) – astfel:

$$W_t = \alpha \cdot h \cdot b^2 \quad [\text{mm}^3] \quad I_t = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad [\text{mm}^4] \quad (4)$$

Coefficienții care apar în cele trei relații se găsesc în cărți, sub forma unor tabele de valori, în funcție de raportul (**h/b**) dintre laturile dreptunghiului.

h/b	1	1,5	2	2,5	3	4	6	10	(>10)
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	-	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743

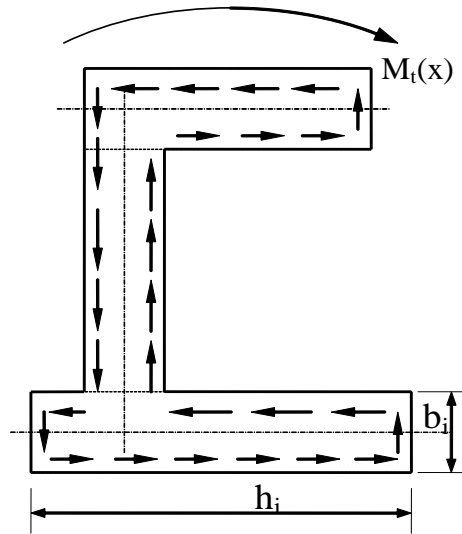
Este remarcabil că, atunci când disproporția laturilor crește, coeficienții α și β devin egali și se apropie tot mai mult de 1/3, încât relațiile de mai sus se vor scrie simplificat, pentru secțiunile denumite **dreptunghiuri înguste**:

$$W_t = \frac{1}{3} \cdot h \cdot b^2 \quad [\text{mm}^3] \quad I_t = \frac{1}{3} \cdot h \cdot b^3 \quad [\text{mm}^4] \quad (5)$$

Se înscriu aici secțiunile cu raportul laturilor egal *cel puțin cu 10*, dar în multe situații se asimilează acestei grupări și secțiuni cu rapoarte ceva mai mici.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

2. Bare cu secțiuni simplu conexe



Conturul acestor secțiuni poate fi parcurs continuu, fără salturi pe hârtie; au forme diverse, dar adesea pot fi descompuse în dreptunghiuri înguste (cu latura lungă notată mereu cu h), aceasta fiind baza pentru calculul lor.

Tensiunile tangențiale se repartizează liniar pe lățimea dreptunghiurilor elementare; așa cum s-a arătat ele sunt nule pe axele de simetrie ale dreptunghiurilor și cresc către laturi, pe care se orientează în sensuri opuse, încât pe contur se formează un fel de circuit închis al tensiunilor, care au însă valori diferite de la un punct la altul.

Tensiunile de pe dreptunghiurile elementare ajung la valori maxime cu atât mai mari cu cât lățimea dreptunghiului este mai mare, iar pe lungimea laturilor variația este (cum s-a văzut mai sus) parabolică, cu maximele la mijlocul laturilor.

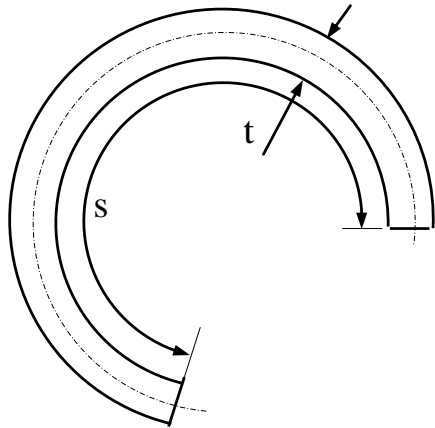
Tensiunile cele mai mari de răsucire la aceste secțiuni se produc la mijlocul laturilor lungi, pe dreptunghiul elementar de lățime maximă [$\max\{b_i\}$].

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

2. Bare cu secțiuni simplu conexe

Pentru calcule de rezistență și de rigiditate se folosesc relațiile generale (1) și (2), iar caracteristicile generalizate ale secțiunilor se stabilesc astfel:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (h_i \cdot b_i^3) \quad [\text{mm}^4] \quad \text{respectiv} \quad W_t = \frac{I_t}{\max\{b_i\}} \quad [\text{mm}^3] \quad (6)$$



Un caz particular, o secțiune de tip dreptunghi îngust, cu laturile lungi **curbilinii**, se prezintă alăturat; dimensiunile importante sunt *lățimea t* a profilului, constantă de obicei pe *lungime* (care se notează cu *s* și se măsoară pe curba mediană a secțiunii); caracteristicile de răsucire se obțin la fel ca la dreptunghiurile cu valori mari ale raportului **h/b**:

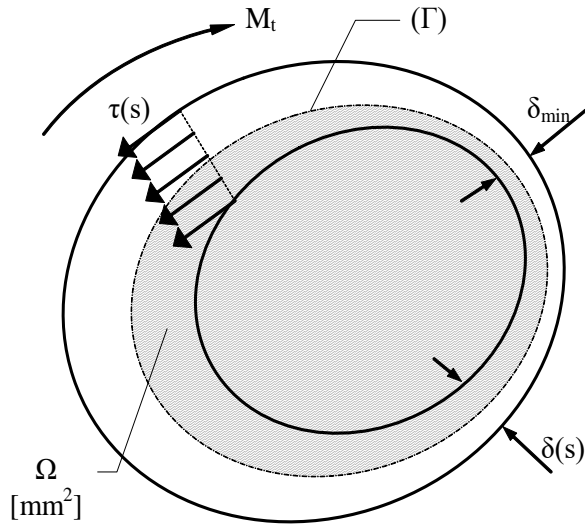
$$I_t = \frac{s \cdot t^3}{3} \quad [\text{mm}^4] \quad W_t = \frac{s \cdot t^2}{3} \quad [\text{mm}^3] \quad (7)$$

iar valoarea cea mai mare a tensiunilor tangențiale se produce *la mijlocul lungimii s* a profilului curbiliniu.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

3. Bare cu secțiuni dublu conexe

Aceste secțiuni au conturul format, la modul general, din *două linii curbe închise*, de forme arbitrare, care se includ una pe alta fără să se atingă; barele cu astfel de secțiuni sunt **tubulare** și se admite că au aceeași secțiune transversală pe toată lungimea.



Fie o astfel de secțiune, solicitată de momentul M_t ; caracteristicile ei depind de *aria* hașurată Ω , mărginită de *curba mediană* (închisă) Γ a profilului, precum și de *grosimea* $\delta(s)$ (presupusă a fi relativ mică), variabilă ca mărime (în principiu) pe curba Γ .

Tensiunile tangențiale de răsucire au direcția *tangentei la linia mediană* a profilului și sens *opus* momentului; în orice punct tensiunile se distribuie **uniform** pe grosimea profilului; se poate demonstra că produsul (numit **flux** al *tensiunilor tangențiale*) dintre tensiunile $\tau(s)$ și grosimea $\delta(s)$ este *constant* în orice punct al curbei mediane; el arată că tensiunile sunt mari unde grosimea e mică și invers, încât cea mai mare tensiune apare în

dreptul grosimii minime δ_{\min} a profilului; *caracteristica de rezistență* a profilelor dublu conexe este:

$$W_t = 2 \cdot \Omega \cdot \delta_{\min} \quad [\text{mm}^3] \quad (8)$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

3. Bare cu secțiuni dublu conexe

Relația *caracteristicii de rigiditate* se găsește pornind de la expresia energiei potențiale de deformare elastică acumulată prin răsucire în barele cu secțiuni dublu conexe; sunt necesare calcule destul de laborioase, iar expresia finală se scrie:

$$I_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\oint_{(\Gamma)} \delta(s)} \quad [\text{mm}^4] \quad (9)$$

Este interesant cum se modifică această relație la secțiunile tubulare cu grosimea peretelui constantă – $\delta(s) = ct = \delta$; mărimea δ poate fi scoasă în factor și extrasă în afara integralei de la numitor, iar integrala rămasă reprezintă *lungimea* curbei închise Γ , notată prin $L(\Gamma)$ [mm]; pe aceste baze caracteristica de răsucire devine:

$$I_t = \frac{4 \cdot \Omega^2 \cdot \delta}{L(\Gamma)} \quad [\text{mm}^4] \quad (10)$$

Se deduce astfel că la aceste secțiuni tensiunile tangențiale au aceeași valoare în toate punctele din peretele barei.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

Aplicația 1

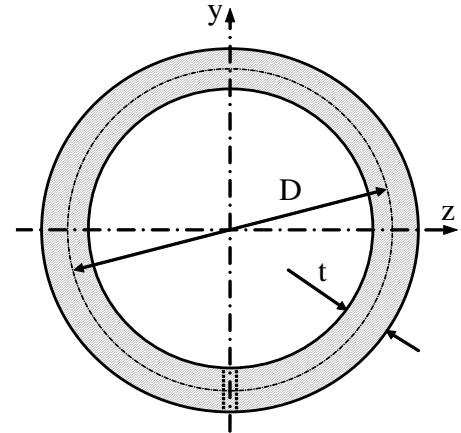
Se consideră o bară cu secțiune circulară tubulară (*cu pereți subțiri*), constantă ca dimensiuni pe lungime, având diametrul mediu D de 8 ori mai mare decât grosimea t a tablei din care este făcută, prin rulare. Bara are lungimea oarecare L și este încărcată la răsucire prin momentele exterioare M_t aplicate la capetele ei; să se compare *rezistența* și *rigiditatea* barei, în două variante constructive:

- I. fără aplicarea sudurii pe generatoare;
- II. cu închiderea conturului, prin cordon de sudură pe întreaga generatoare a barei.

Rezolvare

I. Dacă profilul este *deschis*, atunci el este de tip *dreptunghi îngust curbiliniu* și calculul se face folosind relațiile (7); lungimea arcului de cerc ce reprezintă linia mediană este $s = \pi D$, iar caracteristicile secțiunii vor fi:

$$W_t = \frac{1}{3} \cdot s \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi D \cdot t^2 \quad \text{respectiv} \quad I_t = \frac{1}{3} \cdot s \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi D \cdot t^3$$



Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

II. După închidere – prin aplicarea sudurii – profilul (cu pereți subțiri) devine *dublu conex*, iar pentru modulul de rezistență se aplică relația (8), astfel:

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow W_t = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot t = \frac{\pi D^2 \cdot t}{2}$$

La calculul momentului de inerție se respectă condițiile pentru aplicarea relației (10), sub

forma:

$$I_t = \frac{4 \cdot \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \cdot t}{\pi D} = \frac{\pi D^3 \cdot t}{4}$$

Comparația cerută de problemă se face raportând rezultatele din a doua serie la cele de la profilul deschis; se obține astfel că:

$$\frac{W_{tII}}{W_{tI}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi D^2 \cdot t}{\frac{1}{3} \cdot \pi D \cdot t^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{t} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12 \quad \text{respectiv} \quad \frac{I_{tII}}{I_{tI}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi D^3 \cdot t}{\frac{1}{3} \cdot \pi D \cdot t^3} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{D}{t} \right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48$$

Așadar, profilul închis este mult mai rezistent (de 12 ori, în acest caz) și mai rigid (de 48 de ori) decât cel deschis, în condițiile în care ambele profile conțin aceeași cantitate de material!

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

Aplicația 2

Să se arate diferența, la stabilirea caracteristicilor de răsucire, între rezultatele date de calculul *riguros*, respectiv de relațiile de la secțiunile *dublu conexe*, pentru bara de la *Aplicația 1*, cazul profilului **închis** cu sudură, pentru diferite valori ale raportului t/D , între grosimea peretelui și diametrul mediu al secțiunii.

Rezolvare

Pentru a observa deosebirile între cele două feluri de calcule se aleg *trei variante* de secțiuni cilindrice închise, având comună valoarea diametrului mediu $D = 32\text{mm}$, dar valori diferite pentru D_{\min} și D_{\max} .

a. $D_{\min} = 28\text{mm}$, $D_{\max} = 36\text{mm}$ \rightarrow $D = 32\text{mm}$, $t = 4\text{mm}$

Se obține că raportul dimensiunilor este $t/D = 4/32 = 1/8 = 0,125$

Relațiile *exacte*, de la secțiunile *circulare inelare*, dau:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (36^4 - 28^4) \text{mm}^4 = \pi \cdot 33280 \text{mm}^4 \\ W_p = \frac{I_p}{\frac{D_{\max}}{2}} = \frac{1}{18} \cdot I_p = \pi \cdot 1848,9 \text{mm}^3 \end{array} \right.$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

Din relațiile de la secțiunile *dublu conex*, cum s-a arătat mai sus, se obține:

$$\begin{cases} I_t = \frac{1}{4} \cdot \pi D^3 \cdot t = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (32\text{mm})^3 \cdot 4\text{mm} = \pi \cdot 32768 \text{ mm}^4 \\ W_t = \frac{1}{2} \cdot \pi D^2 \cdot t = \frac{1}{2} \pi \cdot (32\text{mm})^2 \cdot 4\text{mm} = \pi \cdot 2048 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

Prin calcul aproximativ s-a ajuns la un rezultat *mai mic* cu 1,54% pentru momentul de inerție și *mai mare* cu 10,77% (diferență mult mai mare decât eroarea permisă în calculele inginerești) în cazul modulului de rezistență, deci calculul aproximativ este acceptabil doar în calculul de rigiditate.

$$\mathbf{b. D_{\min} = 30\text{mm}, D_{\max} = 34\text{mm} \rightarrow D = 32\text{mm}, t = 2\text{mm}}$$

Se obține că raportul dimensiunilor este $t/D = 2/32 = 1/16 = 0,0625$

Relațiile *exacte* dau:

$$\begin{cases} I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (34^4 - 30^4) \text{ mm}^4 = \pi \cdot 16448 \text{ mm}^4 \\ W_p = \frac{I_p}{\frac{D_{\max}}{2}} = \frac{1}{17} \cdot I_p = \pi \cdot 967,5 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

Relațiile *aproximative* duc la:

$$\begin{cases} I_t = \frac{1}{4} \cdot \pi D^3 \cdot t = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (32\text{mm})^3 \cdot 2\text{mm} = \pi \cdot 16384 \text{ mm}^4 \\ W_t = \frac{1}{2} \cdot \pi D^2 \cdot t = \frac{1}{2} \pi \cdot (32\text{mm})^2 \cdot 2\text{mm} = \pi \cdot 1024 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare

Diferențele sunt de -0,39% la evaluarea rigidității și de +5,8% la modulul de rezistență. Erorile au scăzut mult, dar cea de la calculul W_t este încă mare, plasând rezultatul în afara domeniului de abatere permis.

$$\text{c. } D_{\min} = 31\text{mm}, D_{\max} = 33\text{mm} \rightarrow D = 32\text{mm}, t = 1\text{mm}$$

Se obține că raportul dimensiunilor este $t/D = 1/32 = 0,03125$

Relațiile *exacte* dau:

$$\begin{cases} I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (33^4 - 31^4) \text{mm}^4 = \pi \cdot 8200 \text{mm}^4 \\ W_p = \frac{I_p}{\frac{D_{\max}}{2}} = \frac{1}{16,5} \cdot I_p = \pi \cdot 497 \text{mm}^3 \end{cases}$$

Din relațiile *aproximative* se obține:

$$\begin{cases} I_t = \frac{1}{4} \cdot \pi D^3 \cdot t = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (32\text{mm})^3 \cdot 1\text{mm} = \pi \cdot 8192 \text{mm}^4 \\ W_t = \frac{1}{2} \cdot \pi D^2 \cdot t = \frac{1}{2} \pi \cdot (32\text{mm})^2 \cdot 1\text{mm} = \pi \cdot 512 \text{mm}^3 \end{cases}$$

Rezultatele sunt convenabil de apropiate de cele exacte, diferențele fiind de -0,1% pentru momentul de inerție și de +3% pentru modulul de rezistență.

Secțiunile tubulare *cu pereți subțiri* se pot așadar calcula ca secțiuni *dublu conexe*, rezultatele fiind cu atât mai precise cu cât grosimea peretelui t este mai mică față de diametrul mediu D al secțiunii; parametrul I_p poate fi bine aproximat prin I_t încă de la valori relativ mari ale raportului t/D (aici s-a exemplificat cu valoarea 1/8).

