MOTIVATIE - OBIECTIVE SI SCOP

De ce trebuie urmărită starea de funcționare a utilajelor?

Utilizând aparatură performantă şi personal tehnic specializat, se poate diagnostica sursa defecțiunii apărute, astfel încât repararea să se materializeze numai în înlocuirea pieselor componente defecte şi nu a tuturor pieselor de uzură. Aceasta este soluția prin care se pot face economii importante prin reducerea manoperei şi a cantității de piese de schimb. În plus, putând anticipa reparația, se va cunoaşte din timp şi necesarul de piese de schimb, astfel diminuându-se până la lichidare stocul.

Dacă rezultatele monitorizării unui utilaj vor fi păstrate într-o bază de date, se va acumula un volum important de informații deosebit de util pentru o analiză periodică a principalelor surse de defecte şi se vor putea lua măsuri de evitare a apariției lor ulterioare.
O astfel de abordare a problemelor, numită şi **proactivă**, va putea conduce, pe termen mediu şi lung, la alte economii importante.

De ce vibrația?

Se consideră că vibrația unui utilaj dinamic caracterizează cel mai bine, la nivelul tehnicii actuale, starea de funcționare a unui utilaj dinamic. Vibrațiile se datorează în general efectelor dinamice ale toleranţelor de execuţie ale subansamblelor, a jocurilor şi a contactului direct între părţile aflate în mişcare ale unui utilaj, cât şi efectelor forţelor care nu sunt în echilibru în piesele antrenate în mişcări rotative sau alternante.

În cele mai multe dintre cazuri, vibraţiile sunt nedorite, ele ducând la scurtarea dramatică a duratei de viaţă a utilajelor şi la apariţia unor opriri accidentale, uneori catastrofale. De aceea, se consideră că dacă un utilaj nu vibrează, el va funcţiona fără probleme, timp îndelungat, în timp ce un utilaj lăsat să funcţioneze cu vibraţii importante are o durată de scurtă de viaţă.

Fiecare componentă a unui utilaj produce o vibraţie cu una sau mai multe frecvenţe specifice. Cunoscând componentele spectrală ale vibraţiei globale (sau compuse), se poate determina la care dintre componentele ansamblului în mişcare a apărut problema.

CONSIDERAŢII GENERALE

Un sistem mecanic se poate găsi în mod obişnuit în repaus sau în mişcare de regim, stări numite de referinţă.

Vibraţiile sunt mişcări alternative efectuate de sistemul mecanic în raport cu starea de referinţă, fiind provocate de forţe perturbatoare (numite excitaţii) ale căror mărimi, direcţii sau puncte de aplicaţie variază în timp.

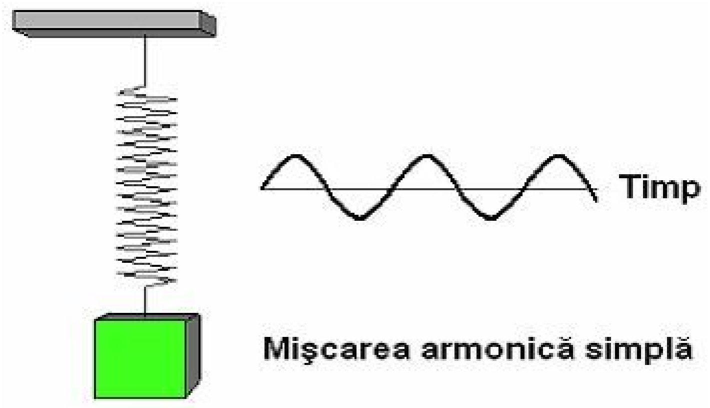
- Din punct de vedere energetic, vibraţia sistemului este o schimbare periodică a energiei cinetice în potenţială.
- Studiul mişcărilor vibratorii, în raport cu stările de referinţă, se efectuează în general cu ajutorul unor parametri geometrici independenţi. Determinarea acestor parametri înseamnă determinarea răspunsului sistemului mecanic la excitaţia dată.
- Răspunsul este condiţionat atât de parametrii excitaţiei cât şi de caracteristicile mecanice ale sistemului.

Mişcarea armonică simplă

Cea mai simplă mişcare vibratorie posibilă este mişcarea pe o singură direcţie a masei rigide controlate de un resort elastic.

Un asemenea sistem se numeşte sistem masă-resort cu un singur grad de libertate. Dacă masa respectivă se îndepărtează forțat de poziția de echilibru, iar apoi este lăsată să liberă, resortul va întoarce masa în poziția de echilibru, dar până în momentul echilibrului masa va avea o energie cinetică, care va face resortul să se întindă şi să se comprime repetat.

În figura următoare apare graficul deplasării masei rigide în funcție de timp.



Dacă în sistem nu ar exista frecare, oscilația ar continua cu aceeaşi amplitudine şi cu aceeaşi perioadă la infinit. Totuşi, în practică nu există aşa ceva. În orice sistem mecanic există frecare, lucru care face ca amplitudinea vibrației să scadă gradat, iar energia să se transforme în căldură.

Definițiile următoare se aplică mişcării armonice simple:

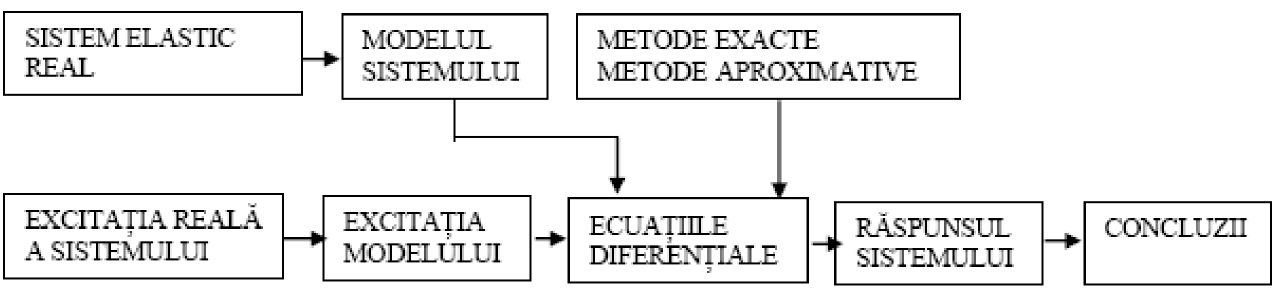
T = Perioada undei

Perioada este timpul necesar parcurgerii unui ciclu. Perioada se măsoară în secunde, sau milisecunde în funcție de cât de des se modifică unda.

f = frecvența undei = 1/T

Frecvența este numărul de cicluri efectuate într-o secundă şi este invers proporțională cu perioada şi se măsoară în (Hz), denumire dată după cercetătorul german, Heinrich Hertz.

Schema logică pentru studiul teoretic al vibrațiilor sistemelor mecanice



CLASIFICAREA VIBRAȚIILOR MECANICE

a) După natura sistemului elastic

- vibrații liniare
- vibrații neliniare

b) După natura forțelor care acționează în timpul vibrației

Forțele care intervin în timpul vibrației sunt în general: forța elastică Fe, forța rezistentă Fr şi forța perturbatoare (excitatoare) Fp.

În funcție de valorile acestor forțe, vibrațiile pot fi clasificate:

- După forța rezistentă Fr (forța rezistentă este pozitivă dacă acționează în sensul mişcării):

$F\,r = 0$ vibrații neamortizate;

$F\,r \neq 0 \rightarrow F\,r < 0$ vibrații amortizate;

$\searrow F\,r > 0$ vibrații autoântreținute sau autoexcitate.

- După forța perturbatoare Fp

$F\,p = 0$	vibrații libere;
$F\,p \neq 0$	vibrații forțate ;
F p cunoscut	vibrații deterministe;
F p aleatoare	vibrații aleatoare.

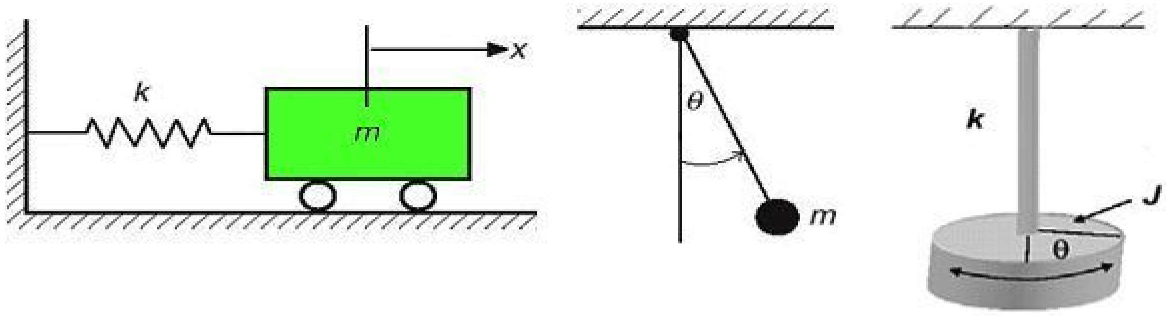
c) După numărul gradelor de libertate.

Numărul de grade de libertate ale unui sistem elastic reprezintă numărul de parametri scalari independenți, necesari pentru a determina poziția elementelor sistemului.

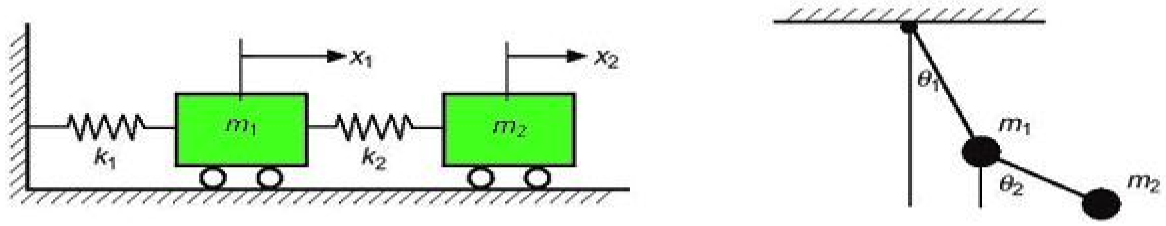
Sistemele elastice pot fi:

- cu număr finit de grade de libertate;

a) Sisteme cu un grad de libertate (1DOF)



b) Sisteme cu 2 grade de libertate (2DOF)

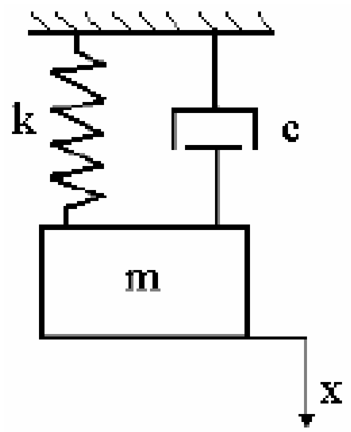


• cu număr infinit de grade de libertate (sistem continuu).

d) După traiectoria pe care se deplasează punctele sistemului oscilant, vibrațiile pot fi de translație sau de rotație.

ELEMENTE CARACTERISTICE ALE SISTEMELOR ELASTICE

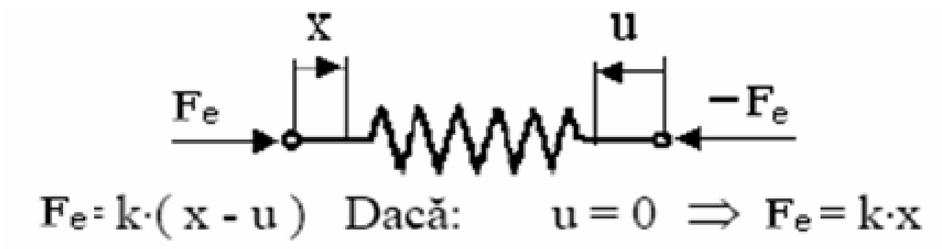
În figura următoare este prezentat cel mai simplu model de sistem elastic care cuprinde următoarele elemente caracteristice:



a) Masa m $F = m\ddot{x}$

b) Elementul elastic k - caracteristica liniară sau neliniară

- elementul elastic liniar



Observaţii:

-Constanta de proporţionalitate k se numeşte constantă elastică sau elasticitate şi se măsoară în N/m.

-În cazul elementului elastic cu caracteristică neliniară: $F_e = kx^n$

-Arcul ideal este considerat fără masă şi în consecinţă forţa aplicată la un capăt este egală şi de sens opus cu cea aplicată la capătul opus.

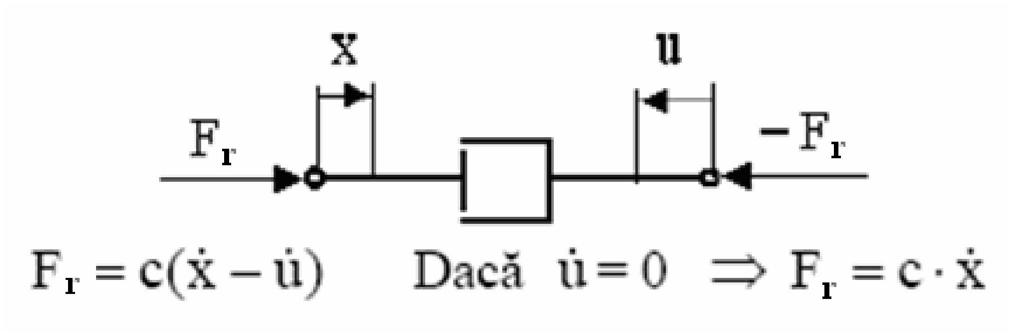
-Elementele elastice înmagazinează energie potenţială de deformaţie.

-Repartiţia proprietăţilor elastice în sistem poate fi discretă sau continuă, după cum repartiţia maselor este discretă sau continuă.

c) Amortizorul c poate fi cu:

- amortizare vâscoasă: - liniară;
  - neliniară;
- amortizare histeretică (amortizare structurală, datorită frecărilor din îmbinări, reazeme) şi care depinde numai de amplitudinea mişcării;
- amortizare coulombiană, datorită forţei de frecare coulombiene, care este constantă în decursul unei semiperioade;
- amortizare oarecare.

Amortizorul vâscos liniar - forţa aplicată este proporţională cu viteza relativă dintre punctele sale de fixare.



Observații:

- Constanta c se numeşte coeficient de amortizare şi caracterizează amortizorul.

$$[c] = \frac{Ns}{m}$$

-Amortizorul ideal este considerat fără masă. În amortizor are loc disiparea energiei prin transformarea acesteia în căldură.

- La amortizorul vâscos neliniar: $F_r = c \cdot \dot{x}^n$

Cunoscând aceste caracteristici ale sistemului putem determina principala sa caracteristică vibratorie: pulsația proprie ω_0, măsurată în s^{-1} sau în rad/s.

Intre pulsația proprie $\omega_0(s^{-1})$ si frecvența proprie f_0 (Hz) există relația:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Principalele mărimi care se urmăresc în studiul vibrațiilor sunt:

• pulsațiile proprii, pentru a cunoaşte dacă există pericol de rezonanță;

• amplitudinile vibrațiilor (deplasări, viteze, accelerații) pentru a stabili dacă sunt dăunătoare sistemului oscilant sau mediului.

MĂRIMI CARE DESCRIU FORMA DE UNDĂ A VIBRAȚIILOR

Mişcarea oscilatorie armonică este cea mai simplă formă de mişcare periodică fiind descrisă de funcția armonică (1) şi reprezentată în Fig. 1:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

Unde:
t = timpul [s] , a = amplitudinea oscilației [m], ω = viteza unghiulară [rad/s]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f = frecvența [s^{-1} sau Hz]; T = perioada [s]; φ= faza [rad] la originea timpului (Fig. 1).

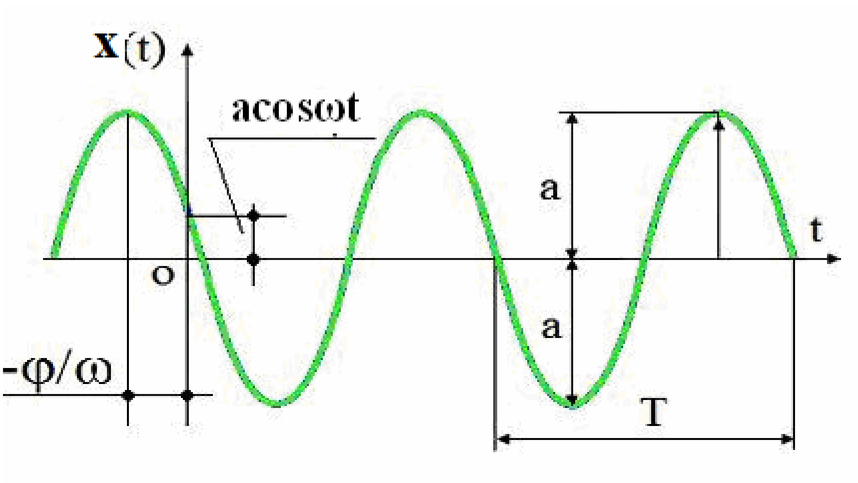


Fig. 1- Mişcarea oscilatorie armonică

La originea timpului amplitudinea este: **acosωt**
Timpul asociat maximului de amplitudine dinaintea originii timpului se deduce din relația:

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega t + \varphi) = a} \qquad \Rightarrow t = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Pentru deducerea vitezei şi accelerației vibrației se derivează funcția armonică în raport cu timpul, stiind ca: ***-sinφ= cos(φ+π/2); cos(φ+π) = -cosφ***

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega\sin(\omega t + \varphi) = a\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = -a\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) = a\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

Observăm amplitudinile deplasării (**$X_{vârf}$ = a**), vitezei (**$V_{vârf}$ = aω**) şi accelerației (**$A_{vârf}$ = aω^2**) punctului material sau corpului care descrie mişcare armonică.

Rescriem expresiile pentru mişcarea armonică şi pentru viteza şi acceleraţia asociate:

$$x(t) = X_{vârf} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = V_{vârf} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = A_{vârf} \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

Observăm faptul că viteza este defazată faţă de deplasare cu 90^0 şi acceleraţia este defazată faţă de viteză cu 90^0.

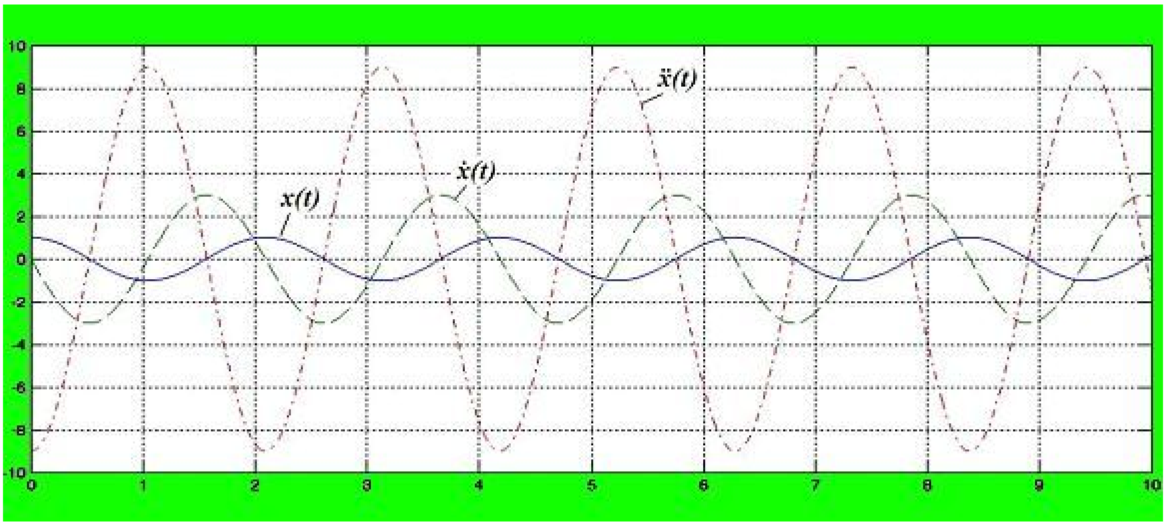


Fig.2 - Deplasare, viteză, acceleraţie

Alte mărimi utile pentru descrierea mişcării armonice sunt:

- ***media valorilor absolute***, $\mathbf{X_{mediu}}$ şi ***rădăcina pătrată din media pătratelor valorilor instantanee***, $\mathbf{X_{RMS}}$ (RMS = root mean square).

$$X_{mediu} = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|dt \qquad X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \qquad (2)$$

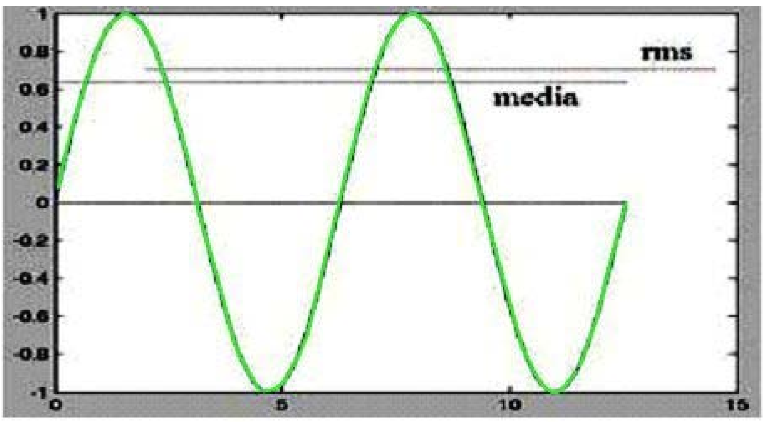


Fig. 3 Amplitudinea vibraţiei - valoarea medie şi valoarea RMS

Observație. Pentru o mişcare armonică pură avem:

$$X_{mediu} = \frac{2X_{\text{var}\, f}}{\pi} \; ; \quad X_{mediu} = 0{,}6366 \cdot X_{vârf} \; ;$$

$$X_{ef} = \frac{X_{\text{var}\, f}}{\sqrt{2}} \; ; \quad X_{rms} = 0{,}7071 \cdot X_{vârf}$$

- ***energia elastică***, W_p: este energia acumulată sub formă de energie potențială de deformație. Pentru un sistem elastic cu un grad de libertate, liniar, cu rigiditatea *k*, energia elastică acumulată într-o perioadă este:

$$W_p = \int_0^T k\frac{x(t)}{2}x(t)dt = \frac{k}{2}\int_0^T x^2(t)dt$$

- ***puterea medie pentru o perioadă***, P_T: se obține raportând energia elastică acumulată într-o perioadă la valoarea perioadei:

$$P_T = \frac{1}{T}W_p = \frac{k}{2T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Observație. Integrala $\int_0^T x^2(t)dt$ este o mărime proporțională cu energia acumulată într-o perioadă. De aceea, mărimile ce conțin în expresia lor acest termen sunt mai adesea folosite. Valoarea RMS este importantă fiindcă este o măsură strâns legată de energia vibrației.

Pentru a evalua forma mişcării vibratorii periodice si nearmonice se utilizează factorul de formă F_f şi factorul de vârf F_v, definiți prin relațiile:

$$F_f = \frac{X_{rms}}{X_{mediu}} \qquad F_v = \frac{X_{\text{var}\, f}}{X_{rms}}$$

În baza teoremei lui Fourier, vibrațiile periodice deterministe pot fi reprezentate printr-o sumă finită sau infinită de armonici, rezultate prin dezvoltarea în serie Fourier a funcției respective.

$$x(t) = X_o + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Reprezentând valorile amplitudinilor în domeniul frecvență se obține spectrul de frecvență al mişcării, care este deosebit de util în controlul vibroacustic al sistemelor mecanice.

VIBRAȚII LIBERE ÎN SISTEME LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE

Sistemele oscilante cu un singur grad de libertate sunt formate, în general, din:

-masă rigidă, care execută o mişcare de translație sau rotație ce poate fi determinată printr-un singur parametru;

-unul sau mai multe elemente elastice şi elemente de amortizare, legate de masa rigidă şi de un element de referință (care poate fi fix).

Sistemele oscilante cu un grad de libertate pot executa:

a) vibrații libere:

- neamortizate;
- amortizate.

b) vibrații forțate:

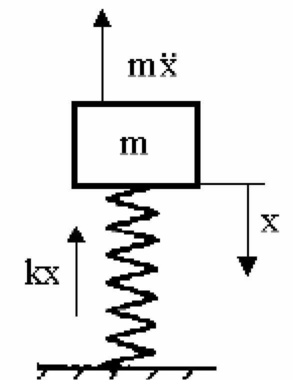
- neamortizate;
- amortizate.

VIBRAȚII LIBERE NEAMORTIZATE

1.Vibrații libere neamortizate de translatie

Vibrațiile libere neamortizate sunt vibrațiile executate de un sistem oscilant, care a fost scos din poziția de repaus, fiind lăsat apoi să oscileze liber, cu frecvența proprie.

Să considerăm un sistem oscilant format dintr-o masă m şi un arc de constantă elastică k.



Considerând originea sistemului în poziția de repaus a masei m, putem scrie ecuația diferențială a mişcării oscilatorii, folosind principiul lui d' Alembert.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Mărimea $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ se numeşte pulsația proprie a sistemului oscilant.

