

Rezistența materialelor 1

Sinteze de seminar

Conf. dr.ing. Marian MAREȘ

CUPRINS

| | |
|--|--------|
| 1.1_Echilibrul corpurilor | p. 3 |
| 1.2_Diagrame la solicitările axiale | p. 26 |
| 1.3_Probleme static nedeterminate la solicitările axiale | p. 44 |
| 1.4_Caracteristici de inerție ale suprafețelor plane | p. 55 |
| 1.5_Probleme static nedeterminate la răsucire | p. 67 |
| 1.6_Calculul convențional la forfecare | p. 81 |
| 1.7_Calculul la încovoiere pentru barele drepte | p. 95 |
| 1.8_Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte | p. 117 |

1.1

Echilibrul corpurilor

Echilibrul corpurilor

Ecuatii de echilibru

Faptul că un corp solid se află în *echilibru static* (adică nu se mișcă) sub acțiunea sarcinilor lui exterioare se exprimă matematic prin condițiile de egalitate cu zero a *rezultantelor* forțelor și momentelor care îl încarcă.

În acest sens, prima serie de condiții de echilibru se scrie pentru *proiecțiile forțelor* care acționează asupra corpului; pe fiecare dintre pe axele sistemului de coordonate oarecare (Oxyz), acestea trebuie să dea sumă nulă:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

Vor fi, prin urmare, **trei** astfel de ecuații, în cazul general, “*spațial*”, respectiv **două** – pentru solicitările care produc efecte *într-un singur plan* (probleme *plane*).

Apoi, suma momentelor produse de încărcările aplicate piesei, față de fiecare dintre axele de coordonate duse printr-un punct arbitrar O, trebuie să fie zero:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ox}(F_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{Oy}(F_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(F_i) = 0$$

Echilibrul corpurilor

Ecuatii de echilibru

Se scriu astfel încă **trei** ecuații – într-o problemă în *spațiu*, respectiv doar **una** (în raport cu axa *perpendiculară* pe planul forțelor, singura față de care acele forțe pot să producă momente) – în cazul *plan*.

Rezultă că *starea de echilibru static* a unui corp se exprimă prin **șase ecuații**, în problemele în spațiu, respectiv prin **trei ecuații** – la solicitările într-un plan. Acestea se numesc **ecuații de echilibru** și sunt folosite la calculul *reacțiunilor*, forțe și momente aplicate de reazeme asupra corpului propus a fi studiat.

Calculul reacțiunilor este prima etapă în rezolvarea problemelor de rezistența materialelor, iar după găsirea lor devine total cunoscută încărcarea exterioară a unui corp; problemele în care numărul N al *reacțiunilor* necunoscute este egal cu numărul E de *ecuații de echilibru* ce pot fi scrise ($N = E$) sunt probleme **static determinate**; pe de altă parte, acele probleme în care numărul N este mai mare decât E se numesc **static nedeterminate**, iar numărul $n = N - E$ reprezintă *gradul nedeterminării* problemei.

Echilibrul corpurilor

Ecuatii de echilibru

În conformitate cu *definiția* momentului unei forțe față de o axă, în problemele în care toate încărcările își produc efectele *într-un singur plan* ecuația de echilibru pentru momente se va calcula, în realitate, față de un punct P din planul forțelor de solicitare; dacă acest plan include axele **x** și **y** ale sistemului, atunci se poate scrie că:

$$\sum_{i=1}^n M_{Pz} (F_i) = \sum_{i=1}^n M_P (F_i) = 0$$

Se poate admite că problemele de calcul de la solicitările mecanice simple sunt de obicei *plane*, încât pentru acestea se vor scrie *trei ecuații de echilibru*: proiecțiile de forțe pe axele planului, plus ecuația de momente față de axa perpendiculară pe plan.

Echilibrul corpurilor

Reazeme și reacțiuni

Corpurile care preiau diverse încărcări mecanice trebuie să păstreze pe timpul funcționării o poziție bine stabilită, în ansamblul din care fac parte, adică să le fie împiedicate deplasările nedorite.

Atunci când rezultanta \mathbf{R}_1 a unui sistem de *forțe* care acționează asupra unui corp este diferită de zero, acel corp va efectua o deplasare prin *translație*, pe direcția și în sensul rezultantei respective; pentru a se împiedica această mișcare (adică a se fixa corpul), este nevoie de o forță \mathbf{R} , egală și opusă lui \mathbf{R}_1 .

În mod similar, dacă există și este nenul *momentul* \mathbf{M}_1 al unei rezultante ca mai sus, față de un punct sau de o axă oarecare, atunci corpul se va *roti*, în raport cu reperul considerat, conform cu sensul lui \mathbf{M}_1 ; pentru evitarea acestei mișcări trebuie acționat asupra corpului cu un moment \mathbf{M} , egal și opus lui \mathbf{M}_1 .

Sarcinile \mathbf{R} și \mathbf{M} sunt numite **reacțiuni**, și rezultă din *rezemarea* corpului, adică din acțiunea asupra lui a reazemelor care îi *preiau*, total sau parțial, posibilitățile de mișcare (*gradele de libertate*).

Echilibrul corpurilor

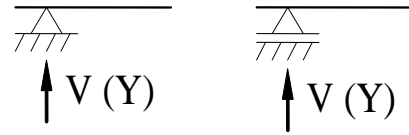
Reazeme și reacțiuni

În rezolvarea problemelor de rezistența materialelor se lucrează cu **trei tipuri** de reazeme:

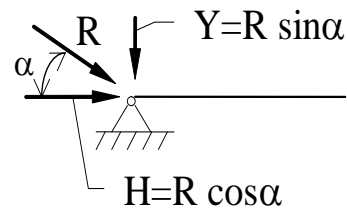
a) Reazemul **simplicu** – are rolul să împiedice mișcarea de *translație* a corpului pe direcția axei reazemului, în *punctul de sprijin*, astfel că introduce o singură reacțiune, de tip forță, pe direcția respectivă.

b) Reazemul **articulat** (*articulația*) – trebuie să împiedice *orice translație* a corpului, în punctul de sprijin; un corp poate transla, în plan, pe *două*, iar în spațiu pe *trei* direcții, încât articulația va introduce reacțiuni de tip

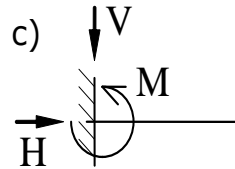
a)



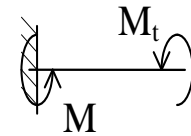
b)



c)



d)



Echilibrul corpurilor

Reazeme și reacțiuni

forță acționând pe *două* sau pe *trei* direcții (perpendiculare între ele), după cum problema este *plană* sau *spațială*.

c) Reazemul **încastrat** (încastrarea) – reprezintă reazemul *generalizat*, întrucât fixează corpul în totalitate (adică îi preia *toate* gradele de libertate) în punctul de sprijin, astfel încât introduce în acel punct **șase** reacțiuni (*trei* de tip forță, *trei* de tip moment, dirijate pe axele de coordonate) – în cazul *spațial*, dar *trei* (două forțe și un moment) – în *plan*.

Atenție: Reacțiunile care nu sunt egale cu zero într-o încastrare vor fi, în exclusivitate, de felul solicitării exterioare aplicate piesei! Ca atare, într-o bară supusă numai la încovoiere nu există moment de răsucire în încastrare, pe când într-o bară solicitată numai la răsucire – reacțiunea de tip moment încovoietor și cele de tip forță vor fi nule!

Echilibrul corpurilor

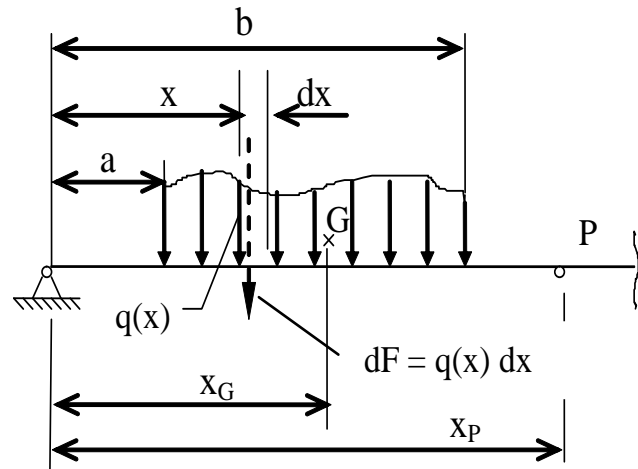
Calculul rezultatelor încărcărilor distribuite

Este vorba despre sarcini care nu își epuizează efectele într-un singur punct; mai frecvent apar în practică *forțe* distribuite, încât explicațiile se vor referi la acestea, calculul rezultatelor unor *momente* distribuite fiind bazat pe principii similare.

Se poate înțelege că în cazul forțelor distribuite se parcurge o etapă de calcul în plus, cu privire la momentul lor global față de un punct (sau o axă), ceea ce va face necesară o discuție specială.

Se imaginează o forță distribuită după o anumită funcție $q(x)$, pe distanța $(b-a)$, orientată *perpendicular* pe axa barei drepte pe care o încarcă.