2.12

Vase de revoluție cu pereți subțiri

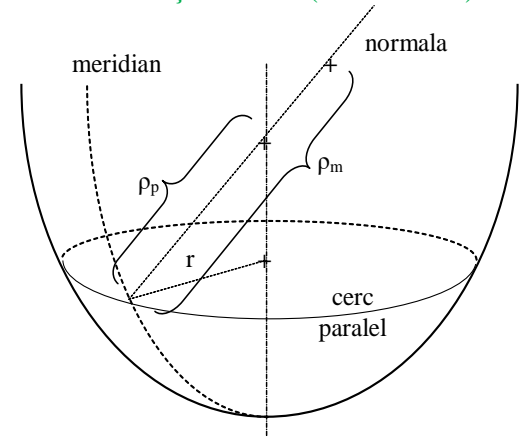
Vase de revoluție cu pereți subțiri

Aceste corpuri formează o gamă largă de aplicații ingineresti, de la rezervoare pentru transportul și depozitarea materialelor fluide sau pulverulente, până la cupole și părți ale aparatelor de zbor; seamănă ca structuri cu plăcile curbe *de grosime mică*, iar forma le este definită de *suprafața mediană*; aceasta ia naștere prin rotirea unei curbe oarecare (*generatoare*) în jurul unei axe, pe care o întâlnește sau nu (*axa vasului*).

Pe astfel de suprafețe se pot defini, în orice punct, raze de curbură în număr infinit, diferite ca valori după planul unde sunt măsurate; valorile *principale* ale acestei mulțimi apar pe *normala* dusă la suprafața curbă în acel punct și sunt legate de două familii de curbe de pe acea suprafață, numite (ca la globul pământesc) **meridiane** și **cercuri paralele** (cu raze notate r).

Cele două *raze de curbură principale* dintr-un punct al vasului, identificat prin distanța x (față de un reper de pe axă, convenabil ales) a secțiunii (perpendiculară pe axa vasului) în care se află, sunt notate cu indicele uneia dintre familiile de curbe și se definesc astfel:

- $\rho_m(\mathbf{x})$ – raza de curbură (din acel punct) a *generatoarei* vasului; pentru suprafețe generate de o **dreaptă**, se ia $\rho_m(\mathbf{x}) = \infty$;
- $\rho_p(\mathbf{x})$ – distanța, măsurată pe normala la suprafață din punctul respectiv, de la această suprafață până la axa vasului; dacă generatoarea este un semicerc (cum se întâmplă la **sfere**) sau o dreaptă paralelă cu axa vasului (la **cilindri**), atunci $\rho_p(\mathbf{x}) = R$ (raza sferei, respectiv a cilindrului ce reprezintă vasul).

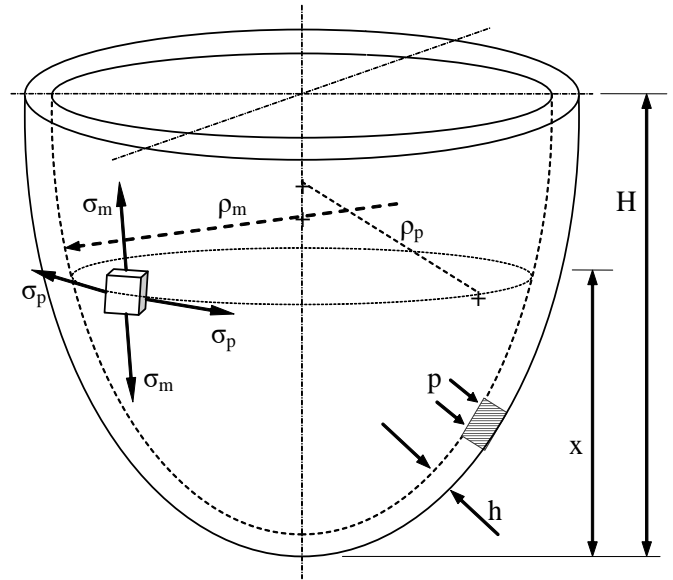


Vase de revoluție cu pereți subțiri

Întrucât vasele au *pereți subțiri*, în raport cu distanțele de la suprafața vasului până la axa de rotație, se poate admite, pe de o parte, că *tensiunile* ce apar în materialul vasului, într-un punct oarecare, sunt **constante** ca mărime *pe grosimea peretelui*, iar pe de altă parte că *starea de tensiuni* din orice punct din pereții vasului este **plană** (având doar **două** tensiuni principale nenule!), tensiunile principale fiind dirijate tangent la cele două familii de curbe de mai sus; prin fiecare punct al vasului trec două astfel de curbe, una de tip *meridian* și un *cerc paralel*, ale căror tangente sunt mereu reciproc perpendiculare.

Pornind de la aceste principii *tensiunile principale* din orice punct sunt definite și notate tot în conexiune cu meridianele și paralelele vasului, adică $\sigma_m(\mathbf{x})$, respectiv $\sigma_p(\mathbf{x})$ (cum se prezintă în figură, pe un element de volum izolat imaginar din peretele, de grosime h , al vasului).

Tot pe baza faptului că pereții sunt subțiri se admite că, deși de obicei sunt din oțel sau din alte materiale rezistente, aceștia se comportă, sub solicitări mecanice, la fel ca niște *membrane*: pot prelua tensiuni de *întindere*, dar nu suportă încovoiere. Rezultă de aici că în orice punct al vasului se pot măsura, pe direcții diferite, o *infinitate* de valori ale tensiunilor, de obicei *toate de întindere*; tensiunile **extreme** (adică principale) au direcții *tangente* la cercul paralel, respectiv la curba meridian din acel punct.



Vase de revoluție cu pereți subțiri

Se ia în considerare, pentru prima fază a calculelor, solicitarea vasului prin presiunea p , exercitată asupra pereților de fluidul din vas; se înțelege că această mărime va fi *variabilă* (crește de la suprafață către baza vasului) – dacă în vas se află **lichid**; când vasul conține un **gaz** (având greutate **neglijabilă** față de efectele presiunii), *presiunea* are valoare *constantă* în toate punctele vasului; dacă punctul de studiu se află în secțiunea transversală situată la distanța x față de reper (în figura de mai sus reperul este la capătul de jos al vasului), atunci între valorile tensiunilor principale și parametrii vasului *din acel punct* este adevărată relația:

$$\frac{\sigma_m(x)}{\rho_m(x)} + \frac{\sigma_p(x)}{\rho_p(x)} = \frac{p(x)}{h} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \right] \quad (1)$$

Aceasta este **ecuația lui Laplace**, matematicianul francez care a stabilit-o; cu ea se începe studiul oricărui vas cu pereți subțiri; necunoscutele din ecuație sunt *tensiunile* din punctul de calcul, iar găsirea acestor valori necesită o a doua relație care să le conțină. Scrierea ecuației a doua se va explica direct pentru cazul cel mai general de încărcare a unui vas de revoluție cu pereți subțiri - în care conținutul este o *pulbere* sau un *fluid* cu *greutate proprie* importantă și care solicită pereții vasului cu o *presiune* care *crește*, de la suprafața de sus a încărcăturii către baza ei; grosimea pereților fiind mică, *greutatea vasului* este *neglijabilă* în raport cu solicitările exterioare, încât nu este inclusă în calculul de rezistență.

Trebuie subliniat că, pentru a se ajunge la o solicitare *simetrică* a pereților (cu $p(x) = ct$ în orice secțiune *transversală!*), la acest tip de încărcare este necesară poziționarea vasului cu *axa verticală*, cerință care este respectată de majoritatea exemplurilor practice din această categorie.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

În condițiile descrise eforturile (toate de tip *forță!*) ce apar în pereții vasului, într-o secțiune transversală oarecare (notată cu \mathbf{x}), exprimă efectele produse de trei tipuri de mărimi fizice (două exterioare, *active* și una interioară, *reactivă*):

- greutatea* $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ a încărcăturii care se află **sub** secțiunea \mathbf{x} , produsul dintre volumul de fluid de sub secțiune $\mathbf{V}_f(\mathbf{x})$ și greutatea specifică a fluidului, notată cu γ ;
- presiunea* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ exercitată de coloana de fluid aflată **deasupra** secțiunii \mathbf{x} ; acest termen nu depinde de volumul, ci *numai* de înălțimea $H(\mathbf{x})$ coloanei de fluid și de greutatea lui specifică, întrucât se cunoaște că $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \gamma \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})$; efectul de tip forță din pereți $\mathbf{F}[\mathbf{p}(\mathbf{x})]$ este produsul dintre $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ și aria $\mathbf{A}_f(\mathbf{x})$ pe care *fluidul* o ocupă în secțiunea de calcul;
- forța de rezistență* $\mathbf{F}_r(\mathbf{x})$ din pereți, produsul dintre aria $\mathbf{A}_m(\mathbf{x})$ ocupată de *materialul pereților* (de obicei metal) în secțiunea \mathbf{x} și *tensiunile* $\sigma_m(\mathbf{x})$ din pereți; luate individual, tensiunile sunt cuprinse în plane *longitudinale* de secționare a vasului și au direcția tangentei la curba *meridian* ce trece prin punctul de calcul (deci sunt *înclinate* sub un unghi α față de verticală, în secțiunile unde tangenta nu este paralelă cu axa vasului!).

Folosind aceste notații, **ecuația a doua** pentru stabilirea tensiunilor, la vasele de revoluție cu pereți subțiri, exprimă *echilibrul forțelor* de mai sus, proiectate *pe direcția axei* de rotație a vasului, astfel:

$$\mathbf{F}_r(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}[\mathbf{p}(\mathbf{x})] \Leftrightarrow \sigma_m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_m(\mathbf{x}) \cdot \cos \alpha = \gamma \cdot \mathbf{V}_f(\mathbf{x}) + \gamma \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_f(\mathbf{x}) \quad [\text{N}] \quad (2)$$

Vase de revoluție cu pereți subțiri

Ecuțiile (1) și (2), particularizate cu parametrii vasului calculat, sunt suficiente (problema este static determinată!) pentru găsirea expresiilor după care variază cele două feluri de tensiuni pe înălțimea vasului (adică în funcție de poziția \mathbf{x} a secțiunii transversale de calcul); trasarea diagramelor ce exprimă aceste evoluții arată în ce secțiune are loc solicitarea periculoasă în pereții vasului, iar valorile tensiunilor din acea secțiune se folosesc în calculul de rezistență; se poate recunoaște o *stare plană* de solicitare, cu tensiunile principale $\sigma_m(\mathbf{x})$ și $\sigma_p(\mathbf{x})$, al căror efect global trebuie evaluat cu una dintre teoriile de rupere.

În principiu se folosesc teoria ϵ_{\max} pentru materialele *fragile*, respectiv una dintre teoriile τ_{\max} și U_f dacă materialul vasului este *tenace*; trebuie observat că, deoarece tensiunile principale au același semn, teoria τ_{\max} conduce la aceeași valoare a tensiunii echivalente ca și teoria σ_{\max} (întrucât $\sigma_3 = 0$), egală cu cea mai mare dintre tensiunile principale; această variantă este preferată pentru multe aplicații inginerești, încât condiția de rezistență se scrie:

$$\sigma_{\text{ech max}}(\mathbf{x}) = \max\{\sigma_m(\mathbf{x}), \sigma_p(\mathbf{x})\} \leq \sigma_a \quad (3)$$

Pe baza acestei relații se pot rezolva probleme din toate cele trei categorii clasice întâlnite în rezistența materialelor:

- a. de **verificare** – cunoscând parametrii constructivi și de încărcare, trebuie stabilit dacă proiectarea unui anumit vas cu pereți subțiri a fost făcută corect;
- b. de **încărcare maximă** – se calculează cât de mult fluid se poate introduce într-un vas complet cunoscut, ca dimensiuni și ca material;
- c. de **dimensionare** – se cunosc materialul vasului, încărcarea preluată și o parte dintre dimensiunile finale; de ex. se impun înălțimea \mathbf{H} și raza \mathbf{R} , fiind stabilită grosimea necesară \mathbf{h}_{\min} a tablei din care va fi realizat vasul, sau se impun \mathbf{H} și \mathbf{h} și se calculează valoarea maximă permisă \mathbf{R}_{\max} a razei vasului.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

APLICAȚII

1. Calculul conductelor care transportă fluide sub presiune

Cele mai importante utilizări ingineresti le au conductele din instalațiile *comandate* prin circuite hidraulice sau pneumatice; acestea au, de regulă, diametre mici, dar presiuni mari în fluid, încât calculul lor trebuie realizat precis și atent; din faptul că fluidul *circulă liber* prin conducte rezultă, pe de o parte, că presiunea este **constantă** $p(\mathbf{x}) = p$ în orice punct al lor, iar pe de altă parte că pereții conductelor nu sunt solicitați pe direcție longitudinală, adică tensiunile $\sigma_m(\mathbf{x})$ sunt **nule** în toate punctele pereților; tensiunile de calcul sunt numai cele circumferențiale $\sigma_p(\mathbf{x})$, iar pentru găsirea valorii lor se particularizează *ecuația lui Laplace* (1), pentru conducta studiată.

În condițiile descrise și observând forma cilindrică a conductelor, cu pereți de grosime h și rază R (din care rezultă că $\rho_p(\mathbf{x}) = ct = R$), din ecuația lui Laplace se ajunge la condiția de rezistență, astfel:

$$\frac{\sigma_p(\mathbf{x})}{R} = \frac{p}{h} \quad \Rightarrow \quad \sigma_p(\mathbf{x}) = ct = \frac{p \cdot R}{h} \leq \sigma_a \quad (4)$$

Observație: Tensiunile se măsoară în MPa, iar presiunea exprimată în *atmosfera* se transformă în MPa folosind egalitatea **1atm = 0,1MPa**.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

Exemplu de calcul: se imaginează că trebuie stabilit ce presiune maximă p_{\max} poate să suporte o conductă, făcută din oțel cu rezistența admisibilă la tracțiune $\sigma_a = 180\text{MPa}$, pentru mai multe variante de dimensiuni:

a. $R = 3\text{mm}$, $h = 1\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{1\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{3\text{mm}} = 60\text{MPa} = 600\text{atm}$$

b. $R = 3\text{mm}$, $h = 0,5\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{0,5\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{3\text{mm}} = 30\text{MPa} = 300\text{atm}$$

c. $R = 2\text{mm}$, $h = 1\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{1\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{2\text{mm}} = 90\text{MPa} = 900\text{atm}$$

d. $R = 2\text{mm}$, $h = 0,5\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{0,5\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{2\text{mm}} = 45\text{MPa} = 450\text{atm}$$

e. $R = 1,5\text{mm}$, $h = 0,5\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{0,5\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{1,5\text{mm}} = 60\text{MPa} = 600\text{atm}$$

f. $R = 1\text{mm}$, $h = 0,25\text{mm}$
$$p_{\max} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{0,25\text{mm} \cdot 180\text{MPa}}{1\text{mm}} = 45\text{MPa} = 450\text{atm}$$

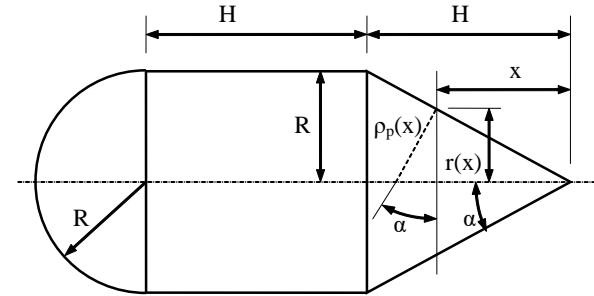
Concluzia este că aceste conducte suportă presiuni de valori importante, în condițiile unor dimensiuni transversale mici, apropiate de ale conductorilor *electrici* ce compun circuitele clasice de comandă pentru instalații industriale.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

APLICAȚII

2. Calculul vaselor care conțin gaze sub presiune

Particularitatea principală a acestor vase este greutatea neglijabilă a gazelor, ceea ce simplifică ecuația a doua, dar face și ca presiunea să fie constantă în orice punct din vas; se imaginează un vas format din tronsoane cu geometrii diferite, de tipurile cel mai des întâlnite în practica inginerescă; se observă că la vasele cu gaze *simetria* de solicitare este asigurată chiar și la așezarea *orizontală* a axei de rotație; în plus, pentru vasele *cilindrice* și *sferice* nu există deosebiri între secțiunile transversale și calculul este *identic* oriunde ar fi făcută secționarea vasului, ceea ce nu e valabil și la vasele de formă *conică*.



a. Porțiunea sferică are proprietatea unică de egalitate a razelor principale, în orice punct, $\rho_p(\mathbf{x}) = \rho_m(\mathbf{x}) = R$; simetria specială a sferei și presiunea constantă în orice punct conduc la o valoare **unică a tensiunii** din perete, pe orice direcție, $\sigma_p(\mathbf{x}) = \sigma_m(\mathbf{x}) = \sigma$;

ecuația lui Laplace se scrie simplu și din ea se află valoarea tensiunilor principale, cu care se scrie

condiția de rezistență de pe acest tronson

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_m = \sigma_p = \frac{p \cdot R}{2h} \leq \sigma_a$$

Prin urmare, un vas *sferic* cu gaz sub presiune are *aceeași valoare a tensiunii*, în orice punct și pe orice direcție s-ar face măsurarea, ceea ce este ușor de intuit dacă se imaginează orice minge (din cauciuc) umplută cu aer.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

b. Porțiunea **cilindrică** are generatoarea dreaptă, de unde $\rho_m(\mathbf{x}) = \infty$, în vreme ce a doua rază de curbură principală este $\rho_p(\mathbf{x}) = \mathbf{R}$, iar ecuația lui Laplace se scrie:

$$\frac{\sigma_m(\mathbf{x})}{\infty} + \frac{\sigma_p(\mathbf{x})}{\mathbf{R}} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_p(\mathbf{x}) = \frac{p \cdot \mathbf{R}}{h}$$

Pentru a doua ecuație se observă că termenul dat de *greutatea fluidului* va lipsi, că *generatoarea* este *paralelă* cu axa de rotație (înclinarea tensiunilor σ_m va fi $\alpha = 0$, deci $\cos\alpha = 1$), că *aria de fluid* din orice secțiune este $A_f(\mathbf{x}) = \pi R^2$ și că *aria de metal* din secțiunea \mathbf{x} este *inelară*, cu pereți subțiri; ea se exprimă pe inelul decupat pe direcția unei raze și desfășurat pe un plan, obținând un dreptunghi îngust cu înălțimea h și cealaltă latură egală cu lungimea pe contur ($2\pi R$) a inelului inițial; prin urmare $A_m(\mathbf{x}) = 2\pi R h$.