Rezultă ecuația diferențială: $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ a cărei soluție generală este de forma:

$$x = A \cdot \sin\omega_0 \cdot t + B \cdot \cos\omega_0 \cdot t = C \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

unde: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ este amplitudinea oscilației libere;

$\varphi = arctg\dfrac{B}{A}$ este faza la originea timpului

Constantele A si B, respectiv C si φ se determina considerând condițiile inițiale ale mişcării (la t = 0):

$$x = x_0 \Rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x} = v_0 \Rightarrow \dot{x} = \omega_0 \cdot A \cdot \cos\omega_0 t - \omega_0 \cdot B \cdot \sin\omega_0 t \Rightarrow \dot{x} = \omega_0 \cdot A \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Rezultă legea de mişcare a vibratiilor de translatie:

$$x = x_0 \cdot \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t$$

Vibrația liberă neamortizată este o mişcare periodică armonică, având perioada:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$$

$$\text{Întrucât}: \; m = \frac{P}{g} \;\Rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{P}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}}$$

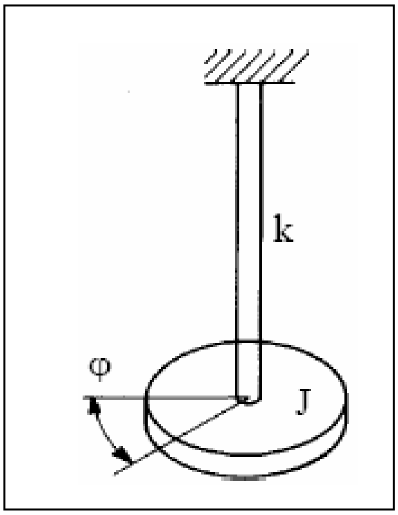
in care $\delta_s = \dfrac{P}{k}$ este săgeata statică produsă de greutatea P a sistemului.

2. Vibrații libere neamortizate torsionale

În cazul vibrațiilor torsionale ecuația diferențială se obține din ecuația vibrațiilor de translație înlocuind:

$m \to J$ - momentul de inerție masic fața de axa de rotație ;

$x \to \varphi$ -unghiul de rasucire.



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$$

Ecuația diferențiala devine : $J \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot \varphi = 0$

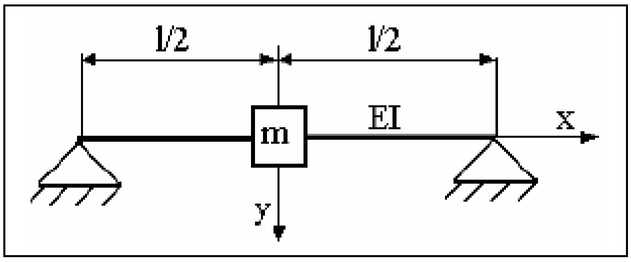
a cărei soluție este : $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\omega_0 t + \dfrac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t$

3.Vibrații libere neamortizate de încovoiere (flexionale)

Fie un arbore elastic de rigiditate EI încărcat la mijloc cu o masă rigidă m.

În repaus arborele are săgeata statică:

$$\delta_s = \frac{mgl^3}{48EI}$$



Dacă scoatem masa din poziţia de echilibru, ea va începe să vibreze de-a lungul axei y, cu pulsaţia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

Ecuaţia mişcării vibratorii pe direcţia y este:

$$y = y_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t$$

În cazul în care bara elastică, în vibraţie torsională sau flexională, reprezintă un arbore de maşină, pulsaţia proprie a vibraţiilor torsionale sau flexionale se numeşte pulsaţie critică.

Dacă arborele se roteşte cu o viteză unghiulară: $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, egală cu pulsaţia proprie ω_0, poate să producă rezonanţa, ceea ce poate determina creşterea amplitudinii vibraţiilor.

4. Constante elastice

Prin definiţie, **constanta elastică a unui element elastic este egală cu forţa care produce o deformaţie unitară a elementului elastic.** Deci constanta elastică se poate calcula scriind deformaţia elementului elastic şi egalând-o cu unitatea.

a)Bară elastică prismatică solicitată la întindere sau compresiune	$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\Delta l} = \frac{E \cdot A}{l}$
b) Bară cilindrică solicitată la răsucire	$k = \frac{M_{tors}}{\varphi} = \frac{\pi \cdot G \cdot d^4}{32 \cdot l}$

c) Bară dreaptă simplu rezemată, cu masa la mijlocul barei, aflată în vibrație flexională	$k=\frac{m\cdot g}{\delta}=\frac{48\cdot E\cdot I}{l^3}$
d) Bară încastrată cu masa la capătul liber	$\delta=\frac{F\cdot l^3}{3\cdot E\cdot I}\Rightarrow k=\frac{F}{\delta}=\frac{3\cdot E\cdot I}{l^3}$
e) Arcul elicoidal	$k=\frac{G\cdot d^4}{64\cdot R^3\cdot n}$

Masa rigidă poate fi legată de elementul de referință prin mai multe elemente elastice care se pot monta: - paralel ; -serie; -mixt.

Montaj paralel

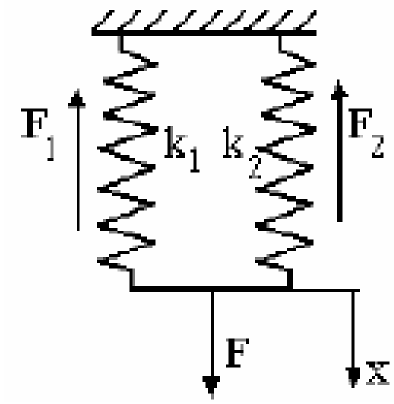
Dacă asupra ansamblului de arcuri se aplică forța F, ea produce în ambele arcuri aceeaşi deformație x, respectiv forțele elastice: $F_1 = k_1 \cdot x$

$$F_2 = k_2 \cdot x$$

$F = F_1 + F_2 = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x = (k_1 + k_2)\cdot x = k\cdot x$

Rezultă: $k = k_1 + k_2$ şi în cazul general:

$$\boxed{k=\sum_{i=1}^{n} k_i}$$



Montaj in serie

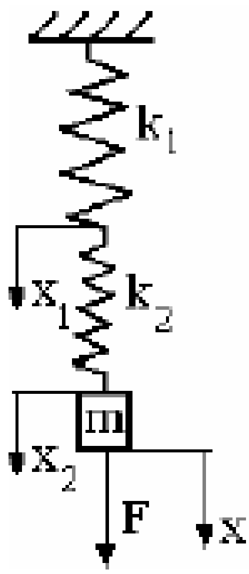
Deformația totală x este suma deformațiilor x_1 şi x_2 produse de forța F în fiecare element elastic:

$$x=\frac{F}{k}=x_1+x_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}$$

Rezultă:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}}$$



VIBRAȚII LIBERE AMORTIZATE

Amortizarea poate fi:

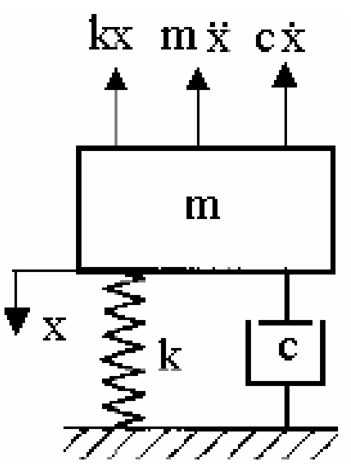
• ***externă*** - atunci când frecările au loc între elementele sistemului oscilant şi mediul înconjurător (reazeme, aer, lichid amortizor);

• ***internă*** - atunci când frecările au loc în interiorul sistemului (îmbinări) fiind caracterizată de apariția unei bucle de histerezis în diagrama efort – deformație, trasată pentru un ciclu complet de încărcare - descărcare a elementului elastic.

În continuare se vor prezenta principalele probleme legate de amortizarea vibrațiilor libere, la sistemele elastice cu amortizare externă.

Vibrații libere în sisteme cu amortizare vâscoasă

Să considerăm un sistem elastic în care există un amortizor vâscos având coeficientul de amortizare c şi care creează o forță de frecare vâscoasă $c \cdot \dot{x}$ de sens opus vitezei, deci de acelaşi sens cu forța elastică (fig).



Ecuația diferențială a mişcării masei m este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad / :m$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se notează: $\frac{c}{m} = 2\alpha$ - factorul de amortizare;

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$ - pătratul pulsației proprii.

$$\ddot{x}+2\cdot\alpha\cdot\dot{x}+\omega_0^2\cdot x=0$$

Rezulta: $r^2+2\cdot\alpha\cdot r+\omega_0^2=0\Rightarrow r_{1,2}=\dfrac{-2\cdot\alpha\pm\sqrt{4\cdot\alpha^2-4\cdot\omega_0^2}}{2}$

$$r_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

Felul mişcării depinde de natura acestor rădăcini.

Cazul I. Amortizare subcritică:

Dacă: $\boxed{\alpha^2-\omega_0^2<0\Rightarrow\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2<\dfrac{k}{m}}\Rightarrow\quad c<2\cdot\sqrt{k\cdot m}=c_{cr}$

ecuația caracteristică admite rădăcini complex conjugate, mişcarea este oscilatorie amortizată, amortizarea se numeşte subcritică.

Se notează: $\beta^2=\omega_0^2-\alpha^2$ şi se numeşte pseudopulsație.

Rezultă : $r_{1;2}=-\alpha\pm i\beta$ şi soluția ecuației diferențiale este:

$$\boxed{x=e^{-\alpha\cdot t}(A\cdot\sin\beta\cdot t+B\cdot\cos\beta\cdot t)=C\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\beta\cdot t+\varphi)}$$

Constantele A, B, C, φ se determină din condițiile inițiale:

La $t=t_0=0$, avem:

$x=x_0\quad\Rightarrow\quad B=x_0$

$\dot{x}=v_0\quad\Rightarrow$

$$\dot{x}=-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot(A\cdot\sin\beta t+B\cdot\cos\beta t)+\beta\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot(A\cdot\cos\beta t-B\cdot\sin\beta t)$$

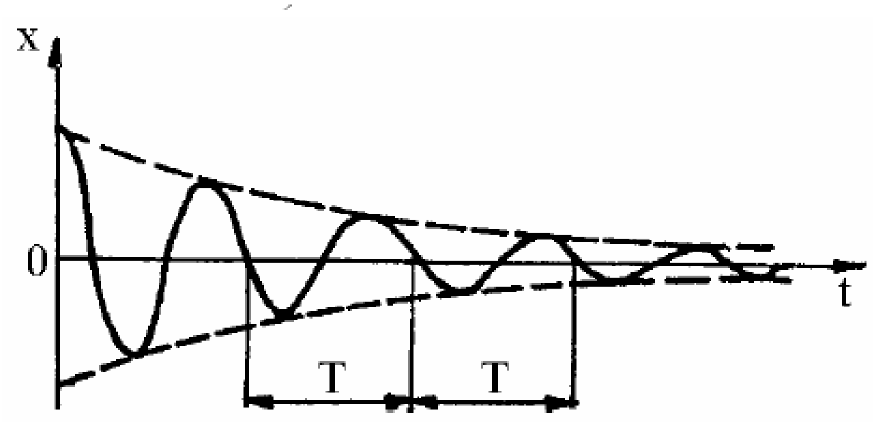
Rezulta $v_0=-\alpha\cdot B+\beta\cdot A\Rightarrow A=\dfrac{v_0+\alpha\cdot x_0}{\beta}$

$$C=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\alpha\cdot x_0}{\beta}\right)^2}\qquad tg\varphi=\frac{B}{A}=\frac{\beta\cdot x_0}{v_0+\alpha\cdot x_0}$$

Legea de mişcare devine :

$$\boxed{x = e^{-\alpha t}\left(\frac{v_o + \alpha x_o}{\beta}\sin\beta t + x_o\cos\beta t\right)}$$

Reprezentarea grafică a legii de mişcare, funcție de timp, este in fig :



Este o mişcare armonică cu pulsația proprie ω_0 cu amplitudinea descrescătoare in timp.

Se determină pseudopulsația:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2\cdot m}\right)^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{m}{k}\cdot\frac{c^2}{4\cdot m^2}} =$$

$$= \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2\cdot\sqrt{k\cdot m}}\right)^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Raportul $\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$ se numeşte fracțiune de amortizare critică

$T_\beta = \frac{2\cdot\pi}{\beta} = \frac{2\cdot\pi}{\omega_0\cdot\sqrt{1-\zeta^2}}$ se numeşte pseudoperioadă

Cazul II. Amortizare critică:

Dacă $\boxed{\alpha^2 - \omega_o^2 = 0 \Rightarrow c = c_{cr}}$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale şi egale, amortizarea este critică.

Se ştie ca $r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ ➔ $r_1 = r_2 = -\alpha$

Rădăcinile ecuației caracteristice $r^2 + 2 \cdot \alpha \cdot r + \omega_0^2 = 0$ fiind egale, ecuația mişcării se scrie:

$$x = e^{-\alpha t}(At + B)$$

Se pun condițiile inițiale , adică:

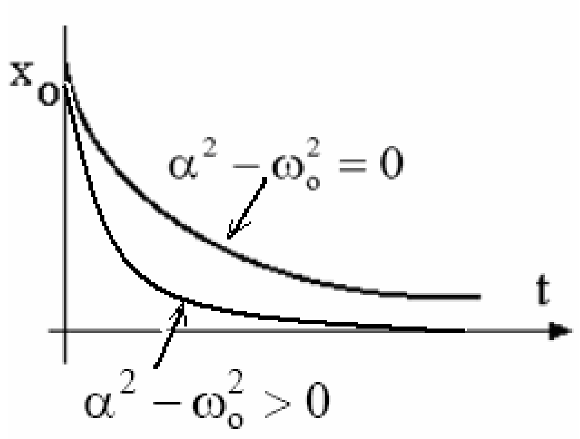
$t = t_0 = 0$; $x = x_0$ ➔ $B = x_0$

$\dot{x} = v_0$ ➔
$$\dot{x} = -\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot (A \cdot t + B) + e^{-\alpha t} \cdot A$$
$$\dot{x} = v_0 = -\alpha \cdot B + A$$
$$A = v_0 + \alpha \cdot x_0$$

Ecuația de mişcare devine astfel:

$$\boxed{x = e^{-\alpha t}\left[\left(v_o + \alpha x_o\right)t + x_o\right]}$$

Se observă că mişcarea nu este armonică, deci nu avem vibrații. Sistemul scos din echilibru, tinde spre poziția de echilibru (figura)



Cazul III. Amortizare supracritică:

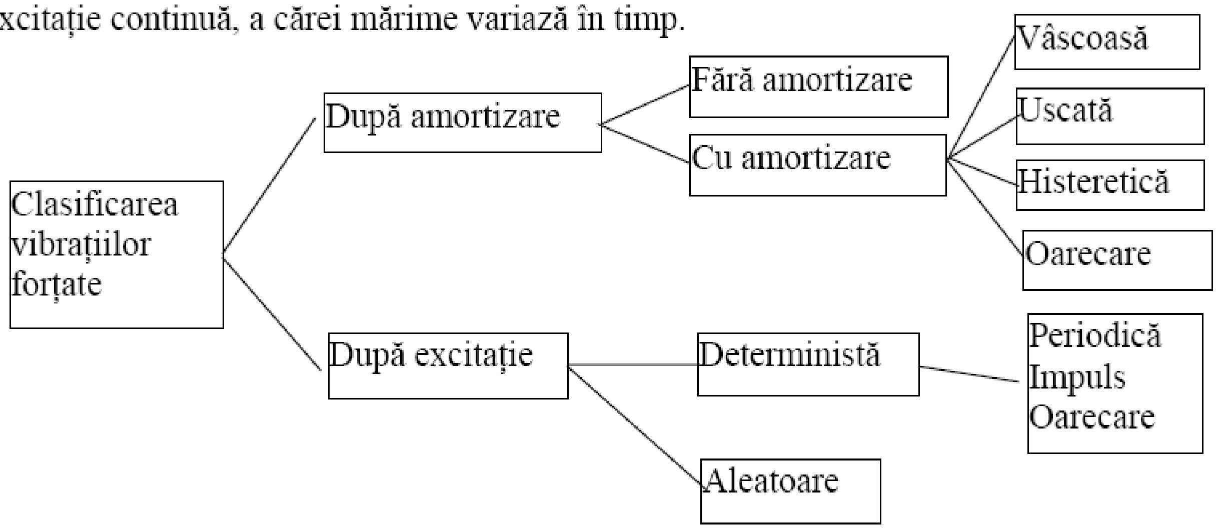
Se obține pentru $\alpha^2 - \omega_o^2 > 0 \Rightarrow c > c_{cr}$ ecuația caracteristică are soluții reale și diferite: $r_{1;2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

Ecuația mișcării este de forma: $x = e^{-\alpha t}\left(Ae^{t\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}} + Be^{-t\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}}\right)$

Este o mişcare aperiodică, sistemul scos din echilibru revine la poziția inițială.(ex)

VIBRAȚII FORȚATE

Vibrația forțată reprezintă mişcarea unui sistem oscilant ca răspuns la o excitație continuă, a cărei mărime variază în timp.



1. Vibrații forțate neamortizate datorită unei excitații armonice

Modelul sistemului oscilant este dat în figura.

Forța excitatoare are amplitudine F_0 şi pulsație ω, deci excitația armonică simplă este:

$F(t) = F_0 \sin \omega t$

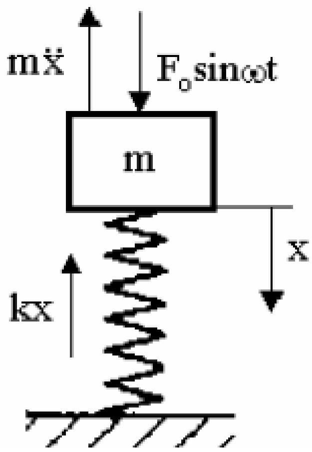
Ecuația diferențială a mişcării este:

$$m\ddot{x} + kx = F_o \sin \omega t$$

Împărțind prin m obținem:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\sin \omega t$$

Se notează: $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$ și $q = \frac{F_o}{m}$



Ecuația de mişcare devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = q \cdot \sin \omega t$$

Avem o ecuație neomogenă a cărei soluție generală este egală cu suma dintre soluția generală x_1 a ecuației omogene şi o soluție particulară x_2 a ecuației neomogene:

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{în care: } \begin{array}{l} x_1 = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t \\ x_2 = C \sin \omega t + D \cos \omega t \end{array}$$

Constantele C şi D se determină punând condiția ca soluția particulară x_2 să verifice ecuația diferențială de mişcare neomogenă.

$$\dot{x}_2 = C\omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t$$
$$\ddot{x}_2 = -C\omega^2 \sin \omega t - D\omega^2 \cos \omega t$$

$$- C\ \omega^2 \sin \omega t - D\ \omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 C \sin \omega t + \omega_0^2 D \cos \omega t = q \sin \omega t$$

$$\sin \omega t \cdot (-C \cdot \omega^2 + \omega_0^2 \cdot C) + \cos \omega t \cdot (-D \cdot \omega^2 + \omega_0^2 \cdot D) = q \cdot \sin \omega t$$

$$\begin{cases} C\left(-\omega^2 + \omega_o^2\right) = q \Rightarrow C = \dfrac{q}{\omega_o^2 - \omega^2} \\ D\left(-\omega^2 + \omega_o^2\right) = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

Deci, soluția generală este:

$$\boxed{x = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t + \frac{q}{\omega_o^2 - \omega^2} \sin \omega t}$$

Constantele A şi B se determină din condițiile inițiale:

La $t = 0$:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - B \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + \omega \cdot \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos \omega t = 0$$

$$A \cdot \omega_0 + \omega \cdot \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

si ecuația mişcării este :

$$\boxed{x = \frac{q}{\omega_o^2 - \omega^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_o} \sin \omega_o t\right)}$$

Avem o vibrație nearmonică, rezultată din suprapunerea a două mişcări armonice, vibrația proprie de pulsație ω_o şi vibrația forțată cu pulsația perturbătoare ω.

În general, datorită efectelor de amortizare, vibrația proprie dispare rapid şi rămâne numai vibrația forțată, în acest caz vibrația fiind armonică, cu frecvența forței perturbatoare.

$$x = X_o \sin \omega t = \frac{q}{\omega_o^2 - \omega^2} \sin \omega t \qquad \text{în care:}$$

$$X_o = \frac{q}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{\frac{F_o}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{\frac{F_o}{m\omega_o^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = \frac{\frac{F_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = A_o X_{st}$$

X_0 este amplitudinea vibrației forțate –săgeata dinamică a sistemului;

$X_{st} = \frac{F_0}{k}$ este deformația statică a sistemului oscilant sub acțiunea valorii maxime F_o a forței perturbatoare.

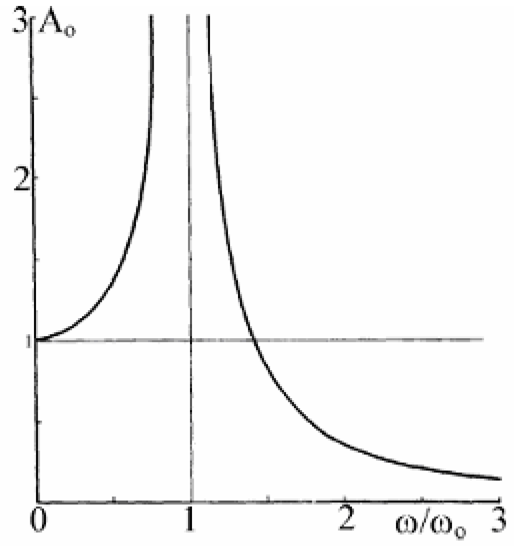
$A_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ este o mărime adimensională, numită factor de amplificare şi arată de câte ori este mai mare deformația dinamică a sistemului, datorită forței perturbatoare, în raport cu deformația statică, datorită amplitudinii aceleiaşi forțe.

$$X_o = X_{st} \cdot A_o$$

Dacă reprezentăm variația lui A_o în funcție de raportul $\frac{\omega}{\omega_o}$ obținem diagrama din figura

Pentru: $\omega = \omega_o \Rightarrow A_o \to \infty$ are loc *fenomenul de rezonanță.*

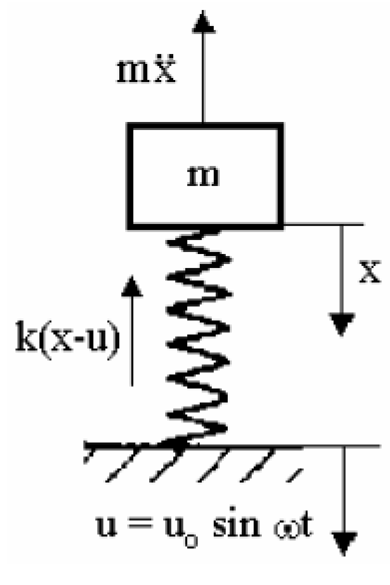
La rezonanță amplitudinea crește continuu cu timpul, devenind infinită numai la valoarea infinită a timpului.



2. Vibrații forțate cu excitația prin mișcare aplicată suportului, in sisteme neamortizate

Să considerăm o excitație armonică, obținută prin mișcare aplicată suportului, de forma:

$$u = u_o \sin \omega t$$



Forța elastică va fi: $F_e = k(x - u)$

iar ecuația diferențială a mișcării forțate este:

$$m \cdot \ddot{x} + k(x - u) = 0$$

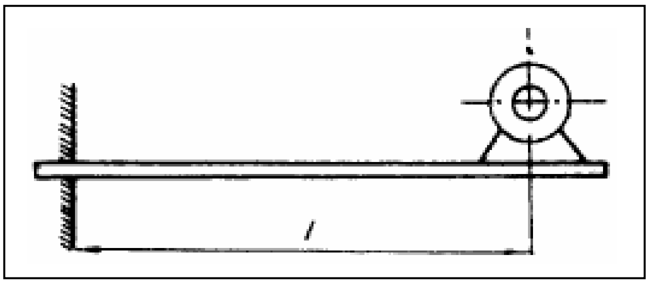
$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = k \cdot u_0 \cdot \sin \omega t$$

Dacă se notează $k \cdot u_0 = F_0$
rezultă soluția generală a ecuației diferențiale:

$$\boxed{x = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t + \frac{u_o}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} \sin \omega t}$$

Amplitudinea vibrației forțate este: $x_0 = \dfrac{u_0}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Aplicație. Un motor electric, având greutatea Q este montat la capătul unui suport format din doua grinzi paralele, încastrate la celălalt capăt. Distanța de la punctul de încastrare la axul motorului este l. Rotorul motorului, de greutate P, are o excentricitate e față de axa de rotație.



b) La ce turație se produce fenomenul de rezonanță.
Se vor neglija greutățile grinzilor și forțele de amortizare.
Rezolvare.
Forța perturbatoare, pe verticală, datorită excentricității este:

$$F = \frac{P}{g} e\omega^2 \sin \omega t \qquad \text{unde:} \quad \omega = \frac{\pi n}{30}$$

Ecuația vibrațiilor forțate, pe direcție verticală, este:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \frac{P}{Q} e\omega^2 \sin \omega t \qquad \text{unde:} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \quad ; \quad f_{st} = \frac{Ql^3}{3E(2I)} \quad \Rightarrow$$

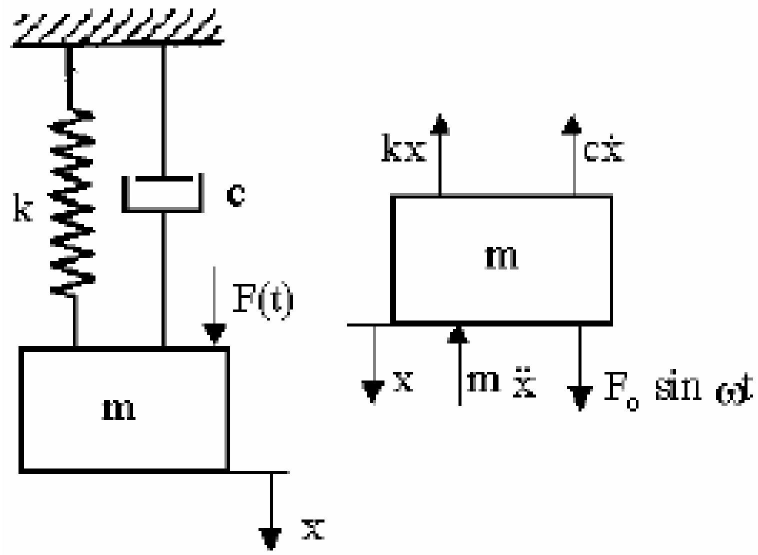
$$\omega_o = \sqrt{\frac{6gEI}{Ql^3}} \quad \Rightarrow \quad X_o = \frac{P}{Q} e \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_o} - 1} \le a \quad \Rightarrow \quad I \ge \omega^2 \frac{Ql^3}{6gE}\left(1 + \frac{Pe}{Qa}\right)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{6gEI}{Ql^3}} \quad \Rightarrow \quad n_{cr} = \frac{30\omega_o}{\pi}$$

3. Vibrații forțate cu amortizare vâscoasă, datorită unei excitații armonice

Să considerăm un sistem oscilant cu un grad de libertate, care are un amortizor liniar c, în paralel cu arcul k

Ecuația diferențială a mişcării este: $m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \sin \omega t$ (1)



Soluția ecuației diferențiale este de forma: $x = x_1 + x_2$

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \cdot (A \cdot \sin \beta t + B \cdot \cos \beta t)$$

Această vibrație reprezinta vibratia libera a sistemului si se amortizează rapid, adică $x_1(t) \approx 0$.