În continuare se propune să se calculeze *forța rezultantă* a acestei încărcări, respectiv *momentul ei resultant* în raport cu punctul arbitrar **P** de pe bară (adică față de axa dusă prin P, perpendiculară pe planul forței).



Echilibrul corpurilor

Calculul forței rezultante a unei încărcări distribuite

Dacă se pune în evidență forța *elementară* dF a distribuției, reprezentând suma forțelor q care acționează pe distanța infinit mică dx de pe bară, valoarea acesteia se va scrie sub forma:

$$dF = q(x) dx.$$

În consecință, forța rezultantă a întregii încărcări distribuite se va calcula ca suma (integrala) tuturor componentelor $q(x)$ de pe distanța $(b-a)$, încât rezultă că:

$$R[q(x)] = \int_a^b dF = \int_a^b q(x) dx$$

Cunoscând funcția de distribuție și primitiva ei, mărimea (sau expresia) rezultantei se poate stabili imediat, din această relație. Folosind însă interpretarea geometrică a integralelor liniare, se obține o regulă simplă pentru acest calcul:

Rezultanta oricărei forțe distribuite este numeric egală cu aria suprafeței prin care se reprezintă încărcarea distribuită respectivă!

Echilibrul corpurilor

Calculul forței rezultante a unei încărcări distribuite

Pentru încărcări date de figuri geometrice elementare, calculul integralei de mai sus va fi deci evitat, prin simpla determinare a ariei geometrice a încărcării; punctul unde acționează rezultanta va fi centrul de greutate G al suprafeței ce reprezintă încărcarea; este important de observat că în calculele obișnuite contează doar coordonata x_G a acestui centru, măsurată pe axa barei.

Trebuie spus că majoritatea calculelor din problemele de rezistența materialelor (și în general din ingineria mecanică) sunt efectuate sub formă *literală*, înlocuirea simbolurilor cu datele numerice făcându-se doar în relațiile finale de calcul; acest mod de lucru păstrează un grad mare de generalitate în analiza problemelor și menține legătura, pe parcursul rezolvării, cu fenomenele fizice la care se referă aplicația considerată.

Este utilă și observația că *intensitatea* forțelor distribuite se exprimă prin numere înmulțite cu simbolul q – cu unitatea de măsură $[N/m]$, iar *distanțele* prin numere înmulțite, de obicei, cu a sau L , măsurate în $[m]$; rezultanta unei *forțe distribuite* se va exprima în funcție de simbolul $q \cdot a$, având ca unitate de măsură $[N]$; în plus, o mărime notată prin factorul qa înmulțit cu un număr (întreg sau fracționar) va reprezenta, în principiu, o *forță concentrată*.

Echilibrul corpurilor

Calculul momentului rezultat al unei forțe distribuite

Momentul rezultat al unei forțe distribuite, în raport cu un punct arbitrar P, care este conținut în planul problemei (a se revedea figura de la începutul acestui paragraf), se calculează – în mod riguros – folosind relația generală, de forma următoare:

$$\mathbf{R}\left[\mathbf{M}_P\{q(x)\}\right] = \int_a^b \mathbf{M}_P\{dF\} = \int_a^b dF(x_P - x) = \int_a^b q(x)(x_P - x) dx$$

Pe de altă parte este cunoscută, din mecanică, teorema care arată că rezultanta unui sistem de momente elementare este egală cu momentul, calculat față de reperul considerat (în acest caz, punctul P), al rezultantei forțelor $q(x)$ care produc acele momente elementare, de unde rezultă că:

$$\mathbf{R}\left[\mathbf{M}_P\{q(x)\}\right] = \mathbf{M}_P\left\{\mathbf{R}[q(x)]\right\} = \mathbf{R}[q(x)] \cdot (x_P - x_G)$$

Echilibrul corpurilor

Calculul momentului rezultant al unei forțe distribuite

Se poate înțelege că această variantă de lucru simplifică mult calculele, atunci când coordonata x_G este ușor de stabilit pentru încărcarea concretă.

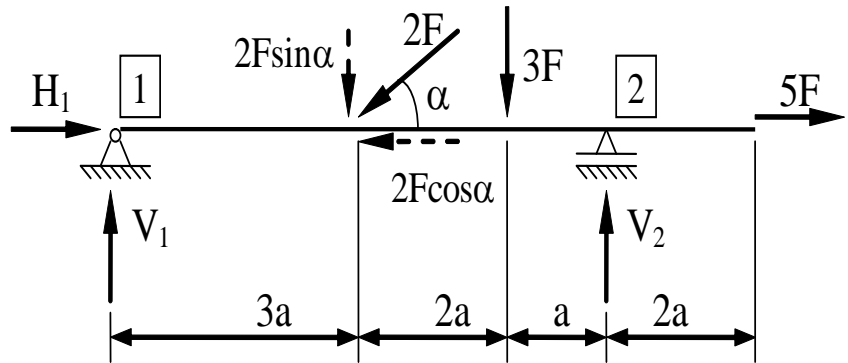
Unitatea simbolică de măsură a *momentelor* rezultante va fi, în calculele *literale*, de forma $q \cdot a^2$, măsurată în [Nm], încât orice mărime identificată prin factorul qa^2 înmulțit cu un număr (întreg sau fracționar) va reprezenta, de regulă, un *moment concentrat*.

Atenție: Rezultantele-moment ale forțelor distribuite reprezintă în calcule *momente concentrate*, conform regulilor de mai sus! Acestea vor fi incluse în sumele de momente față de axele z din diferite puncte ale planului problemei, alături de mărimile momentelor concentrate exterioare și de momentele produse de forțele concentrate, care sunt prezente în acel plan.

Echilibrul corpurilor

APLICAȚII: Calculul reacțiilor în probleme static determinate

1. Pentru o bară *articulată* în capătul din stânga (punctul 1) și *simplu rezemată* în 2, cele trei reacțiuni sunt H_1 , V_1 și V_2 . Se cer valorile lor, dacă solicitarea exterioară include o forță verticală ($3F$), una orizontală ($5F$) și una oblică ($2F$), înclinată la unghiul α față de axa barei.



S-a explicat că este preferabilă rezolvarea literală a problemelor, astfel încât toate calculele vor include forțele exprimate în funcție de parametrul (arbitrar, dar fixat) F .

Rezolvare

Se alege punctul 1 ca reper la scrierea ecuației de echilibru pentru momente, iar cele trei ecuații de echilibru ale problemei se vor scrie după cum urmează:

Echilibrul corpurilor

Aplicația 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{(1z)}(F_i) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_1 + 5F - 2F \cos \alpha = 0 \\ V_1 + V_2 = 3F + 2F \sin \alpha \\ V_2 \cdot 6a - 3F \cdot 5a - (2F \sin \alpha) \cdot 3a = 0 \end{array} \right.$$

Acest sistem, de 3 ecuații cu 3 necunoscute conduce la următoarele rezultate:

$$H_1 = 2F \cos \alpha - 5F; \quad V_2 = \frac{5}{2}F + F \sin \alpha; \quad V_1 + V_2 = 3F + 2F \sin \alpha$$

Se observă că a fost utilizată cea mai directă cale de rezolvare – stabilirea valorilor celor 3 reacțiuni pe baza celor trei ecuații de echilibru globale. Aparent, aceste valori nu pot fi verificate, printr-un calcul auxiliar.

Totuși, echilibrul momentelor se poate analiza în raport cu orice punct din planul desenului, încât reacțiunea V_1 poate fi calculată *separat*, scriind ecuația față de un punct

Echilibrul corpurilor

Aplicația 1

diferit de cel inițial; pentru aceasta este preferat cel de-al doilea reazem al barei, pentru ca reacțiunea deja calculată să nu apară în noua ecuație.

Atenție: Cele două ecuații de momente *nu sunt independente* între ele, adică ecuațiile de echilibru semnificative rămân în număr de **trei**; este vorba doar despre scrierea uneia dintre ecuații sub două *forme*; o ecuație de echilibru rămâne astfel neutilizată ($\sum Y_i = 0$) și devine *relație de verificare* a valorilor calculate ale reacțiunilor, menținându-se astfel controlul asupra rezolvării corecte a problemei.

În cazul de față, ecuația de momente față de axa **z** din punctul 2 este:

$$\sum_{i=1}^n M_{(2z)}(F_i) = 0: \quad V_1 \cdot 6a - (2F \sin \alpha) \cdot 3a - 3F \cdot a = 0$$

Cea de-a doua reacțiune verticală se obține: $V_1 = F/2 + F \sin \alpha$

Suma celor două reacțiuni este $(3F + 2F \sin \alpha)$, adică valorile sunt corecte, întrucât cea de-a treia dintre ecuațiile scrise inițial este transformată într-o identitate.