Folosind aceste informații și datele inițiale din problemă (de exemplu că presiunea are peste tot valoarea p)

ecuația (2) se reduce la egalitatea:
$$\sigma_m(\mathbf{x}) \cdot 2\pi R \cdot h = p \cdot \pi R^2 \Rightarrow \sigma_m(\mathbf{x}) = \frac{p \cdot R}{2h}$$

Valorile tensiunilor principale nu depind de poziția secțiunii de calcul, confirmând că nici pentru vasele *cilindrice* cu gaze nu apar deosebiri de calcul între secțiunile transversale; s-a obținut că tensiunile *meridiane* au valori pe jumătate față de celelalte tensiuni principale din pereții vasului, încât astfel de vase sunt puse în pericol de tensiunile *circumferențiale* și eventuala lor *fisurare* se va produce *pe direcția generatoarei* (perpendiculară pe cea a tensiunilor periculoase).

Condiția de rezistență se scrie:
$$\sigma_{\max}(\mathbf{x}) = \sigma_p(\mathbf{x}) = \frac{p \cdot R}{h} \leq \sigma_a$$

Comparând cu rezultatele de la porțiunea *sferică*, se observă că tensiunile de pe tronsonul *cilindric* sunt de două ori mai mari, adică un vas sferic este mai avantajos, întrucât suportă presiuni de gaz **double** ca mărime față de un vas cilindric din același material și cu aceleași valori ale parametrilor \mathbf{R} și h ; superioritatea vaselor sferice este însă greu de exploatat în practică, datorită problemelor dificile de rezemare puse de aceste vase, dificultăți care nu există pentru cele cilindrice.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

c. Porțiunea **conică** are tot generatoare dreaptă, cu $\rho_m(x) = \infty$, iar a doua rază de curbură principală este *variabilă* ca mărime, de la o secțiune transversală la alta, întrucât depinde de raza $r(x)$ a secțiunii și de înclinarea generatoarei, după relația $\rho_p(x) = r(x)/\cos\alpha$; ecuația lui Laplace are forma:

$$\frac{\sigma_m(x)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x) \cdot \cos\alpha}{r(x)} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_p(x) = \frac{p \cdot r(x)}{h \cdot \cos\alpha}$$

Acest rezultat și desenul de mai sus arată că tensiunile circumferențiale de la vasul conic cu gaz variază **liniar** pe înălțimea vasului, la fel cu raza $r(x)$ – sunt nule la vârful conului și maxime la baza lui:

$$\sigma_{p\max}(x) = \sigma_p(x=H) = \frac{p \cdot R}{h \cdot \cos\alpha}$$

Pentru scrierea ecuației (2) se folosesc raționamentele de la tronsonul cilindric, ținând însă seama că raza secțiunii este variabilă și că generatoarea este înclinată:

$$\sigma_m(x) \cdot 2\pi r(x) \cdot h \cdot \cos\alpha = p \cdot \pi \cdot r(x)^2 \Rightarrow \sigma_m(x) = \frac{p \cdot r(x)}{2h \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_p(x)$$

Tensiunile maxime sunt *circumferențiale*, încât condiția de rezistență se scrie:

$$\sigma_{\max}(x) = \sigma_p(x) = \frac{p \cdot R}{h \cdot \cos\alpha} \leq \sigma_a$$

Rezultă că și vasele *conice* cu gaz sub presiune tind să se fisureze tot pe direcția generatoarei; în plus, tensiunea maximă din porțiunea conică diferă de cea de la cilindru doar prin mărimea $\cos\alpha$ de la numitor (tensiunile din zona conică sunt cele mai mari din întregul vas!); consecința acestei diferențe este că la granița dintre tronsoane se produce un **salt** al tensiunilor, care poate fi periculos pentru integritatea vasului; de obicei se adoptă, în faza de proiectare, o măsură de consolidare locală a pereților, prin adăugarea unor *bandaje* exterioare, solidarizate cu vasul, pentru a mări grosimea h în zona aceluia salt.

Vase de revoluție cu pereți subțiri

Analiza condițiilor de rezistență arată că tensiunile din pereți la vasele cu gaze sunt proporționale cu presiunea gazului și raza R , dar sunt invers proporționale cu grosimea pereților; cota H are influență doar la vasele conice, unde creșterea înălțimii duce la scăderea înclinării α și la creșterea lui $\cos\alpha$, deci la scăderea tensiunilor. În principiu se observă că vasele de dimensiuni mari suportă doar presiuni relativ mici ale gazelor conținute; de exemplu, pentru a calcula ce *presiune maximă* de gaz suportă un vas conic cu $H=1\text{m}$ și $\alpha=60^\circ$, făcut din tablă de oțel cu grosimea $h=3\text{mm}$ și rezistența admisibilă la tracțiune $\sigma_a=160\text{MPa}$, relația de rezistență conduce la următoarele calcule:

$$p \leq \frac{h \cdot \sigma_a \cdot \cos\alpha}{R} = \frac{h \cdot \sigma_a \cdot \cos 60^\circ}{H \cdot \text{tg} 60^\circ} \Rightarrow p_{\max} = \frac{3\text{mm} \cdot 160\text{MPa} \cdot 0,5}{10^3 \text{mm} \cdot \sqrt{3}} = 0,138\text{MPa} = 1,38\text{atm}$$

Rezultă că, deși este destul de rigid, vasul propus poate suporta, pentru gazul pe care îl conține, doar ceva mai mult decât presiunea atmosferică.

Pentru a diferenția capabilitatea vaselor cilindrice și conice cu parametri asemănători, se va compara presiunea maximă pe care o pot suporta două astfel de vase, cu $H = R = 0,4\text{m}$; $h = 2\text{mm}$, făcute din oțel cu $\sigma_a = 160\text{MPa}$; din condițiile de rezistență de mai sus rezultă că $p_{\max \text{ con}} = p_{\max \text{ cil}} \cdot \cos\alpha$, iar pentru vasul cilindric relația presiunii admisibile duce la:

$$p_{\max \text{ cil}} = \frac{h \cdot \sigma_a}{R} = \frac{2\text{mm} \cdot 160\text{MPa}}{400\text{mm}} = \frac{4}{5}\text{MPa} = 0,8\text{MPa} = 8\text{atm}$$

Cum $H = R$ (semi)unghiul la vârf al conului este $\alpha = 45^\circ$ și rezultă că:

$$p_{\max \text{ con}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8\text{atm} = 5,65\text{atm}$$

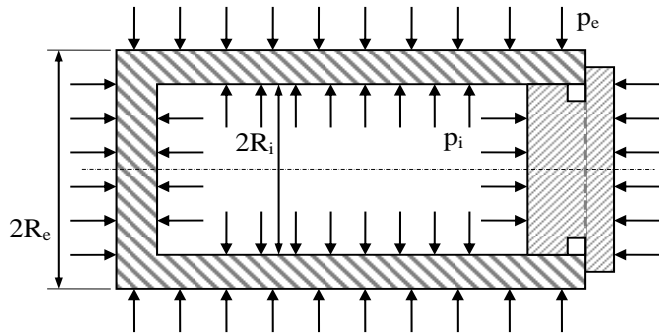
Concluzie: cu cât conul are unghiul de la vârf mai mare, cu atât vasul conic va putea prelua o fracție mai mică din presiunea permisă pentru vasul cilindric!

2.13

Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi cilindrice cu pereți groși

Cele două capitole următoare prezintă noțiunile de bază privind calculul unor corpuri care au toate dimensiunile de aproximativ același ordin de mărime, ceea ce le încadrează între corpurile *masive*; solicitările mecanice produc în volumul lor tensiuni care variază semnificativ pe grosimea pereților, variație ce face obiectul calculului. Tuturor le este comună **simetria axială** a construcției, a solicitărilor și a efectelor pe care acestea le produc (efectele sunt aceleași în toate punctele aflate la aceeași rază r , dintr-o secțiune transversală oarecare), aceste ipoteze simplifică în mod hotărâtor condițiile de calcul, care altfel ar fi extrem de complicate.



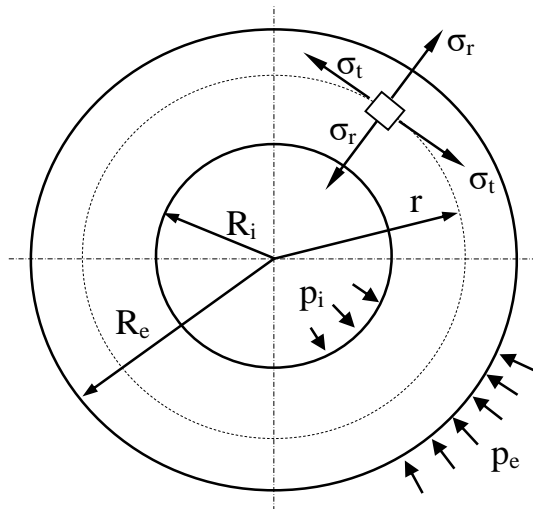
Se numesc *cu pereți groși* corpurile tubulare la care grosimea pereților ($R_e - R_i$) este cât cel puțin o *zecime* din raza lor interioară R_i ; lungimea tuburilor nu este importantă la calculul tensiunilor, întrucât acestea evoluează la fel în toate secțiunile transversale, atunci când încărcările sunt date de *presiunea interioară* p_i , respectiv de cea *exterioară* p_e , ca în figură.

Schema prezintă situația cea mai generală – un tub închis la capete prin capace – la care în pereți apare o categorie specifică de tensiuni, de *direcție longitudinală*, notate de obicei σ_x ; ele sunt calculate raportând efectele rezultante, de tip forță, ale celor două tipuri de presiuni, la aria de material din orice secțiune transversală, astfel:

$$\sigma_x = \frac{p_i \cdot \pi R_i^2 - p_e \cdot \pi R_e^2}{\pi \cdot (R_e^2 - R_i^2)} = \frac{p_i \cdot R_i^2 - p_e \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} = ct$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

Din relația de calcul se poate observa că tensiunile longitudinale au o aceeași mărime pe lungimea tubului, adică sunt *constante* în toate punctele din pereții acestui corp; în plus, ele tind să producă întindere, dacă tubul este sollicitat numai de presiunea interioară, respectiv comprimare, dacă presarea se produce numai din exterior.



Schema alăturată prezintă modul cum apar celelalte două categorii de tensiuni care sunt importante în calculul tuburilor; dirijate *radial*, respectiv *circumferențial*, ele sunt reprezentate ca acționând pe un element de volum aflat la raza r în peretele tubului studiat.

Tensiunile notate σ_r , σ_t și σ_x (dacă există) reprezintă valorile *principale* pentru starea de tensiuni din pereții tubului, care este *spațială*, în tuburile închise la capete prin capace și *plană*, dacă acestea lipsesc.

Tuburi cilindrice cu pereți groși

S-a arătat că solicitarea unui astfel de tub este *axial-simetrică*, încât valorile tensiunilor depind, pe secțiunile transversale, numai de raza r , fiind constante în toate punctele aflate la aceeași distanță de axa longitudinală; se poate demonstra că această dependență este de tip *hiperbolic*, iar relațiile finale de calcul ajung a fi scrise într-o formă unificată, astfel:

$$\sigma_{r,t}(r) = \frac{p_i \cdot R_i^2 - p_e \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \pm \frac{p_e - p_i}{r^2} \cdot \frac{R_i^2 \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (1)$$

Trebuie remarcat că prima fracție din expresie reprezintă mărimea *constantă* a tensiunii longitudinale σ_x , iar forma expresiei arată că această valoare este *media aritmetică* a celorlalte două tensiuni principale:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_r(r) + \sigma_t(r)}{2}$$

Se ajunge la ideea că tensiunile σ_x sunt puțin importante în calculele de rezistență, mai ales dacă se folosesc teoriile de rupere bazate pe valorile extreme ale tensiunilor principale (așa cum sunt teoriile σ_{\max} și τ_{\max}). Variația pe grosimea pereților a tensiunilor - radiale și circumferențiale – care contează pentru calcule se analizează separat, pentru cele două categorii mari de solicitări posibile.

Tuburi cilindrice cu pereți groși

A. Tuburi solicitate numai de presiuni exterioare

Relațiile pentru calculul tensiunilor din secțiuni se obțin (sub formă unificată) înlocuind $p_i = 0$ în formula generală dată mai sus:

$$\sigma_{r,t}(r) = -\frac{p_e \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \pm \frac{p_e}{r^2} \cdot \frac{R_i^2 \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Pe baza acestor expresii este de remarcat că, în cazurile în care $R_i=0$ (piese pline, de tip arbore, presate din exterior), se obține $\sigma_r = \sigma_t = -p_e$, adică tensiunile nu mai depind de raza r și sunt egale între ele în orice punct din volumul piesei studiate.