In continuare mişcarea staționară este corespunzătoare soluției particulare $\mathbf{x_2(t)}$ şi are pulsația $\boldsymbol{\omega}$ a forței perturbatoare.

$$x_2(t) = X_0 \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

X_0 si θ se determină din condiția ca soluția particulară $x_2(t)$ să verifice ecuația diferențială (1):

Stim că: $\dot{x} = \omega \cdot X_0 \cdot \cos(\omega t - \theta)$; $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot X_0 \cdot \sin(\omega t - \theta)$

$$-m \cdot \omega^2 \cdot X_0 \cdot \sin(\omega t - \theta) + c \cdot \omega \cdot X_0 \cdot \cos(\omega t - \theta) + k \cdot X_0 \cdot \sin(\omega t - \theta) = F_0 \cdot \sin \omega t$$

$$(-m \cdot \omega^2 \cdot X_0 + k \cdot X_0) \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \theta - \cos \omega t \cdot \sin \theta) + c \cdot \omega \cdot X_0 \cdot (\sin \omega t \cdot \sin \theta + \cos \omega t \cdot \cos \theta) =$$
$$= F_0 \cdot \sin \omega t$$

$\sin \omega t\,[\cos\theta\,(-\,m\,X_0\,\omega^2 + kX_0) + c\,X_0\,\omega \sin\theta] + \cos\omega t\,[\sin\theta\,(m\,X_0\,\omega^2 - kX_0) + cX_0\,\omega\,\cos\theta] = F_0 \sin\omega t$

Identificand termenii obtinem:

$$(-m\cdot X_0\cdot\omega^2 + k\cdot X_0)\cdot\cos\theta + c\cdot X_0\cdot\omega\cdot\sin\theta = F_0$$

$$(m\cdot X_0\cdot\omega^2 - k\cdot X_0)\cdot\sin\theta + c\cdot X_0\cdot\omega\cdot\cos\theta = 0$$

Rezultă: $X_0\cdot[(k - m\cdot\omega^2)\cdot\cos\theta + c\cdot\omega\cdot\sin\theta] = F_0$

$$\boxed{X_o = \frac{F_o}{\left(-m\omega^2 + k\right)\cos\theta + c\omega\sin\theta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{c\cdot\omega}{k - m\cdot\omega^2}} \qquad (3)$$

Stim ca:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\cdot\sqrt{k\cdot m}} \quad\Rightarrow\quad c = 2\cdot\zeta\cdot\sqrt{k\cdot m} = 2\cdot\zeta\cdot m\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\cdot\zeta\cdot m\cdot\omega_0$$

Inlocuim in rel. (3) si imparțim prin ω_0^2

$$tg\theta = \frac{c\cdot\omega}{m\cdot\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)} = \frac{c\cdot\omega}{m\cdot(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\cdot\zeta\cdot\omega_0\cdot\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\cdot\zeta\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Stim ca: $\sin\theta = \dfrac{tg\theta}{1 + tg^2\theta}; \quad \cos\theta = \dfrac{1}{1 + tg^2\theta}$

Inlocuim in rel (2) şi rezultă:

$$\boxed{X_o = \frac{F_o}{k}\,\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}}$$

Soluția staționară dată de vibrația forțată este:

$$x = \frac{F_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

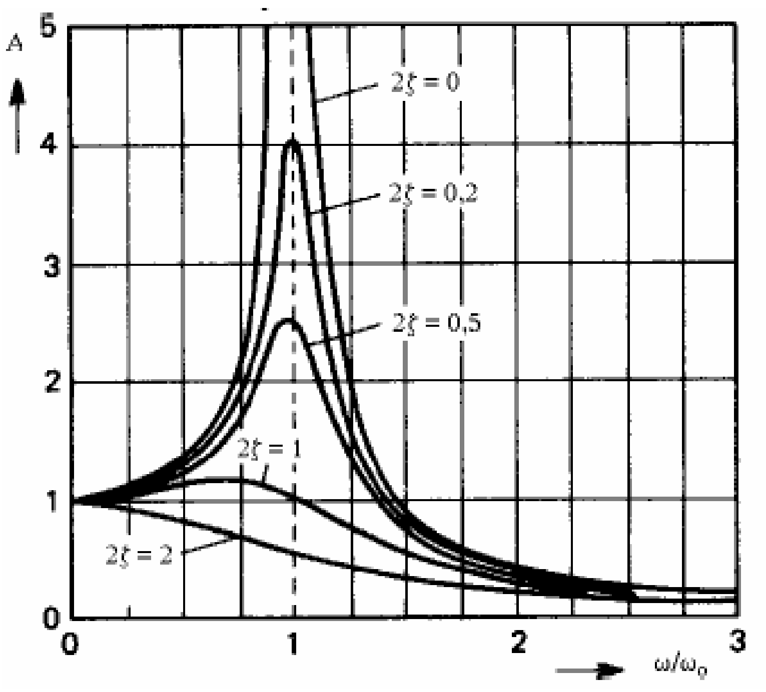
$$\boxed{x(t) = X_0 \cdot \sin(\omega t - \theta) = X_{st} \cdot A \cdot \sin(\omega t - \theta)}$$

Se notează $X_{st} = \frac{F_0}{k}$ săgeata statică a sistemului datorată amplitudinii fortei perturbatoare.

Se definește
factorul de amplificare **A** :

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} = \frac{X_o}{X_{st}}}$$

În figura se prezintă variația lui **A** în funcție de raportul **ω/ω_o**



$$\boxed{\begin{array}{l} 2\zeta = 0 \\ A \to \infty \end{array}}$$

Din analiza acestei diagrame rezultă:

a) La rezonanță, cu cât amortizarea este mai mare, amplitudinea vibrațiilor forțate şi mărimea factorului de amplificare este mai mică;

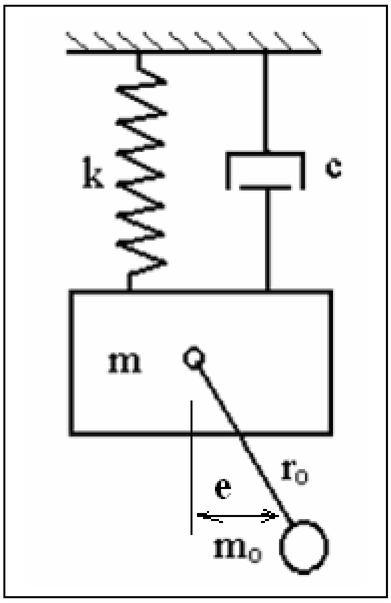
b) Efectul amortizării se resimte numai în vecinătatea zonei de rezonanță, în rest pentru $\omega/\omega_0 >> 1$ curbele se suprapun. Rezultă că un amortizor este util numai pentru un sistem care lucrează în apropierea rezonanței sau trece prin rezonanță;

c) Curbele au maximum puțin în stânga rezonanței sistemului neamortizat.

4. Excitația prin forță centrifugă în sistem cu amortizare vâscoasă

Se consideră un sistem elastic cu oscilație armonică creată de forța centrifugă. Dacă forța perturbatoare armonică este produsă de o masă excentrică rotitoare, atunci are expresia (figura):

$$F_c = m_0 \cdot \omega^2 \cdot e = \underbrace{m_0 \cdot \omega^2 \cdot r_0}_{F_0} \cdot \sin \omega t$$



Stim că: $$X_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{(m+m_0)\cdot\omega_0^2}$$

Ecuația diferențială a mişcarii este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

Rezolvarea acestei ecuații dă soluția staționară a vibrației forțate:

$$X_0 = \underbrace{\frac{m_0 \cdot \omega^2 \cdot r_0}{(m+m_0)\cdot\omega_0^2}}_{X_{st}} \cdot A$$

$$X_0 = \underbrace{\frac{m_0 \cdot \omega^2 \cdot r_0}{(m+m_0)\cdot \omega_0^2}}_{X_{st}} \cdot A = \frac{m_0 \cdot r_0}{(m+m_0)} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot A$$

$$X_0 = \frac{m_0 \cdot r_0}{(m+m_0)} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\cdot\zeta\cdot\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

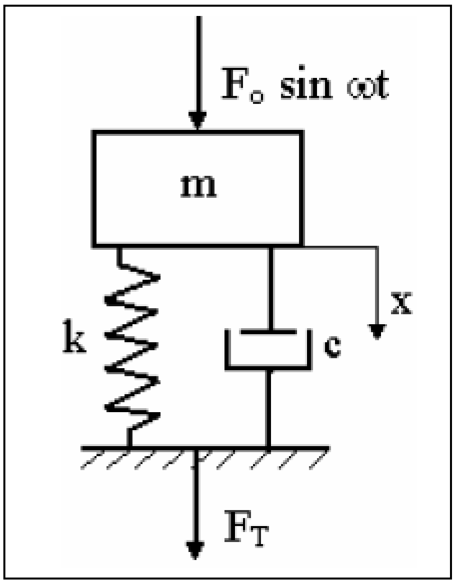
5. Transmisibilitate

Să considerăm un sistem oscilant cu amortizare vascoasă, care execută vibrații forțate amortizate (figura). Dacă asupra masei **m** acționează o forță periodică de amplitudine **F_0**, se cere să se determine amplitudinea **F_T** a forței transmise la suport.

Forțele transmise de arc și amortizor la suport sunt:

$F_1 = kx$ și $F_2 = c\dot{x}$ unde:

$x = X_0 \sin(\omega t - \theta) = AX_{st} \sin(\omega t - \theta)$



Stim că:

$\dot{x} = AX_{st}\omega\cos(\omega t - \theta)$

Atunci:

$$F_1 = k\cdot x = \underbrace{k\cdot X_{st}\cdot A}_{F_1\,\max}\cdot\sin(\omega t-\theta);$$

$$F_2 = c\cdot \dot{x} = \underbrace{c\cdot X_{st}\cdot A\cdot\omega}_{F_2\,\max}\cdot\cos(\omega t-\theta)$$

Forțele **F_1** și **F_2** sunt defazate cu **π/2**, deci amplitudinea forței rezultante este:

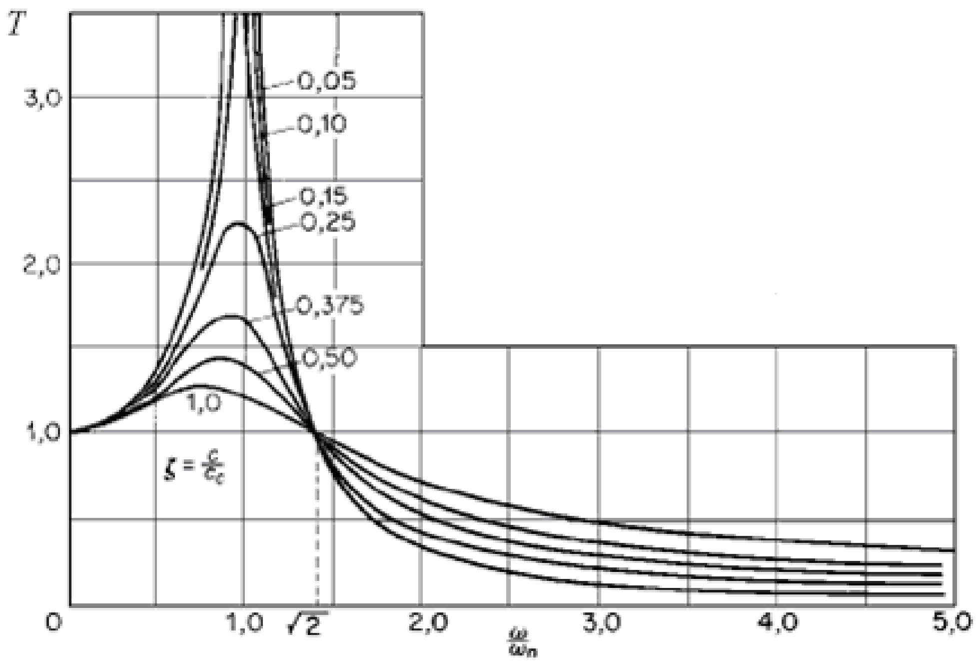
$$F_T = \sqrt{F_{1\max}^2 + F_{2\max}^2} = \sqrt{k^2A^2X_{st}^2 + c^2A^2X_{st}^2\omega^2}$$

$$F_T = X_{st} \cdot A \cdot \sqrt{k^2 + c^2 \cdot \omega^2} = \frac{F_0}{k} \cdot A \cdot k \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{k \cdot m}\right)^2 \cdot \omega^2}{k^2}}$$

$$F_T = F_0 \cdot A \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{k \cdot \frac{k}{\omega_0^2}}\right)^2 \cdot \omega^2}{k^2}} = F_0 \cdot A \cdot \sqrt{1 + \left(2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Raportul dintre forța transmisă și amplitudinea forței perturbatoare se numeşte *transmisibilitate:*

$$\boxed{T = \frac{F_T}{F_o} = \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}}$$



Concluzii

1. Transmisibilitatea vibrațiilor la rezonanță este cu atat mai mare cu cat amortizarea din sistem este mai mică.

2. Se observă că:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 0 \quad si \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad T = 1$$

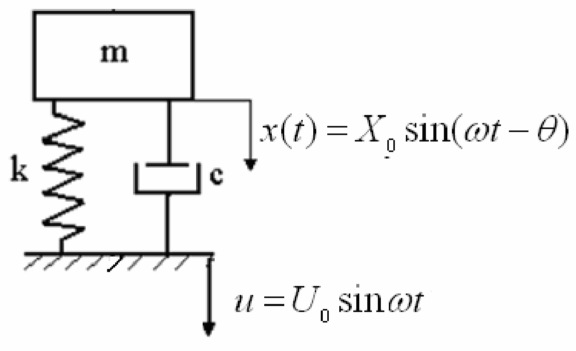
3. Din examinarea reprezentării grafice a transmisibilității rezultă că :

$$\frac{\omega}{\omega_0} < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad T > 1$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad T < 1$$

Deci, transmisibilitatea este subunitară pentru $\boldsymbol{\omega/\omega_0} > \sqrt{\mathbf{2}}$ şi cu atât mai mică cu cât amortizarea este mai mică.

4. Dacă suportul este supus unei deplasări armonice u masa va avea o deplasare x(t) ca in figura alăturată.



Transmisibilitatea mişcării este definită, in acest caz, de relaţia:

$$T = \frac{X_o}{U_o} = \sqrt{\frac{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

5. Dacă sistemul nu are amortizare, $\quad c = 0 \Rightarrow \zeta = 0 \Rightarrow T = \dfrac{1}{\left|1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|}$

Observații

1. Izolarea antivibratorie a mașinilor este o problemă de transmisibilitate.

2. Problema izolării antivibratorii se pune în două moduri:

• mașina produce forțe perturbatoare F(t) și se urmărește ca transmiterea acestora la fundație să fie atenuată (*izolare activă*);

• mașina este așezată pe o pardoseală aflată în vibrație și se cere ca vibrațiile transmise mașinii să fie cât mai reduse (*izolare pasivă*).

Pentru a realiza izolarea antivibratorie este necesar ca între mașină și fundație să se interpună o *suspensie elastică*.

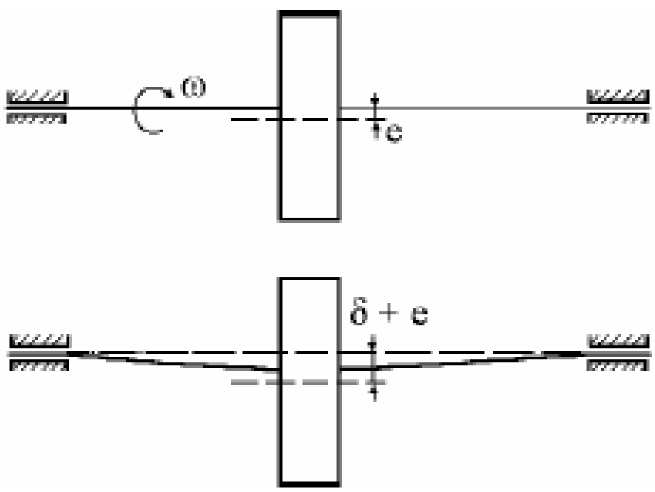
Din punctul de vedere al transmisibilității, deci al izolării, amortizarea nu este de dorit. Ea există însă, din necesitatea de a micșora amplitudinea și transmisibilitatea la rezonanță.

3. Se observă că izolarea este eficace $T < 1$ pentru $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$.

4. Se definește gradul de izolare al unei suspensii elastice: $I_S = (1 - T).100$ [%]

6. Turația critică a arborilor

Să considerăm un arbore elastic de masă neglijabilă, încărcat la mijloc cu un disc de masă m, așezat pe două reazeme (figura). Discul este dezaxat cu excentricitatea e.



În timpul rotirii arborelui, masa m va produce forța centrifugă F_c: $F_c = m \cdot \omega^2 \cdot e$, care va deforma elastic arborele, săgeata in dreptul discului fiind δ.

Arborele se deformează până când forța elastică dezvoltată de arbore echilibrează forța centrifugă.

$$\left.\begin{aligned} F_c' &= m\cdot\omega^2\cdot(\delta+e) \\ F_e &= k\cdot\delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\cdot\delta = m\cdot\omega^2\cdot(\delta+e) \Rightarrow \delta = \frac{m\cdot\omega^2\cdot e}{k-m\cdot\omega^2}$$

Se imparte prin m, apoi prin ω_0 şi rezultă:

$$\delta = \frac{\omega^2 e}{\frac{k}{m}-\omega^2} = \frac{\omega^2 e}{\omega_o^2-\omega^2} = e\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

Concluzii:

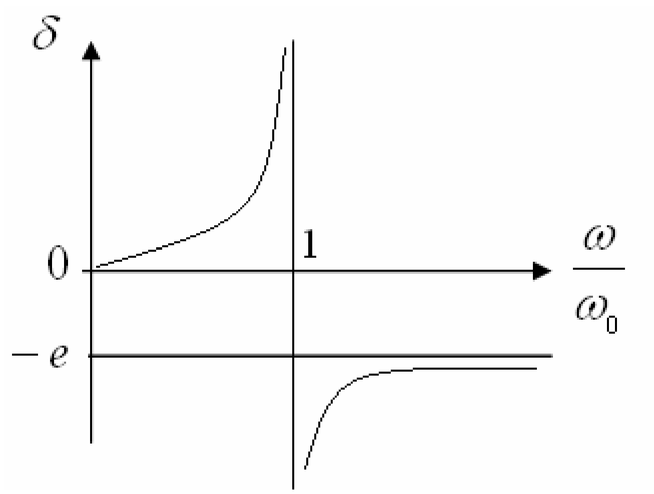
1. Pentru $\omega = \omega_0$ săgeata arborelui δ devine infinită.

2. Turația corespunzătoare acestei pulsații se numeşte turație critică şi se calculează cu relația:

$$\boxed{n_c = \frac{30\omega_o}{\pi}\ \text{rot/min}}$$

3. Pentru $\omega / \omega_0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \delta > 0$

4. Pentru $\omega / \omega_0 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \delta \rightarrow -e$ arborele se autocentrează, acesta rotindu-se în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate G al discului.



7. Vibrații forțate amortizate produse de o excitație periodică nearmonică

Dacă forța excitatoare F(t) nu este armonică, dar este periodică, expresia ei poate fi dezvoltată într-o sumă finita sau infinită de componente armonice prin dezvoltare în serie Fourier:

$F(t)=A_o+A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t+A_2\cos 2\omega t+B_2\sin 2\omega t+\ldots+A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)+\ldots$

unde coeficienții A_o, A_n și B_n au expresiile:

$$A_o=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)dt \qquad \text{cu} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Deci : $F(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cdot\cos(n\omega t)+B_n\cdot\sin(n\omega t)]$

Daca se noteaza: $$F_0=A_0;\ F_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2};\ tg\theta_n=\frac{A_n}{B_n}$$

rezulta:

$$F(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cdot\sin(n\omega t-\theta_n)$$

Dacă excitația acționează asupra unui sistem elastic liniar, cu amortizare vâscoasă, atunci putem aplica principiul suprapunerii efectelor pentru stabilirea soluției. Răspunsul sistemului este egal cu suma răspunsurilor generate de cele **n** componente armonice.

Stim ca, la vibratiile fortate produse de o excitatie armonica:

$$F(t)=F_0\cdot\sin\omega t;\quad x(t)=X_0\cdot\sin(\omega t-\theta)$$

$$X_o = \frac{F_o}{k}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

$$tg\theta = \frac{2\cdot\zeta\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

În cazul unui sistem cu amortizare vâscoasă produsa de o excitatie periodica nearmonica, componentele datorită vibrațiilor proprii se amortizează rapid, rămânând numai soluția staționară, care are expresia :

$$x = \frac{F_o}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{k\sqrt{\left[1-\left(\frac{n\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_o}\right)^2}}\sin(n\omega t-\theta_n)$$

unde :

$$\theta_n = \mathrm{arctg}\frac{2\xi\frac{n\omega}{\omega_o}}{1-\left(\frac{n\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

Dacă se notează cu $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ amplitudinile deplasărilor diferitelor armonici, ecuația mişcării se scrie:

$$x = x_o + x_1\sin(\omega t-\theta_1) + x_2\sin(2\omega t-\theta_2) + \ldots + x_n\sin(n\omega t-\theta_n) + \ldots$$

În mod similar, se poate scrie expresia accelerațiilor:

$$a = a_1\sin(\omega t-\theta_1) + a_2\sin(2\omega t-\theta_2) + \ldots + a_n\sin(n\omega t-\theta_n) + \ldots$$

În studiul unei astfel de mişcări este util să cunoaştem amplitudinile $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ale deplasărilor sau $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ale accelerațiilor armonicelor componente, funcție de pulsația acestora.

Graficul discontinuu prin care se reprezintă aceste mărimi, funcție de frecvență, se numeşte spectrul deplasărilor, sau al accelerațiilor.

Aceste spectre pot fi determinate pe cale experimentală cu analizorul de frecvențe, care are in structura sa filtre analogice sau digitale ce permit măsurarea amplitudinii si frecventei componentelor armonice din seria Fourier.

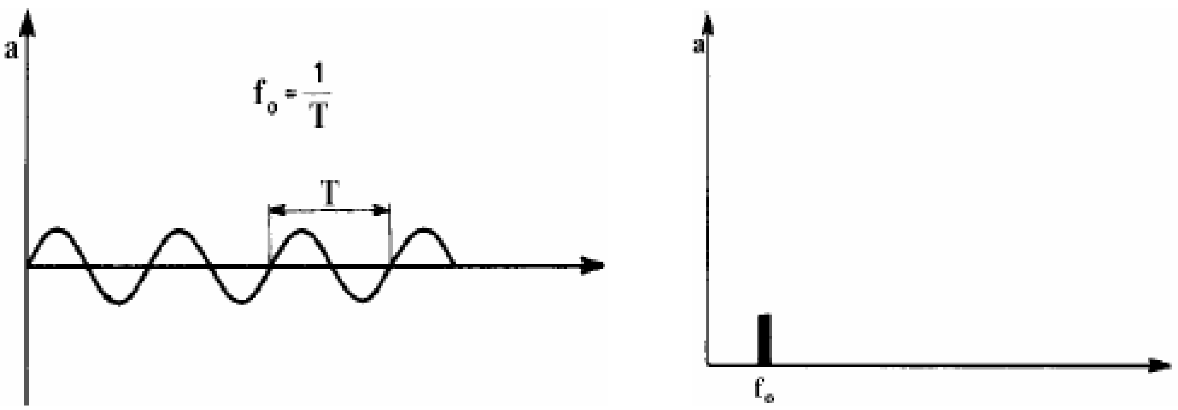
În figura sunt prezentate spectrele accelerațiilor pentru trei mişcări:

a) mişcarea pur sinusoidală;

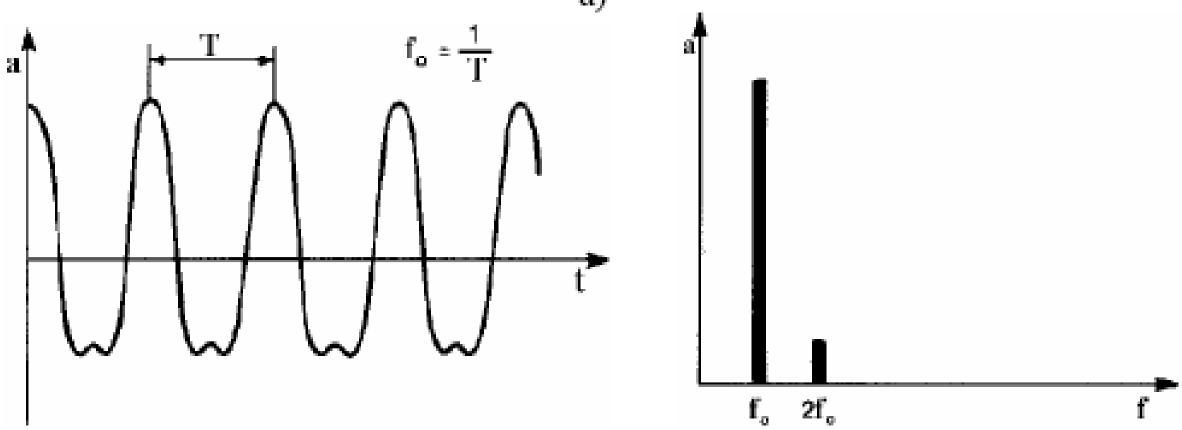
b) suprapunerea a două mişcări armonice cu frecvențele în raport 1:2;

c) succesiune de impulsuri dreptunghiulare. În acest caz, spectrul accelerațiilor are o infinitate de armonice, dintre care s-au reprezentat primele patru armonice, celelalte fiind neglijabile.