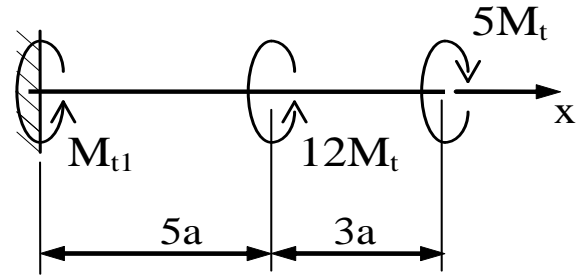
Reacțiunile din bara considerată au, așadar, următoarele valori:

$$H_1 = F(-5 + 2 \cos \alpha); \quad V_1 = F(1/2 + \sin \alpha); \quad V_2 = F(5/2 + \sin \alpha)$$

Echilibrul corpurilor

APLICAȚII: Calculul reacțiunilor în probleme static determinate

2. Bara alăturată este încărcată numai cu momente de răsucire concentrate, adică vectori de tip moment care au direcția axei barei; rezultă că, dintre cele șase reacțiuni posibile în reazemul încastrat, doar cea de tip moment de răsucire (M_{t1}) va fi semnificativă; oricare alta nu are o solicitare oponentă pe bară, deci va fi nulă!



Observații

- ◆ Momentele de răsucire concentrate rotesc secțiunile în care acționează, în plane transversale ale barei; se reprezintă convențional prin arce de cerc (cu săgeți) “turtite”, spre a le deosebi de momentele care rotesc în alte plane decât cele transversale.
- ◆ În calcule literale, toate momentele se exprimă în funcție de un parametru (arbitrar, dar fixat), care în cazul de față este notat prin M_t .

Echilibrul corpurilor

Rezolvare

Se poate scrie o singură ecuație de echilibru:

$$\left(\sum_{i=1}^n M_i \right)_{(Ox)} = 0 \Leftrightarrow M_{t1} + 12 M_t - 5 M_t = 0$$

Problema e static determinată (cu o singură necunoscută), încât se obține imediat că:

$$M_{t1} = -7 M_t$$

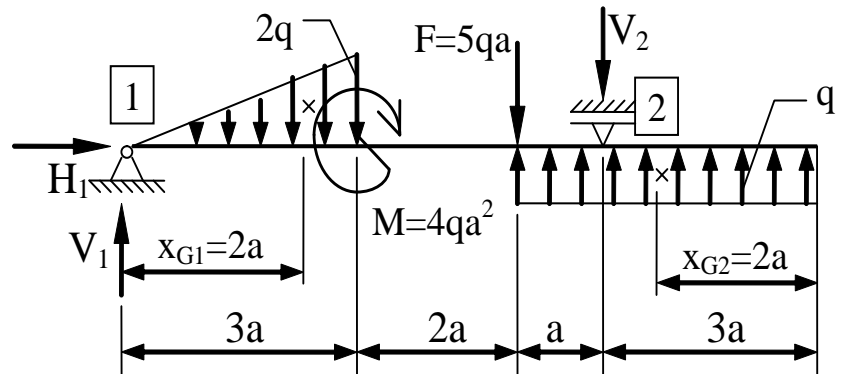
- ◆ După cum s-a observat și mai sus, în scrierea ecuațiilor de echilibru nu este necesar să fie adoptate convenții de semne, fiind vorba despre sume de termeni care sunt egale cu zero; aceste ecuații pot fi oricând înmulțite cu numărul (-1) , schimbând astfel semnele tuturor termenilor. În principiu, primul termen al ecuației se consideră pozitiv, iar ceilalți termeni vor căpăta semne prin comparație cu primul.
- ◆ Sensurile reacțiilor se aleg inițial arbitrar, fără vreo implicație specială asupra calculelor; cele care acționează, în realitate, în sens contrar celui de pe desen, rezultă din calcule cu semnul $(-)$ (ca aici), ceea ce nu prezintă inconveniente pentru etapele ulterioare ale rezolvării problemelor.

Echilibrul corpurilor

APLICAȚII: Calculul reacțiunilor în probleme static determinate

3. Bara alăturată se sprijină pe un reazem simplu (2) și o articulație (1) și poartă o forță verticală $F = 5qa$, un moment $M = 4qa^2$, o forță distribuită uniform, de intensitate q , pe lungimea $4a$ și o forță distribuită liniară, pe lungimea $3a$, având valoarea intensității maxime $2q$.

Pe desen s-au reprezentat și abscisele centrelor de greutate ale încărcărilor distribuite, care vor fi utile pentru calculele de mai jos.



Observații

◆ Momentul M produce rotire, în jurul direcției sale, în planul desenului (adică o solicitare de încovoiere în jurul axei z din punctul său de aplicare), încât se reprezintă printr-un arc de cerc (cu săgeată de sens) “real” (nedeformat).

Echilibrul corpurilor

Aplicația 3

◆ Prezența forțelor distribuite implică (în rezolvările *literale*) exprimarea solicitărilor în funcție de parametrii q și a ; trebuie remarcat faptul că acest fel de exprimare este posibil în orice caz concret de solicitare, făcându-se raportul între mărimile forțelor și momentelor concentrate de pe bară și valorile mărimilor $[qa]$, respectiv $[qa^2]$, exprimate numeric, în funcție de datele problemei abordate.

Exemplu: Se presupune că pentru problema considerată se cunosc valorile $a=0,2\text{m}$ și $q=20\text{kN/m}$, iar sarcinile concentrate sunt $M=3,2\text{kNm}$ și $F=20\text{kN}$; produsele de mai sus vor fi $qa=4\text{kN}$ și $qa^2=0,8\text{kNm}$. Rezultă că $M = 4qa^2$ și $F = 5qa$; este evident că aceste rapoarte se pot calcula în orice problemă, iar eventualele valori fracționare ale lor nu vor perturba calculul ulterior.

Rezolvare

Pe bară apar trei reacțiuni de tip forță, notate H_1 , V_1 și V_2 , iar cele trei ecuații de echilibru ce pot fi scrise fac problema *static determinată*. Pe de altă parte, echilibrul forțelor pe direcția orizontală se scrie simplu $H_1=0$, deci în problemă rămân două necunoscute, dar și numai două ecuații de echilibru semnificative.

Echilibrul corpurilor

Aplicația 3

Echilibrul pe verticală al forțelor (ținând seama că rezultanta unei forțe distribuite este egală numeric cu aria geometrică a încărcării) se scrie:

$$V_1 - \frac{2q \cdot 3a}{2} - 5qa - V_2 + q \cdot 4a = 0$$

După reducerea termenilor asemenea, se obține că: $V_1 - V_2 = 4qa$

La fel ca mai sus, se preferă calculul independent al reacțiunilor, din echilibrul momentelor față de reazeme (la care se ține seama de pozițiile centrelor de greutate ale încărcărilor distribuite, deci ale rezultatelor de tip forță ale acestora):

$$\sum_{i=1}^n M_{(1z)}(F_i) = 0: \quad (q \cdot 4a)(9a - 2a) - V_2 \cdot 6a - (5qa) \cdot 5a - 4qa^2 - \frac{2q \cdot 3a}{2} \cdot 2a = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{(2z)}(F_i) = 0: \quad V_1 \cdot 6a - \frac{2q \cdot 3a}{2} \cdot (6a - 2a) + 4qa^2 - (5qa) \cdot a - (q \cdot 4a)(3a - 2a) = 0$$

Scrierea ecuațiilor se începe de la un capăt al barei, studiind efectul fiecărei încărcări, ca moment față de reperul ales, în parcurgerea barei către celălalt capăt al ei.

Echilibrul corpurilor

Aplicația 3

Rezultat: După reducerea termenilor asemenea în ecuațiile de mai sus se ajunge la valorile:

$$V_1 = (17/6) qa \quad V_2 = (-7/6) qa$$

Verificare: $V_1 - V_2 = (24/6) qa = 4qa$ ceea ce confirmă ecuația de forțe verticale de mai sus, adică valorile obținute sunt corecte!

Concluzii (cu privire la barele drepte, static determinate, cu încărcări care produc efecte numai în planul problemei)

- Dacă nu apar pe bară forțe exterioare de direcție diferită de verticală, atunci reacțiunea orizontală din articulație este nulă!
- Forțele distribuite care acționează de o parte și de alta față de un reazem pot fi luate în calcul ca și cum ar fi divizate în două forțe distincte (folosind ariile și centrele de greutate ale figurilor geometrice respective), dar cel mai simplu și mai expeditiv este ca în calcule să se considere efectul lor global!

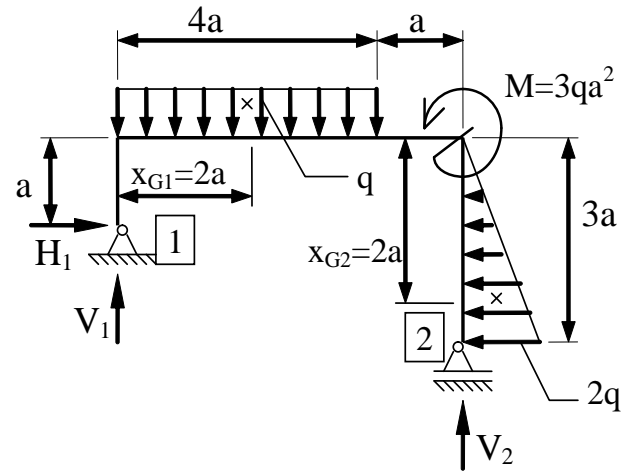
Echilibrul corpurilor

APLICAȚII: Calculul reacțiunilor în probleme static determinate

4. Bara alăturată are axa *cotită*, având două segmente verticale, de lungimi a și $3a$ și unul orizontal $5a$, prinse rigid în noduri; capătul 1 este articulat, iar 2 – simplu rezemat, vertical.