Pentru a stabili evoluția tensiunilor, atunci când raza punctului de calcul crește de la R_i la R_e se scriu, pe rând, relațiile celor două categorii de tensiuni și se studiază funcțiile astfel obținute.

a) Tensiunile radiale au următoarea lege de variație

$$\sigma_r(r) = -p_e \cdot \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2} \right)$$

Termenul al doilea din paranteză este subunitar și scade mereu, când punctul de calcul parcurge grosimea peretelui de la interior spre exterior, iar valoarea parantezei crește, fiind pozitivă pe toată grosimea, încât tensiunile sunt peste tot negative; variația este de tip hiperbolic, iar valorile la capetele diagramei sunt:

$$r = R_i \Rightarrow \sigma_r = 0; \quad r = R_e \Rightarrow \sigma_r = -p_e \cdot \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_e^2} = -p_e$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

b) **Tensiunile circumferențiale** au următoarea dependență de raza r a punctului de calcul:

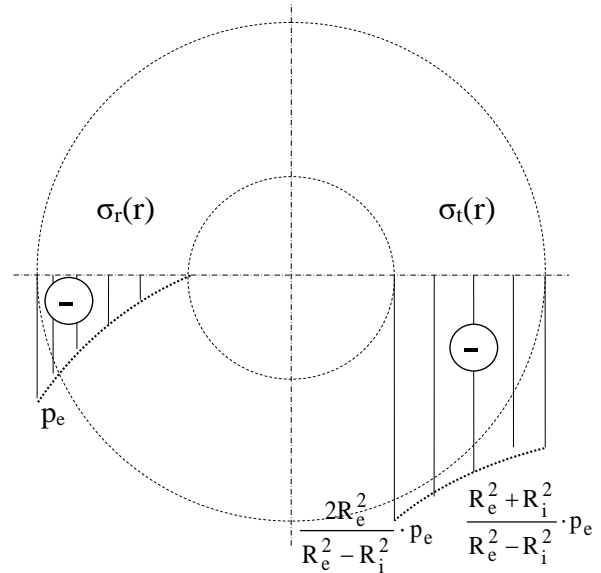
$$\sigma_t(r) = -p_e \cdot \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_i^2}{r^2} \right)$$

Evoluția este descrescătoare, iar valorile de la capetele intervalului de definiție sunt:

$$r = R_i \Rightarrow \sigma_t = -p_e \cdot \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}; \quad r = R_e \Rightarrow \sigma_t = -p_e \cdot \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Graficele de variație a tensiunilor date în figura alăturată arată că solicitarea periculoasă a tubului se produce *la interior*, unde starea de tensiuni este de *compresare monoaxială* (componentele radiale sunt nule); condiția de rezistență (folosind limita admisibilă la comprimare σ_{ac} a materialului tubului) se scrie:

$$\frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot p_e \leq \sigma_{ac}$$



Tuburi cilindrice cu pereți groși

De obicei folosind această relație se calculează valoarea *necesară* a razei **exterioare** R_e , cunoscând ceilalți parametri ai tubului proiectat, prin parcurgerea unor operații matematice simple:

$$R_i^2 \cdot \sigma_{ac} \leq R_e^2 \cdot \sigma_{ac} - 2R_e^2 \cdot p_e \Rightarrow R_{e\min} = R_i \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{ac} - 2p_e}}$$

Ultima formulă arată că există valori de presiune exterioară pe care un tub de genul abordat nu le poate prelua, indiferent cât ar crește grosimea pereților lui.

Astfel, din condiția – strict necesară - ca numitorul fracției de sub radical să fie pozitiv rezultă o limitare importantă a presiunilor exterioare suportate de tuburile cu pereți groși, care trebuie să fie mai mici cu cel puțin 50% față de rezistența admisibilă la **comprimare** a materialului lor!

Tuburi cilindrice cu pereți groși

B. Tuburi solicitate numai de presiuni interioare

Relațiile pentru calculul tensiunilor din secțiuni se obțin înlocuind $p_e = 0$ în formula generală de mai sus:

$$\sigma_{r,t}(r) = \frac{p_i \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \pm \frac{(-p_i)}{r^2} \cdot \frac{R_i^2 \cdot R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

a) **Tensiunile radiale** au următoarea lege de variație

$$\sigma_r(r) = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right)$$

Ultima fracție este mai mare ca unitatea și diferența din paranteză este *negativă* și scade mereu, când raza de calcul crește de la interior către exterior, încât valorile tensiunii sunt descrescătoare și peste tot negative.

Variația lor este de tip hiperbolic, iar valorile din punctele de la capetele diagramei sunt:

$$r = R_i \Rightarrow \sigma_r = \frac{p_i \cdot R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{R_i^2 - R_e^2}{R_i^2} = -p_i ; \quad r = R_e \Rightarrow \sigma_r = 0$$

b) **Tensiunile circumferențiale** au următoarea dependență de raza r a punctului de calcul:

$$\sigma_t(r) = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right)$$

Paranteza este *pozitivă* descrescătoare, la fel și evoluția tensiunilor, iar valorile la capete sunt:

$$r = R_i \Rightarrow \sigma_t = p_i \cdot \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} ; \quad r = R_e \Rightarrow \sigma_t = p_i \cdot \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

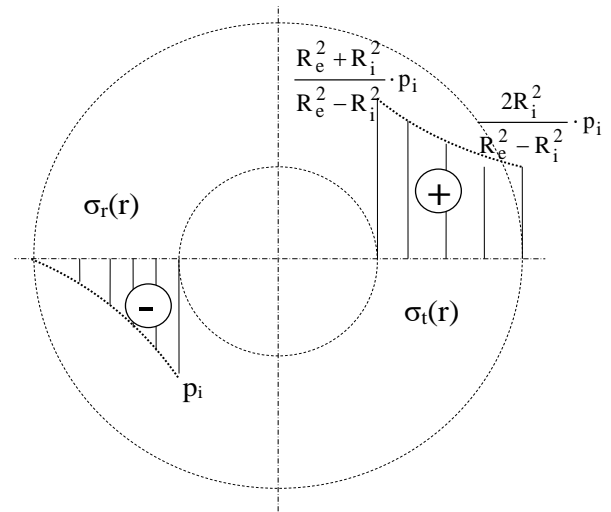
Din graficele alăturate, ale celor două categorii de tensiuni se observă că solicitarea periculoasă a tubului are loc *la interior*, unde starea de tensiuni este **plană** (respectiv *spațială*, în tuburile închise la capete, la care s-a arătat că tensiunea longitudinală este cât media valorilor celorlalte două), cu tensiunile principale extreme având semne contrare; în astfel de cazuri este util să se calculeze efectul lor global folosind *ipoteza de rupere* τ_{\max} , iar relația calculului de rezistență se obține astfel:

$$\sigma_{\text{ech max}} = \sigma_1 - \sigma_2 = p_i \cdot \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} + p_i = p_i \cdot \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \leq \sigma_a$$

Se observă asemănarea acesteia cu expresia similară de la tuburile cu presiune exterioară, încât valoarea *necesară* a razei **exterioare** R_e va avea practic aceeași formulă de calcul ca mai sus:

$$R_{e \text{ min}} = R_i \cdot \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p_i}}$$

Și pentru tuburile cu presiuni interioare se constată că nu pot prelua valori de presiune oricât de mari, întrucât acestea trebuie să fie mai mici cu cel puțin 50% față de rezistența admisibilă a materialului din care sunt făcute!

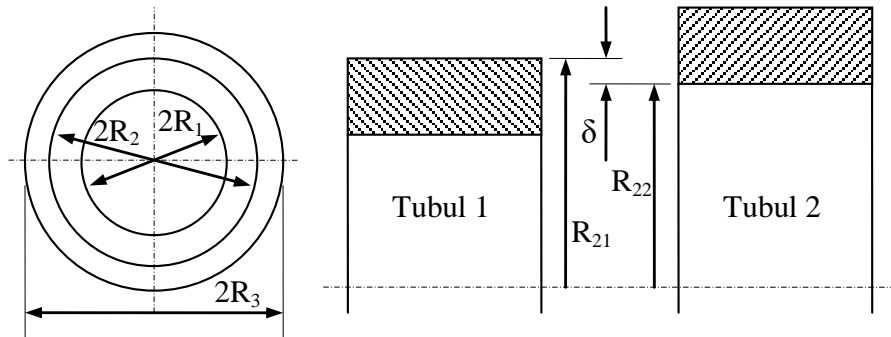


Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi fretate

Există mai multe metode prin care poate fi extins intervalul de presiuni *interioare* pe care un tub cu pereți groși le suportă; principiul de bază este aplicarea la exteriorul tubului a unei solicitări de comprimare (*pretensionare*), astfel încât să se modifice în mod convenabil repartiția tensiunilor în pereții corpului studiat.

Comprimarea exterioară se obține, de pildă, prin înfășurarea (bobinarea) strânsă a unui cablu de oțel, dar cel mai des se aplică operația de *fretare*: tubul tratat se introduce în interiorul altui tub cu pereți groși, cu diametrul interior ceva mai mic (cu diferențe maxime de ordinul zecimilor de milimetri) față de cota exterioară a tubului inițial; îmbinarea **cu strângere** se face *prin presare* sau aducând la *temperaturi ridicate* tubul exterior pentru a se dilata înainte de montare.



Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi fretate

Diferența dintre *razele* de montare R_2 ale celor două tuburi (a se vedea figura de mai sus), notată de obicei δ este „strângerea de fretare” și intră în relație de dependență cu *presiunea de fretare* p_o , dar și cu razele tuburilor și caracteristicile elastice (modulul lui Young și coeficientul lui Poisson) ale materialelor din care sunt făcute, astfel:

$$\delta = p_o \cdot R_2 \left[\frac{1}{E_2} \left(\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + \nu_2 \right) + \frac{1}{E_1} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \nu_1 \right) \right]$$

Dacă tuburile sunt din același material, această relație se simplifică foarte mult:

$$\delta = \frac{p_o \cdot R_2}{E} \cdot \left(\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

Aceste expresii se folosesc, de obicei, pentru a calcula presiunea ce apare între cele două tuburi, pentru o valoare dată a strângerii δ , atunci când celelalte mărimi din relații sunt cunoscute; de exemplu, pentru tuburi făcute din același material, din relația pentru calculul strângerii de fretare se obține următoarea formulă a presiunii care se produce prin fretare:

$$p_o = \frac{\delta \cdot E \cdot (R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R_2^2)}{2 \cdot R_2^3 \cdot (R_3^2 - R_1^2)}$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

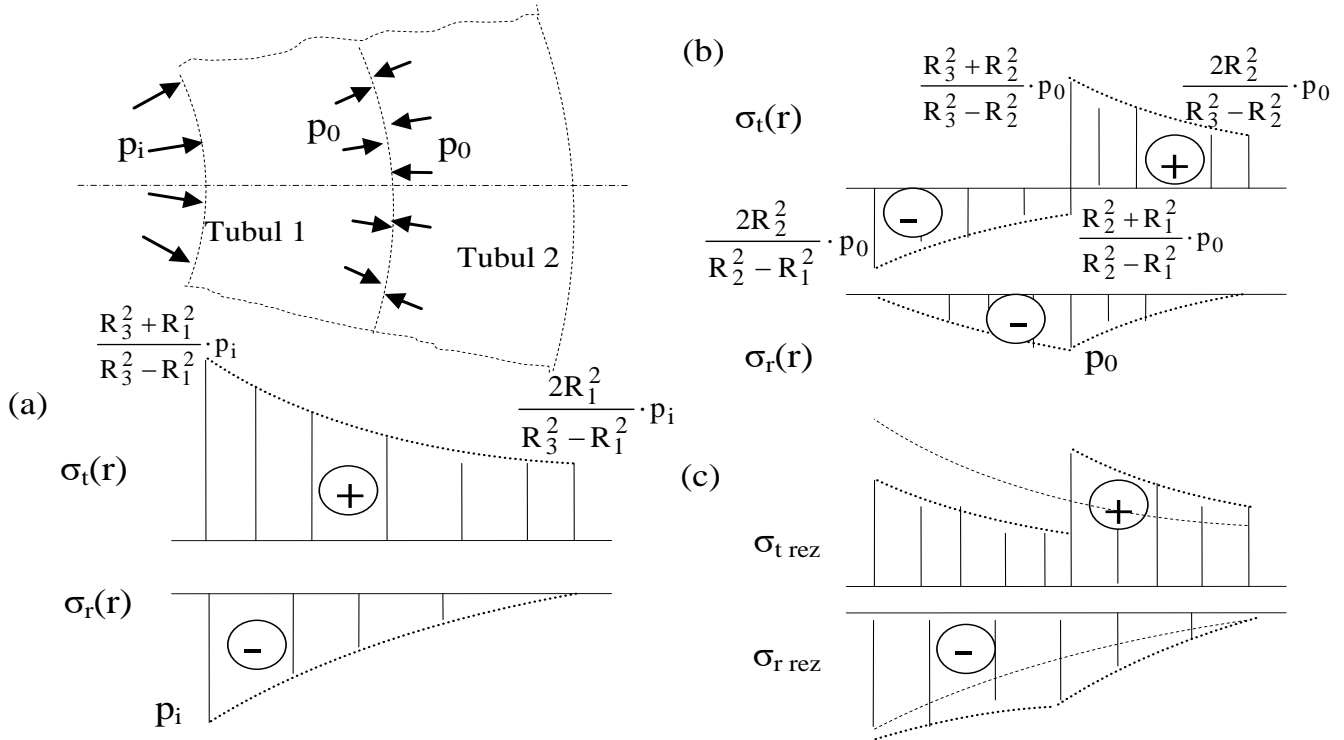
Tuburi fretate

După calculul acestei valori este interesant să fie urmărită (procedând ca în figura din pagina următoare) influența presiunii suplimentare asupra distribuției de tensiuni în pereții celor două tuburi; se trasează mai întâi (graficele **a**) diagramele tensiunilor principale produse (în tubul *compus*, considerat global) de acțiunea *presiunii interioare* p_i pe care trebuie să o preia tubul interior. Se studiază apoi (**b**) tensiunile produse de *presiunea de fretare* p_o , care acționează ca presiune *exterioară* în tubul inițial 1, respectiv *interioară* pentru tubul suplimentar 2; în final (**c**) se trasează diagramele pentru cele două categorii de tensiuni *rezultante* din pereții tuburilor.

Figura prezintă, în ordinea precizată, cele trei categorii de diagrame, trasate pentru tensiunile care apar în pereții tubului compus studiat; de pe graficele tensiunilor rezultante se observă că prin comprimarea exterioară a tubului inițial se obține un efect *favorabil* – micșorarea tensiunii periculoase $\sigma_t(R_1)$, dar și un efect *negativ*, produs prin creșterea importantă a tensiunii circumferențiale la interiorul tubului suplimentar; această tensiune este de obicei mai mică decât valoarea inițială $\sigma_t(R_1)$, dar trebuie observat că starea periculoasă de solicitare se produce la interiorul tubului 2 și acolo se va face calculul de rezistență pentru tubul global proiectat.

Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi fretate



Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi fretate

O discuție importantă se referă la *optimizarea* unei astfel de îmbinări: alegând în mod convenabil mărimea δ a strângerii de fretare, se poate ajunge la același nivel de solicitare maximă în cele două tuburi utilizate; apoi, folosind ipoteza de rupere τ_{\max} și egalând valorile tensiunilor echivalente din punctele cele mai solicitate ale tuburilor (admise a fi fabricate din același material), se obține o relație de calcul pentru δ_{optim} , astfel:

$$\delta_{\text{optim}} = \frac{2p_i \cdot R_2}{E} \cdot \frac{R_3^2(R_2^2 - R_1^2)}{R_3^2(R_2^2 - R_1^2) + R_2^2(R_3^2 - R_2^2)}$$

Cu această valoare se poate calcula $\sigma_{\text{ech max}}$ din cele două tuburi, iar dacă se derivează în raport cu raza de graniță R_2 expresia astfel obținută și se egalează cu zero rezultatul se găsește că în tubul global obținut prin fretare solicitarea rezultantă va fi minimă (și la fel de periculoasă în cele două tuburi) atunci când *raza comună* a tuburilor componente va avea valoarea:

$$R_{2\text{optim}} = \sqrt{R_1 \cdot R_3}$$

Pe baza acestui rezultat se poate calcula *tensiunea echivalentă maximă* din tuburi, reprezentând cea mai mică valoare posibilă a acestei mărimi:

$$\sigma_{\text{ech max}}^{\min} = \frac{R_3}{R_3 - R_1} \cdot p_i$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

Tuburi fretate

Pe de altă parte, introducând valoarea optimă a *razei* comune în prima relație de mai sus se calculează *strângerea optimă* care îi corespunde; pentru început, este suficient să se aducă la o formă mai simplă ultima fracție din relația respectivă, astfel:

$$\frac{R_3^2(R_1 \cdot R_3 - R_1^2)}{R_3^2(R_1 \cdot R_3 - R_1^2) + R_1 \cdot R_3(R_3^2 - R_1 \cdot R_3)} = \frac{R_3^2 \cdot R_1 \cdot (R_3 - R_1)}{R_3^2 \cdot R_1 \cdot (R_3 - R_1) + R_3^2 \cdot R_1 \cdot (R_3 - R_1)} = \frac{1}{2}$$

Rezultă așadar că strângerea optimă care trebuie folosită la fretare va fi:

$$\delta_{\text{optim}} = \frac{p_i \cdot R_2}{E} = \frac{p_i}{E} \sqrt{R_1 \cdot R_3}$$

Expresiile matematice care se referă la optimizarea constructivă a tuburilor îmbinate prin fretare sunt cunoscute ca *relațiile lui Gadolin* și stau la baza calculelor de proiectare din acest domeniu; se poate demonstra că fretarea este avantajoasă numai pentru tuburile care au raza interioară R_1 mult mai mică decât cea exterioară R_3 .