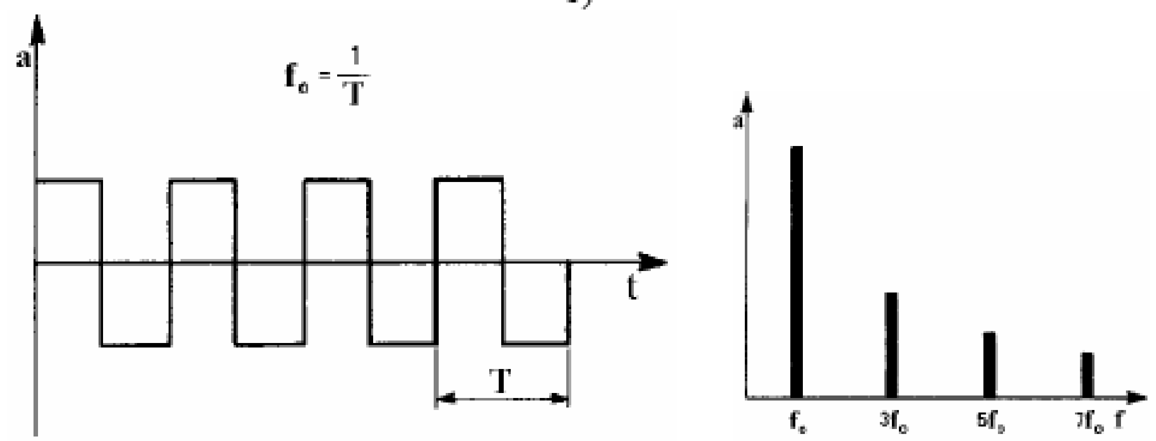
Rezultă că reprezentarea în domeniul frecvență a unei mărimi periodice, conduce la un spectru format din linii discrete, numărul acestora putând fi finit sau infinit.



a)



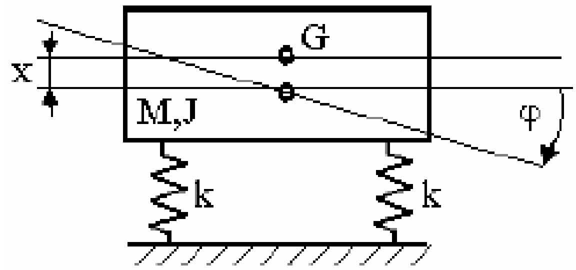
b)



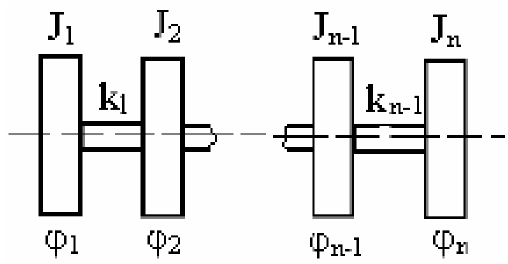
c)

VIBRAȚII ÎN SISTEME CU N GRADE DE LIBERTATE

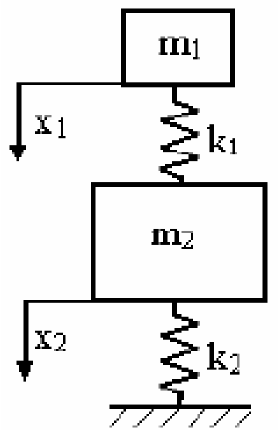
Sistemele elastice nu pot fi studiate întotdeauna cu ajutorul modelului având o singură masă, deci un singur grad de libertate. Pentru a analiza teoretic vibrațiile acestor sisteme este necesar ca ele să fie schematizate prin modele cu mai multe grade de libertate.



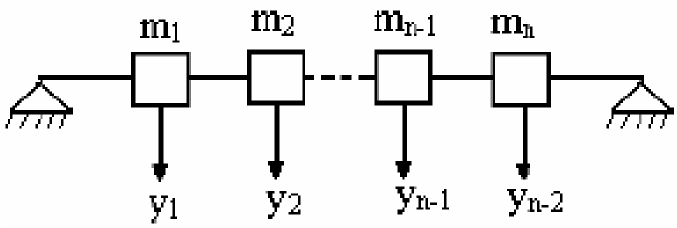
a)



b)



c)

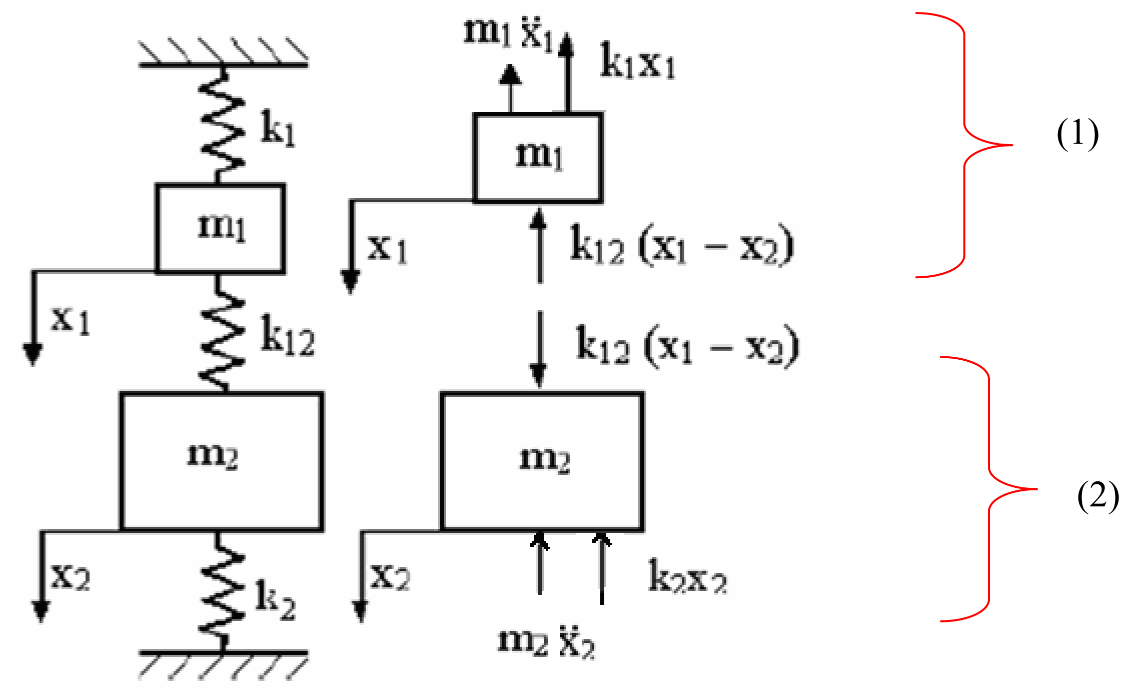


d)

Fig.a - Vibrațiile unui vehicul pe două osii, pot fi studiate în cel mai simplu caz cu ajutorul modelului cu două grade de libertate, a cărei mişcare este determinată de doi parametri x şi φ, deci modelul are două grade de libertate.
Fig.c -Vibrațiile transversale ale unei maşini unelte, rezemată pe reazeme vibroizolante pe fundație, care este aşezată pe un mediu elastic, pot fi studiate de asemenea, cu modelul cu două grade de libertate .
Fig.b,d - Vibrațiile torsionale şi flexionale ale arborilor pot fi analizate pe modele cu **n** grade de libertate, obținute prin concentrarea masei în n puncte, porțiunile dintre mase fiind considerate de masă neglijabilă şi de rigiditate GI_p şi respectiv EI.

1. Vibrații libere neamortizate în sisteme cu două grade de libertate

Să considerăm sistemul din figura, format din masele $\mathbf{m_1}$ şi $\mathbf{m_2}$ legate de reperele fixe prin arcurile de constante elastice $\mathbf{k_1}$ şi $\mathbf{k_2}$ şi între ele prin arcul de constantă elastică $\mathbf{k_{12}}$. Să notăm cu $\mathbf{x_1(t)}$ şi $\mathbf{x_2(t)}$ deplasările independente ale celor două mase față de poziția de echilibru static. Dacă se izolează masele şi se aplică forțele de legătură şi forțele de inerție, se poate scrie ecuația de echilibru dinamic pentru fiecare masă, folosind principiul lui d'Alembert. Rezultă sistemul:



(1) $$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_1 \cdot x_1 + k_{12} \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

(2) $$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot x_2 - k_{12} \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

Pentru integrarea sistemului se caută soluții de forma:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

Stim că:

$$\dot{x}_1 = \omega \cdot A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 \cdot A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}_2 = \omega \cdot A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 \cdot A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Rezulta:

$$m_1 \cdot (-\omega^2 \cdot A_1) \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k_1 \cdot A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k_{12}(A_1 - A_2) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$m_2 \cdot (-\omega^2 \cdot A_2) \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k_2 \cdot A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) - k_{12}(A_1 - A_2) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\left[(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1 + k_{12}) \cdot A_1 - k_{12} \cdot A_2\right] \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\left[(-m_2 \cdot \omega^2 + k_2 + k_{12}) \cdot A_2 - k_{12} \cdot A_1\right] \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1 + k_{12}) \cdot A_1 - k_{12} \cdot A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_1 \cdot \omega^2 \cdot A_1 + k_1 \cdot A_1 + k_{12} \cdot (A_1 - A_2) = 0 \quad (3)$$

$$-k_{12} \cdot A_1 + (-m_2 \cdot \omega^2 + k_2 + k_{12}) \cdot A_2 = 0$$

Am obţinut un sistem algebric liniar şi omogen, cu necunoscute A_1 şi A_2, care admite soluții diferite de soluția banală ($A_1=0$ şi $A_2=0$) dacă:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -m_2\omega^2 + k_2 + k_{12} \end{bmatrix} = 0$$

Δ se numeşte determinantul lui Lagrange.

Dezvoltând determinantul obținem o ecuație de gradul 4 in **ω** numită ecuația pulsațiilor proprii, care are 2 soluții pozitive si 2 negative. Soluțiile pozitive ale ecuației reprezintă cele 2 pulsații proprii ale sistemului cu 2 grade de libertate.

Un sistem cu **n** grade de libertate are **n** pulsații proprii.

Rezolvăm determinantul pentru $\mathbf{k_1 = k_2 = k}$ si $\mathbf{m_1 = m_2 = m}$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -m\omega^2 + k + k_{12} \end{bmatrix}$$

$$m^2\cdot\omega^4 - m\cdot k\cdot\omega^2 - m\cdot k_{12}\cdot\omega^2 - m\cdot k\cdot\omega^2 + k^2 + k\cdot k_{12} - m\cdot k_{12}\cdot\omega^2 + $$
$$+ k\cdot k_{12} + k_{12}^2 - k_{12}^2 = 0$$

$$m^2\cdot\omega^4 - 2\cdot m\cdot(k + k_{12})\cdot\omega^2 + k^2 + 2\cdot k\cdot k_{12} = 0$$

$$\left(\omega^2\right)^2 - 2\cdot\frac{k + k_{12}}{m}\cdot\omega^2 + \frac{k^2 + 2\cdot k\cdot k_{12}}{m^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k + 2\cdot k_{12}}{m}$$

Pulsațiile proprii sunt:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{şi} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

1.Dacă se consideră $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow$

$$x_1 = A_1 \cdot sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right)$$

$$x_2 = A_2 \cdot sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_1\right)$$

Se inlocuieşte **ω** in:

$$-m_1 \cdot \omega^2 \cdot A_1 + k_1 \cdot A_1 + k_{12} \cdot (A_1 - A_2) = 0 \quad (3)$$

Rezultă: $-m \cdot \frac{k}{m} \cdot A_1 + k \cdot A_1 + k_{12} \cdot (A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = \lambda_1$

Deci, pentru $\omega = \omega_1 \Rightarrow A_1 = A_2 = \lambda_1$ se obține primul mod propriu de vibrație, care este dat de soluția :

$$x_1 = \lambda_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right)$$

$$x_2 = \lambda_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right)$$

Rezultă că în primul mod de vibrație, masele vibrează cu aceeaşi amplitudine şi în acelaşi sens, deci sistemul vibrează fără ca resortul $\mathbf{k_{12}}$ să se deformeze, deci vibrează ca un sistem cu un singur grad de libertate, având pulsația: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2. Cel de-al doilea mod de vibrație se obține pentru $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2 \cdot k_{12}}{m}}$

Inlocuind pe **ω** in ec. (3) $\Rightarrow$

$$-m \cdot \frac{k + 2 \cdot k_{12}}{m} \cdot A_1 + k \cdot A_1 + k_{12} \cdot (A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -A_2 = -\lambda_2$$

Soluția sistemului in acest caz este:

$$x_1 = \lambda_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} t + \varphi_2\right)$$

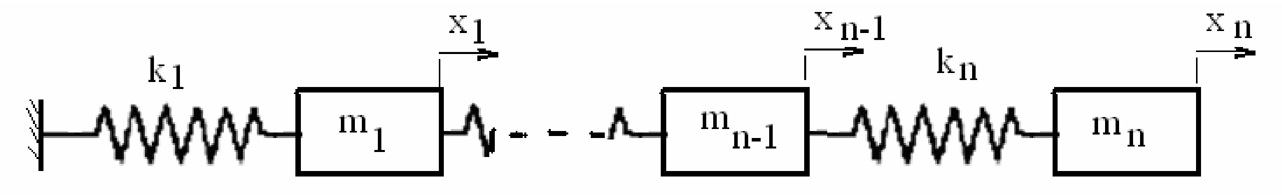
$$x_2 = -\lambda_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} t + \varphi_2\right)$$

Amplitudinile sunt egale, cele două mase vibrează în sensuri opuse, în raport cu punctul median. Am obținut cel de al doilea mod propriu de vibrație.

Soluția generală a sistemului de ecuații se obține sumând soluțiile particulare:

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \lambda_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ X_2 &= \lambda_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \lambda_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}}$$

2. Vibrații libere neamortizate în sisteme cu n grade de libertate



În cazul sistemelor cu **n** grade de libertate, pentru fiecare grad de libertate $\mathbf{x_j}$ se poate scrie ecuația:

$$\boxed{m_j \ddot{x}_j = Q_j}$$

m_j – este masa sau momentul de inerție masic, corespunzător gradului de libertate j;

$\ddot{x}_j$ – este accelerația de translație sau rotație, după gradul de libertate j;

Q_j – este rezultanta forțelor sau cuplurilor aplicate sistemului după gradul de libertate j.

Pentru întocmirea modelului matematic trebuie cunoscute:

- masele **m_j**;
- constantele elastice **k_{jk}**;
- amortizările;
- forțele perturbatoare.

Definitii

Constanta elastică generalizată $\boldsymbol{k_{jk}}$ a gradului de libertate j, dupa directia k, este egală cu forța elastică care acționează asupra gradului de libertate de ordinul j, când are loc o deplasare lentă, egală cu unitatea, numai pe direcția negativă, a gradului de libertate k.

Un sistem elastic, cu n grade de libertate, poate fi caracterizat complet prin n constante elastice. Constantele elastice respectă legea reciprocității:

$$k_{jk} = k_{kj}$$

Forța elastică totală $\boldsymbol{F_{el.k}}$ care acționează asupra gradului de libertate k, este suma efectelor deplasărilor pe toate gradele de libertate:

$$\boxed{F_{el.k} = -\sum_{k=1}^{n} k_{jk} x_k}$$

Semnul minus arată că forța elastică este opusă mişcării. Cele **n** ecuații de mişcare se pot scrie sub forma:

$$\boxed{m_j \ddot{x}_j + \sum_{k=1}^{n} k_{jk} x_k = F_j \qquad \text{cu:} \qquad j = 1,2,\ldots,n}$$

în care $\mathbf{F_j}$ reprezintă suma forțelor exterioare.

În cazul vibrațiilor libere neamortizate forțele exterioare $\mathbf{F_j}$ sunt nule şi deci ecuațiile de mişcare se pot scrie sub forma:

$$m_j \ddot{x}_j + \sum_{k=1}^{n} k_{jk} x_k = 0 \qquad \text{unde:} \quad j = 1, 2 \ldots n\,.$$

$$\underbrace{m_1 \cdot \ddot{x}_1^{\,2} + k_{11} \cdot x_1} + k_{12} \cdot x_2 + \ldots + k_{1n} \cdot x_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$\underbrace{m_n \cdot \ddot{x}_n^{\,2}} + k_{n1} \cdot x_1 + k_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \underbrace{k_{nn} \cdot x_n} = 0$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații diferențiale sunt de forma:

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\vdots$$
$$x_n = A_n \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}_1 = \omega \cdot A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 \cdot A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{x}_2 = \omega \cdot A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 \cdot A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Înlocuind soluțiile de mai sus în sistemul (1) obținem un sistem algebric liniar, omogen cu necunoscutele $\mathbf{A_j}$ (j=1..n), de forma:

$$\left(-m_1 \cdot \omega^2 + k_{11}\right) \cdot A_1 + k_{12} \cdot A_2 + \ldots + k_{1n} \cdot A_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_{n1} \cdot A_1 + k_{n2} \cdot A_2 + \ldots + (-m_n \cdot \omega^2 + k_{nn}) \cdot A_n = 0$$

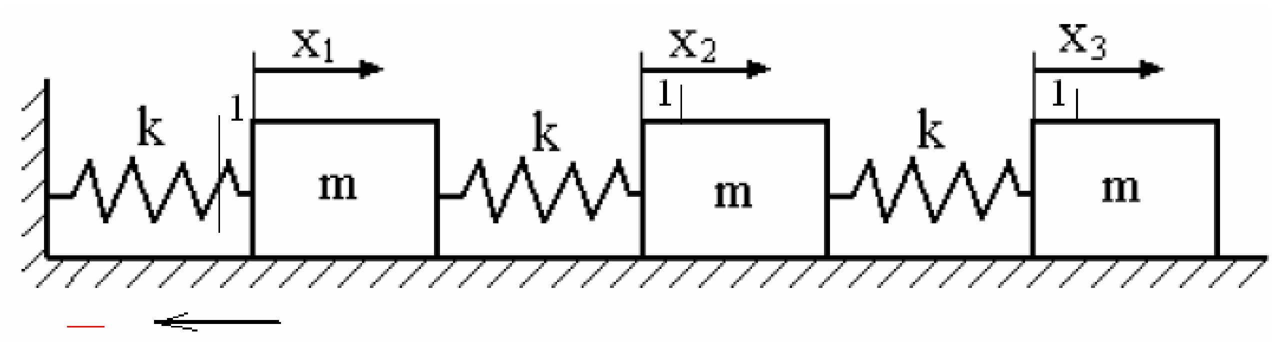
Sistemul admite soluții diferite de soluția banală dacă determinantul principal al sistemului este nul:

$$\begin{vmatrix} m_1 \cdot \omega^2 - k_{11} & -k_{12} & -k_{13} \ldots\ldots & -k_{1n} \\ -k_{21} & m_2 \cdot \omega^2 - k_{22} & -k_{23} \ldots\ldots & -k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & -k_{n3} \ldots\ldots & m_n \cdot \omega^2 - k_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Dezvoltând acest determinant obținem ecuația pulsațiilor proprii (de gradul **n** în $\boldsymbol{\omega^2}$).

Rezolvând ecuația obținem cele **n pulsații proprii** (sau naturale) ale sistemului.
Concluzie:
Dacă sistemul nu este supus la forțe exterioare acesta poate vibra cu una sau mai multe pulsații proprii. Un sistem vibrând cu una din pulsațiile proprii ω_n, are o distribuție a amplitudinilor numită *mod propriu de vibrații.*

Aplicație: Se dă sistemul cu trei grade de libertate (figura), format din trei mase aşezate pe un suport rigid, legate în serie prin trei arcuri, având aceeaşi constantă elastică. Deplasările absolute ale maselor sunt: x_1 , x_2 , x_3 . Să se determine pulsațiile proprii.



In cazul unui sistem cu n grade de libertate trebuie calculate n^2 constante elastice.

Se respectă legea reciprocității: $k_{jk} = k_{kj}$

$k_{11} = k+k=2k$	$k_{21} = -k$	$k_{31} = 0$
$k_{12} = -k$	$k_{22} = k+k = 2k$	$k_{32} = -k$
$k_{13} = 0$	$k_{23} = -k$	$k_{33} = k$

Ecuația pulsațiilor proprii este conform rel (2):

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & k & m\omega^2 - k \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{m\cdot\omega^2}{k}\right)^3 - 5\left(\frac{m\cdot\omega^2}{k}\right)^2 + 6\left(\frac{m\cdot\omega^2}{k}\right) - 1$$

$$\omega_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = 1.25\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega_3 = 1.8\sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Determinarea ecuațiilor de mişcare folosind ecuațiile lui Lagrange

Ecuațiile lui Lagrange se scriu sub forma :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}=Q_i}$$

Unde:

- q_i (i=1,2,…n) reprezintă, pentru un sistem oscilant cu **n** grade de libertate, parametrii independenți ce depind de timp, cu care se studiază mişcarea vibratorie, numiti coordonate generalizate. Originile acestor coordonate se aleg, în general, astfel ca valorile lor să fie nule în poziția de echilibru static sau în mişcarea de regim.
- $\dot{q}_i$ reprezintă vitezele generalizate.
- E_c este energia cinetică totală a sistemului
- Q_i sunt forțele generalizate, care corespund tuturor forțelor ce acționează asupra sistemului (forțe elastice, de amortizare şi perturbatoare).

Vibrațiile se efectuează față de poziția de echilibru static, în care am considerat originea tuturor coordonatelor generalizate şi în care vom presupune energia potențială nulă. De aceea, ca şi în cazul sistemelor cu un grad de libertate, în calculul forțelor generalizate nu se consideră forțele gravitaționale.

- Pentru un **sistem conservativ**, fără pierderi de energie prin amortizare, aflat în vibrație liberă:

- Forțele elastice sunt derivatele cu semn schimbat ale energiei potențiale E_p a sistemului în raport cu coordonatele generalizate q_i: $-\dfrac{\partial E_p}{\partial q_i}$

- Forțele de amortizare vâscoasă sunt egale cu derivatele cu semn schimbat ale energiei disipate E_d a sistemului, în raport cu viteza generalizată $\dot{q}_i$: $-\dfrac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i}$

Notând cu F_i forțele perturbatoare, atunci: $\boxed{Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + F_i}$

şi ecuațiile lui Lagrange se pot scrie sub forma:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} = F_i} \qquad (1)$$

cu:

$$E_c = 1/2.\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$E_p = 1/2.\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}q_iq_j$$

$$E_d = 1/2.\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

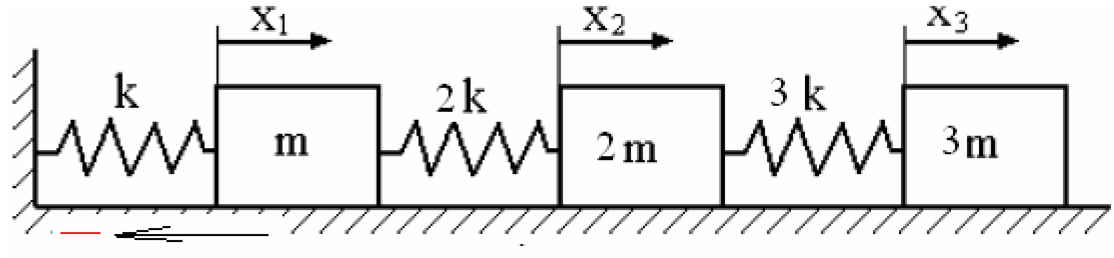
unde :

$\mathbf{m_{ji}}$, $\mathbf{k_{ij}}$ şi $\mathbf{c_{ij}}$ se numesc coeficienți de inerție, de rigiditate şi respectiv de amortizare. Din motive de simetrie, pentru i = j avem: $m_{ij} = m_{ji}$; $k_{ij} = k_{ji}$; $c_{ij} = c_{ji}$.

Dacă în sistemul ecuațiilor Lagrange cel puțin unul din coeficienții m_{ij} este diferit de zero, pentru i = j, se spune că sistemul este cuplat dinamic, iar dacă cel puțin unul din coeficienții $k_{ij} = 0$, pentru i = j, se spune că sistemul este cuplat static.

În cazul în care $m_{ij} = 0$ şi $k_{ij} = 0$, pentru i = j, se obțin **n** ecuații independente.

Aplicație. Să se scrie ecuația de mişcare pentru sistemul elastic următor cu ecuațiile lui Lagrange.