Sarcinile exterioare sunt următoarele:

- un *moment* concentrat $M=3qa^2$, de sens antiorar;
- o forță distribuită *uniform*, de intensitate q , pe lungimea $4a$;
- o forță distribuită *liniar*, pe lungimea $3a$, cu valorile extreme 0 și $2q$.



Se poate observa că încărcările acestei construcții sunt similare celor din problema anterioară, astfel încât calculele vor fi diferite numai pentru că axa barei nu păstrează o aceeași direcție, pe toată lungimea ei!

Echilibrul corpurilor

Aplicația 4

Echilibrul forțelor pe cele două direcții ale planului se scrie astfel:

$$\sum X_i = 0: H_1 = \frac{2q \cdot 3a}{2} \quad \sum Y_i = 0: V_1 + V_2 = 4qa$$

Cele două reacțiuni verticale se calculează independent, scriind echilibrul momentelor față de cele două rezeme, astfel:

$$\left(\sum M_i \right)_{(1z)} = 0: V_2 \cdot 5a - \frac{2q \cdot 3a}{2} (2a - a) + 3qa^2 - (4qa) \cdot 2a = 0$$

$$\left(\sum M_i \right)_{(2z)} = 0: V_1 \cdot 5a + H_1 \cdot 2a - (4qa)(5a - 2a) - 3qa^2 - \frac{2q \cdot 3a}{2} (3a - 2a) = 0$$

Rezultat: După reducerea termenilor asemenea (înlocuind pe H_1 cu $3qa$), se ajunge la valorile reacțiunilor: $V_1 = (12/5) qa$ $V_2 = (8/5) qa$ $H_1 = 3qa$

Verificare $V_1 + V_2 = (20/5) qa = 4qa$

adică rezolvarea a fost corectă, întrucât a fost confirmată cea de-a doua ecuație inițială de echilibru.

1.2

Trasarea diagramelor la solicitățile axiale

Diagrame la solicitările axiale

Definirea diagramei de eforturi

Evoluția solicitării mecanice *în lungul unei bare* se studiază analizând variația eforturilor secționale $N(x)$, singurul tip de efort interior din barele solicitate axial.

Atenție: Funcțiile eforturilor se definesc pe intervale (*regiuni*) de pe lungimea barelor, în care expresiile lor nu se schimbă. Definirea (anterioară a) eforturilor secționale a arătat că modificarea expresiilor acestora este determinată de schimbarea repartiției încărcărilor, *de o parte sau alta a secțiunii de calcul*, încât granițele dintre regiuni vor fi punctele unde se aplică încărcări concentrate, respectiv punctele de început și de sfârșit ale sarcinilor distribuite.

Graficul funcției $N(x)$ se numește **diagramă de efort axial**; principalul ei scop este indicarea valorilor efortului în secțiunile barei; etapele de lucru din aplicația următoare se vor regăsi la trasarea celorlalte tipuri de diagrame de eforturi.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicații

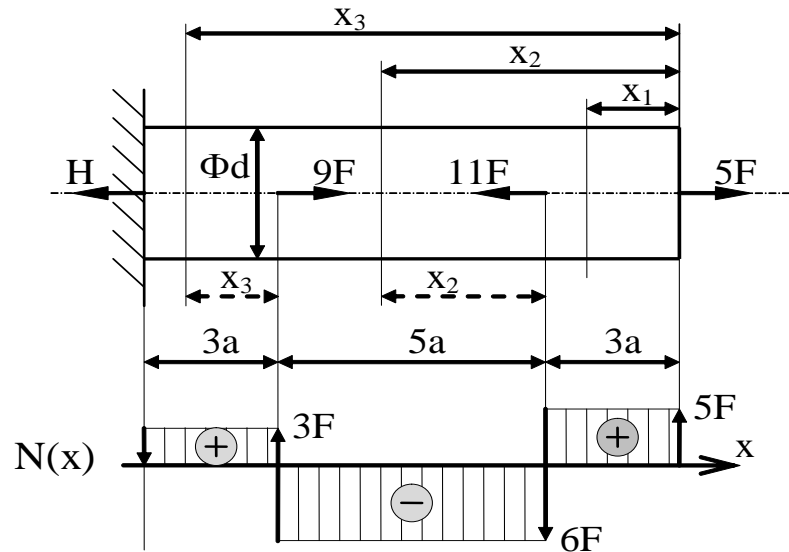
1. Să se traseze diagrama de eforturi pentru bara din figura alăturată.

Construirea diagramelor începe cu analiza solicitărilor barei, după regulile prezentate anterior.

Bara de față, de lungime $L=11a$, încastrată în stânga și liberă în rest (bară *în consolă*), este încărcată numai cu forțe concentrate de direcție axială.

Singurul tip de efort este *axial*, în reazem apare o *singură reacțiune* nenulă – forța H și o *singură ecuație de echilibru* e semnificativă (problema este deci static determinată) – cu referire la proiecțiile forțelor pe axa longitudinală a barei:

$$H = 5F - 11F + 9F \Leftrightarrow H = 3F$$



Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 1

Studiul efortului axial se face pe *trei regiuni* ale barei, delimitate de punctele în care se aplică forțele concentrate exterioare; secțiunile de calcul se marchează prin *distanța* lor x_i față de un reper, convenabil ales, din planul desenului.

Pe schița de mai sus sunt indicate două variante posibile (cele mai utilizate) ale acestei marcări a distanțelor de secționare:

- cu *aceeași origine* a coordonatei x (de exemplu plasată într-un capăt al barei) pentru toate regiunile – cotarea din partea de sus a figurii;
- cu *origine proprie* fiecărei regiuni (preferată a se afla la capătul regiunii anterioare celei de calcul) – cotarea din partea de jos, cu linii punctate.

Spre deosebire de calculul matematic, în rezistența materialelor sensul de parcurgere a barei (sensul axei x de pe diferite regiuni) nu are importanță, întrucât semnificația fenomenelor analizate nu se schimbă dacă sensul de parcurs este către stânga. Axa marcată pe diagramele de eforturi este așadar simbolică, amintind că se studiază variația solicitărilor pe lungimea barei.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 1

Pe de altă parte, trebuie remarcat că modul cum se alege originea lui x pe o anumită regiune se reflectă în *lungimea* acelei regiuni; astfel, a doua zonă de pe bara propusă este dată de intervalul $[3a; 8a]$, pentru originea lui x_2 așezată în capătul din dreapta al barei, dar va fi reprezentată ca un interval $[0; 5a]$ – dacă originea se plasează în capătul din stânga al primei regiuni (varianta de cotare din partea de jos).

La stabilirea expresiilor (foarte simple) ale efortului axial de pe regiunile barei studiate, se ține seama de definiția discutată a lui $N(x)$, dar și de convenția de semne adoptată (*sunt pozitive forțele care supun la **tracțiune** secțiunea de calcul*).

Se obțin următoarele rezultate (dacă regiunile se scriu cu originea lui x în capătul barei):

Pentru $x_1 \in (0; 3a)$

- dacă se urmăresc forțele situate în partea dreaptă față de secțiune $N(x_1) = 5F = ct.$
- dacă se sumează forțele din stânga $N(x_1) = H - 9F + 11F = 5F = ct.$

Conform definiției eforturilor, cele două variante de calcul duc la același rezultat, dar în aplicații se va alege, evident, varianta pentru care calculele sunt mai simple.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 1

Pentru $x_2 \in (3a; 8a)$ $N(x_2) = 5F - 11F = -6F = \text{ct.}$

Pentru $x_3 \in (8a; 11a)$ $N(x_3) = 5F - 11F + 9F = 3F = \text{ct.}$

Efortul axial este deci *constant*, pe fiecare interval de definiție, iar diagrama de eforturi se prezintă ca în figura de pe prima pagină; se remarcă cele patru puncte de *discontinuitate* (“**salturi**”) de la granițele regiunilor. Posibilitatea apariției acestor discontinuități impune prezentarea intervalelor de definiție ca deschise (prin paranteze rotunde).

Concluzii asupra trasării diagramei de eforturi axiale:

1. Dacă asupra barei *nu acționează încărcări distribuite*, atunci efortul este *constant* pe lungimea fiecărei regiuni.
2. În punctele unde se aplică forțe *concentrate* apar *salturi* în diagramă, care coincid ca mărime și sens cu forțele respective; de exemplu, la granița dintre primele două regiuni apare un salt, de la $+5F$ la $-6F$, având deci mărimea de $11F$ și sensul negativ, așa cum este (după convenția făcută) forța concentrată din acel punct al barei.