Mai trebuie precizat că, deoarece relațiile de mai sus se demonstrează pe baza proprietăților elastice ale materialelor și a regulilor din teoria elasticității, ele sunt valabile numai dacă în tot volumul tubului global tensiunile au valori aflate sub limita de proporționalitate a materialului folosit; în caz contrar, calculul va conduce la alte rezultate, întrucât trebuie făcut pe baza teoriei plasticității.

Tuburi cilindrice cu pereți groși

APLICAȚII

1. Calculul cilindrilor de prese

Se proiectează o presă hidraulică, având capacitatea $F_{\max} = 250\text{tf}$; se cere să se dimensioneze cilindrul presei, știind că diametrul său interior este $D_i=400\text{mm}$ și că materialul din care este făcut are rezistența admisibilă $\sigma_a=100\text{MPa}$.

Rezolvare

Cilindrul presei este un tub cu pereți groși, solicitat de presiunea interioară de lucru, a cărei valoare maximă trebuie calculată din forța pe care o dezvoltă presa, astfel:

$$p_{i\max} = \frac{F_{\max}}{\pi \cdot R_i^2} = \frac{250 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot (200\text{mm})^2} = \frac{125}{2\pi} \text{ MPa} = 19,9\text{MPa} = 199\text{atm}$$

Se poate observa că tuburile de acest fel sunt destinate să suporte presiuni ridicate, de obicei cu un ordin de mărime mai mari decât cele întâlnite la vasele cu pereți subțiri; de aici apare necesitatea grosimilor mari ale pereților.

Dimensionarea cilindrului înseamnă stabilirea valorii minime a razei sale exterioare, folosind relația de calcul stabilită mai sus:

$$R_{e\min} = R_i \cdot \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p_i}} = 200\text{mm} \cdot \sqrt{\frac{100\text{MPa}}{(100 - 2 \cdot 20)\text{MPa}}} = 258,2\text{mm}$$

Se poate adopta valoarea $R_{e\text{ad}} = 260\text{mm}$, deci cilindrul va avea dimensiunea exterioară $D_e = 520\text{mm}$.

Tuburi cilindrice cu pereți groși

APLICAȚII

2. Calculul unor tuburi fretate

Se proiectează un tub cu pereți groși care trebuie să preia o presiune interioară $p_i=150\text{MPa}$, în condițiile în care materialul avut la dispoziție este un oțel cu rezistența admisibilă de doar 250MPa ; este nevoie de un tub compus, cu îmbinare prin fretare, cu diametrul interior $D_i=2R_1=300\text{mm}$; să se stabilească valorile potrivite ale razelor R_2 , R_3 și strângerii δ , pentru ca tubul să funcționeze în cele mai bune condiții posibile.

Rezolvare

Calculul *optimizat* al îmbinării se bazează pe relațiile lui Gadolin, date mai sus; mai întâi se poate stabili *raza exterioară* a tubului global, plecând de la formula tensiunii echivalente optimizate:

$$\sigma_{\text{ech max}}^{\text{min}} = \sigma_a = \frac{R_3}{R_3 - R_1} \cdot p_i \Rightarrow R_{3\text{nec}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_a - p_i} \cdot R_1 = \frac{250}{250 - 150} \cdot 150\text{mm} = 375\text{mm}$$

Se calculează apoi valoarea necesară pentru *raza comună optimă* a celor două tuburi, folosind formula corespunzătoare:

$$R_{2\text{optim}} = \sqrt{R_1 \cdot R_3} = \sqrt{150\text{mm} \cdot 375\text{mm}} = 237,17\text{mm} \approx 237\text{mm}$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși

APLICAȚII

2. Calculul unor tuburi fretate

Această valoare a razei comune trebuie înlocuită în relația care dă *strângerea optimă de fretare* pentru montarea celor două tuburi:

$$\delta_{\text{optim}} = \frac{p_i \cdot R_2}{E} = \frac{150 \text{MPa} \cdot 237 \text{mm}}{21 \cdot 10^4 \text{MPa}} = 0,169 \text{mm}$$

Rezultatul obținut arată că tubul suplimentar trebuie să aibă diametrul interior *mai mic* cu 0,338mm față de cota exterioară a tubului de bază.

Dacă se alege ca îmbinarea să fie realizată prin *încălzirea* tubului exterior, admițând că temperatura va crește cu ΔT și luând valoarea uzuală, pentru oțeluri carbon, a coeficientului de dilatare liniară $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{grd}^{-1}$, se scrie creșterea de diametru din relația clasică a dilatărilor liniare $\Delta D = \alpha \cdot D_i \cdot \Delta T$; folosind apoi valoarea strângerii optime de mai sus se calculează diferența de temperatură cu care tubul suplimentar trebuie încălzit, astfel:

$$\Delta T_{\text{nec}} = \frac{\delta_{\text{optim}}}{\alpha \cdot D_2} = \frac{0,338 \text{mm}}{1,2 \cdot 10^{-5} \text{grd}^{-1} \cdot (2 \cdot 237 \text{mm})} = \frac{16900}{1,2 \cdot 237} \text{grd} = 59,423 \text{grd} \approx 60 \text{grd}$$

S-a obținut așadar că, pentru o montare corectă a îmbinării fretate care s-a proiectat, tubul suplimentar trebuie încălzit cu cel puțin 60°C față de temperatura ambiantă.

2.14

Discuri (de grosimi mici și uniforme) în mișcare de rotație

Discuri în mișcare de rotație

Calculul corpurilor masive din această categorie se face după aceleași principii ca la tuburile cu pereți groși, cu diferența importantă că solicitarea lor exterioară este dată de forțele *centrifuge* produse prin rotirea corpului considerat, cu *viteza unghiulară* constantă ω , în jurul axei sale longitudinale de simetrie.

Discurile de acest fel au formă cilindrică scurtă, având înălțimea egală cu *grosimea* h a discului, de valoare constantă pe înălțimea corpului și relativ mică față de diametrul lui exterior ($D_e = 2R_e$); cilindrul are de obicei un gol la interior, tot cilindric, de diametru relativ mic ($D_i = 2R_i$), necesar pentru ca discul să fie montat pe axul care îl va antrena în rotație. Pentru calculul de proiectare mai sunt importante *greutatea specifică* γ , respectiv *densitatea* $\rho = \gamma/g$ ale materialului din care va fi făcut discul ce trebuie analizat.

Trebuie observat că, datorită valorii mici a lui h , tensiunile din material nu variază pe grosimea discului; în plus, componentele lor dirijate paralel cu axa de rotație (σ_x) pot fi considerate nule, astfel încât se admite că în orice punct din volumul unui astfel de disc solicitarea prin forțele centrifuge produce o **stare plană** de tensiuni.

Discuri în mișcare de rotație

Studiind echilibrul dinamic al unui volum elementar plasat la raza r față de axa de rotație, se pot exprima cele două feluri de tensiuni principale în funcție de deformațiile specifice care apar în material; acestea se introduc în ecuația diferențială provenind din condițiile de echilibru, după care se ajunge la expresiile tensiunilor principale, conținând inclusiv două constante de integrare.

Valorile acestor constante se stabilesc scriind condițiile la limită (care exprimă faptul că $\sigma_r=0$ pe suprafețele libere ale discului, unde nu există presiuni), iar relațiile după care tensiunile principale variază în funcție de raza de poziție r a punctului de calcul se vor scrie astfel:

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{8g} \cdot (3 + \nu) \left(R_e^2 + R_i^2 - \frac{R_e^2 \cdot R_i^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_t(r) = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{8g} \cdot (3 + \nu) \left(R_e^2 + R_i^2 + \frac{R_e^2 \cdot R_i^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{cases}$$

Se poate observa că dependența de rază a tensiunilor principale din materialul discurilor în rotație are o formă mai complexă decât în cazul tuburilor cu pereți groși.

Discuri în mișcare de rotație

Prima dintre expresiile de mai sus arată că valorile tensiunilor *radiale* sunt nule la capetele intervalului de variație, iar anulând derivata în raport cu r a expresiei $\sigma_r(t)$ se poate găsi raza r_0 care corespunde punctului de extrem al funcției, sub forma:

$$r_0 = \sqrt{R_i \cdot R_e}$$

Dacă se introduce acest rezultat în expresia dată a $\sigma_r(t)$ se obține valoarea maximă (care nu este trecută pe graficul din figura alăturată) a acestor tensiuni, astfel:

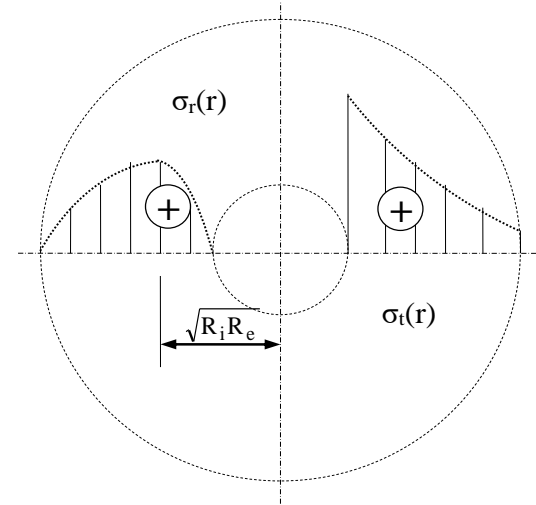
$$\sigma_{r \max} = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \cdot (3 + \nu)(R_e - R_i)^2$$

Funcția tensiunilor *circumferențiale* este strict descrescătoare și la capetele intervalului de definiție se obțin, după transformări relativ simple, expresiile următoare:

$$\begin{cases} \sigma_t(R_i) = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3 + \nu) \cdot R_e^2 + (1 - \nu) \cdot R_i^2] = \frac{(3 + \nu) \cdot \gamma \omega^2}{4g} \left[R_e^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \cdot R_i^2 \right] \\ \sigma_t(R_e) = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3 + \nu) \cdot R_i^2 + (1 - \nu) \cdot R_e^2] = \frac{(3 + \nu) \cdot \gamma \omega^2}{4g} \left[R_i^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \cdot R_e^2 \right] \end{cases}$$

Diagramele trasate mai sus arată că solicitarea periculoasă se produce la *interiorul* discului, unde starea de tensiuni este *uniaxială*, încât **condiția de rezistență** pentru acest tip de discuri se va scrie astfel:

$$\sigma_{ech \max}(r) = \sigma_t(R_i) = \frac{(3 + \nu) \cdot \gamma \omega^2}{4g} \left[R_e^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \cdot R_i^2 \right] \leq \sigma_a$$



Discuri în mișcare de rotație

Luând în atenție discurile **compacte**, *fără gaură* la interior, calculul tensiunilor principale se bazează în cazul lor tot pe relațiile generale date mai sus, în care se introduce pentru raza interioară valoarea $R_i = 0$, de unde rezultă următoarele formule:

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{8g} \cdot (3 + \nu) (R_e^2 - r^2) \\ \sigma_t(r) = \frac{\gamma \cdot \omega^2}{8g} \cdot (3 + \nu) \left(R_e^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{cases}$$

Ambele legi de variație sunt *descrescătoare* cu raza de poziție r , cu valorile lor maxime, din centrul discului, egale între ele:

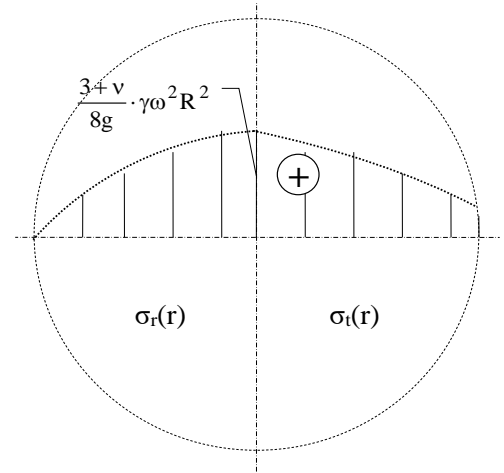
$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \frac{3 + \nu}{8g} \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot R_e^2$$

Tensiunile *radiale* sunt și în acest caz nule la exteriorul discului, în vreme ce făcând calculele se obține că tensiunile $\sigma_t(r)$ au la raza exterioră valoarea:

$$\sigma_t(R_e) = \frac{1 - \nu}{4g} \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot R_e^2$$

Solicitarea periculoasă are loc *în centrul discului*, cu tensiuni de aceeași valoare în toate direcțiile, încât după prima teorie de rupere **condiția de rezistență** pentru astfel de discuri se va scrie sub forma:

$$\sigma_{ech \max}(r) = \sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \frac{3 + \nu}{8g} \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot R_e^2 \leq \sigma_a$$



Discuri în mișcare de rotație

Exemplu de calcul

Pentru un disc din oțel, având rezistența admisibilă $\sigma_a=160\text{MPa}$, greutatea specifică $\gamma=78\times 10^{-6}\text{N/mm}^3$ și coeficientul de contracție transversală $\nu=0.3$, să se stabilească turația maximă pe care o poate suporta, știind că este plin, adică fără gaură centrală, iar diametrul lui este $D=0.6\text{m}$.

Rezolvare

Din relația de mai sus a condiției de rezistență se stabilește viteza unghiulară admisibilă:

$$\omega^2 \leq \frac{8g \cdot \sigma_a}{(3 + \nu) \cdot \gamma \cdot R^2} \Rightarrow \omega_{\max}^2 = \frac{8 \cdot 9,8 \cdot 10^3 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{3,3 \cdot 78 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot (300\text{mm})^2} = \frac{8 \cdot 9,8 \cdot 16}{3,3 \cdot 78 \cdot 9} \cdot 10^6 \text{s}^{-2}$$

Efectuând calculele se ajunge la valoarea $\omega_{\max} = 736\text{rad/s}$; turația maximă permisă se obține dintr-o relație cunoscută din mecanică:

$$n_{\max} = \frac{30}{\pi} \cdot \omega_{\max} = \frac{30}{\pi} \cdot 736 \frac{\text{rot}}{\text{min}} = 7028 \frac{\text{rot}}{\text{min}}$$

Discul calculat suportă așadar turații destul de mari, de până la 7000 ture/min.

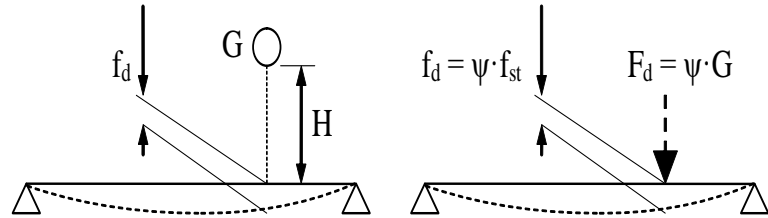
2.15

Solicitări aplicate prin șocuri

Solicitări aplicate prin șocuri

Efectele produse prin lovirea barelor sunt mai importante decât cele produse prin aplicarea statică asupra lor a unei încărcări oarecare; amploarea acestei diferențe se cuantifică prin calcule proprii solicitărilor prin șoc.

Se imaginează o grindă simplu rezemată, lovită de greutatea G , în cădere liberă de la înălțimea H ; se admite că deformația f_d produsă pe grindă de solicitarea prin șoc este de un număr ψ de ori mai mare



decât deformația f_{st} pe care o produce, în același punct de contact, forța G aplicată fără șoc, cu masa respectivă așezată simplu pe grindă; este ca și cum în punctul de contact ar fi aplicată o *forță dinamică* F_d , mai mare și ea de ψ ori decât greutatea G .