$k_{11} = k+2k = 3k$	$k_{21} = -2k$	$k_{31} = 0$
$k_{12} = -2k$	$k_{22} = 2k+3k = 5k$	$k_{32} = -3k$
$k_{13} = 0$	$k_{23} = -3k$	$k_{33} = 3k$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot m\cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot m\cdot \dot{x}_3^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot k\cdot \left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot k\cdot \left(x_2 - x_3\right)^2$$

Pentru un sistem elastic fără amortizare aflat in vibrație liberă, energia dispata $E_d = 0$, iar forța perturbatoare $F_i = 0$. Ecuațiile lui Lagrange (1) se scriu in acest caz astfel:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta E_c}{\delta \dot{q}_i}\right) - \frac{\delta E_c}{\delta q_i} + \frac{\delta E_p}{\delta q_i} = 0$, adica:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta E_c}{\delta \dot{x}_1}\right) - \frac{\delta E_c}{\delta x_1} + \frac{\delta E_p}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta E_c}{\delta \dot{x}_2}\right) - \frac{\delta E_c}{\delta x_2} + \frac{\delta E_p}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta E_c}{\delta \dot{x}_3}\right) - \frac{\delta E_c}{\delta x_3} + \frac{\delta E_p}{\delta x_3} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$m\cdot \ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot 2\cdot x_1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot k\cdot (2\cdot x_1 - 2\cdot x_2) = 0$$

$$2\cdot m\cdot \ddot{x}_2 + k\cdot(-2\cdot x_1 + 2\cdot x_2) + \frac{3}{2}\cdot k\cdot (2\cdot x_2 - 2\cdot x_3) = 0$$

$$3\cdot m\cdot \ddot{x}_3 + \frac{3}{2}\cdot k\cdot(-2\cdot x_2 + 2\cdot x_3) = 0$$

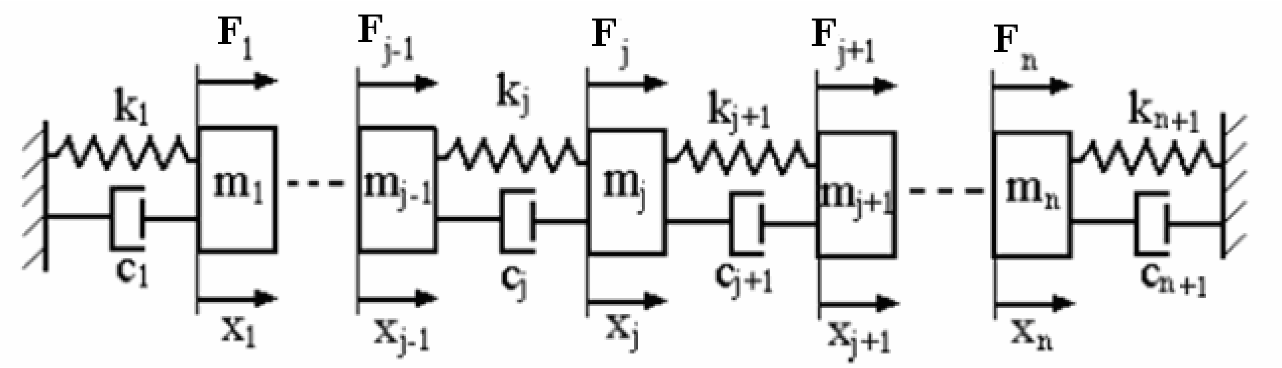
$$m\cdot \ddot{x}_1 + k\cdot x_1 + 2\cdot k\cdot\left(x_1 - x_2\right) = 0 \qquad x_1 = A_1\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

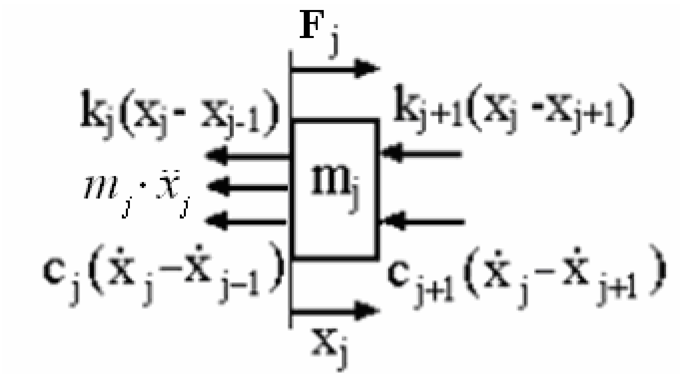
$$2\cdot m\cdot \ddot{x}_2 - 2\cdot k\cdot\left(x_1 - x_2\right) + 3\cdot k\cdot\left(x_2 - x_3\right) = 0 \quad \text{cu} \quad x_2 = A_2\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$3\cdot m\cdot \ddot{x}_3 - 3\cdot k\cdot\left(x_2 - x_3\right) = 0 \qquad x_3 = A_3\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

4. Vibrații amortizate în sisteme cu n grade de libertate

Stabilirea ecuațiilor de mişcare la sistemele cu n grade de libertate (figura) se poate face utilizând principiul lui d'Alembert sau ecuațiile lui Lagrange.





Ecuațiile de mişcare pentru masa m_j se obțin proiectand forțele pe direcția de mişcare, se obține ecuația de echilibru dinamic:

$$m_j \cdot \ddot{x}_j + k_j(x_j - x_{j-1}) + k_{j+1}(x_j - x_{j+1}) + c_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}) + c_{j+1}(\dot{x}_j - \dot{x}_{j+1}) = \mathbf{F}_j(t)$$
$$m_j \cdot \ddot{x}_j - c_j\dot{x}_{j-1} + (c_j + c_{j+1})\dot{x}_j - c_{j+1}\dot{x}_{j+1} - k_j x_{j-1} + (k_j + k_{j+1})x_j - k_{j+1}x_{j+1} = \mathbf{F}_j(t)$$

Se obține un sistem de n ecuații diferențiale ordinare, cu coeficienți constanți, omogen sau neomogen, după cum vibrațiile studiate sunt libere sau forțate.

Sistemul de n ecuații diferențiale se poate scrie sub formă matricială:

$$\boxed{[m]\cdot\{\ddot{x}\}+[c]\cdot\{\dot{x}\}+[k]\cdot\{x\}=\{\mathbf{F}\}}$$

unde am notat : [m]   matricea maselor;

[c]   matricea coeficienților de amortizare;

[k]   matricea constantelor elastice;

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{Bmatrix};\quad \{\dot{x}\}=\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dots\\\dot{x}_n\end{Bmatrix};\quad \{\ddot{x}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\\\dots\\\ddot{x}_n\end{Bmatrix};\quad \{\mathbf{F}\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_1\\\mathbf{F}_2\\\dots\\\mathbf{F}_n\end{Bmatrix}$$

-vectorul deplasărilor; vectorul vitezelor; vectorul accelerațiilor; vectorul forțelor.

După cum se observă, ecuațiile diferențiale de mişcare sunt ecuații dependente şi deci nu pot fi rezolvate independent. Pentru decuplarea ecuațiilor de mişcare se foloseşte analiza modală, în cadrul căreia se face trecerea de la coordonatele generalizate la coordonatele principale cu ajutorul matricei modale.

Moduri proprii de vibrații

Pulsațiile proprii şi formele modurilor proprii de vibrație se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații omogene pentru vibrații libere neamortizate:

$$\boxed{[m]\cdot\{\ddot{x}\}+[k]\cdot\{x\}=\{\mathbf{F}\}}$$

Solutiile sistemului de ecuatii x_1, x_2,..... x_n se cauta de forma:

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{Bmatrix}\cdot\sin(\omega t+\varphi)=\{a\}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$$

care reprezinta o miscare armonica sincrona in toate coordonatele.

Înlocuind soluțiile sistemului în sistemul de ecuații de mișcare se obține:

$$\left([k]-\omega^2[m]\right)\cdot\{a\}=\{0\}$$

Pulsațiile proprii sunt soluțiile ecuației algebrice:

$$\det\left([k]-\omega^2[m]\right)=0$$

care are n rădăcini reale, pozitive, în general distincte ω_1 , ω_2 ,…, ω_n .

Aplicatie

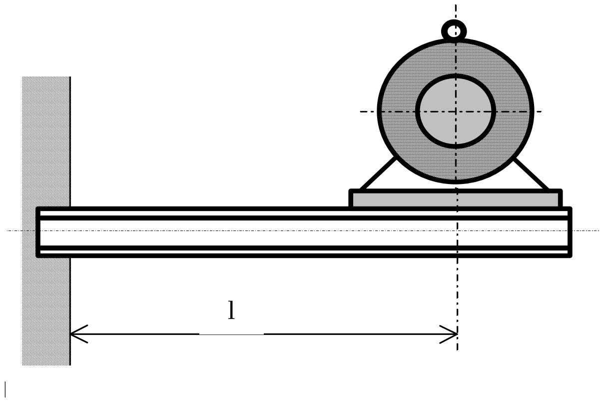


Fig. A2.8.

Un electromotor (fig. A2.8), având greutatea $G_{ME} = 8 \cdot 10^3\ [N]$, este montat la capătul unui suport format din două grinzi paralele orizontale, încastrate la celălalt capăt. Grinzile sunt confecţionate din profile I de oţel, având modulul de elasticitate longitudinal $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ [N/m^2]$.

Distanţa de la axul motorului până la punctul de încastrare este $l = 100\ [cm]$. Rotorul electromotorului, de greutate $G_R = 2 \cdot 10^3\ [N]$, are o excentricitate $e = 0{,}1\ [mm]$ faţă de axa de rotaţie. Turaţia de regim $n = 10^3\ [rot/min]$.

a) Să se aleagă profilul I, al fiecăreia din cele două grinzi, în aşa fel încât amplitudinea vibraţiilor forţate să nu depăşească $a = 0{,}15\ [mm]$.

b) La ce turaţie se produce fenomenul de rezonanţă? Se neglijează greutăţile grinzilor şi amortizările.

Rezolvare

a) Datorită excentricităţii rotorului, în timpul mişcării apare forţa perturbatoare verticală:

$$f(t) = \frac{G_R}{g} \cdot \left(e \cdot \omega^2\right) \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad \text{cu} \quad \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Ecuaţia diferenţială de mişcare pe direcţia verticală, considerând originea axei Oy în centrul de oscilaţie (echilibru static cu grinda orizontală), are forma:

$$\frac{G_{ME}}{g} \cdot \ddot{x} + k \cdot x = \frac{G_R}{g} \cdot \left(e \cdot \omega^2\right) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

sau

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{G_R}{G_{ME}} \cdot \left(e \cdot \omega^2\right) \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

unde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k \cdot g}{G_{ME}}} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}, \text{ este pulsaţia proprie.}$$

Săgeata statică a suportului (vezi tab. 2.1), constituit din cele două grinzi, notând cu I_z momentul de inerţie geometric al secţiunii în raport cu axa neutră, fiind:

$$f_{st} = \frac{G_{ME} \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot (2 \cdot I_z)},$$

rezultă pulsaţia proprie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6 \cdot g \cdot E \cdot I_z}{G_{ME} \cdot l^3}} .$$

Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale (de forma membrului drept), reprezintă vibraţia forţată a sistemului mecanic şi are forma:

$$x_p = X_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

sau

$$x_p = \frac{G_R}{G_{ME}} \cdot (e \cdot \omega^2) \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

în care X_0 , amplitudinea vibraţiilor forţate este:

$$X_0 = \frac{G_R}{G_{ME}} \cdot (e \cdot \omega^2) \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Deoarece fenomenul de rezonanţă se produce atunci când pulsaţia forţei perturbatoare este egală cu pulsaţia proprie sistemului ($\omega = \omega_0$), pentru ca la pornire rezonanţa sistemului să fie evitată, este necesar ca: $\omega < \omega_0$

În acest caz, amplitudinea vibraţiilor forţate X_0, pozitivă, nu trebuie să depăşească valoarea impusă $a = 0,15\ [mm]$, adică:

$$\frac{G_R}{G_{ME}} \cdot (e \cdot \omega^2) \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \le a$$

sau

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \ge 1 + \frac{G_R}{G_{ME}} \cdot \frac{e}{a}.$$

Ţinând cont de expresia pulsaţiei ω_0 rezultă:

$$I_z \ge \omega^2 \cdot \frac{G_{ME} \cdot l^3}{6 \cdot g \cdot E} \cdot \left(1 + \frac{G_R}{G_{ME}} \cdot \frac{e}{a}\right).$$

Introducând datele numerice obţinem:

- *pulsaţia forţei perturbatoare*

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 10^3}{30} = 104,719755\ [rad/s];$$

- *momentul de inerţie geometric*

$$I_z \geq 104{,}719755^2 \cdot \frac{8\cdot 10^3\cdot 1^3}{6\cdot 9{,}81\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}}\cdot\left(1+\frac{2\cdot 10^3}{8\cdot 10^3}\cdot\frac{1\cdot 10^{-4}}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\right),$$

$$I_z \geq 8{,}28046\cdot 10^{-6}\left[m^4\right]=828{,}046\left[cm^4\right]. \quad \blacklozenge$$

Se alege din tabele profilul **I 16** care are $I_z = 935\left[cm^4\right]$.

Revenim cu I_z în expresia pulsaţiei proprii şi obţinem:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6\cdot 9{,}81\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 935\cdot 10^{-8}}{8\cdot 10^3\cdot 1^3}} = 120{,}193391\ [rad/s]. \quad \blacklozenge$$

Amplitudinea vibraţiilor forţate este:

$$X_0 = \frac{G_R}{G_{ME}}\cdot e\cdot\frac{1}{\frac{\omega_0{}^2}{\omega^2}-1} = \frac{2\cdot 10^3}{8\cdot 10^3}\cdot 1\cdot 10^{-4}\cdot\frac{1}{\frac{120{,}193391^2}{104{,}719755^2}-1},$$

$$X_0 = 0{,}787753\cdot 10^{-4}\ [m] = 0{,}0787753\,[mm] < 0{,}15\,[mm]. \quad \blacklozenge$$

b) Fenomenul de rezonanţă apare atunci când pulsaţia proprie şi pulsaţia perturbaţiei coincid ($\omega_0 = \omega$), astfel că turaţia critică va fi:

$$\frac{\pi\cdot n_{cr}}{30} = 120{,}193391$$

$$\Rightarrow \quad n_{cr} = 1147{,}762338\ [rot/min]. \quad \blacklozenge$$

METODE APROXIMATIVE PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR SISTEMELOR CU N GRADE DE LIBERTATE

Pentru determinarea pulsațiilor proprii ale unui sistem cu n grade de libertate este necesar sã se rezolve ecuația pulsațiilor proprii, care este o ecuație algebrică de gradul **n** în ω^2 . În numeroase aplicații prezintă interes, practic, numai pulsația proprie cea mai coborâtă, numită şi ***pulsație fundamentală.***

Pentru calculul pulsației fundamentale s-au elaborat o serie de metode aproximative care permit calculul acesteia, fără să rezolvăm ecuația, dintre care cele mai folosite sunt: metoda Rayleigh, metoda Holtzer, metoda matricelor de transfer, metoda iterației matriceale etc.

1. Metoda Rayleigh

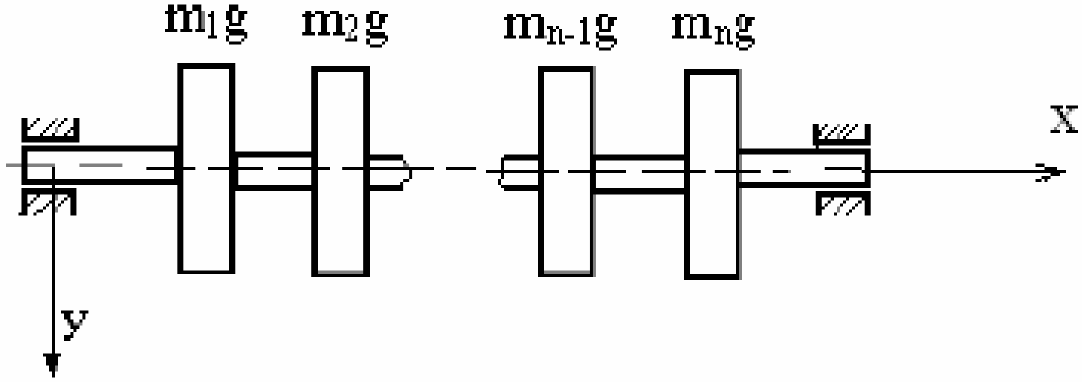
La un sistem conservativ (sistem oscilant fără amortizări, în care nu se produc schimburi de energie cu exteriorul), în vibrație liberă, suma energiilor cinetică şi potențială, în orice moment al mişcării, este constantă: $E_c + E_p = const.$

În aproximația lui Rayleigh se admite că toate punctele sistemului oscilant trec la un moment dat prin poziția de deformație maximă, când energia potențială este maximă **E_p max** şi energia cinetică **$E_c = 0$** şi de asemenea, toate punctele trec simultan prin poziția de zero, cu viteza maximă, pentru **E_c max** şi **$E_p = 0$**.

Altfel spus, pentru vibrația liberă, după un mod propriu de vibrație, este valabil principiul lui Rayleigh: energia cinetică maximă este egală cu energia potențială maximă. Ecuația conservării energiei devine: **E_c max = E_p max**
Principiul lui Rayleigh este folosit în special pentru determinarea primei pulsații proprii, alegând pentru modul fundamental de vibrație forma rezultată din deformațiile statice produse de greutățile maselor din sistem.

Aplicație

a) Să se determine expresia aproximativă a pulsației proprii fundamentale a vibrațiilor flexionale ale unui arbore, de masă neglijabilă, pe care sunt montați **n** volanți (figura).



In cazul vibrației libere neamortizate, după un mod propriu de vibrație (toți volanții au o mişcare armonică sincronă pe direcție verticală), legea de mişcare este o lege armonică de forma:

$$y(x,t) = Y(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Energia cinetică maximă se calculează considerând numai mişcarea de translație a maselor pe direcția verticală y:

$$\dot{y}(x,t) = \underbrace{Y(x) \cdot \omega}_{viteza\ \max} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (Y_i \cdot \omega)^2 \qquad (1)$$

unde Y_i este amplitudinea vibrației masei m_i .

Funcția Y_i trebuie să îndeplinească condițiile la limită ale problemei.

De obicei, pentru funcția Y_i se alege funcția săgeților produse de forțele concentrate $m_i.g$, aplicate static. În acest caz, valorile Y_i se pot calcula cu relațiile din cursul de Rezistența Materialelor, stabilite cu metoda Mohr-Maxwell sau Castigliano.

Energia potențială maximă este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele gravitaționale (**$m_i.g$**):

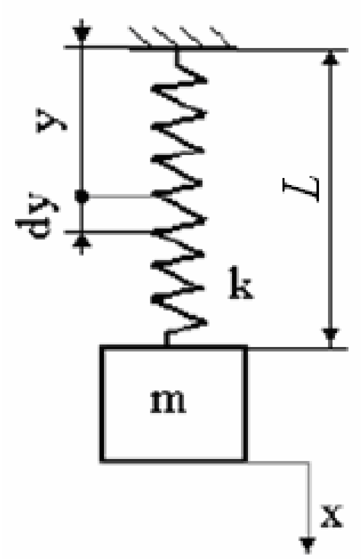
$$E_{p\max} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (m_i \cdot g) \cdot Y_i \qquad (2)$$

Egalând cele două expresii ale energiilor (rel. 1 si 2) se obține formula pulsației proprii fundamentale:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot Y_i^2}}$$

numită raportul Rayleigh

b) Să se determine pulsația proprie pentru un sistem oscilant cu un singur grad de libertate, atunci când se consideră şi masa elementului elastic.



Se fac următoarele ipoteze:

• masa arcului este mică în comparație cu masa m;

• mişcarea masei m nu este afectată de masa arcului;

• se admite că sistemul are o mişcare armonică de forma:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Deplasarea unei secțiuni y a arcului va fi: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{L}$; $\quad dy = \dfrac{y}{L} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Viteza elementului de arc dy aflat la distanța y este:

$$v = \frac{d}{dt}(dy) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{L} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi\right) = \underbrace{\frac{y}{L} \cdot A \cdot \omega}_{\text{viteza max}} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Energia cinetică maximă a elementului de arc, notând cu m_1 masa unității de lungime dy si cu v viteza maxima, este:

$$dE_{c\max} = \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2\right) \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{y^2}{L^2} \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot dy$$

Energia cinetică maximă a întregului arc este:

$$E_{c\max} = \int_0^L \frac{m_1}{2} \cdot \frac{y^2}{L^2} \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot dy \quad \Rightarrow \quad E_{c\max} = \frac{\omega^2 \cdot A^2 \cdot m_1 \cdot L^3}{2 \cdot L^2 \cdot 3}$$

$$\text{pentru arc: } E_{c\max} = \frac{\omega^2 \cdot A^2 \cdot \overbrace{m_1 \cdot L}^{m\ arc}}{2 \cdot 3}$$

Energia cinetică maximă a sistemului este:

$$\text{pentru sistem}: E_{c\max} = \frac{m_{arc} \cdot A^2 \cdot \omega^2}{6} + \frac{m \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2}$$

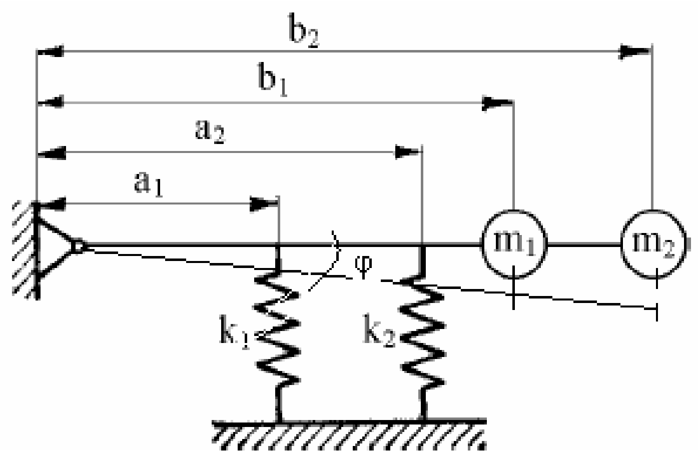
Energia potențială maximă a sistemului este aceeaşi ca şi cum arcul ar avea masă neglijabilă:

$$E_{p\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

Aplicând metoda lui Rayleigh obținem:

$$\boxed{\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_{arc}}{3}}}}$$

c) Să se determine, prin metoda Rayleigh, pulsația proprie a sistemului oscilant din figura următoare.



Dacă sistemul execută o oscilație armonică $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta)$, atunci energia potențială şi cinetică maximă sunt de forma:

$$E_{c\max} = \frac{m_1 \cdot (\varphi_0 \cdot b_1 \cdot \omega)^2}{2} + \frac{m_2 \cdot (\varphi_0 \cdot b_2 \cdot \omega)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \varphi_0^{\ 2} \cdot (m_1 \cdot b_1^2 + m_2 \cdot b_2^2)$$

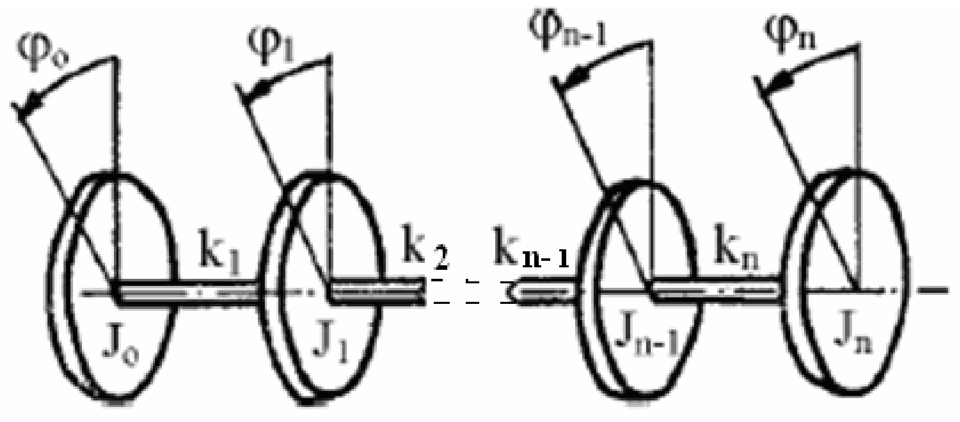
$$E_{p\max} = \frac{k_1 \cdot (a_1 \cdot \varphi_0)^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (a_2 \cdot \varphi_0)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot a_1^2 + k_2 \cdot a_2^2) \cdot \varphi_0^2$$

Rezultă pulsaţia proprie a sistemului:

$$\boxed{\omega_0{}^2 = \frac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2}{m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2}}$$

2. Vibraţii de răsucire la sisteme cu n grade de libertate

Fie un arbore cu n + 1 volanţi, liber la extremităţi ca in figura urmatoare.



Ecuaţiile Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0$

Unghiul de răsucire: $\varphi = A \cdot \sin(\omega t + \theta)$ reprezinta coordonata generalizata ***q***

Se ştie că:

$$E_c = J_0 \cdot \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} + J_1 \cdot \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \dots\dots + J_n \cdot \frac{\dot{\varphi}_n^2}{2}$$

$$E_p = \frac{k_1 \cdot (\varphi_0 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + \dots\dots + \frac{k_n \cdot (\varphi_{n-1} - \varphi_n)^2}{2}$$

Ecuaţiile vibraţiilor de răsucire se scriu sub forma:

$$J_0\ddot{\varphi}_0 + k_1(\varphi_0 - \varphi_1) = 0$$
$$J_1\ddot{\varphi}_1 - k_1(\varphi_0 - \varphi_1) + k_2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$J_n\ddot{\varphi}_n - k_n\ (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0$$

Dacă se adună ecuaţiile obţinem:

$$J_0\ddot{\varphi}_0 + J_1\ddot{\varphi}_1 + J_2\ddot{\varphi}_2 + \dots\dots J_n\ddot{\varphi}_n = 0$$

Considerând vibrația după un mod propriu, se caută soluții de forma:

$$\varphi_0 = A_0 \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$\varphi_n = A_n \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

Rezultă :

$$\begin{aligned} & J_0 \cdot A_0 \cdot \omega^2 - k_1 \cdot (A_0 - A_1) = 0 \\ & J_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 + k_1 \cdot (A_0 - A_1) - k_2 \cdot (A_1 - A_2) = 0 \\ & \vdots \\ & J_n \cdot A_n \cdot \omega^2 - k_n \cdot (A_{n-1} - A_n) = 0 \end{aligned}$$

Dacă se calculează determinantul sistemului, obținem ecuația pulsațiilor proprii care se rezolvă dificil.