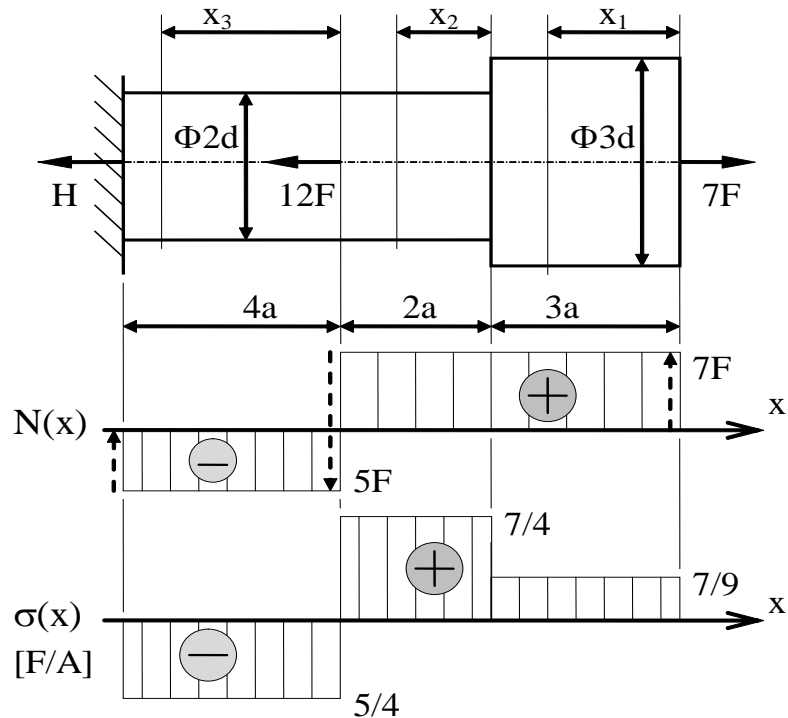
Diagrame la solicitările axiale

Aplicații

2. Se consideră o bară în consolă, cu două tronsoane de dimensiuni diferite și solicitată prin două forțe concentrate, de direcție axială.

Așa cum s-a explicat anterior, toate calculele privitoare la diagrame se fac *literal*, urmând ca date numerice să fie folosite la exemplificarea calculului de rezistență.

Se recomandă a se urmări treptat explicațiile privind trasarea diagramelor, neglijând faptul că diagramele sunt deja prezentate, în partea de jos a figurii.



Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 2

Rezolvare

Punctele de aplicare a forțelor delimitează pe bară două zone, dar saltul de secțiune de la interfață duce la apariția unei a treia. Se măsoară variabila x de la capătul din dreapta al regiunilor, ca în figură.

Bara este solicitată doar *axial*, încât în încastrare există *un singur tip de reacțiune*, forța H , iar *singura ecuație de echilibru* semnificativă se scrie astfel:

$$H + 12F - 7F = 0 \quad \text{de unde rezultă} \quad H = -5F.$$

Semnul minus al rezultatului obținut arată că reacțiunea calculată are, în realitate, semn contrar forței $12F$.

Se stabilesc parametrii solicitării, pe regiuni, așa cum se arată în continuare.

Pentru $x_1 \in (0; 3a)$ efortul axial este $N(x_1) = 7F = ct.$

Aria secțiunii transversale se scrie
$$A(x_1) = \frac{\pi(3d)^2}{4} = 9 \frac{\pi d^2}{4}$$

Se preferă a se simplifica scrierea, prin notația $A = \frac{\pi d^2}{4}$, de unde rezultă $A(x_1) = 9A.$

Diagrame la sollicitările axiale

Aplicația 2

Tensiunile de pe prima regiune vor avea mărimea:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A(x_1)} = \frac{7}{9} \frac{F}{A}$$

Se observă cum valorile celor trei mărimi fizice calculate mai sus au fost exprimate în funcție de anumiți *parametri literali*, ceea ce va permite (inclusiv) compararea valorilor acestora de pe regiuni diferite ale barei.

Pentru a doua regiune, cu $x_2 \in (0; 2a)$ se obține că:

$$N(x_2) = 7F = ct. \quad A(x_2) = \frac{\pi(2d)^2}{4} = 4 \frac{\pi d^2}{4} = 4A \quad \sigma(x_2) = \frac{7}{4} \frac{F}{A}$$

În fine, pentru $x_3 \in (0; 4a)$ valorile sunt:

$$N(x_3) = 7F - 12F = -5F = ct. \quad A(x_3) = 4A \quad \sigma(x_3) = -\frac{5}{4} \frac{F}{A}$$

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 2

Particularități ale diagramei de eforturi axiale $N(x)$

- Pe bară se diferențiază două zone – una în care solicitarea este de *întindere*, sub forța $7F$, pe când în cealaltă este de *comprimare*, cu forța interioară $5F$.
- Graficul prezintă trei puncte de *discontinuitate* (numite **salturi**, așa cum a fost explicat anterior – indicate aici prin săgeți punctate); după cum este normal, acestea coincid ca *punct de apariție, mărime și sens* cu forțele concentrate exterioare care acționează pe bara analizată.
- În conformitate cu aceste reguli, *saltul care apare în dreptul reazemului* încadrat confirmă valoarea **reacțiunii** H , precum și sensul ei, același cu al forței $7F$ din capătul liber al barei.

Se observă că în astfel de probleme reacțiunea se poate stabili direct, din diagrama de efort, fără a mai scrie ecuația de echilibru, deci făcând rezolvarea mai rapidă; mai trebuie spus că simpla cunoaștere a efortului din secțiunile transversale ale barei nu e suficientă pentru a se evidenția solicitarea maximă din piesă; aceasta depinde și de aria secțiunilor pe care se aplică efortul, adică de valoarea *tensiunilor* din bară.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 2

Diagrama tensiunilor normale $\sigma(x)$

- Acest grafic conține trei zone, care coincid cu regiunile barei; punctele de discontinuitate sunt determinate de modificarea valorilor $N(x)$ și $A(x)$, deci salturile nu au o semnificație fizică!
- Felul cum variază intensitatea solicitării se poate observa perfect pe această diagramă; secțiunea *periculoasă* (unde bara se poate distruge, dacă parametrii ei sau ai încărcărilor sunt aleși incorect) poate fi oricare dintre secțiunile transversale de pe regiunea de mijloc a barei, de lungime $2a$.
- Prin urmare, **condiția de rezistență** a barei se va scrie astfel:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \sigma(x_2) = \frac{7}{4} \frac{F}{A} = \frac{7}{4} \frac{F}{\pi d^2} = \frac{7F}{4\pi d^2} \leq \sigma_a$$

Este interesant de subliniat că în această relație nu apare parametrul a , deci calculele de rezistență nu sunt influențate de lungimea barei.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 2

Pe de altă parte, în legătură cu zona de pe bară solicitată la compresiune, se pot întâlni două situații de calcul:

- a) Materialul barei ar putea fi caracterizat prin *valori diferite ale rezistenței admisibile* la întindere ($\sigma_{a \text{ tract}}$) și la compresiune ($\sigma_{a \text{ comp}}$), așa cum este cazul pentru cele mai multe materiale cu comportare mecanică de tip **fragil**; în astfel de situații se va scrie încă o dată condiția de rezistență, pentru compararea valorii absolute a *tensiunii maxime de compresiune* din bară (în acest caz, cea de pe regiunea x_1) cu rezistența admisibilă corespunzătoare ($\sigma_{a \text{ comp}}$).
- b) Materialul ar putea avea *aceeași rezistență admisibilă* la tracțiune și la compresiune, situație în care este suficientă scrierea unei singure variante pentru condiția de mai sus, pe baza *valorii maxime, în modul, a tensiunii efective* din piesă.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 2

Exemplificarea calculelor de rezistență se va face folosind trei serii de date numerice.

A. Verificarea barei

Presupunem că se dau $F=2 \cdot 10^4 \text{N}$, $d=15 \text{mm}$, $\sigma_a=150 \text{MPa}$ Pentru a dovedi corectitudinea realizării barei, se introduc aceste valori în inecuația de mai sus:

$$\sigma_{\text{ef max}}(\mathbf{x}) = \frac{7F}{\pi d^2} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot 225 \text{ mm}^2} = 198,06 \text{ MPa}$$

S-a obținut că solicitarea maximă din bară depășește (cu peste 30%) rezistența admisibilă a materialului, situație ce nu poate fi acceptată, astfel încât se pot lua două feluri de măsuri de corectare:

⇒ Mărirea ariei transversale – de exemplu crescând diametrul la $d=20 \text{mm}$; repetând apoi calculul se obține $\sigma_{\text{ef max}}(\mathbf{x}) = 111,38 \text{MPa}$ valoare care este corectă.

⇒ Alegerea unui material cu rezistența la tracțiune mai mare decât 198MPa , ceea ce va face ca sensul inegalității din condiția de rezistență să devină cel corect.

Diagrame la solicitările axiale

B. Determinarea forței capabile a barei

Se dau: $d=20\text{mm}$, $\sigma_a=150\text{MPa}$ Pe baza condiției de rezistență se scrie o relație de forma:

$$F_{\text{cap}} = \frac{1}{7} A_{\text{ef}}(x_2) \cdot \sigma_a = \frac{1}{7} \frac{\pi (2d)^2}{4} \cdot \sigma_a = \frac{\pi}{7} \cdot 400 \text{ mm}^2 \cdot 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 26928 \text{ N}$$

Rezultă că valoarea parametrului **F** nu poate depăși, în acest caz, $2,7 \cdot 10^4 \text{N}$.