Numărul pozitiv ψ , mereu supraunitar (de obicei mult mai mare ca 1) și numit **multiplicator de impact** arată de câte ori sunt mai mari efectele (tensiuni și deformații) solicitării dinamice, față de cele ale încărcării aplicate fără șoc – **solicitarea statică echivalentă** (SSE) a încărcării dinamice studiate; valoarea factorului de impact apare așadar ca mărime a mai multor rapoarte egale:

$$\psi = \frac{F_d}{G} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{f_d}{f_{st}} \quad (1)$$

Solicitări aplicate prin șocuri

Se aplică solicitării dinamice de mai sus *legea de conservare a energiei* - egalitatea între *energia potențială* inițială a corpului de greutate G (produsul dintre G și înălțimea $[H + f_d]$ la care se afla, față de poziția de după aplicarea șocului a punctului de impact) și *lucrul mecanic* de deformare elastică prin care se produce deformația dinamică a grinzii (semi-produsul dintre forța dinamică F_d și deformația f_d pe care aceasta o

produce pe grindă); legea de conservare se scrie: $L_{ed} = L_{id} \Leftrightarrow G \cdot (H + f_d) = \frac{F_d \cdot f_d}{2}$

Exprimând mărimile dinamice în funcție de cele statice echivalente rezultă:

$$G \cdot H + G \cdot \psi \cdot f_{st} = \psi^2 \cdot \frac{G \cdot f_{st}}{2}$$

Analog cu mărimile energetice de la solicitarea dinamică, în ultima expresie se recunosc mărimile ce le corespund (pentru simplitate se vor nota fără indicele „st”) în starea statică (înainte de aplicarea șocului), adică *energia potențială* $L_e = G \times H$, respectiv *lucrul mecanic* de deformare elastică $L_i = (G \times f_{st})/2$; făcând aceste substituții și trecând toți termenii în membrul drept, se obține:

$$\psi^2 \cdot L_i - 2\psi \cdot L_i - L_e = 0 \Leftrightarrow \psi^2 - 2\psi - \frac{L_e}{L_i} = 0$$

Rezolvând ecuația de gradul doi se obțin două valori ale factorului ψ , dintre care doar una este pozitivă și se potrivește condițiilor problemei:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_e}{L_i}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{G \cdot H}{\frac{1}{2} \cdot G \cdot f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{st}}} \quad (2)$$

Solicitări aplicate prin șocuri

Observații asupra relației factorului de impact

1. La numitorul fracției de sub radical apare **deformația** produsă în *solicitarea statică echivalentă* (SSE), în *punctul de impact*; această valoare este *unică* pentru o problemă dată, deci multiplicatorul ψ are **o singură valoare** în orice aplicație de solicitare prin șoc.
2. Înălțimea de cădere **H** este mult mai mare (cu două ordine de mărime, cel puțin) decât *deplasarea* din starea statică a punctului de impact, iar fracția de sub radical este preponderentă față de unitate, încât pentru simplificarea calculelor factorul ψ se folosește uneori cu o valoare **aproximată**:

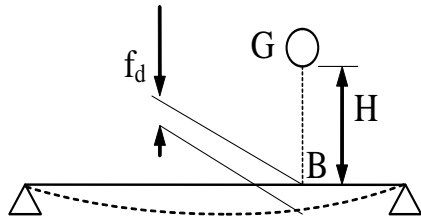
$$\psi \cong \sqrt{\frac{2H}{f_{st}}} \quad (3)$$

3. Mărimea **L_i** din prima variantă a expresiei lui ψ reprezintă, pentru o solicitare statică echivalentă oarecare (simplă sau compusă), **lucrul mecanic L_i de deformare elastică** acumulat în bară, având relații de calcul stabilite la solicitările simple.
4. Dacă șocul nu este produs de o masă în cădere, ci de una **proiectată**, cu viteza **v**, asupra corpului lovit, se echivalează aceasta cu o înălțime de cădere H, pe baza *relației lui Galilei* $v^2 = 2g \times H$ (**g** fiind accelerația gravitațională); rezultă o nouă relație a factorului ψ :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{st}}} \quad (4)$$

Metoda bazată pe factorul de impact nu este unica soluție posibilă pentru aceste probleme, dar are avantajul că se aplică oricărei solicitări prin șoc, simplă sau compusă; condiția importantă pentru aplicarea ei este ca deformațiile de pe bara lovită să fie *liniar-elastice*, întrucât în mare parte discuția de mai sus se bazează pe energia potențială de deformare elastică acumulată în corpul solicitat prin șoc.

Solicitări aplicate prin șocuri



Se înțelege că, pentru o solicitare ca în figură, unde a fost notat cu B **punctul de impact**, *multiplicatorul* are valoarea unică:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{st}(B)}} \quad (5)$$

Tensiunea dinamică și **deplasarea** dinamică din orice secțiune A de pe grinda analizată (inclusiv din secțiunea B) vor avea relațiile:

$$\sigma_d(A) = \psi \cdot \sigma_{st}(A) \quad \text{respectiv} \quad f_d(A) = \psi \cdot f_{st}(A) \quad (6)$$

Prin urmare, solicitarea dinamică periculoasă are loc în secțiunea unde tensiunea atinge valoarea maximă în solicitarea statică echivalentă, iar *condiția de rezistență* se scrie:

$$\sigma_{d \max}(x) = \psi \cdot \sigma_{st \max}(x) \leq \sigma_a \quad (7)$$

Trebuie remarcat rolul elementelor *elastice* de sprijin (deformabile sub încărcări exterioare) în **amortizarea șocurilor**: dacă măcar un reazem al grinzii de mai sus este un *resort elastic*, deformarea lui crește deformația statică din punctul de impact și scade valoarea fracției de sub radical în relația (5), adică scade factorul de impact și efectele produse prin șocuri!

Solicitări aplicate prin șocuri

Calculul *dinamic* al unei bare cotate, cu forță perpendiculară pe planul ei

Se consideră o bară cotică în formă de L, de secțiune circulară cu diametrul d , încastrată la un capăt și liberă la celălalt, unde se produce contactul cu masa m , care cade vertical, de la înălțimea H . Se cer valorile maxime ale tensiunii și deplasărilor verticale, dacă $m=6\text{kg}$, $H=0.1\text{m}$, $a=0.3\text{m}$, $d=30\text{mm}$, $E=21 \times 10^4 \text{MPa}$.

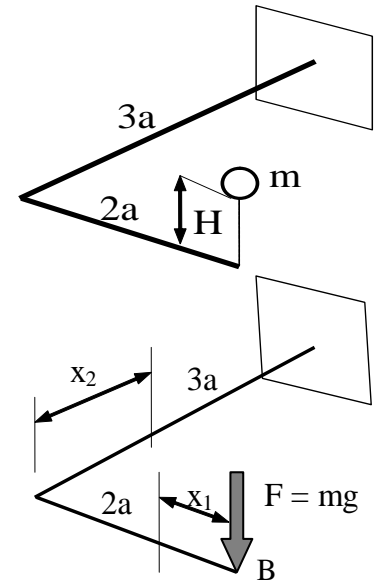
Rezolvare

În această situație *solicitarea statică echivalentă* este **compusă** (de răsucire cu încovoiere) și a fost tratată în detaliu într-o aplicație anterioară (pg. 84-88); o parte dintre rezultatele parțiale vor fi preluate de acolo; de exemplu, s-a stabilit că deplasarea statică (pe verticală) din punctul de impact are valoarea:

$$f_{st}(B) = \delta_v(B) = 27,27 \cdot \frac{F \cdot a^3}{E \cdot I_z}$$

Datele numerice din situația de față conduc la:

$$f_{st}(B) = 27,27 \cdot \frac{mg \cdot a^3}{E \cdot \frac{\pi d^4}{64}} = 64 \cdot 27,27 \cdot \frac{(6 \cdot 9,8)\text{N} \cdot (300\text{mm})^3}{\pi \cdot 21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (30\text{mm})^4} = \frac{128 \cdot 27,27 \cdot 9,8}{2100 \cdot \pi} \text{mm} = 5,185 \text{mm}$$



Solicitări aplicate prin șocuri

Calculul *dinamic* al unei bare cotate, cu forță perpendiculară pe planul ei

Pe de altă parte, din ipoteza de rupere τ_{\max} s-a obținut că tensiunea echivalentă maximă din bară (în secțiunea din încastrare) este (pentru cazul de față):

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{st max}}(x) &= \sigma_{\text{ech max}}(x) = \frac{M_{\text{iech max}}(x)}{W_z} = \frac{3,61 \cdot a \cdot (\text{mg})}{\frac{\pi d^3}{32}} = \\ &= \frac{32 \cdot 3,61 \cdot 300 \text{ mm} \cdot (6 \cdot 9,8) \text{ N}}{\pi \cdot (30 \text{ mm})^3} = \frac{32 \cdot 3,61 \cdot 6 \cdot 9,8}{90\pi} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 24,024 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Multiplicatorul de impact este: $\psi_{\text{ef}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \text{ mm}}{5,185 \text{ mm}}} = 7,29$

Valorile maxime ale tensiunilor și deplasărilor verticale, din bara solicitată dinamic vor fi următoarele:

$$\sigma_{\text{d max}}(x) = \psi_{\text{ef}} \cdot \sigma_{\text{st}}(B) = 7,29 \cdot 24,024 \text{ MPa} = 175,135 \text{ MPa}$$

$$f_{\text{d max}}(x) = \psi_{\text{ef}} \cdot f_{\text{st}}(B) = 7,29 \cdot 5,185 \text{ mm} = 37,8 \text{ mm}$$

2.16

Aspecte cu privire la oboseala materialelor

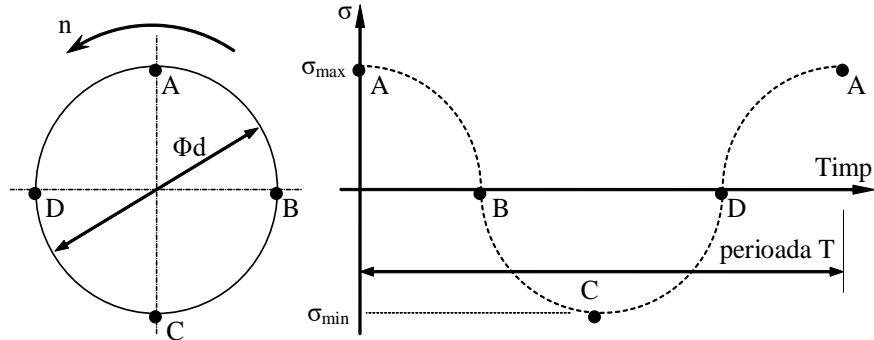
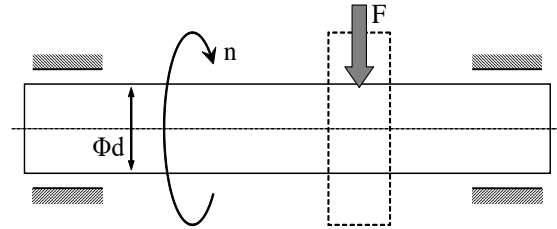
Oboseala materialelor

Particularități ale solicitărilor care variază periodic

Fie un arbore de transmisie, care susține o roată dințată (cu dantură dreaptă, ca să nu existe solicitări axiale în arbore), pe care acționează forța F , perpendiculară pe axa de rotație; direcția forței este mereu fixă, în vreme ce arborele se rotește continuu (împreună cu roata) cu turația n [ture pe minut], încât în fiecare punct de pe circumferința oricărei secțiuni transversale a arborelui tensiunile de încovoiere variază între mărimile lor extreme σ_{\max} și σ_{\min} , egale și de sensuri contrare.

Pe graficul alăturat apar mărimile tensiunilor din toate punctele circumferinței, secțiunea urmărită fiind arătată în stânga; după un sfert de rotație, B ajunge în poziția de la început a lui A, C în B etc. și această schimbare de locuri se

petrece continuu; după o rotație completă fiecare punct de pe circumferință parcurge toate pozițiile indicate cu linii punctate pe grafic și revine la locul său inițial, după care ciclul se reia în întregime; fiecare rotație a arborelui face să apară în punctele de pe suprafața exterioară o solicitare variabilă a cărei *periodă* T are mărimea unei rotații complete a piesei.



Oboseala materialelor

Există și alți parametri prin care sunt caracterizate ciclurile de solicitare:

- tensiunea medie $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$
- amplitudinea $\sigma_v = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$
- coeficientul de asimetrie $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$

Parametrul **R** - cel mai important pentru identificarea unei solicitări variabile - este numit și *caracteristica ciclului* de solicitare, iar două cicluri de variație distincte având aceeași valoare a coeficientului de asimetrie sunt numite *cicluri asemenea*; se observă că tensiunile extreme ale ciclului se pot exprima în funcție de primii doi parametri definiți mai sus, astfel:

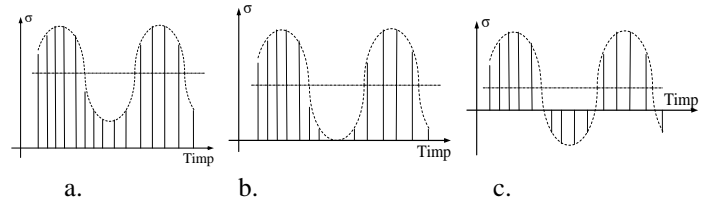
$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_v \quad \text{respectiv} \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_v.$$

Ciclurile cu forma din figura anterioară sunt caracterizate prin tensiuni extreme de valori egale și de semne opuse, adică au **R = -1** și sunt denumite *alternant-simetrice*; ele materializează cele mai periculoase solicitări variabile, întrucât provoacă într-un timp mai scurt, față de alte forme de cicluri, cedarea materialului astfel solicitat; la celălalt capăt al scalei, „ciclurile” cu **R = 1** sunt suportate cel mai ușor, fiind de fapt *solicitări statice*.

Oboseala materialelor

Între aceste extreme există trei tipuri intermediare de cicluri ale solicitărilor variabile, ilustrate în figura alăturată:

- a. *oscilante* – cu tensiuni limită de același semn (deci pot fi ambele negative), la care R este cuprins între 0 și 1 (fără să atingă și aceste valori);
- b. *pulsante* – caz particular al celor de mai sus, având tensiunile minime nule, ceea ce înseamnă $R = 0$;
- c. *alternante* – cu tensiuni limită de semne opuse, diferite ca mărimi, deci având R cuprins între (-1) și 0.



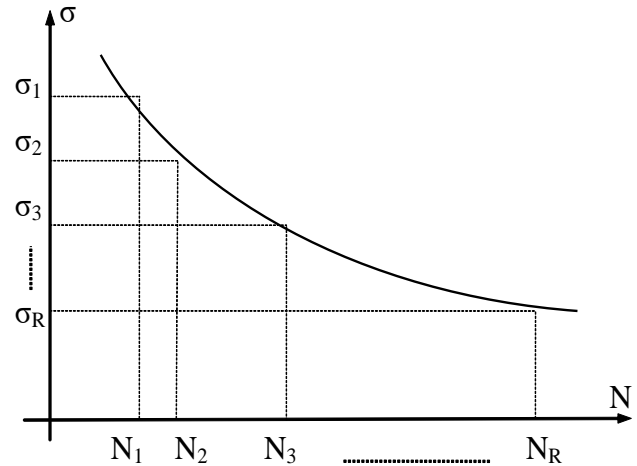
Analizând aceste precizări, se poate admite că ciclurile de solicitare reprezentative pentru practică sunt ilustrate de variațiile având valoarea lui R în intervalul $[-1; 1]$, iar determinările experimentale sunt focalizate pe astfel de cicluri.

La încercările de laborator, fiecare lot de probe din materialul (de obicei metalic) studiat este solicitat prin cicluri cu valori modificabile ale tensiunilor, dar cu o mărime fixată a factorului R , reprezentând deci *cicluri asemenea*; se folosesc epruvete cilindrice, de obicei cu diametrul $d = 10\text{mm}$; cerințe riguroase se impun pentru calitatea de suprafață a epruvetelor - trebuie să fie prelucrate fin și netede (lipsite de concentratori de tensiuni); probele se încearcă până la rupere, la parametri constanți (dar descrescători de la o epruvetă la următoarea) ai solicitării variabile, urmărindu-se numărul maxim N de cicluri pe care proba le suportă.