Din prima ecuație rezultă : $A_1 = A_0 - \frac{J_0}{k_1} \cdot A_0 \cdot \omega^2$

A doua ecuație se scrie sub forma:

$$J_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 + J_0 \cdot A_0 \cdot \omega^2 - k_2 \cdot (A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1 - \frac{\omega^2}{k_2} \cdot (J_0 \cdot A_0 + J_1 \cdot A_1)$$

In general: $A_i = A_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_i} \cdot (J_0 \cdot A_0 + J_1 \cdot A_1 + \ldots\ldots + J_{i-1} \cdot A_{i-1})$

Pentru calculul aproximativ al pulsațiilor proprii se impune $\mathbf{A_0 = 1}$ şi se calculează succesiv amplitudinile $\mathbf{A_1, A_2, \ldots\ldots A_n}$.

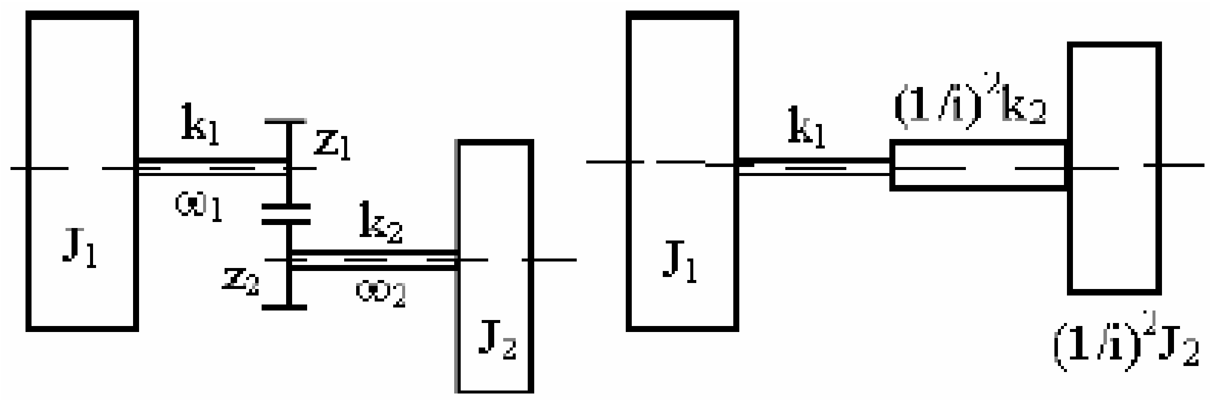
Dacă $\boldsymbol{\omega}$ este o pulsație proprie, atunci: $\sum_{i=0}^{n} J_i \cdot A_i = 0$. În caz contrar suma este diferită de zero. Se evaluează suma $\sum_{i=0}^{n} J_i \cdot A_i$ pentru diferite pulsații ω.

Se reprezintă grafic variația sumei în funcție de ω . Punctele în care curba intersectează axa absciselor corespund pulsațiilor proprii.

Înlocuind valorile determinate ale pulsațiilor proprii în ultimele relații găsim modurile proprii de vibrații.

3. Vibrații de răsucire la angrenaje

Să considerăm sistemul oscilant din figura următoare, în structura căruia există un angrenaj ale cărui elemente au inerţie neglijabilă comparativ cu discurile $\mathbf{J_1}$ şi $\mathbf{J_2}$.



Raportul de transmitere: $i_{1,2} = \omega_1/\ \omega_2 = z_2/z_1 = i$

ω_1 şi ω_2 sunt vitezele unghiulare ale arborilor cu constante elastice k_1 respectiv k_2, iar z_1 şi z_2 sunt numerele de dinți ale roților dințate. Se consideră că angrenajul reprezintă o legătură rigidă care transformă turațiile, amplitudinile şi cuplurile cu raportul $i_{1,2}$, neglijând elasticitatea dinților şi a carcasei, jocurile dintre flancurile dinților etc.

Determinarea caracteristicilor vibrațiilor de răsucire ale sistemului se poate simplifica dacă sistemul real este înlocuit cu un sistem echivalent din punct de vedere dinamic, în care discurile şi arborii se rotesc cu aceeaşi turație.

Pentru ca cele două sisteme să fie echivalente trebuie ca parametrii urmatori sa fie echivalenti:

- puterea: $(M_t\omega)_{real} = (M_t\omega)_{echiv}$
- energia cinetică: $(J\omega^2)_{real} = (J\ \omega^2)_{echiv}$
- energia potențială: $(k\ \varphi^2)_{real} = (k\ \varphi^2)_{echiv}$

Rezultă relațiile de calcul ai parametrilor sistemului echivalent:

$$M_{t\,echiv} = (\omega_{real} / \omega_{echiv})\, M_{t\,real}$$
$$J_{echiv} = (\omega_{real} / \omega_{echiv})^2\, J_{real}$$
$$K_{echiv} = (\omega_{real} / \omega_{echiv})^2\, K_{real}$$

Rezultă următoarele relații de echivalență:

$$J_{2echiv} = (\omega_2 / \omega_1)^2\, J_2 = (1/i)^2\, J_2$$
$$K_{2echiv} = (\omega_2 / \omega_1)^2\, K_2 = (1/i)^2\, K_2$$

Constanta elastică a arborelui se calculează cu relația: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{2echiv}} = \frac{1}{k_1} + \frac{i^2}{k_2}$

Rezultă:
$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{i^2 \cdot k_1 + k_2}$$

La fel se calculeaza momentul de inerție al sistemului:

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_{2echiv}} = \frac{1}{J_1} + \frac{i^2}{J_2}$$
$$J = \frac{J_1 \cdot J_2}{i^2 \cdot J_1 + J_2}$$

Pulsația proprie a sistemului echivalent este dată de relația:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}} = \sqrt{\frac{i^2 \cdot J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{i^2 \cdot k_1 + k_2}}$$

VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE

Sistemele oscilante cu un număr finit de grade de libertate studiate în cursurile precedente, sunt caracterizate de existența unor mase rigide, concentrate în anumite puncte ale sistemului şi a unor elemente elastice de legătură, fără masă.

În unele sisteme mecanice masele elementelor elastice sunt comparabile cu masele considerate rigide. În mişcarea vibratorie a acestor sisteme forțele de inerție sunt repartizate continuu. Pentru descrierea mişcării acestor sisteme, sunt necesare funcții care să indice variația în timp a deplasării în fiecare punct din sistem, deci funcții de timp şi de pozitie.

Modelul teoretic ataşat unui astfel de sistem fizic are un număr infinit de grade de libertate şi se numeşte sistem continuu.

Numărul frecvențelor proprii ale unui sistem este egal cu numărul gradelor de libertate, deci un sistem continuu are un număr infinit de frecvențe proprii.
În majoritatea cazurilor, un sistem continuu va vibra cu o amplitudine mare numai la un număr limitat de frecvențe proprii, în mod obişnuit la frecvențele cele mai joase, şi cel mai adesea numai la frecvența cu valoarea cea mai mică, numită şi frecvență fundamentală. Fiecărei frecvențe îi corespunde o formă de vibrație numită mod normal sau propriu de vibrație.

Sisteme continue simple pot fi considerate barele, grinzile, plăcile etc. Barele pot efectua vibrații longitudinale (axiale), vibrații de răsucire şi vibrații transversale (de încovoiere).

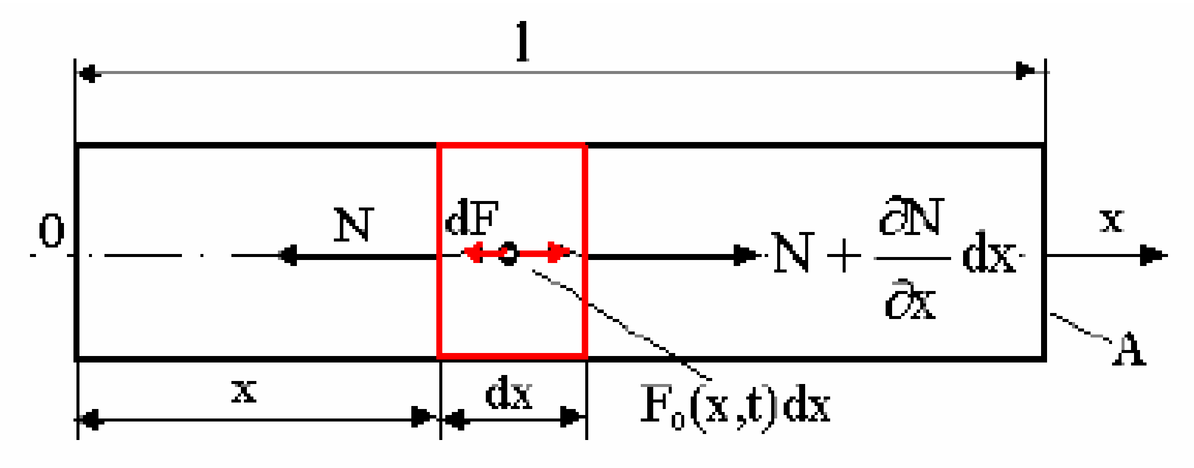
În cazul general, aceste vibrații sunt cuplate, frecvențele proprii şi deplasările pe diferite direcții condiționându-se reciproc.

În continuare vom trata câteva cazuri particulare de bare, pentru care cele trei tipuri de vibrații sunt decuplate.

1. Vibrațiile longitudinale ale barelor drepte

Să considerăm o bară prismatică de secțiune A şi lungime l, în vibrație longitudinală, din care se detaşează un element de lungime dx (figura).

Asupra acestui element lucrează eforturile din cele două secțiuni: N şi $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$ forța de inerție dF şi o forță excitatoare distribuită, $F_o(x,t)dx$.



Condiția ca elementul de bară să fie în echilibru dinamic este dată de ecuația de proiecție pe direcția axei barei:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N + F_0(x,t)dx = dF$$

Se imparte prin dx şi rezultă:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + F_0(x,t) = \frac{dF}{dx} \qquad (1)$$

În continuare, se exprimă efortul **N** şi forța de inerție pe unitatea de lungime $\frac{dF}{dx}$ în funcție de deplasarea longitudinală **u(x,t)**:

$$N = A \cdot \sigma = A \cdot E \cdot \varepsilon = A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad unde \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (alungire relativa)}$$

$$\frac{dF}{dx} = \underbrace{(A \cdot 1 \cdot \rho)}_{masa} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{acceleratia}$$

Relațiile de mai sus se inlocuiesc in rel.(1) şi rezultă ecuația diferențială a vibrațiilor longitudinale pe direcția **x**:

$$\boxed{A \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_0(x,t) = A \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

u(x,t) trebuie să respecte condițiile inițiale si condițiile la limită.

În cazul vibrațiilor libere, la **t = 0** avem următoarele condiții inițiale:

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

Condițiile la limită se deduc din modul de prindere al barei la capete:

a) pentru bara liberă la ambele capete:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(0,t) = 0 \qquad N(0,t) = A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$x = l \quad \Rightarrow \quad N(l,t) = 0 \qquad N(l,t) = A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

b) pentru bară fixată la ambele capete: $u(0,t) = 0$ și $u(l,t) = 0$

- **Pulsații proprii şi moduri proprii de vibrații** la vibrații longitudinale

Pentru determinarea pulsațiilor proprii şi a funcțiilor proprii se rezolvă ecuația vibrațiilor libere, considerând $\mathbf{F_0(x,t) = 0}$.

Rezultă:

$$\boxed{AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \qquad (2)$$

Soluția ecuației diferențiale se caută de forma:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \quad \text{în care:} \quad \begin{cases} T(t) = B\sin(\omega t + \theta) \\ X(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x \end{cases}$$

Dacă se înlocuieşte u(x,t), în ecuația diferențială (2), se obține:

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x} = \alpha \cdot C \cdot \cos \alpha x - \alpha \cdot D \cdot \sin \alpha x$$

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \omega \cdot B \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{E}{\rho} \cdot \underbrace{B \cdot \sin(\omega t + \theta)}_{T(t)} \cdot \underbrace{\left[-\alpha^2 \cdot (C \cdot \sin \alpha x + D \cdot \cos \alpha x)\right]}_{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}} =$$

$$= \underbrace{\left[-B \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \theta)\right]}_{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}} \cdot \underbrace{(C \cdot \sin \alpha x + D \cdot \cos \alpha x)}_{X(x)}$$

Rezultă: $\frac{E}{\rho} \cdot \alpha^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

Constantele **B** şi **θ** se determină din condițiile inițiale, iar constantele **C** şi **D** se determină din condițiile la limită. Există o infinitate de pulsații proprii $\boldsymbol{\omega_n}$ şi deci o infinitate de moduri proprii de vibrație, a căror ecuație are forma:

$$u_n(x,t) = B_n \left(C_n \sin \frac{\omega_n}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} x + D_n \cos \frac{\omega_n}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} x\right) \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale, pentru condiții inițiale oarecare, se obține suprapunând toate modurile de vibrație:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(C_n \sin \frac{\omega_n}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} x + D_n \cos \frac{\omega_n}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} x\right) \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

Aplicații:

1. Să se determine pulsațiile proprii ale vibrațiilor longitudinale libere ale unei bare drepte de secțiune constantă, având capetele libere .

Ecuatia vibratiilor libere este: $\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

cu solutia de forma:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \quad \text{în care:} \quad \begin{cases} T(t) = B\sin(\omega t + \theta) \\ X(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x \end{cases}$$

Pentru determinarea acestor pulsații trebuie determinate constantele C şi D din condițiile la limită.

Condițiile la limită sunt:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{şi} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \ \text{şi} \ \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Dar $$\frac{dX}{dx} = \alpha(C\cos\alpha x - D\sin\alpha x)$$

Pentru : **x = 0** $\Rightarrow$ **C = 0**

x = l $\Rightarrow$ **αD sin αl = 0** $\Rightarrow \alpha \cdot l = n \cdot \pi$, adică $\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{l}}$

Rezultă: $X_n(x) = D\cos\frac{n\pi}{l}$

Se considera constanta B=1 (egala cu amplitudinea maxima realizata de bara)

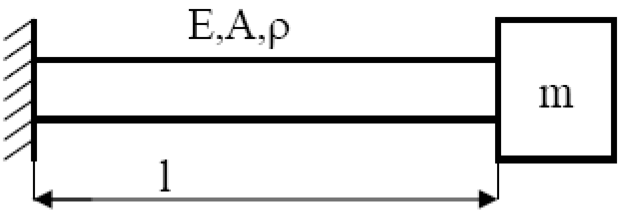
Pulsația proprie ω_n , pentru care vibrația liberă are forma dată de funcția $X_n(x)$, este:

$$\omega_n = \alpha_n\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Mişcarea vibratorie în care deplasarea este de forma:

$\boxed{u(x,t) = D_n\cos\frac{n\pi}{l}\sin(\omega_n t + \theta n)}$ se numeşte mod propriu de vibrație.

2. Să se determine ecuația pulsațiilor proprii a vibrațiilor longitudinale ale unei bare de secțiune constantă **A** şi lungime **l**, încastrată la un capăt şi având o masă concentrată **m** la capătul liber (figura).



$$u(x,t) = X(x).T(t) \text{ în care: } \begin{cases} T(t) = B\sin(\omega t + \theta) \\ X(x) = C\sin\alpha x + D\cos\alpha x \end{cases}$$

Condițiile la limită sunt:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$x = l \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E \cdot A \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}}_{N} = \underbrace{-m \cdot \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}}_{\text{forta de inertie}}$$

Se scrie:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \text{ în care: } \begin{cases} T(t) = B\sin(\omega t + \theta) \\ X(x) = C\sin\alpha x \end{cases}$$

$$E \cdot A \cdot \underbrace{\alpha \cdot C \cdot \cos\alpha l \cdot B \cdot \sin(\omega t + \theta)}_{\frac{\delta u}{\delta x}} = m \cdot \underbrace{C \cdot \sin\alpha l \cdot B \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \theta)}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$E \cdot A \cdot \alpha \cdot \cos\alpha l = m \cdot \omega^2 \cdot \sin\alpha l \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{E \cdot A \cdot \alpha}{m} \cdot \frac{\cos\alpha l}{\sin\alpha l}$$

Am obținut ecuația pulsațiilor proprii, o ecuație transcendentă, care se rezolvă numeric.

2. Vibrațiile torsionale ale barelor drepte

În cazul vibrațiilor torsionale, ale unei bare drepte, ecuațiile de mişcare sunt similare cu cele obținute la vibrațiile longitudinale ale barelor drepte şi se pot scrie direct făcând corespondența:

$$\varphi \longleftrightarrow u$$
$$GI_p \longleftrightarrow EA$$
$$J \longleftrightarrow \rho A$$
$$M_t \longleftrightarrow N$$

$$\boxed{AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \longleftrightarrow \boxed{GI_p\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = J\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \qquad (3)$$

Ecuația vibrațiilor libere de răsucire (torsiune) ale barelor drepte, de secțiune circulară, este rel.(3).

Admite soluții de forma : $\boxed{\varphi(x,t) = X(x)\,T(t)}$ cu

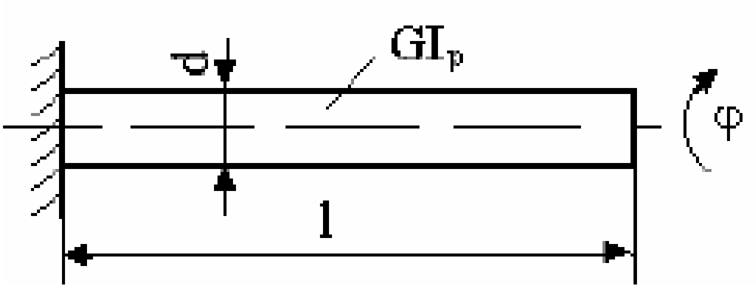
$$T(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta); \qquad X(x) = C \cdot \sin\alpha x + D \cdot \cos\alpha x$$

Similar cu vibratiile longitudinala la care : $\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}$, la vibratiile torsionale rezultă : $\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{J}{G \cdot I_p}}$

Aplicație

Să se determine pulsațiile proprii ale vibrațiilor de răsucire, ale unei bare de secțiune circulară, cu diametrul **d** şi de lungime **l**, având capătul din stânga încastrat, iar cel din dreapta liber.

Stiu ca :
$\varphi(x,t) = X(x)\,T(t)$



$$T(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta); \qquad X(x) = C \cdot \sin\alpha x + D \cdot \cos\alpha x$$

Conditii initiale :

$$x = 0 \quad \Rightarrow \varphi(0,t) = 0 \quad \Rightarrow X(0) = 0 \quad \Rightarrow D = 0$$

$$x = l \quad \Rightarrow M_t(l,t) = 0 \quad \Rightarrow G \cdot I_p \cdot \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

$$\alpha \cdot C \cdot \cos\alpha l - \underbrace{\alpha \cdot D \cdot \sin\alpha l}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2 \cdot l}$$

Dar

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{J}{G \cdot I_p}}$$

Rezultă:

$$\omega = \frac{\pi}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{J}}$$

3. Vibrațiile transversale ale barelor drepte

Să considerăm bara din figura următoare, la care am notat cu **x** axa barei, cu **y** direcția de mişcare (săgeata) şi cu **z** axa neutră a secțiunii. Ecuația fibrei medii, din cursul de rezistența materialelor, are forma :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z}}$$

unde **M(x)** este momentul încovoietor în secțiunea **x**, iar **EI_z** reprezintă rigiditatea la încovoiere a barei.

Dacă se derivează ecuația fibrei medii de două ori în raport cu **x** şi utilizând relațiile diferențiale între eforturi se obține:

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x)\ ; \quad \frac{dT(x)}{dx} = -p(x); \quad \frac{d^4y(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI_z}$$

unde **p(x)** este sarcina distribuită pe unitatea de lungime a grinzii.

Observații:

- Se notează cu **y(x,t)** deplasările grinzii față de poziția de echilibru static, efectuate în timpul vibrațiilor transversale (dependenta de poziția punctului material şi de timp)
- Sarcina distribuită **p(x)** este formată din:

  forțele de inerție pe unitatea de lungime: $\left(A\cdot \underbrace{l}_{1}\cdot \rho\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A\cdot \rho\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

  forțele perturbatoare $p_o(x,t)$, distribuite pe unitatea de lungime a barei

Astfel, încărcarea grinzii este dată de: $p(x) = -\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p_o(x,t)$

Grinda fiind în echilibru dinamic, trebuie să satisfacă ecuația:

$$\frac{d^4}{dx^4}[y(x,t)] = \frac{1}{EI_z}\left[-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p_o(x,t)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{p_o(x,t)}{EI_z}}$$

Ecuația diferențială a vibrației transversale

Forma ecuației de mişcare este stabilită cu neglijarea efectelor rotirii şi lunecării secțiunii.
Funcția **y(x,t)** trebuie să satisfacă atât condițiile inițiale cât şi condițiile la limită determinate de modul de rezemare.

Condiții inițiale : $t = 0 \quad \Rightarrow \qquad y(x,0) = f(x)$ şi $\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$

Condiții la limită uzuale :

a) încastrare rigidă la $x = x_o$:
- săgeata este nulă: $y(x_o,t) = 0$
- rotirea este nulă: $\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=xo} = 0$

b) reazem simplu rigid la $x = x_o$:
- săgeata este nulă : $y(x_o,t) = 0$
- momentul $M(x_o,t)$ este nul: $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=xo} = 0$

c) capăt liber la $x = x_o$:
- forța tăietoare T(xo,t) este nulă: $\left.\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=xo} = 0$
- momentul $M(x_o,t)$ este nul: $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=xo} = 0$

- **Pulsații proprii, funcții proprii la vibrații transversale**

1. În cazul vibrațiilor libere, forțele perturbatoare $\mathbf{p_o(x,t) = 0}$ şi ecuația vibrațiilor transversale devine:

$$\boxed{\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Această ecuație are o soluție de forma : $y(x,t) = Y(x) \cdot T(t)$ cu :

$$Y(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \mathrm{tg}\, \alpha x + C_4 \mathrm{ctg}\, \alpha x$$

$$T(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

Constantele $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ se determină din condițiile la limită. Constanta **B** se determină din condițiile inițiale.

Rezultă, prin rezolvarea ecuației, $\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \omega^2 \cdot Y(x) \cdot \dfrac{\rho \cdot A}{E \cdot I_z} \quad \Rightarrow \omega$

2. Dacă $\boldsymbol{\omega_n}$ este o pulsație proprie, atunci forma deformată a grinzii, care vibrează armonic cu pulsația $\boldsymbol{\omega_n}$, este dată de funcția proprie $\mathbf{Y_n(x)}$, care determină modul propriu de vibrație de ordinul **n** şi este:

$$y_n = B_n Y_n(x) \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

Constantele $\mathbf{B_n}$ şi $\boldsymbol{\theta_n}$ se determină din condițiile inițiale.
Mişcarea barei în caz general este dată de o funcție obținută prin suprapunerea modurilor proprii de vibrație:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot Y_n(x) \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

Metode aproximative pentru studiul vibrațiilor sistemelor continue

➔ Rezolvarea problemelor de vibrații la sistemele continue, prin metoda clasică, este de multe ori laborioasă, mai ales atunci când sistemele elastice sunt complicate.
➔ Pentru determinarea pulsațiilor proprii şi a funcțiilor proprii, au fost dezvoltate o serie de metode aproximative bazate pe principii energetice, sau pe rezolvarea aproximativă a ecuațiilor de mişcare.
➔Cele mai utilizate metode sunt: metoda Rayleigh şi metoda Ritz, care este o perfecționare a primei metode.

1. Metoda Rayleigh

Metoda Rayleigh este utilizată pentru determinarea aproximativă a frecvenței proprii fundamentale. În cazul vibrațiilor libere, după un mod propriu de vibrații, la sistemele conservative, energia totală a sistemelor se conservă în timpul mişcării şi deci energia cinetică maximă este egală cu energia potențială maximă:

$$\mathbf{E_{mec} = E_c + E_p = const.} \;\; => \;\; \mathbf{E_{cmax} = E_{pmax}}$$

Pentru calculul energiilor cinetice şi potențiale ale barelor drepte, se folosesc următoarele relații, din cursul de rezistența materialelor:

- bară dreaptă în vibrație liberă longitudinală:

$$E_p = \frac{E}{2}\int_0^l A(x)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_0^l A(x)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

- bară dreaptă în vibrație liberă de răsucire:

$$E_p = \frac{G}{2}\int_0^l I_p(x)\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_0^l I_p(x)\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 dx$$

- bară dreaptă în vibrație transversală:

$$E_p = \frac{E}{2}\int_0^l I_z(x)\cdot\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \cdot dx$$

$$E_c = \frac{\rho}{2}\int_0^l A(x)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \cdot dx$$

Legea de mişcare este o funcție de forma: $y(x,t) = Y(x)\cdot\sin(\omega t+\theta)$

Rezultă: $E_p = \underbrace{\left[\frac{E}{2}\cdot\int_0^l I_z(x)\cdot\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)^2 \cdot dx\right]}_{Ep\ \max}\cdot\sin^2(\omega t+\theta)$;

$$E_c = \underbrace{\left[\frac{\rho\cdot\omega^2}{2}\cdot\int_0^l A(x)\cdot Y^2(x)\cdot dx\right]}_{Ec\ \max}\cdot\cos^2(\omega t+\theta)$$

Rezultă raportul lui Rayleigh, din condiția ca: $\mathbf{E_{cmax} = E_{pmax}}$

Deci,
$$\omega^2 = \frac{E \cdot \int_0^l I_z(x) \cdot \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)^2 \cdot dx}{\rho \cdot \int_0^l A(x) \cdot Y^2(x) \cdot dx}$$

Întrucât funcția **Y(x)** este necunoscută, se alege o funcție aproximativă care trebuie să satisfacă condițiile la limită ale barei. Ca funcție aproximativă se poate considera funcția care dă deformația barei datorită greutății proprii.