C. Dimensionarea barei

Se cere să se determine valoarea necesară a parametrului **d**, dacă $F=2 \cdot 10^4 \text{N}$ și $\sigma_a=150\text{MPa}$.

(Aceasta este situația cea mai obișnuită în calculul de proiectare inginerescă!)

Din inecuația de dimensionare rezultă că:

$$d_{\text{min}} = \sqrt{\frac{7}{\pi} \frac{F}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{7}{\pi} \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N}}{150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 17,24 \text{ mm}$$

Pe baza acestui rezultat se *adoaptă* o valoare convenabilă a lui **d**, cum ar fi **d_{ad}=18mm**, care se va utiliza în toate calculele ulterioare din problema abordată.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicații

3. Se reia în atenție bara din problema anterioară, pentru a se analiza cum se modifică *poziția pe orizontală* a secțiunilor transversale ale barei respective, sub acțiunea solicitărilor discutate mai sus.

Bara fiind solicitată *doar axial*, secțiunile ei se vor deplasa doar *la stânga* sau *la dreapta*, față de pozițiile pe care le ocupau în bara lipsită de încărcări. Din studiul barei rezultă, folosind noțiunile precizate la curs, că:

⇒deformația *absolută* a fiecăruia dintre cele trei tronsoane se calculează folosind relația deplasărilor, pentru barele întinse sau comprimate;

⇒*funcția deplasărilor* $\delta(x)$ trebuie să aibă gradul *cu o unitate mai mare* decât al funcției $N(x)$, deci va avea o expresie *de gradul întâi* (liniară);

⇒întrucât nu interesează expresia analitică a acestei funcții, ci *valorile* (deci *graficul*) ei, este suficient să se calculeze aceste valori în *secțiunile de capăt* ale regiunilor barei, după care *graficul cerut* se va obține prin unirea cu *segmente de dreaptă* a punctelor reprezentative astfel obținute.

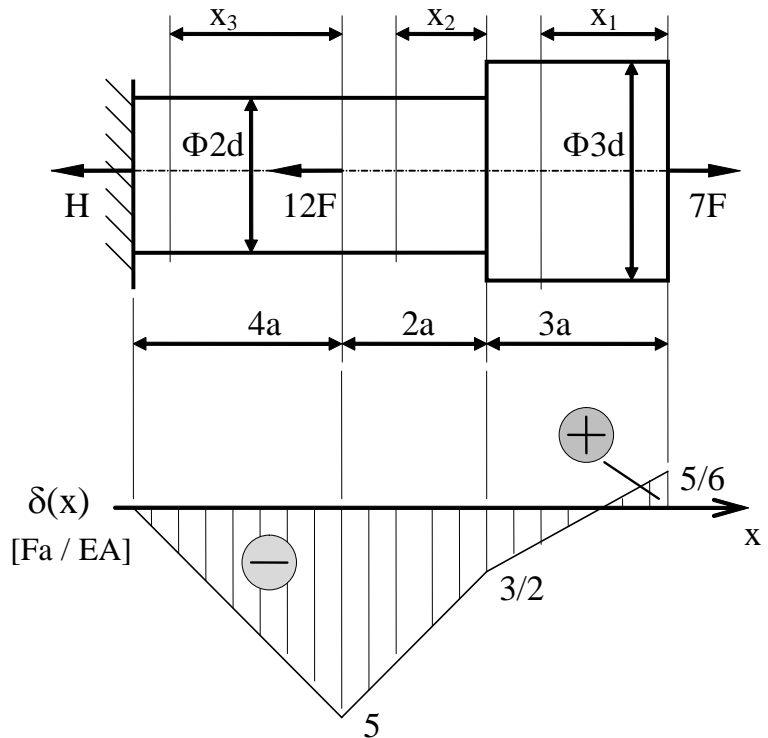
Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 3

Este clar că unul dintre punctele de pe grafic se cunoaște de la început: capătul barei care este *prins în reazem* nu se poate deplasa, astfel încât graficul va începe de la valoarea zero.

Studiul se va continua, pe baza regulii de calcul de mai sus, prin parcurgerea imaginărilor a barei, din reazem către capătul liber.

Păstrând convenția de a exprima toate mărimile în funcție de anumiți parametri literali, deplasările *capetelor dinspre dreapta* ale celor trei tronsoane de bară, calculate din relația deplasărilor liniare, vor fi următoarele:



Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 3

$$\delta(x_3=0) = \frac{N(x_3) \cdot 4a}{E \cdot A(x_3)} = \frac{(-5F) \cdot 4a}{E \cdot 4A} = -5 \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

$$\delta(x_2=0) = \delta(x_3=0) + \frac{N(x_2) \cdot 2a}{E \cdot A(x_2)} = -5 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} + \frac{7F \cdot 2a}{E \cdot 4A} = -\frac{3}{2} \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

$$\delta(x_1=0) = \delta(x_2=0) + \frac{N(x_1) \cdot 3a}{E \cdot A(x_1)} = -\frac{3}{2} \frac{F \cdot a}{E \cdot A} + \frac{7F \cdot 3a}{E \cdot 9A} = \frac{5}{6} \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

Cu aceste valori s-a trasat *diagrama deplasărilor* $\delta(x)$ din pagina anterioară; se observă că semnele acestor mărimi sunt date de cele ale eforturilor axiale (deplasările pozitive se produc în sensul forțelor considerate pozitive, deci corespund unor efecte de întindere), încât secțiunile în care valorile sunt *pozitive* se deplasează *către dreapta* (adică se *îndepărtează* de reazemul încastrat al barei), iar celelalte către stânga.

Deplasarea *maximă* se produce în secțiunea de la *capătul din dreapta* al tronsonului de lângă reazem și are semn negativ (este o deplasare către reazem).

În continuare se dă un *exemplu numeric*: se presupune, preluând datele de la ultima aplicație anterioară, că se cunosc $F=2 \cdot 10^4 \text{N}$; $E=2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$; $a=0,1\text{m}$ și $d=18\text{mm}$.

Diagrame la solicitările axiale

Aplicația 3

Dacă se calculează valoarea (absolută) maximă a deplasării secțiunilor transversale, înlocuirea datelor în valoarea extremă din diagramă conduce la:

$$\delta_{\max} = 5 \frac{F \cdot a}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = 20 \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 324 \text{ mm}^2} = 0,187 \text{ mm}$$

Folosind *criteriul de rigiditate*, se propune a se stabili *forța maximă* ce poate fi aplicată barei, astfel ca deplasarea maximă a oricărei secțiuni transversale să nu depășească o valoare considerată *admisibilă* $\delta_a = 0,1 \text{ mm}$. Punând în termeni matematici această condiție și folosind expresia literală de mai sus a deplasării maxime, se obține valoarea limită admisibilă a parametrului F, sub forma:

$$F_{\text{cap}} = \frac{1}{20} \frac{E \cdot \pi d^2 \cdot \delta_a}{a} = \frac{1}{20} \frac{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 324 \text{ mm}^2 \cdot 0,1 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 10687,69 \text{ N}$$

Prin urmare, se poate admite că, pentru ca bara să respecte limita de deformabilitate impusă, valoarea parametrului F nu trebuie să depășească nivelul maxim de 10^4 N .

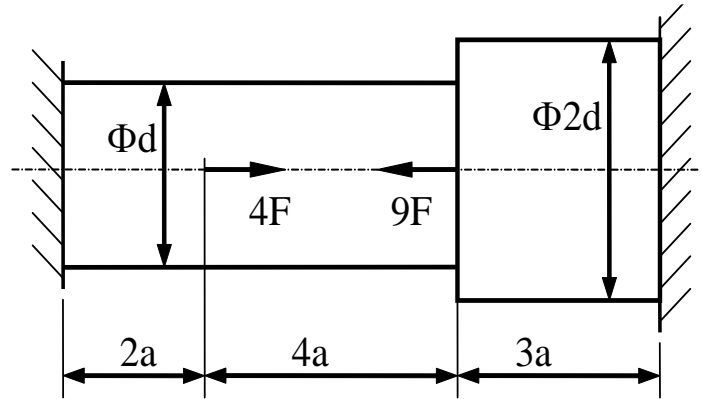
1.3

Rezolvarea problemelor static nedeterminate la sollicitările axiale

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Pentru bara cu capetele fixate din figura alăturată se cere:

- Să se traseze diagramele de eforturi axiale $N(\mathbf{x})$, de tensiuni normale $\sigma(\mathbf{x})$ și de deplasări pe orizontală ale secțiunilor transversale $\delta(\mathbf{x})$.
- Să se dimensioneze bara, dacă $F=10^4\text{N}$, $a=0,1\text{m}$ și $\sigma_a=150\text{MPa}$.
- Să se stabilească valoarea deplasării maxime a unei secțiuni transversale $\delta_{\max}(\mathbf{x})$ (pentru un material cu modulul de elasticitate $E=21 \cdot 10^4\text{MPa}$), precizând și sensul în care se produce acea deplasare.