Oboseala materialelor

Determinarea rezistențelor la oboseală

Oricare dintre parametrii tensiunilor se poate folosi ca termen de comparație între diversele cicluri de solicitare; de obicei este aleasă valoarea lor maximă σ_{\max} ; prima testare se face la o tensiune maximă relativ mare (notată cu σ_1), de ordinul a două treimi din rezistența statică la întindere a materialului încercat; numărul N_1 de cicluri suportate până la rupere este în acest caz relativ mic; urmează încercări la care tensiunea maximă scade treptat, încât numărul N crește mereu; când se ajunge cu σ_{\max} la un nivel σ_R , care depinde de material, se constată că epruvetele nu se mai rup chiar după un număr foarte mare de cicluri.



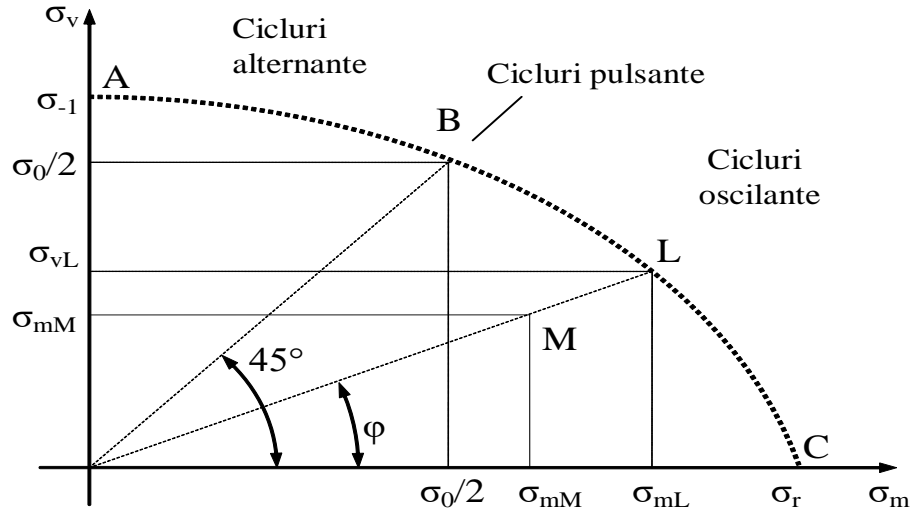
Mărimea σ_R , valoarea tensiunii maxime la care proba suportă un număr „nesfârșit” de cicluri de încărcare este **rezistența lui la oboseală**, pentru cicluri de solicitări variabile de caracteristică **R**; numărul *infini*t de cicluri este în realitate substituit prin valori (de ordinul milioane) considerate acceptabile pentru diverse clase de materiale: astfel, pentru *fonte* se admit, de regulă, 5×10^6 cicluri, pentru *oțeluri* 10×10^6 , iar pentru metalele și aliajele *neferoase* între 50 și 100×10^6 cicluri de solicitare.

Graficul de durabilitate de mai sus, pe baza căruia se definește rezistența la oboseală a materialelor este numit de obicei **curba** (lui) **Wöhler**, inginer german care a făcut, la mijlocul secolului 19, primele încercări sistematice privind rezistența metalelor la solicitările variabile.

Oboseala materialelor

Diagrame ale rezistențelor la oboseală

Rezultă că pentru fiecare material se poate vorbi despre o **infinitate** de valori ale rezistențelor la oboseală, câte una pentru fiecare nivel al coeficientului de asimetrie R ; este practic imposibil ca toate acestea să fie stabilite experimental, încât sunt necesare metode prin care să se deducă rezistența ce corespunde unui factor arbitrar R , pe baza unui trend general de evoluție valabil pentru materialul considerat.



Sunt mai multe variante de soluții, dar frecvent se apelează la **curba ciclurilor limită** (a lui **Haigh**), a materialului piesei studiate: se admite că fiecare valoare a rezistenței la oboseală reprezintă un punct în planul σ_m – σ_v (tensiunea medie și amplitudinea ciclurilor de solicitare); aceste puncte formează o curbă continuă, având aspectul din figură.

Oboseala materialelor

Diagrame ale rezistențelor la oboseală

Forma curbei arată că rezistența cea mai mare se obține pentru ciclul de solicitare de amplitudine zero ($\sigma_v=0$), la care tensiunile extreme sunt egale cu tensiunea medie σ_m - adică la solicitări *statice*, cu limita de rupere σ_r , cum este marcat pe grafic. Fiecare dintre celelalte puncte de pe curbă este rezistența la oboseală a ciclurilor de solicitare având o anumită caracteristică R , ceea ce se observă scriind tangenta unghiului φ sub forma:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sigma_v}{\sigma_m} = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2}{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2} = \frac{\sigma_{\max} (1 - R)}{\sigma_{\max} (1 + R)} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

Orice segment care unește originea axelor cu un punct de pe curbă conține punctele reprezentative ale ciclurilor asemenea de caracteristică R ; este remarcabil că suma coordonatelor fiecărui punct de pe curbă (și ale oricărui punct din planul considerat) este tensiunea maximă σ_{\max} a ciclului de solicitare respectiv; dacă se ia în considerare segmentul cu unghiul de înclinare φ , valoarea σ_R a rezistenței la oboseală a ciclurilor astfel reprezentate se marchează pe grafic prin punctul limită L și este: $\sigma_R = \sigma_{mL} + \sigma_{mL}$. Ciclul oarecare M , având același factor de asimetrie cu ciclul limită L , este considerat cu atât mai sigur, pentru materialul studiat, cu cât este mai distanțat față de L .

Se pot identifica pozițiile segmentelor reprezentative ale unor tipuri importante de solicitări variabile:

- pentru ciclurile cu $R=1$ (solicitări *statice*) se obține $\varphi=0$, adică segmentul lor reprezentativ se așează chiar pe axa absciselor;
- pentru $R=-1$ (cicluri *alternant-simetrice*) se obține $\varphi=\pi/2$, un segment plasat pe axa ordonatelor;
- pentru $R=0$ (cicluri *pulsante*) unghiul de înclinare este $\varphi=\pi/4$, segmentul fiind așezat pe prima bisectoare a sistemului de axe.

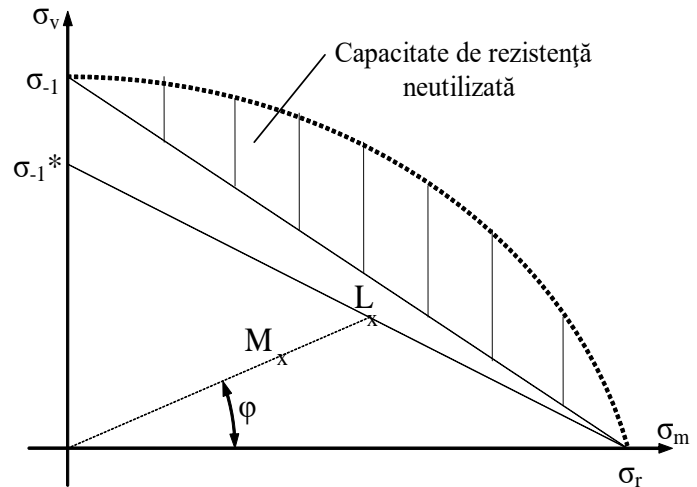
Oboseala materialelor

Diagrame ale rezistențelor la oboseală

Figura anterioară mai arată că segmentele înclinate între aceste limite corespund ciclurilor *oscilante*, respectiv *alternante*; pt. materialele care la sollicitarea statică au palier de curgere pe curba caracteristică, limita de rezistență de pe axa absciselor se asimilează cu limita de curgere σ_c a materialului analizat.

Trasarea curbei Haigh este importantă pentru calculul la oboseală, dar consumul mare de timp și de material face dificilă obținerea *experimentală* a unui număr suficient de puncte ale ei; s-au propus variante *schematizate*, cea propusă de **Soderberg** fiind schițată alăturat.

Se folosesc doar două valori ale limitei de rupere, obținute prin încercări ale materialului, una pentru sollicitarea **statică**, alta pentru cicluri variabile **alternant-simetrice**; graficul astfel trasat se obține ușor, dar exclude din domeniul ciclurilor admise, pentru materialul analizat, un număr de cicluri de sollicitare teoretic suportabile de material; în schimb, simplificarea majoră a etapelor pentru trasarea curbei limită este de obicei suficient de importantă pentru ca acel dezavantaj să fie asumat și schematizarea să fie larg utilizată în practică.



Oboseala materialelor

Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

Limita de rupere σ_R la orice solicitare variabilă se obține de valori diferite, în cazul pieselor *reale* – cu referire la care primesc de obicei notația σ_R^* , față de cele obținute în urma încercărilor făcute pe *epruvete*, în condițiile precizate de standarde; diferențele respective sunt luate în considerare, în calculele de proiectare inginerescă, prin utilizarea unor coeficienți, denumiți *factori de influență* care amendează valorile teoretice ale rezistențelor la oboseală, așa cum se arată în continuare.

Valorile acestor coeficienți se extrag din baze de date, sau din grafice și tabele existente în îndrumare de proiectare sau alte publicații de această natură.

Există o gamă largă de factori care influențează comportarea materialelor la solicitări variabile; printre cei mai importanți fiind forma și frecvența ciclurilor de încărcare, respectiv structura și granulația materialului, strâns legate de eventuale tratamente termice aplicate anterior acestuia; comportarea pieselor reale diferă de a epruvetelor din laborator și datorită unor deosebiri importante între ele, care se referă la dimensiunile de gabarit, la calitatea suprafețelor și la prezența concentrărilor de tensiuni.

Oboseala materialelor

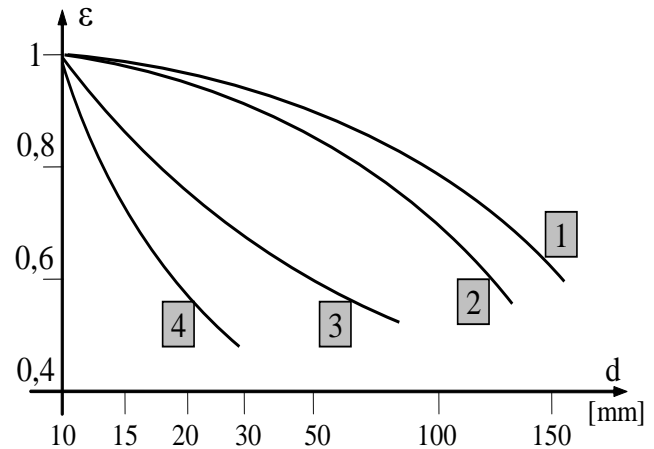
Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

a) Factorul dimensional

Se admite că volumul mai mare de material din piesele reale față de epruvetele standard (de obicei cilindrice cu $d=10\text{mm}$) crește probabilitatea apariției defectelor de structură și microfisurilor, ducând la limite de rupere mai mici decât cele teoretice; apare în calcule printr-un factor notat cu ε , *mai mic decât unitatea*, înmulțit cu rezistența teoretică σ_R .

Valoarea factorului scade, când dimensiunea piesei calculate crește; scăderea este mai puternică dacă piesa conține concentratori de tensiuni; cele patru curbe din figură corespund următoarelor categorii de metale: 1 – oțeluri carbon, în piese fără concentratori de tensiuni; 2 – oțeluri carbon, cu concentratori moderăți și oțeluri aliate fără concentratori; 3, respectiv 4 – oțeluri aliate, în piese cu concentratori moderăți, respectiv puternici.

Trebuie precizat că diagramele din acest paragraf sunt *strict orientative* și nu se pot folosi la alegerea valorilor pentru coeficienți, în calcule de proiectare; pentru acestea se utilizează baze de date sau cărți specializate, apelând la surse cuprinzătoare încât tema să fie rezolvată, pe cât se poate, pe baza informațiilor dintr-un singur izvor, care se vor corela în mod corect și vor duce la rezultate de încredere.



Oboseala materialelor

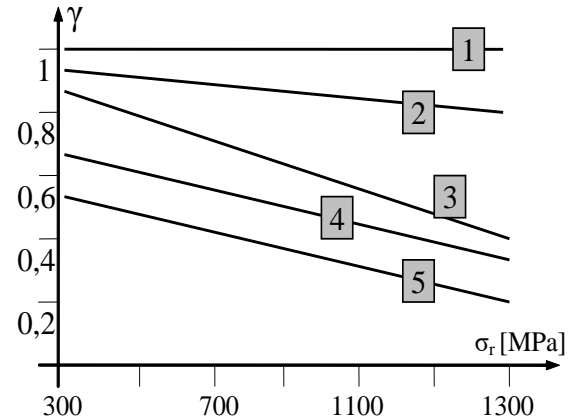
Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

b) Factorul de calitate a suprafețelor

La încercările de laborator se folosesc epruvete fin prelucrate, deci piesele cu suprafețe prelucrate mai grosier vor fi predispuse să cedeze la încărcări variabile mai mici decât cele rezultate din calcule teoretice; multe stări de solicitare uzuale dau tensiunile cele mai mari în punctele de pe suprafața exterioară a pieselor, favorizând acolo apariția unor microfisuri în care apoi să se amorseze ruperea prin oboseală a piesei.

Capacitatea de rezistență a unei piese la solicitări variabile este deci hotărâtor influențată inclusiv de tipul și de finețea prelucrărilor de pe suprafețele ei; în plus, rezistența la oboseală scade puternic (în special la aliajele feroase) atunci când piesa trebuie să lucreze în medii care produc coroziune.

Aceste influențe sunt exprimate în calcule printr-un alt factor *subunitar*, notat γ , înmulțit cu rezistența teoretică la oboseală; câteva exemple tipice de valori ale acestui coeficient și variația lui în funcție de rezistența la rupere prin tracțiune a materialului piesei sunt date, pentru oțeluri, în diagrama alăturată; factorului γ i se atribuie o variație *liniară*, iar graficele corespund următoarelor cazuri particulare de piese: 1 –cu suprafețe **lustruite**; 2 și 3 –cu suprafețe prelucrate prin **strunjire - fină**, respectiv de **degroșare**; 4 și 5 –supuse **coroziunii** în apă **dulce**, respectiv **sărată**.



Oboseala materialelor

Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

c) Factorul de concentrare a tensiunilor

Prezența în configurația unei piese oarecare a *concentratorilor de tensiuni* (degajări, găuri transversale, canale de pană, filete, salturi brutale de secțiune, racordări cu raze mici, îmbinări cu strângere etc.) contribuie, de asemenea, la scăderea rezistenței sale la solicitările variabile; practic orice creștătură sau discontinuitate geometrică de pe suprafața piesei poate acționa ca amorsă pentru o fisură de oboseală.

Aceste efecte se iau în considerare în calcule printr-un factor de influență K_{σ} având mereu valori *mai mari decât unitatea*, iar rezistența teoretică la oboseală *se împarte* la acest coeficient pentru a găsi rezistența piesei analizate!

Acest factor depinde hotărâtor de *felul concentratorului* prezent pe piesă (astfel încât calculul la oboseală trebuie făcut separat pentru fiecare secțiune în care există astfel de elemente de sensibilizare); prin urmare valorile coeficienților de tip K_{σ} se găsesc în diagrame foarte numeroase și variate (grupate pe tipuri de concentratori), care solicită din plin atenția și răbdarea proiectantului pentru alegerea valorii potrivite cu situația analizată.

Oboseala materialelor

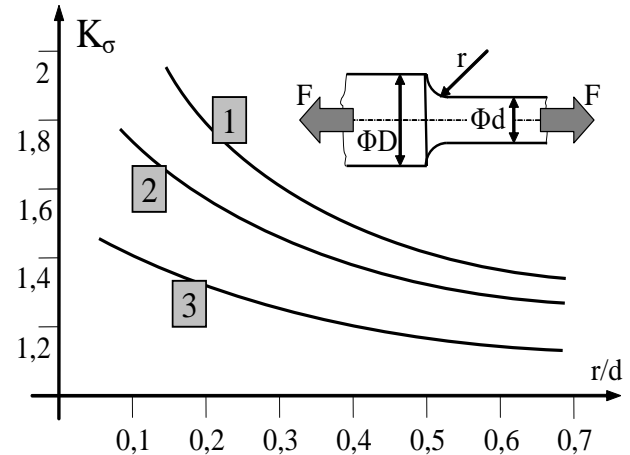
Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

c) Factorul de concentrare a tensiunilor

Figura alăturată prezintă cazul unor piese de oțel supuse la o solicitare *axială* variabilă și la care concentrarea tensiunilor este produsă de razele mici de racordare, în secțiunea de trecere dintre două tronsoane de diametre diferite.