Metoda Rayleigh este o metodă cu care se obține o aproximație în plus. Metoda poate fi aplicată în cazul general al barelor de secțiune variabilă, la care aria secțiunii **A** şi momentul de inerție **I** sunt funcție de **x**.

Aplicație.

Să se calculeze frecvența proprie fundamentală a unei bare încastrate la un capăt şi liberă la capătul opus.

Ecuația care dă deformația statică a barei consolă, sub o sarcină uniform distribuită este:

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Y_o}}{3 \cdot l^4}(x^4 - 4 \cdot x^3 l + 6 \cdot x^2 \cdot l^2)$$

Energia potențială maximă este:

$$E_{p\max} = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)^2 \cdot dx = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{Y_0}{3 \cdot l^4}\right)^2 \left(12x^2 - 24xl + 12l^2\right)^2 \cdot dx$$

Energia cinetică maximă este:

$$E_{c\max} = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \cdot \int_0^l A \cdot Y^2 \cdot dx = \omega^2 \cdot \frac{\rho \cdot A}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{Y_0}{3 \cdot l^4}\right)^2 \cdot (x^4 - 4x^3 l + 6x^2 l^2)^2 \cdot dx$$

Egalând cele două energii rezultă: $\omega_1 = \frac{3{,}53}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

2. Metoda Ritz

Metoda Ritz este o metodă aproximativă care reprezintă o perfecționare a metodei Rayleigh şi este utilizată atât pentru calculul pulsațiilor proprii fundamentale cât şi pentru calculul pulsațiilor proprii ale modurilor superioare de vibrație.

Specific metodei Ritz este alegerea funcției **Y(x)** sub forma:

$$Y(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots\ldots + a_n\varphi_n(x)$$

unde $\boldsymbol{\varphi_1(x)}$, $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$,... $\boldsymbol{\varphi_n(x)}$ sunt funcții de **x** care satisfac, fiecare în parte, condițiile la limită ale problemei şi care permit determinarea funcției **Y(x)** cât mai apropiată de funcția reală.

În cazul metodei Rayleigh valoarea aproximativă a pulsației proprii fundamentale este superioară valorii reale. Plecând de la această constatare, Ritz a propus determinarea coeficienților $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,.....$\boldsymbol{a_n}$ din condiția ca pulsația proprie să fie minimă, ceea ce înseamnă că:

$$\boxed{\frac{\partial\omega^2(a_1, a_2, \ldots., a_n)}{\partial a_i} = 0 \quad \text{pentru } i = 1,2,\ldots\ldots,n}$$

Se obține astfel un sistem algebric omogen cu necunoscutele $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,.....$\boldsymbol{a_n}$
Pentru ca sistemul să admită soluții diferite de soluția banală trebuie ca determinantul sistemului să fie nul.
Dezvoltând acest determinant, obținem ecuația pulsațiilor proprii.
Alegându-se funcția **Y(x)** dintr-un număr de termeni, rezultă pulsațiile proprii pentru un acelaşi număr de moduri proprii de vibrație.
Şi în cazul metodei Ritz se determină pulsațiile proprii cu aproximație în plus.

VIBRAȚII NELINIARE

➔ În general, modelul matematic ataşat unei probleme fizice reale conduce la o reprezentare matematică foarte complicată. Primul pas care se face în rezolvarea modelului este liniarizarea sistemului. Pentru foarte multe situații întâlnite în practică, ipotezele teoriei liniare sunt justificate, rezultatele teoretice fiind în suficientă concordanță cu cele experimentale.

➔În multe cazuri, analiza liniară este insuficientă pentru descrierea adecvată a comportării sistemelor fizice, această insuficiență derivând din existența în sistemul fizic considerat a unor neliniarități, suficient de puternice, pentru a provoca modificarea calitativă a răspunsului sistemului fizic față de răspunsul modelului liniar. În asemenea cazuri este necesară considerarea în modelul matematic şi a neliniarităților respective, ceea ce introduce dificultăți uneori considerabile, în rezolvarea problemelor.

➔Caracteristic pentru teoria vibrațiilor mecanice neliniare este varietatea mare de neliniarități posibile într-un sistem elastic, fiecare conducând la alt tip de ecuație de mişcare. Puține din aceste ecuații se pot rezolva exact.

➔Pentru cea mai mare parte a problemelor neliniare nu se pot determina soluții generale, ci doar soluții particulare, corespunzătoare numai unor anumite condiții inițiale.

➔Există metode aproximative de rezolvare care sunt valabile pentru anumite tipuri de ecuații, implicând în acelaşi timp utilizarea unor elemente matematice complexe şi dificile.

De aceea vom prezenta doar unele aspecte introductive ale teoriei vibrațiilor neliniare, pentru sisteme cu un grad de libertate.

1. NELINIARITĂȚI ÎN SISTEME ELASTICE

Neliniaritățile în sistemele elastice pot fi determinate de:

a) Caracteristica elastică neliniară a elementului elastic;

b) Amortizarea neliniară ;

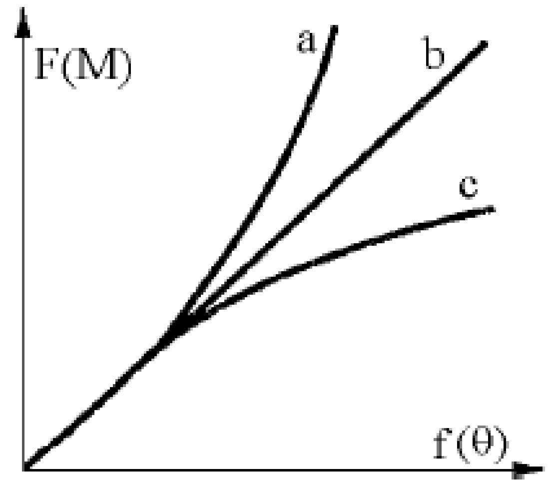
c) Caracteristicile mecanice variabile în timp ale elementelor sistemului.

a)Neliniarități datorate caracteristicii elastice neliniare

Caracteristica elastică neliniară a elementului elastic poate fi datorată unor neliniarități fizice sau geometrice.

➔Elementele elastice din cauciuc, fontă, cupru, pot avea curba caracteristică neliniară progresivă (rigidă) (fig.a) sau descrescătoare (moale) (fig. c).

➔La arcul elicoidal simplu, apare o abatere de la curba caracteristică liniară (fig. b), în cazul unor săgeți mari, când spirele încep să se atingă, sau atunci când spirele încep să-şi piardă proprietățile elastice inițiale.



Un sistem elastic care are curba caracteristică moale sau rigidă, poate fi analizat pe baza unei ecuații diferențiale neliniare de forma:

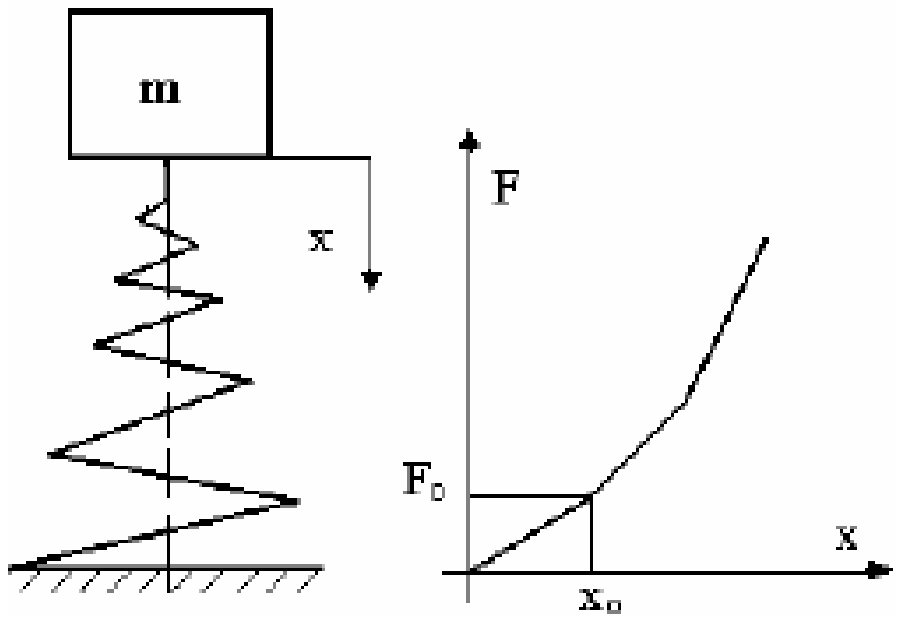
$$\boxed{m\ddot{x}+k(x\pm\mu^2x^3)=0}$$

Semnul plus se referă la caracteristica rigidă, iar semnul minus la caracteristica moale.

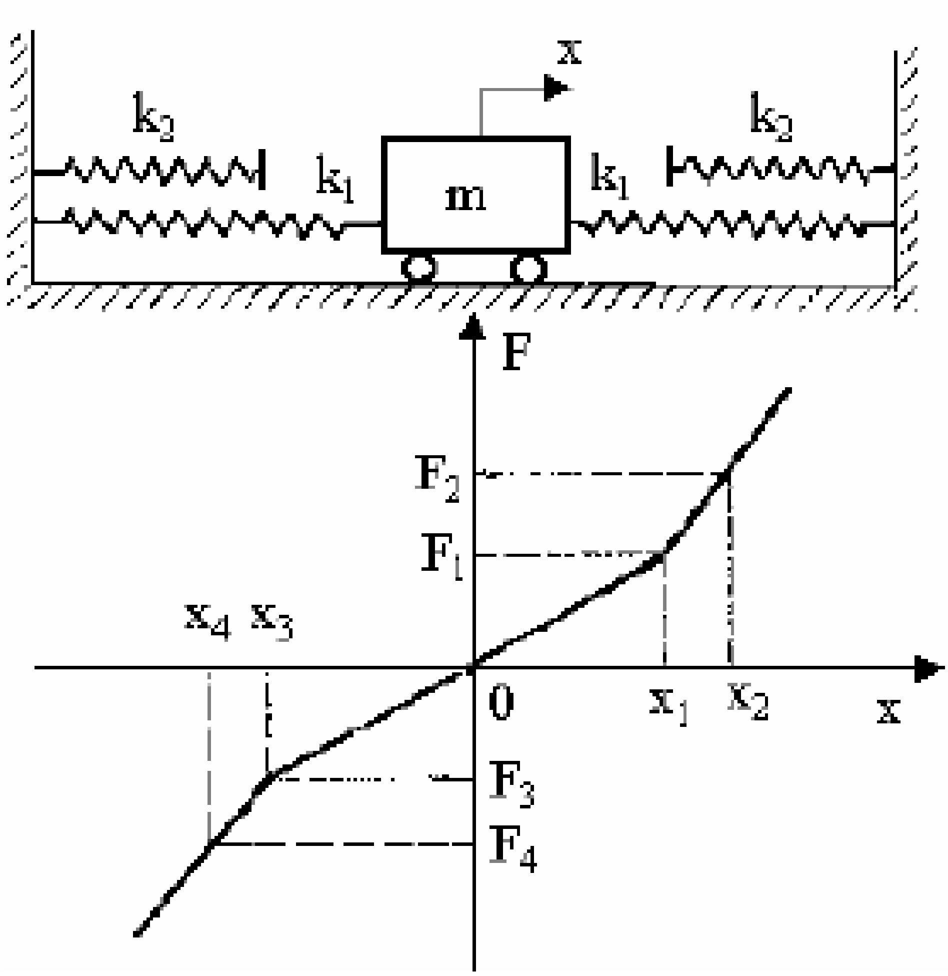
Neliniaritățile geometrice sunt datorate în general particularităților constructive ale sistemelor elastice şi sunt puse în evidență în cazul deformațiilor mari.

➔Cele mai simple sisteme elastice neliniare, care au neliniarități geometrice, sunt *sistemele cu joc* şi *sistemele cu forțe de prestrângere*.

➔Un element elastic neliniar este şi *arcul conic* (fig.), a cărui caracteristică rămâne liniară până când primele două spire vin în contact. Deoarece contactul dintre spire nu se realizează simultan pentru toate spirele, ca la arcul cilindric, elementul rămâne deformabil şi după ce spirele vin în contact, dar caracteristica în ansamblu nu mai este liniară.



➔În cazul sistemului cu joc prezentat în figura următoare, masa m se poate deplasa fără frecare pe un plan orizontal, fiind legată de suportul fix prin arcurile cu constantă k_1. Dacă masa depăşeşte în mişcarea sa punctele x_1 şi x_3, la forța elastică dezvoltată de arcul k_1 se adună forța elastică dezvoltată de arcurile k_2, rigiditatea sistemului modificându-se. Sistemul rămâne liniar atât timp cât condițiile inițiale asigură o mişcare liberă între punctele x_1 şi x_3 şi devine neliniar la amplitudini $0x_2$ ale mişcării, mai mari decât valoarea jocului. În acest caz mişcarea nu mai este armonică în ansamblul ei, iar perioada mişcării este funcție de amplitudine.



În general, caracteristicile elastice neliniare sunt date de o functie F(x).
➔Ecuația mişcării libere a unui sistem cu caracteristică elastică neliniară F(x) se poate pune sub forma generală:

$$\boxed{m\ddot{x} + F(x) = 0}$$

b) Neliniarități datorate amortizării neliniare

Amortizarea liniară este caracterizată de apariția în sistem a unei forțe rezistente, proporțională cu viteza de deplasare şi opusă acesteia ca semn:

$$G = -c \cdot \dot{x}$$

Uneori ipoteza liniarității forțelor de frecare nu este satisfăcătoare şi pentru a descrie analitic fenomenele fizice, amortizarea trebuie prezentată ca o funcție neliniară de amplitudinea mişcării x şi de viteza ei $\dot{x}$.

În ecuația de mişcare apare un termen de forma:

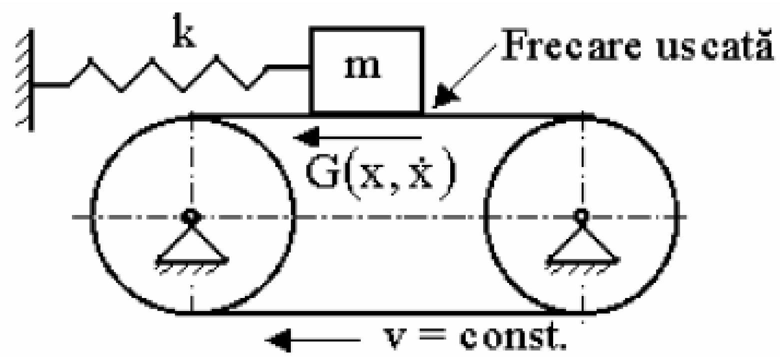
$$G(x,\dot{x}) = h_o(x)+h_1(x).\dot{x}+h_2(x).\dot{x}^2\ldots$$

Dacă:

1. $\dot{x}\cdot G(x,\dot{x}) > 0$ $\Rightarrow$ forța rezistentă se opune mişcării, rezistența se numeşte pozitivă.

2. $\dot{x}\cdot G(x,\dot{x}) < 0$ $\Rightarrow$ forța creată de mişcare este dirijată în sensul vitezei şi întreține mişcarea, rezistența se numeşte negativă, iar vibrațiile se numesc autoexcitate sau autoîntreținute.

Vibrațiile autoexcitate apar la prelucrarea prin aşchiere şi pot fi studiate cu ajutorul modelului format dintr-o masă, care se deplasează sub acțiunea forței elastice, forței de frecare şi a forței de inerție, pe o curea care are viteză constantă.



Sistemul prezintă o neliniaritate care depinde de frecarea uscată dintre masa m şi cureaua aflată în mişcare cu viteza v = const. Ecuația de mişcare a masei m este de forma:

$$m\ddot{x}+G(x,\dot{x})+kx=0$$

În cursul unei oscilații, pentru amplitudini sub o anumită valoare, apar amortizări negative. Cât timp lucrează forțele de frecare negative, în sistem se introduce energie, iar amplitudinea vibrației creşte până când aceste forțe devin pozitive şi încep să frâneze mişcarea.

➔În cazul general, ecuația de mişcare, pentru vibrațiile sistemelor elastice cu amortizare neliniară, va fi de forma:

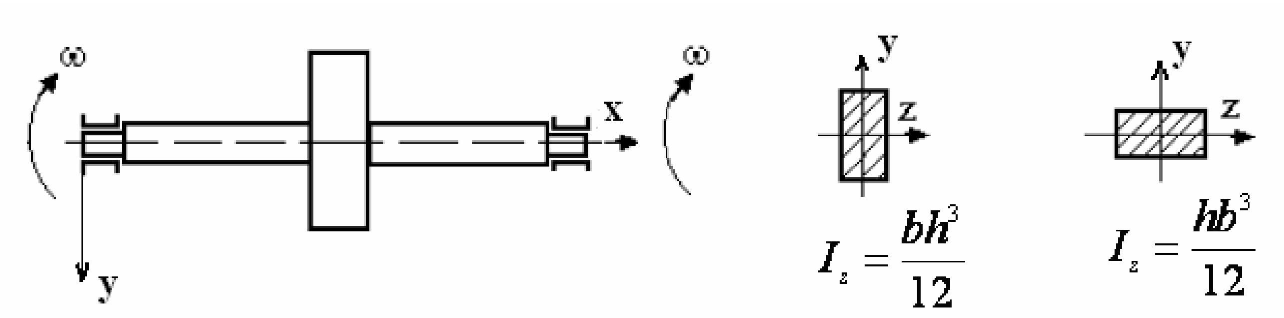
$$\boxed{m\ddot{x}+G(x,\dot{x})+F(x)=F_p(t)}$$

c) Neliniarități datorate caracteristicilor mecanice variabile in timp

➔În sistemele liniare şi neliniare considerate până acum, masa în mişcare şi rigiditatea elementelor deformabile nu depind explicit de timp. În cazul sistemelor neliniare, considerate până acum, rigiditatea şi amortizarea se modificau în timp, dar variația lor în timp era funcție amplitudinea mişcării x şi de viteza ei $\dot{x}$.

➔Există, însă, sisteme mecanice în care fie caracteristicile inerţiale (masa, momentul de inerţie masic), fie caracteristicile elastice sunt funcţii periodice de timp independente de amplitudine sau viteza mişcării vibratorii.

Aplicatie (la benzile transportoare) - în cazul unui arbore elastic, cu secţiunea necirculară, aflat în mişcare de rotaţie (figura), poziţia axelor principale de inerţie se modifică periodic faţă de direcţia vibraţiilor transversale.



➔Dacă se notează cu **ω** viteza de rotaţie, momentul de inerţie $\mathbf{I_z}$ al secţiunii faţă de axa **z** perpendiculară pe direcţia mişcării vibratorii **y**, se modifică periodic cu pulsaţia **2ω**.
➔În mod corespunzător se modifică şi rigiditatea arborelui:

$$k = k_0 + \Delta k \cdot \cos 2\omega t$$

astfel că ecuaţia vibraţiilor de încovoiere, excitate pe direcţia y de forţele de inerţie neechilibrate $F_0 \cdot \sin \omega t$, devine:

$$m\ddot{y} + (k_o + \Delta k \cos 2\omega t)y = F_o \sin\omega t$$

➔Variaţia în timp a caracteristicilor inerţiale, deci a coeficientului acceleraţiei, nu schimbă calitativ forma ecuaţiei, deoarece, prin împărţirea întregii ecuaţii cu un coeficient, aceasta se pune sub forma:

$$\ddot{y} + k(t)y = F_p(t)$$

Ecuaţia este similară cu cea obţinută pentru sistemele cu caracteristici elastice variabile în timp.
Vibraţiile descrise de această ecuaţie se numesc ***vibraţii parametrice.***

2. FENOMENE CARACTERISTICE VIBRAŢIILOR NELINIARE

1) Vibraţiile neliniare sunt ***neizocrone***: perioada T a mişcării vibratorii libere depinde de amplitudine. Pentru sistemele fără amortizări, cu caracteristică elastica moale, perioada creşte cu creşterea amplitudinii, iar pentru cele cu caracteristică tare, perioada scade cu creşterea amplitudinii.

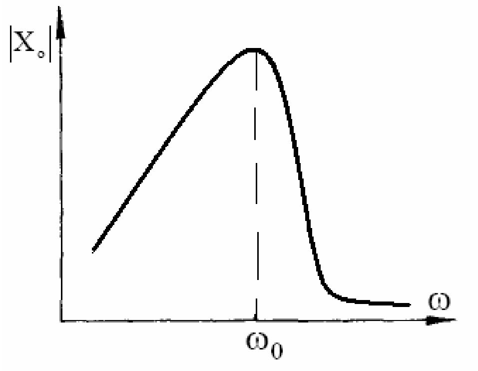
2) *Curbele de răspuns*, pentru vibrațiile forțate ale sistemelor neliniare, au o formă asemănătoare cu cele ale sistemelor liniare, dar sunt înclinate spre dreapta sau stânga, după cum caracteristica sistemului este moale sau rigidă .

3) *Stabilitatea mişcării*

Din punct de vedere fizic, un sistem elastic este ***static stabil*** dacă printr-o deplasare mică din poziția de echilibru se creează forțe care îl aduc la starea inițială.

Sistemul este ***dinamic stabil*** dacă amplitudinea mişcării sale în jurul poziției de echilibru rămâne limitată. Stabilitatea dinamică implică întotdeauna stabilitatea statică, reciproca nefiind adevărată.

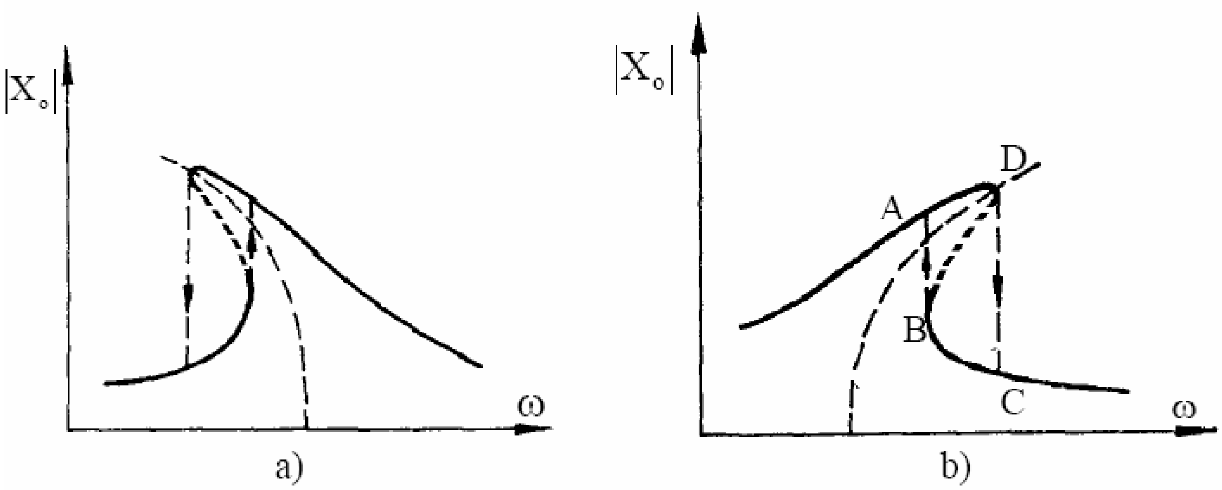
➔ Un sistem cu caracteristică liniară are curba de raspuns ca in fig. următoare:



caracteristica liniara

➔Sistemele elastice neliniare, excitate armonic, pot avea mişcări periodice instabile, a căror instabilitate se manifestă nu prin creşterea continuă în timp a amplitudinii, ci prin modificarea bruscă a parametrilor mişcării, la o mică perturbare a sistemului, fără ca parametrii excitației să se modifice.

Acesta este fenomenul de "salt", a cărui explicație se găseşte în forma particulară a curbelor de răspuns amplitudine - frecvență ale sistemelor neliniare.



a) caracteristica moale

b) caracteristica rigida

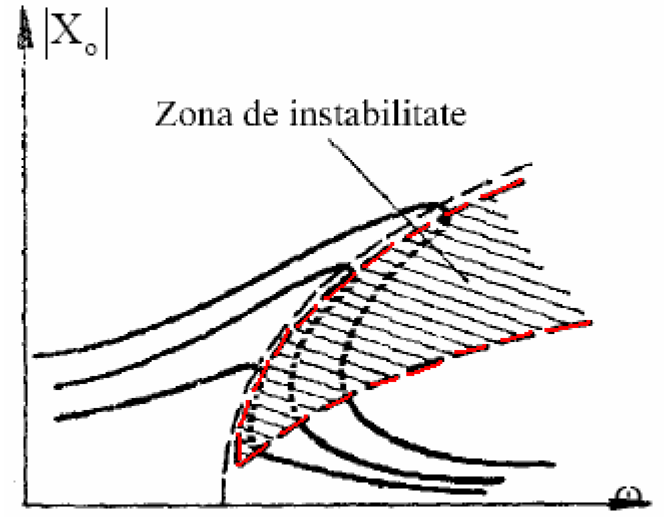
➔Dacă vom considera un sistem cu **caracteristică rigidă** (varful corespunzător rezonanței este inclinat spre dreapta-fig.b), atunci când pulsația forței perturbatoare crește continuu, amplitudinea vibrației crește până în **punctul A** (punctul din care se poate duce o tangentă verticală la curba caracteristică).

În continuare o mică creștere a pulsației, face ca sistemul să vibreze cu amplitudine mică (**punctul B**). Saltul nu este instantaneu, ci are loc după câteva cicluri de vibrație, pentru a se stabili o vibrație staționară la noua amplitudine.