Rezolvare

Se notează cu H_1 și H_2 reacțiunile din reazeme, iar cu A și B – punctele unde se aplică forțele exterioare; singura ecuație de echilibru semnificativă se scrie:

$$H_1 - 4F + 9F - H_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 = H_1 + 5F$$

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

A. Rezolvarea nedeterminării:

Problema este de tipul simplu static nedeterminată ($n = N - E = 1$), iar a doua ecuație se poate obține prin mai multe metode.

A1. Aplicarea metodei geometrice

Se folosește condiția fizică de fixare a capetelor barei – alungirea ei totală trebuie să fie nulă.

Valorile parametrilor $N(x)$ și $A(x)$, pe cele trei regiuni ale barei, în exprimare literală, vor fi următoarele:

Pentru $x_1 \in (0; 2a)$ $N(x_1) = H_1$

$A(x_1) = \pi d^2 / 4$ și făcând notația

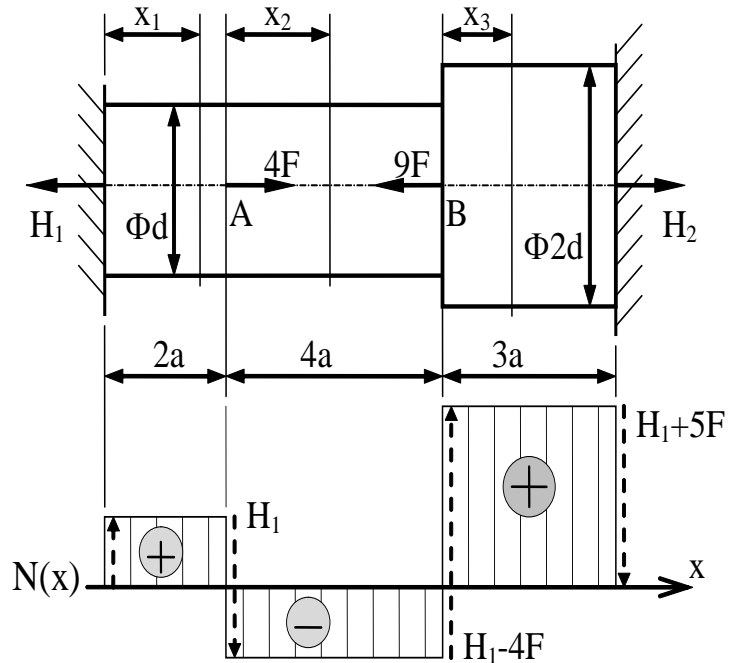
$A = \pi d^2 / 4$, va rezulta că $A(x_1) = A$

Pentru $x_2 \in (0; 4a)$ $N(x_2) = H_1 - 4F$

$A(x_2) = A$

Pentru $x_3 \in (0; 3a)$ $N(x_3) = H_1 + 5F$

$A(x_3) = 4A$



Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Aceste date permit ca diagrama de eforturi axiale să poată fi *schitată*, în dependență de forța necunoscută H_1 , ca în figura din pagina anterioară.

Pe de altă parte, ecuația prin care se calculează deformația totală (de valoare nulă) a barei cuprinde trei termeni, sub forma următoarelor fracții:

$$\frac{H_1 \cdot 2a}{E \cdot A} + \frac{(H_1 - 4F) \cdot 4a}{E \cdot A} + \frac{(H_1 + 5F) \cdot 3a}{E \cdot 4A} = 0$$

Se observă că această expresie poate fi adusă la o formă mai simplă, înmulțind fiecare termen cu fracția (strict pozitivă) $\frac{4A \cdot E}{a}$, după care se obține o ecuație având ca singură necunoscută reacțiunea H_1 (întrucât toate eforturile axiale s-au calculat *din partea stângă* față de secțiunile transversale de lucru!):

$$8H_1 + 16H_1 - 64F + 3H_1 + 15F = 0$$

Rezolvând această ecuație se ajunge la valoarea $H_1 = \frac{49}{27}F$, apoi din ecuația de echilibru scrisă inițial se obține că $H_2 = \frac{184}{27}F$ iar nedeterminarea statică a fost îndepărtată.

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

A2. Aplicarea teoremei lui Castigliano

Deoarece secțiunea fixată în reazemul din stânga nu se poate deplasa axial rezultă, în conformitate cu prima teoremă a lui Castigliano, că derivata parțială a energiei potențiale de deformare elastică, în raport cu reacțiunea H_1 trebuie să fie zero, încât se ajunge la ecuația:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial H_1} = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} \frac{N(x_i)}{E \cdot A(x_i)} \frac{\partial N(x_i)}{\partial H_1} dx \right]$$

Din expresiile eforturilor axiale $N(x_i)$, stabilite mai sus, rezultă că derivatele lor în raport cu H_1 au valoarea 1, pentru toate regiunile barei; înlocuind mărimile de sub integrală cu valorile lor din această problemă, ecuația devine:

$$0 = \int_0^{2a} \frac{H_1}{E \cdot A} \cdot 1 dx + \int_0^{4a} \frac{(H_1 - 4F)}{E \cdot A} \cdot 1 dx + \int_0^{3a} \frac{(H_1 + 5F)}{E \cdot 4A} \cdot 1 dx \Rightarrow \frac{H_1 \cdot 2a}{E \cdot A} + \frac{(H_1 - 4F) \cdot 4a}{E \cdot A} + \frac{(H_1 + 5F) \cdot 3a}{E \cdot 4A} = 0$$

Ultima formă este identică ecuației care s-a obținut la metoda A1, astfel încât la fel ca mai sus vor fi și valorile reacțiunilor.

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

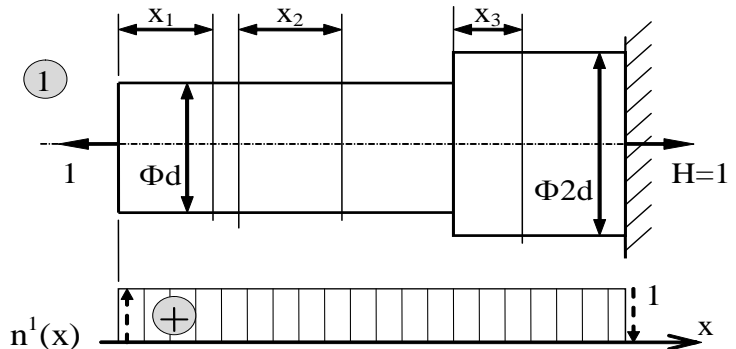
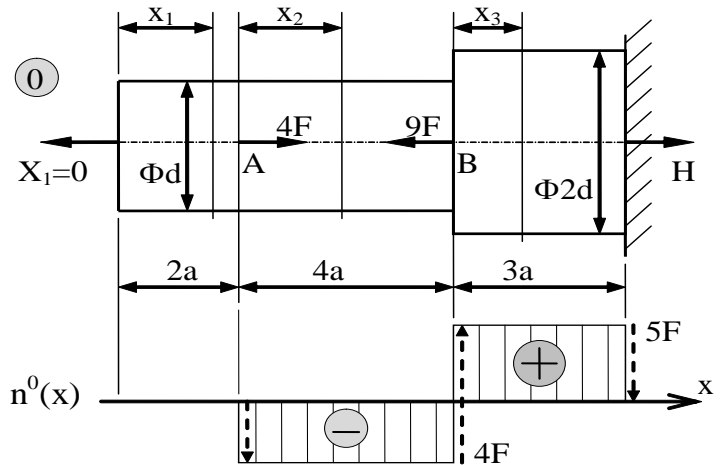
A3. Aplicarea metodei eforturilor

Se face aplicarea la cazul de față a algoritmului descris anterior.

Se alege a se transforma sistemul inițial într-unul *static determinat*, făcând îndepărtarea imaginară a reazemului din stânga, care va fi înlocuit (tot imaginar) prin forța axială *necunoscută* X_1 .

Prin urmare, cele două stări de solicitare (*fictive*) care se vor studia vor fi:

- starea “zero” – cu forțele exterioare prezente și $X_1=0$;
- starea “unu” – cu forțele exterioare îndepărtate și $X_1=1$.



Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Conform regulilor generale ale acestui algoritm de rezolvare, împărțirea barei în regiuni trebuie făcută **identic** în toate stările de solicitare (fictive) studiate, astfel încât eforturile axiale se vor scrie astfel:

$$\text{Pentru } x_1 \in (0; 2a) \quad n^0(x_1)=0 \quad n^1(x_1)=1$$

$$\text{Pentru } x_2 \in (0; 4a) \quad n^0(x_2)=-4F \quad n^1(x_2)=1$$

$$\text{Pentru } x_3 \in (0; 3a) \quad n^0(x_3)=5F \quad n^1(x_3)=1$$

Aceste rezultate se regăsesc inclusiv pe diagramele de eforturi ale celor două stări imaginare (fictive) de solicitare, care au fost reprezentate în pagina anterioară.

Pe de altă parte, întrucât problema este *simplu* static nedeterminată, aplicarea metodei eforturilor va conduce la obținerea unei singure ecuații suplimentare, având ca singură necunoscută forța axială X_1 .