Graficele arată că factorul K_{σ} are valori cu atât mai mari, cu cât raza de racordare r este mai mică, în raport cu diametrul tronsonului îngust al barei.

Cele trei curbe corespund, în ordine descrescătoare, oțelurilor cu rezistența la tracțiune statică de 1200 (curba 1), 800 și respectiv 400MPa, de unde se înțelege că influența concentrărilor de tensiuni este cu atât mai periculoasă pentru funcționarea piesei calculate, cu cât materialul ei este mai rezistent și mai dur.



Oboseala materialelor

Rezistența la oboseală calculată pentru piesele reale

În finalul acestui paragraf trebuie precizat că întreaga prezentare asupra calculului la oboseală al pieselor supuse la solicitări mecanice variabile se poate face, în mod similar, pentru solicitările date prin tensiuni tangențiale, înlocuind peste tot pe σ cu τ !

În altă ordine de idei, prin utilizarea celor trei categorii principale de factori de influență de mai sus se face trecerea de la *valoarea de laborator* σ_R a rezistenței la oboseală a unui material, la valoarea σ_R^* a acestei rezistențe, pentru o *piesă* concretă din acel material.

Luându-se în considerare forma, dimensiunile, prelucrările de suprafață și condițiile în care piesa funcționează, se face alegerea valorilor potrivite ale coeficienților cu care se completează următoarea relație de calcul:

$$\sigma_R^* = \frac{\varepsilon \cdot \gamma}{K_\sigma} \cdot \sigma_R$$

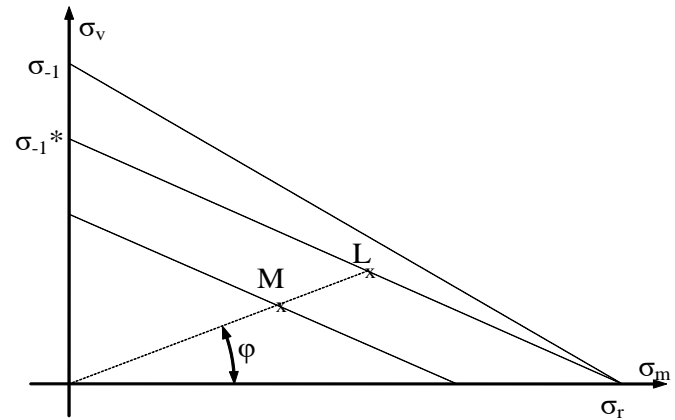
Oboseala materialelor

Coefficientul de siguranță la oboseală

Ca și la alte calcule ingineresti cu ipoteze și relații ce aproximează realitatea, cu un grad mare de incertitudine în precizia aproximării, calculul la oboseală asumă imprecizia rezultatelor la care conduce și admite să se impună o *distanță de siguranță* între caracteristicile obținute prin calcul ale pieselor și cele din situațiile limită, admise ca fatale pentru integritatea lor în funcționare.

Dacă pentru o piesă reală s-a calculat drept admisibil un anumit ciclu de solicitare (reprezentat pe schematizare de punctul M), trebuie să se verifice distanțat lui față de ciclul cu parametri similari (L), considerat a produce *ruperea prin oboseală*, în cazul materialului piesei calculate; parametrul de similitudine este de obicei factorul de asimetrie **R**, ca termen definitoriu al ciclului e folosită tensiunea extremă σ_{\max} , iar comparația se face pe segmentul cu înclinarea φ .

Reluând schematizarea de mai sus, incluzând linia „rectificată” care se referă la piesele reale, se observă că linia paralelă cu ea dusă prin M reprezintă toate ciclurile asemenea celor limită care au aceeași siguranță cu ciclul din M.



Oboseala materialelor

Coeficientul de siguranță la oboseală

Coeficientul de siguranță pentru ciclul M va fi:

$$c = \frac{\sigma_{\max L}}{\sigma_{\max M}} = \frac{\sigma_{mL} + \sigma_{vL}}{\sigma_{mM} + \sigma_{vM}}$$

Folosind asemănarea unor triunghiurilor dreptunghice și făcând câteva transformări de tip elementar în ultima fracție se ajunge la expresia:

$$c = \frac{1}{\frac{\sigma_{vM}}{\sigma_{-1}^*} + \frac{\sigma_{mM}}{\sigma_r}}$$

Rezistența la oboseală a **piesei** la ciclul alternant simetric se calculează folosind relația discutată anterior, care include coeficienții de influență, încât expresia finală a coeficientului de siguranță la oboseală pentru ciclul calculat M se va scrie în forma următoare:

$$c = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{mM}}{\sigma_r}}$$

Oboseala materialelor

Coefficientul de siguranță la oboseală

Dacă materialul piesei este **tenace**, rezistența lui la solicitarea statică este *limita de curgere* σ_c , iar schematizările se adaptează acestei situații; de fapt, singura modificare în relația coeficientului de siguranță va fi prezența lui σ_c în loc de σ_r , în ultima fracție de la numitor.

Trebuie precizat că acest calcul este întotdeauna unul de **verificare**, în sensul că piesa este *dimensionată* pe baza solicitărilor ei statice, iar calculul la oboseală se face în câteva secțiuni ale piesei, de obicei dintre acelea care conțin concentratori de tensiuni.

În principiu valorile recomandate pentru coeficientul de siguranță sunt cuprinse între 1 și 3 – mai mici decât 2 pentru piesele din oțeluri și peste 2 pentru piese din fontă sau aliaje neferoase; valorile impuse se dau ca numere zecimale, cu o singură cifră după virgulă și sunt cu atât mai mari cu cât este mai mare gradul de nesiguranță asupra calităților materialului și a elementelor solicitării.

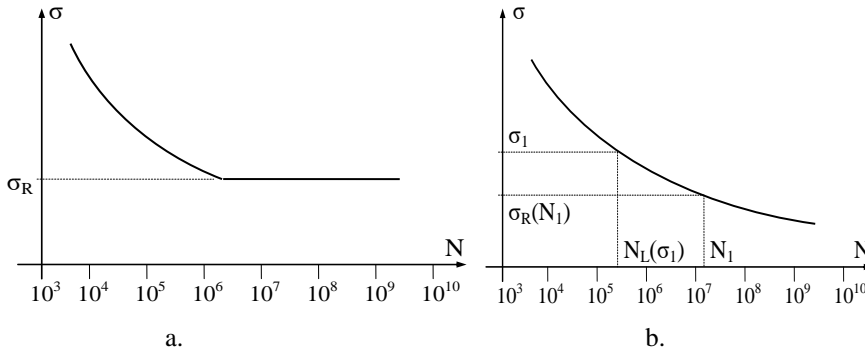
Dacă solicitarea variabilă a piesei este **compusă**, de exemplu de *răsucire* cu *încovoiere*, cum se întâmplă la arborii din cutiile de viteze, atunci se analizează caracteristicile celor două solicitări și pentru fiecare solicitare în parte se stabilește, în secțiunea de calcul aleasă, valoarea coeficientului de siguranță la oboseală, după modelul descris mai sus. Valoarea *coeficientului global* de siguranță din acea secțiune se va calcula cu expresia:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}}$$

Oboseala materialelor

Determinarea rezistențelor la oboseală

Trebuie observat că această curbă se trasează prin medierea (interpolarea) punctelor de pe grafic obținute în laborator, care numai prin excepție ar putea fi toate așezate exact pe această curbă; uzual se obțin, dimpotrivă, împrăștieri mari ale lor și o relativă nesiguranță în stabilirea caracteristicilor de rezistență la oboseală necesare în proiectare, întrucât rezultatele încercărilor depind de o serie de parametri greu de repetat identic, ținând de experimente (precizia realizării epruvetelor, menținerea sub control a parametrilor sollicitării) și de materialele încercate (omogenitate, efecte ale proceselor de fabricare și de prelucrare).



După aspectul curbei se deosebesc două mari clase de materiale; prima include aliaje **feroase** și de **titan**, pentru care curba devine practic orizontală (graficul **a**), când N are valori mari, conform definiției teoretice a rezistenței la oboseală σ_R ; la oțeluri această limită este în mod obișnuit cuprinsă între 35% și 60% din rezistența lor la tracțiune statică.

Cealaltă categorie cuprinde aliaje **neferoase** (în mod tipic de aluminiu, cupru, magneziu), pentru care nu este aparentă o rezistență la oboseală, curba neavând o porțiune orizontală și fiind permanent descendentă (graficul **b**); materialul e caracterizat prin *limita de oboseală* $\sigma_R(N_1)$ – nivelul de tensiune la care materialul cedează pentru un număr N_1 de cicluri (aproximativ 10 milioane); alt parametru caracteristic este *durata de viață* la tensiunea σ_1 , $N_L(\sigma_1)$ – cicluri până la rupere când tensiunea maximă a ciclului are nivelul precizat.

Oboseala materialelor

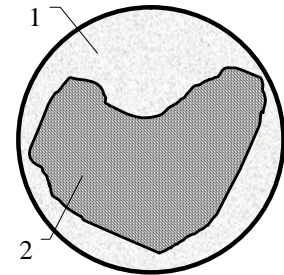
Precizări privind ruperea pieselor prin oboseală

Oboseala materialelor este un fenomen imposibil de neglijat în practica inginerescă, întrucât se estimează a fi cauza ruperii pentru cam 90% dintre componentele metalice care cedează în timpul exploatării. Pericolul este cu atât mai mare cu cât apariția și dezvoltarea fisurilor de oboseală se observă cu dificultate, în lipsa unor investigații speciale, încât de cele mai multe ori procesul de cedare avansează fără vreun avertisment și devine catastrofal.

Ruperile au caracter **fragil** chiar pentru metale care în general se încadrează între cele tenace sau ductile, cedarea fiind precedată în mică măsură de deformări plastice evidente ale materialului. Secțiunile rupte se particularizează printr-un aspect specific, ușor de recunoscut, întrucât conțin două zone puternic individualizate – una *netedă*, lucioasă, rezultată prin frecarea între ele, pe parcursul funcționării, a celor două fețe ale secțiunii fisurate și altă zonă *grăunțoasă*, care ocupă restul secțiunii de rupere și corespunde părții de material care cedează brusc, la finalul procesului de distrugere a piesei prin oboseală.

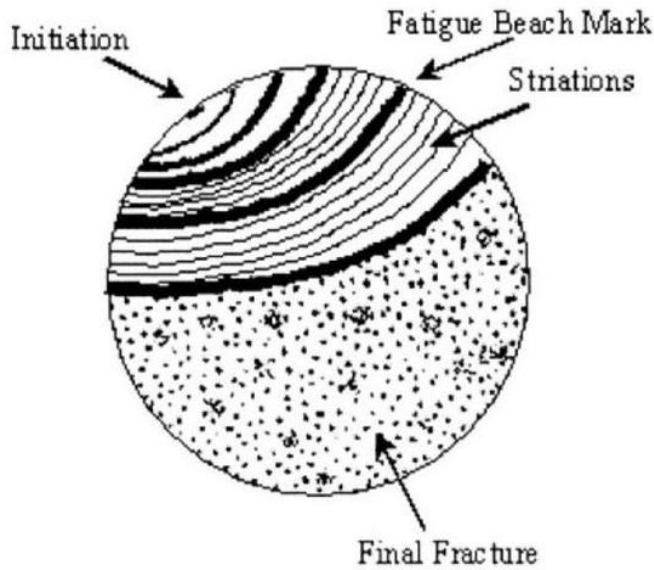
Poziționarea și proporția relativă a celor două zone depind de felul solicitării ce se aplică piesei, dar și de mărimea tensiunilor maxime ale ciclurilor, încât se diferențiază două categorii mari de solicitări variabile.

O primă categorie o formează solicitările cu *încărcări relativ mari*, care la fiecare ciclu produc în material inclusiv *deformații plastice*, într-o proporție anumită; din acest motiv durata de viață a pieselor este mică (în principiu cel mult 10^4 - 10^5 cicluri), iar fenomenul este numit oboseală **oligo-ciclică**; secțiunile rupte au în mod specific o parte **1** relativ mică de aspect lucios (ca în figură), întrucât frecarea celor două fețe ale fisurii are loc pentru un timp destul de scurt.



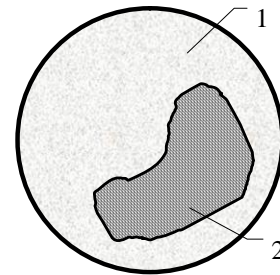
Oboseala materialelor

Aspectul secțiunilor rupte prin oboseala materialului



Oboseala materialelor

A doua grupă include solicitările variabile care produc tensiuni de mărimi *medii* și *mici*, făcând să apară în material numai *deformații* de tip *elastic*; în aceste cazuri durata de viață a pieselor este mare (cel puțin $10^4 \div 10^5$ cicluri), încât acest tip de oboseală are denumirea de **înalt-ciclică**; fisurile se dezvoltă în intervale mari de timp, la fel și frecările între cele două fețe ale fisurii, iar aspectul particular al secțiunilor de rupere (ca în schița alăturată) este dat de aria relativ mică a zonei cristaline 2.



Posibilități de a îmbunătăți rezistența pieselor la oboseală

Durata de viață a componentelor care preiau solicitări variabile poate fi crescută, dacă se analizează cu atenție cauzele cunoscute ale apariției și dezvoltării fisurilor de oboseală în structura materialelor; principalele metode de acțiune în această direcție se cuprind în două categorii mari.

A. Metode aplicate la proiectare

Când se proiectează un ansamblu de reperi, pe baza sarcinilor care vor fi preluate, cea mai importantă problemă privind rezistența pieselor la oboseală este evitarea în cât mai mare măsură a neregularităților de suprafață și de structură (filete, canale de pană, îmbinări cu strângere, muchii ascuțite, găuri transversale, salturi brutale de secțiune) care tind să producă amplificări (*concentrări*) locale *de tensiuni*.

Pe de altă parte, cunoscând că funcționarea la *temperaturi ridicate* sau în *medii corozive* contribuie din plin la scăderea rezistenței la oboseală a materialelor metalice, trebuie folosită orice posibilitate de a se evita sau limita, pentru componentele supuse la solicitări variabile, expunerea îndelungată la astfel de condiții agresive de lucru.

Oboseala materialelor

B. Metode tehnologice

Este de mult constatat că piesele cu suprafețe perfect finisate au rezistența la oboseală mai bună decât cele prelucrate grosier (inclusiv pentru că în acest fel scade probabilitatea de apariție pe suprafețe a unor amorse de fisuri), astfel că *îmbunătățirea calității suprafețelor* este o măsură ce va avea efecte benefice asupra duratei de viață a pieselor cu solicitări variabile. Există și un alt procedeu dovedit a fi eficient, în același scop – inducerea, într-un strat subțire de la suprafața pieselor respective, a unor *tensiuni remanente de compresiune*; acestea vor micșora, într-o anumită măsură, efectele produse în straturile superficiale de tensiunile de întindere date de solicitarea variabilă, făcând să scadă tendințele de apariție și dezvoltare a fisurilor de oboseală.

a) Aplicarea unor tratamente mecanice superficiale

Un mijloc frecvent utilizat pentru tensionarea superficială prin comprimare a pieselor (mai ales dacă sunt din metale tenace) constă în a produce deformări plastice localizate, în straturile lor de suprafață. Metoda uzuală este *bombardarea suprafețelor cu jet de alicie*: particule dure, de dimensiuni mici (cu diametre între 0.1mm și 1mm) sunt proiectate cu viteze foarte mari asupra pieselor tratate; prin deformările care se produc se imprimă, în straturile respective de material (pe adâncimi cuprinse între un sfert și o jumătate din diametrul particulelor dure folosite), tensiuni reziduale de comprimare, contribuind la creșterea rezistenței la oboseală a componentelor respective.

b) Aplicarea unor tratamente termo-chimice

Piese sunt plasate în incinte cu atmosferă bogată în carbon sau azot, la temperaturi ridicate care favorizează difuzia acestor elemente chimice, cam pe 1mm adâncime, în straturile superficiale de material. Procesele se numesc *carburare*, respectiv *nitrurare* și conduc la creșterea rezistenței la oboseală atât prin durificarea suprafeței pieselor, cât și prin inducerea în acele straturi a unor tensiuni reziduale de compresiune.