➔Există o porțiune a curbei de răspuns (**linia întreruptă**), care nu poate fi obținută printr-o alegere corespunzătoare a pulsației excitației.

Pentru anumite valori ale lui ω, teoretic, există trei amplitudini posibile ale vibrației, în realitate putându-se obține doar amplitudinea superioară și cea inferioară.

➔În diagrama de răspuns, este definită zona de instabilitate ca locul geometric al punctelor de tangență al tangentelor verticale la curba de răspuns (figura).



4) Dacă asupra unui sistem liniar cu amortizare lucrează o forță perturbatoare sinusoidală de pulsație **ω**, răspunsul acestuia, după amortizarea vibrației libere, este o mișcare armonică având aceeași pulsație ω ca și excitația.

Într-un sistem neliniar, apar întotdeauna și vibrații cu pulsații **nω** (n > 1), multipli întregi ai pulsației excitației, numite ***supraarmonice*** , iar în condiții speciale, vibrații cu submultiplii ai pulsației excitației (n = 1/2, 1/3,…….), numite ***subarmonice***.

VIBRATII AUTOEXCITATE

➔ În cazul vibrațiilor forțate analizate, vibrația este întreținută de o forță perturbatoare care există independent de mişcare, forța fiind exterioară sistemului. În acest caz forța perturbatoare acționează chiar şi atunci când mişcarea este oprită.

➔Există sisteme mecanice care vibrează datorită unor cauze interne, forțele perturbatoare fiind determinate de mişcarea vibratorie. Amplitudinea vibrației creşte în acest caz, în timp, până când este limitată de un efect neliniar, vibrația numindu-se autoexcitată sau autoîntreținută.

➔Exemple de vibrații autoîntreținute: vibrația sculelor aşchietoare în timpul prelucrării prin aşchiere, datorită forțelor de frecare; vibrațiile liniilor electrice, a coşurilor de fum, a podurilor suspendate sub acțiunea vântului, datorită apariției vârtejurilor alternante Benard-Karman, care produc o forță alternantă, vibrațiile corzii de vioară, sub acțiunea arcuşului, vibrațiile cretei când este ținută perpendicular pe tablă, vibrațiile arborilor, datorită forțelor de frecare din punctul de contact dintre fus şi cuzinet, în cazul unei lubrifieri insuficiente, pompajul ventilatoarelor, vibrațiile axiale ale turbinelor etc.

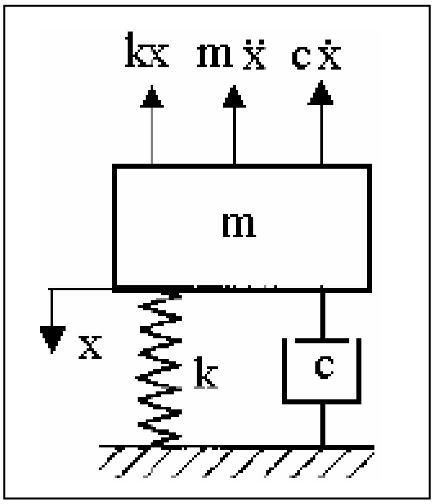
➔Caracteristicile vibrațiilor autoexcitate sunt:

- la vibrațiile autoexcitate, forța periodică care întreține mişcarea este creată sau determinată de mişcarea însăşi, atunci când mişcarea încetează, forța perturbatoare dispare;
- producerea vibrațiilor autoexcitate este legată în mod direct de stabilitatea poziției de echilibru a sistemului.

Cea mai importantă problemă practică, privind analiza sistemelor autoexcitate este determinarea condițiilor în care acestea sunt stabile, condiții numite şi criterii de stabilitate. Din cauza efectelor neliniare, calculul frecvențelor şi a amplitudinilor staționare finale este în general mult mai dificil.

Stabilitatea mişcării sistemelor neliniare

Să considerăm cazul vibrației libere amortizate a sistemului liniar cu un grad de libertate definită de ecuația diferențială:



Ecuația diferențială a mişcării masei m este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad / :m$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se notează: $\frac{c}{m} = 2\alpha$ - factorul de amortizare;

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$ - pătratul pulsației proprii.

$$\ddot{x} + 2 \cdot \alpha \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Rezulta: $r^2 + 2 \cdot \alpha \cdot r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-2 \cdot \alpha \pm \sqrt{4 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \omega_0^2}}{2}$

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

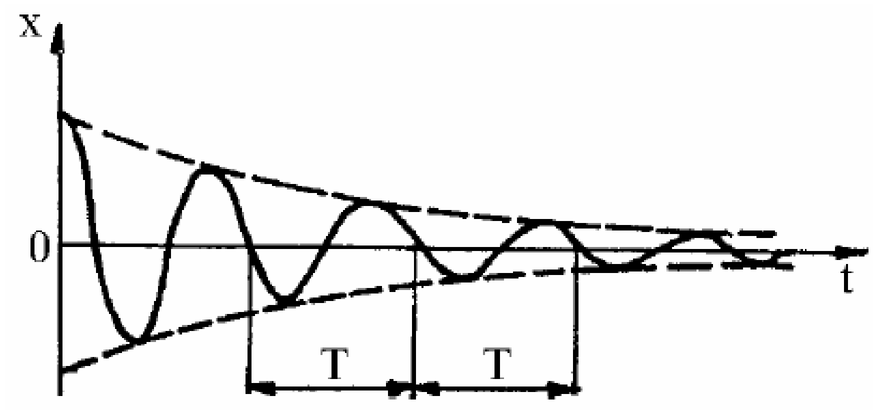
Dacă $c < c_{cr} = 2\sqrt{km}$ rădăcinile ecuației caracteristice sunt complex conjugate:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -\alpha \pm i\beta \qquad \text{cu:} \qquad \beta = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$$

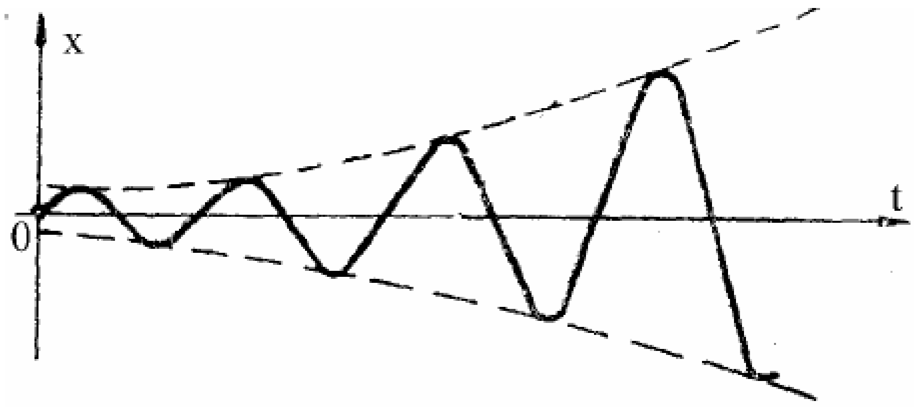
Soluția ecuației diferențiale este de forma:

$$x = e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$$

➔ Dacă **c > 0**, atunci relația de mai sus reprezintă o oscilație cu amplitudine descrescătoare, ca in fig. urmatoare:



➔ Dacă **c < 0**, primul factor are exponent pozitiv şi sistemul inițial în repaus va oscila cu o amplitudine care va creşte continuu, datorită sursei de energie interne, ca in fig. (este o mişcare instabilă)



La un sistem elastic pot să apară şi efecte neliniare care limitează amplitudinea.

Ecuatia diferentiala care defineste miscarea unui sistem neliniar cu amortizare negativa la amplitudini mici, respectiv cu amortizare pozitiva puternica la amplitudini mari are forma:

$$m \cdot \ddot{x} + (-c + a \cdot x^2) \cdot k \cdot x = 0$$

Condiția fundamentală de stabilitate a unui sistem este ca rădăcinile ecuației caracteristice să aibă părțile reale negative, producând astfel amplitudini descrescătoare.

Existența rădăcinilor cu parte reală negativă, care indică o funcționare stabilă, poate fi determinată prin mai multe metode prezentate în literatură: criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz, criteriul de stabilitate Nyquist etc.

Criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz

Criteriul coeficientilor, stabilit de Routh si Hurwitz, este un **criteriu algebric** de evaluare a stabilitattii sistemelor fara rezolvarea ecuatiei lor caracteristice.

Fie ecuatia caracteristica a unui sistem liniar :

$$P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

in care toti coeficientii sunt constanti si diferiti de zero.

Cu coeficientii polinomului caracteristic se construieste un determinant de ordin *n*, egal cu gradul polinomului, numit **determinant Hurwitz**. O conditie necesara si suficienta pentru ca sistemul (a carui ecuatie caracteristica este cunoscuta) sa fie stabil, este ca toti determinantii minori principali, inclusiv determinantul Hurwitz sa fie strict pozitivi.

Determinantul Hurwitz (rel.9) se construieste astfel :

-pe diagonala principala se trec coeficientii polinomului caracteristic *P(s)* scris in ordinea descrescatoare a puterilor lui *s*, incepand cu a_{n-1} ;

-pe fiecare coloana, sub diagonala principala, se trec coeficientii termenilor de grad superior, iar deasupra diagonalei principale se trec coeficientii termenilor de grad inferior ;

- dupa epuizarea coeficientilor, locurile ramase libere se completeaza cu zerouri.

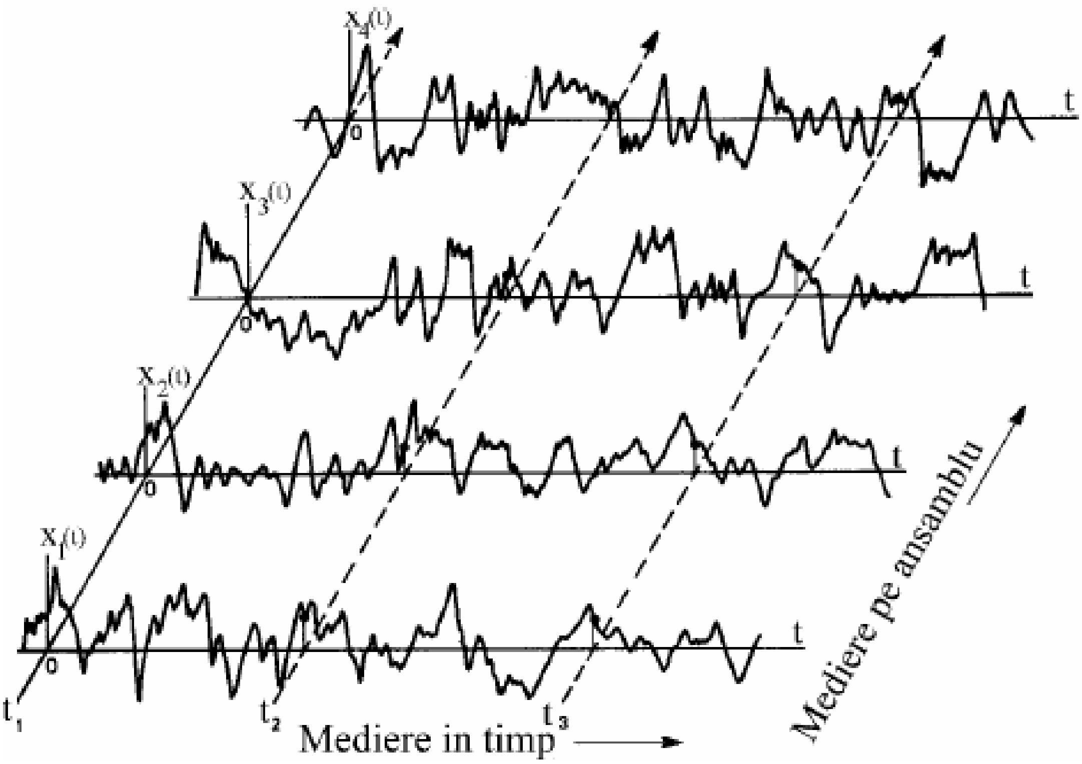
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Aceasta inseamna ca :

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0 \;\; ; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \;\; ; \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0 \;\; ; \;\; \Delta_n > 0$$

VIBRAȚII ALEATOARE

➔Vibrațiile mecanice ale sistemelor pot avea un caracter aleator, atunci când excitația sistemului este aleatoare. Sunt aleatoare, de exemplu, vibrațiile provocate în autovehicole de către denivelările întâmplătoare ale drumului, vibrațiile aeronavelor, vibrațiile generate în rulmenți de microasperitățile căilor de rulare şi impurități etc.
➔ În aceste cazuri, atât excitația cât şi răspunsul (mişcarea vibratorie) sunt procese aleatoare. În cazul vibrațiilor aleatoare mişcarea este ciclică fără a se repeta în timp.
➔ Pentru caracterizarea vibrațiilor aleatoare sunt utilizate o serie de mărimi probabilistice.



Pentru a descrie mişcarea trebuie sa o inregistrăm intr-un timp infinit de mare, ceea ce e aproape imposibil.

Se consideră **n** realizări finite ale unei vibrații aleatoare $\mathbf{x_1(t),\ldots.x_n(t)}$.

- Se poate defini **amplitudinea vibrației aleatoare**, la un moment dat t_1, ca o variabilă aleatoare $x(t)$, caracterizată de ansamblul statistic al valorilor ei, la momentul t_1, în toate realizările posibile ale procesului aleator (conform figurii de mai sus):

$$\boxed{x(t_1) = \{\, x_1(t_1)\ ;\ x_2(t_2)\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ x_n(t_n)\,\} \qquad \text{pentru: } n \to \infty}$$

- ***Valoarea medie*** a variabilei aleatoare $\mathbf{x(t_1)}$ este definită de relația:

$$m(t_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k(t_1)$$

- ***Funcția de autocorelație*** defineşte măsura în care procesul aleator rămâne asemănător cu el însuşi în timp, şi este definită de relația:

$$\Psi(t_1, \tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k(t_1).x_k(t_1 + \tau)$$

- ***Procesul aleatoriu staționar*** este definit dacă valoarea medie şi funcția de autocorelație nu depind de momentul $\mathbf{t_1}$ ales:

$$m(t_1) = \ldots = m(t_n) = m$$

$$\psi(t_1,\tau) = \ldots = \psi(t_n,\tau) = \ldots = \psi(\tau)$$

Pentru o realizare $\mathbf{x_k(t)}$ a unui proces aleatoriu staționar de durată **T** se definește valoarea medie și funcția de autocorelație a realizării cu relațiile:

$$m_{x(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t)dt$$

$$\psi_{(k,\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t)x_k(t+\tau)dt$$

- Procesul aleatoriu staționar se numește ***ergodic*** dacă valoarea medie și funcția de autocorelație, definite pentru o realizare **k**, nu depind de realizarea aleasă. Un proces aleator ergodic poate fi caracterizat printr-o singură realizare.

Procesele aleatoare pot fi reprezentate în domeniul frecvențelor cu ajutorul transformatei Fourier a funcției de autocorelație

ŞOCURI ŞI MIŞCĂRI TRANZITORII

Şocul simplu poate fi definit ca un proces în care sistemul mecanic primește o cantitate de energie cinetică într-un timp scurt, comparativ cu perioada proprie de vibrație a acestuia.

În cazul mișcărilor tranzitorii (cunoscute ca **șocuri complexe**), procesul de transfer al energiei poate avea o durată echivalentă cu câteva perioade proprii de oscilație. În general, atât mișcările sub formă de șoc, cât și cele tranzitorii, au energia distribuită continuu, pe toată gama de frecvențe, de la 0 la infinit. Şi la astfel de mișcări, o descriere extrem de utilă a fenomenului se realizează prin folosirea transformatei Fourier.

Şocul poate fi reprezentat ca o excitație realizată printr-o forță **f(t)** cu durată de acțiune **T** foarte scurtă, definită astfel:

$$\begin{aligned} f(t) &\neq 0 \quad \text{pentru} \quad t\in[0,T] \\ f(t) &= 0 \quad \text{pentru} \quad t\in(-\infty,0)\cup(T,\infty) \end{aligned}$$

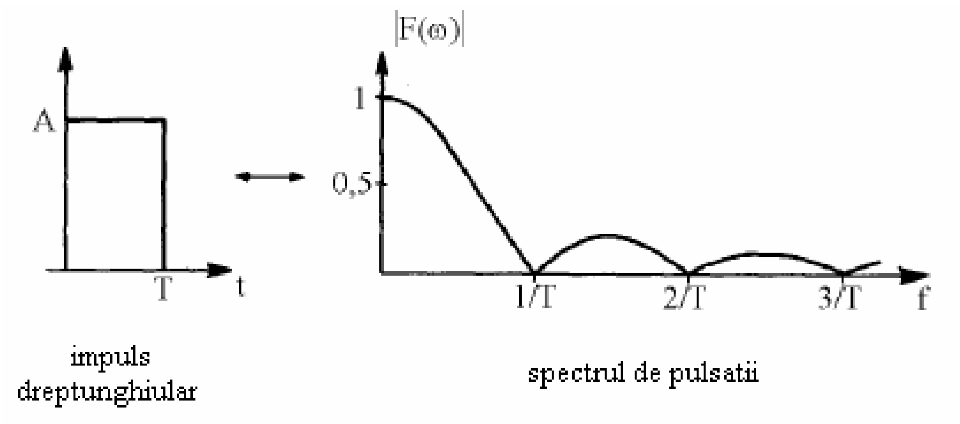
funcția **f(t)**, neperiodică, dă forma de undă a șocului.

Conținutul în frecvențe al șocului este caracterizat de spectrul densității de amplitudine al functiei **f(t)**, numit spectrul de pulsații al șocului.

Acesta se obține prin reprezentarea grafică a modulului transformatei Fourier, care are expresia:

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$$

Ordonatele $|\mathbf{F(\omega)}|$ se numesc componente spectrale.
Exemplu pentru un impuls dreptunghiular:



Deşi energia şocului este distribuită pe toate componentele spectrale, se poate considera că, practic, ea este distribuită pe componentele de pulsație joasă.

CARACTERISTICILE FIZICE ALE ZGOMOTULUI

➔ **Vibrația acustică** reprezintă mişcarea particulelor unui mediu elastic de o parte şi de alta a unei poziții de echilibru.

➔ **Sunetul** este o vibrație acustică capabilă să producă o senzație auditivă. Senzația auditivă este provocată de vibrațiile care au frecvențe cuprinse între 16Hz şi 20000Hz, domeniu care delimitează grupul vibrațiilor sonore sau acustice.

➔ După felul vibrațiilor care le produc, sunetele pot fi împărțite în:

- *Tonul muzical* – este un sunet produs de o singură vibrație sinusoidală;
- *Sunetul muzical* – este produs de o vibrație periodică mai complexă, formată prin suprapunerea mai multor tonuri muzicale;
- *Zgomotul* – este un sunet de durată mare, determinat de vibrații care nu sunt periodice. Din punct de vedere fiziologic, zgomotul se consideră a fi orice sunet supărător.

➔ **Definiții:**

- *Undele acustice* sunt rezultatul perturbării stării staționare a mediului gazos într-un punct al spațiului.
- *Câmpul acustic* reprezintă o zonă a unui mediu elastic, care se găseşte în stare de vibrație şi în care se propagă undele acustice.

- *Câmpul acustic liber* este orice câmp acustic care nu este limitat de o suprafață.
- *Viteza sunetului* (c) reprezintă viteza cu care se propagă în spațiu perturbația produsă de radiația unei surse sonore. Viteza sunetului depinde de elasticitatea de volum a mediului şi de densitatea acestuia. Viteza de propagare a sunetului este mai mare în solide decât în lichide şi respectiv gaze.
- *Lungimea de undă* (λ) este distanța dintre două puncte succesive, în care au loc concomitent comprimări sau dilatări.

$$\lambda = \frac{c}{f} = c \cdot T \,,$$

unde **c** este viteza de deplasare a undei, iar **f** este frecvența acesteia, **T** este timpul unui ciclu complet descris de presiunea acustică.

- *Presiunea acustică* (p) reprezintă valoarea medie efectivă a variației de presiune, într-un punct dat al mediului. Presiunea acustică se măsoară în Pa(N/m^2).

Utilizarea unei scări liniare pentru exprimarea presiunii acustice este dificilă, atât datorită domeniului dinamic foarte mare a valorii presiunii pe care o poarte percepe şi analiza urechea umană, cât şi datorită răspunsului neliniar, logaritmic, al urechii la stimulii exteriori.
De aceea, practic, se utilizează nivelul de presiune acustică dat de relația:

$$L = 10\log\frac{p^2}{p_o^{\,2}} = 20\lg\frac{p}{p_o}$$

mărimea obținută fiind exprimată în decibeli (dB).
Valoarea de referință $p_0 = 20\ \mu Pa$ reprezintă limita de audibilitate pentru un sunet cu frecvența de 1kHz.

- *Intensitatea acustică* (I) reprezintă fluxul de energie acustică care străbate unitatea de suprafață, perpendiculară pe direcția de propagarea a sunetului, în unitatea de timp.

Întrucât, intensitatea acustică variază în limite foarte largi, se utilizează frecvent mărimea logaritmică, *nivelul de intensitate acustică*, definit prin relația:

$$L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}\,[dB]$$

Pentru sunete care se propagă în aer: $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$

unde **I** este intensitatea acustică măsurată, iar $\mathbf{I_0}$ este valoarea de referință.

- *Puterea acustică* (P) reprezintă energia acustică totală radiată de o sursă acustică în unitatea de timp. Puterea acustică se calculează cu relația:

$$P = \oint_S I_n ds[W]$$

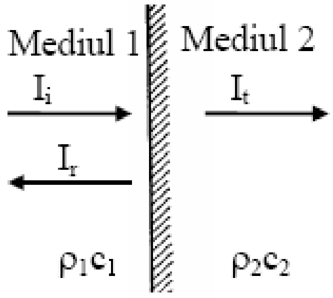
unde $\mathbf{I_n}$ este intensitatea acustică, iar **n** este direcția normal la elementul de suprafață **dS**. Nivelul de putere acustică este dat de relația:

$$L_P = 10\lg\frac{P}{P_o}[dB], \text{ unde } P_o = 10^{-12}[W].$$

- *Reflexia undelor sonore*

Atât timp cât în calea undelor sonore nu este interpus nici un obstacol, sunetul se propagă numai prin unde progresive.

Dacă undele întâlnesc un obstacol, realizat dintr-un alt mediu, obstacol prin care undele pot trece integral, parțial sau deloc (fig.), atunci la suprafața de separare a celor două medii se produce fie o reflexie a undelor, o refracție sau ambele concomitent. În cazul reflexiei totale, întreaga energie acustică se reflectă, iar în cazul refracției totale, întreaga energie acustică incidentă trece în al doilea mediu.



Dacă cele doua fenomene se produc simultan, o parte a energiei se reflectă (**I_r**), iar o altă parte (**I_t**) se propagă în cel de-al doilea mediu.

- *Atenuarea sunetului* în aer liber este cauzată pe de o parte de o împrăştiere a energiei prin divergenţă sferică şi pe de altă parte de o absorbţie a energiei în mediu. Pe măsură ce depărtarea de o sursă sonoră nedirecţionată creşte, energia transportată de unde se distribuie pe suprafaţa unei sfere din ce în ce mai mare.
- *Reverberaţia* reprezintă persistenţa sau prelungirea sunetului într-o încăpere, după încetarea emisiei sursei sonore. În practică, se consideră că sunetul s-a atenuat integral dacă nivelul de presiune acustică a scăzut cu 60dB. Timpul necesar producerii acestei atenuări a nivelului de presiune acustică se numeşte durată de reverberaţie (T) şi se exprimă în secunde. Durata de reverberaţie este independentă de puterea sursei sonore, dar depinde de dimensiunile geometrice ale încăperii şi de absorbţia acustică din încăpere, fiind cu atât mai mare cu cât volumul încăperii este mai mare şi cu cât absorbţia corespunzătoare este mai mică.

ECHIPAMENTE DE MĂSURĂ A ZGOMOTULUI

Sonometrul

Sonometrul este cel mai simplu aparat portabil pentru măsurarea zgomotului. Aparatul măsoară efectiv nivelul de presiune acustică exprimat în dB. Sonometrul este un aparat care răspunde semnalului sonor aproximativ în acelaşi mod ca urechea umană şi care permite determinări de nivel de zgomot obiective şi reproductibile.

Semnalul sonor este convertit într-un semnal electric identic prin intermediul unui microfon de înaltă calitate. Cele mai bune microfoane din punct de vedere al preciziei sunt cele de tip condensator.

Semnalul sonor fiind de nivel scăzut, trebuie amplificat înainte de a putea fi citit pe ecranul instrumentului. După primul amplificator, semnalul trebuie să fie trecut prin reţeaua circuitelor de ponderare sau printr-un filtru de octavă sau de o treime de octavă, care poate fi conectat din exteriorul aparatului.

Octava este diferenţa care separă două frecvenţe ale sunetului, dintre care una este dublul celeilalte.

Analizorul de frecventa

Analizorul este un aparat care permite măsurarea spectrului zgomotului, adică a distribuţiei presiunii acustice în funcţie de frecvenţă.

În principiu, analizorul de frecvenţă este constituit dintr-un amplificator de intrare, o serie de reţele corectoare, o secţiune de amplificare selectivă şi un amplificator de ieşire.

Analizorul de frecvenţă tip 2107 (BRŰEL şi KJAER) este un amplificator selectiv continuu în domeniul de frecvenţă 20 Hz – 20 KHz împărţit în 6 domenii. Filtrul este constant proporţional cu lărgimea benzii care este reglabilă de la 6 la 20%. Are încorporate circuite de ponderare A, B şi C care pot fi înserate în serie cu filtrul permiţând analiza de frecvenţă a semnalelor de tărie sonoră egală.

Scala instrumentului este etalonată în dB, V şi % pentru operarea coeficientului de adsorbţie la materialele fonoabsorbante.