Întrucât $i=j=1$, această ecuație a metodei eforturilor va avea forma:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Cei doi coeficienți se vor calcula folosind relația lor generală, astfel:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum_{k=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{\mathbf{n}^1(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{n}^1(\mathbf{x}_k)}{E \cdot A(\mathbf{x}_k)} dx = \int_0^{2a} \frac{1 \cdot 1}{E \cdot A} dx + \int_0^{4a} \frac{1 \cdot 1}{E \cdot A} dx + \int_0^{3a} \frac{1 \cdot 1}{E \cdot 4A} dx = \\ &= \frac{a}{E \cdot A} \left(2 + 4 + \frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4} \frac{a}{E \cdot A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \sum_{k=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{\mathbf{n}^1(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{n}^0(\mathbf{x}_k)}{E \cdot A(\mathbf{x}_k)} dx = \int_0^{2a} \frac{1 \cdot 0}{E \cdot A} dx + \int_0^{4a} \frac{1 \cdot (-4F)}{E \cdot A} dx + \int_0^{3a} \frac{1 \cdot 5F}{E \cdot 4A} dx = \\ &= \frac{F \cdot a}{E \cdot A} \left(0 - 16 + \frac{15}{4} \right) = -\frac{49}{4} \frac{F \cdot a}{E \cdot A}\end{aligned}$$

Înlocuind coeficienții și rezolvând ecuația scrisă mai sus, se calculează forța necunoscută X_1 , adică reacțiunea H_1 din problemă: $X_1 = H_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{49}{27} F$

Această soluție a problemei coincide cu valoarea obținută prin metoda geometrică, ceea ce confirmă rezolvarea corectă a nedeterminării.

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

B. Răspunsul la cerințele problemei

a) Trasarea diagramelor

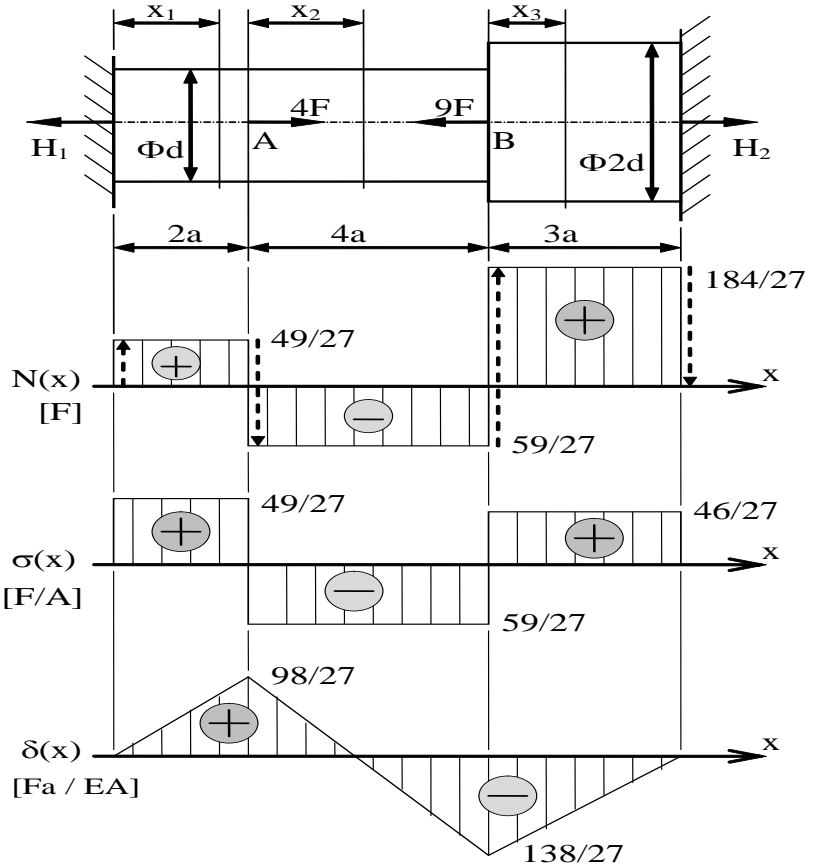
Înlocuind valoarea lui H_1 în expresiile eforturilor stabilite mai sus, rezultă:

$$N(x_1) = \frac{49}{27}F \quad N(x_2) = -\frac{59}{27}F \quad N(x_3) = \frac{184}{27}F$$

Având în vedere ariile secțiunilor transversale, tensiunile pe cele trei regiuni sunt:

$$\sigma(x_1) = \frac{49}{27} \frac{F}{A} \quad \sigma(x_2) = -\frac{59}{27} \frac{F}{A} \quad \sigma(x_3) = \frac{46}{27} \frac{F}{A}$$

Diagramele de eforturi și de tensiuni sunt prezentate în figura alăturată.



Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Pentru a trasa diagrama deplasărilor pe orizontală ale secțiunilor barei $\delta(x)$, este suficient să fie calculate deplasările de la granițele dintre regiuni, astfel:

$$\delta(A) = \frac{N(x_1) \cdot 2a}{E \cdot A(x_1)} = \frac{49}{27} \frac{F \cdot 2a}{E \cdot A} = \frac{98}{27} \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

$$\delta(B) = \delta(A) + \frac{N(x_2) \cdot 4a}{E \cdot A(x_2)} = \frac{98}{27} \frac{F \cdot a}{E \cdot A} - \frac{59}{27} \frac{F \cdot 4a}{E \cdot A} = -\frac{138}{27} \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

Folosind aceste valori și cunoscând că secțiunile de la capetele barei nu se pot deplasa, rezultă diagrama $\delta(x)$, figurată și aceasta mai sus.

b) Dimensionarea barei

Așa cum arată diagrama tensiunilor normale din bară, solicitarea periculoasă se produce în toate secțiunile din tronsonul ei de mijloc, de unde rezultă următoarea finalizare a calculului barei:

$$\sigma_{\text{ef max}} = \sigma(x_2) \Rightarrow \left| -\frac{59}{27} \frac{F}{A} \right| = \frac{59}{27} \frac{F}{\pi d^2} = \frac{236}{27 \pi} \frac{F}{d^2} \leq \sigma_a$$

Problemă static nedeterminată – la solicitări axiale

Ultima inegalitate reprezintă condiția calculului de rezistență pentru bara studiată, din care dimensiunea minimă a secțiunilor transversale se calculează astfel:

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{236}{27 \pi} \frac{F}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{236}{27 \pi} \frac{10^4 \text{ N}}{150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 13,62 \text{ mm}$$

Se adoptă ca dimensiune finală o valoare potrivită a parametrului d al diametrelor barei, cum ar fi $d_{ad} = 15 \text{ mm}$.

c) Calculul deplasării maxime a unei secțiuni transversale

Valoarea adoptată a diametrului se folosește în calculele ulterioare din problemă, inclusiv la stabilirea deplasării maxime (produsă în secțiunea punctului B):

$$\delta_{\max} = \frac{138}{27} \frac{F \cdot a}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 138}{27} \frac{10^4 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 225 \text{ mm}^2} = 0,138 \text{ mm}$$

Observație: Această valoare de deplasare are pe diagramă semn negativ, deci se produce în sensul forței $4F$ (de compresiune), adică înspre reazemul din dreapta.

1.4

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicații: Secțiuni compuse din dreptunghiuri și având o axă de simetrie

Etape de lucru

- Se trasează mai întâi *axa de simetrie* globală a secțiunii, care se notează cu y – dacă este verticală, respectiv cu z – dacă este orizontală.
- Se alege a doua axă de coordonate *inițială* – notată cu z_1 , respectiv y_1 – perpendiculară pe axa de simetrie, dusă la extremitatea de jos, respectiv din stânga a secțiunii.
- Se *descompune* secțiunea în dreptunghiuri, urmărind ca acestea să aibă, pe cât posibil, centrele de greutate (având coordonatele notate cu z_{G_i} și y_{G_i}) pe axa globală de simetrie.
- Se calculează *poziția pe axa globală de simetrie* a centrului de greutate G al întregii secțiuni, folosind una dintre relațiile cunoscute:

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{G_i} A_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{G_i} A_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad [\text{mm}]$$

- Se trasează *a doua axă principală centrală* a secțiunii – perpendiculară pe axa de simetrie în G.
- Momentul de inerție global *față de axa de simetrie* a secțiunii se calculează de obicei ușor (dacă descompunerea în dreptunghiuri s-a făcut eficient), prin sumarea algebrică a momentelor dreptunghiurilor elementare.
- Momentul global *față de axa a doua* se calculează folosind inclusiv una dintre relațiile lui Steiner:

$$I_z = I_{z_1} + A \cdot y_G^2 \quad I_y = I_{y_1} + A \cdot z_G^2$$

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

- În fine, *modulii de rezistență* globali se calculează conform relațiilor de definiție cunoscute:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad \text{respectiv} \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad [\text{mm}^3]$$

Observație

La numitorul fracțiilor de mai sus apar valorile maxime posibile ale coordonatelor z și y ale punctelor de pe secțiunea considerată, adică distanța cea mai mare a unui punct al secțiunii în raport cu fiecare dintre axele globale de inerție ale secțiunii.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

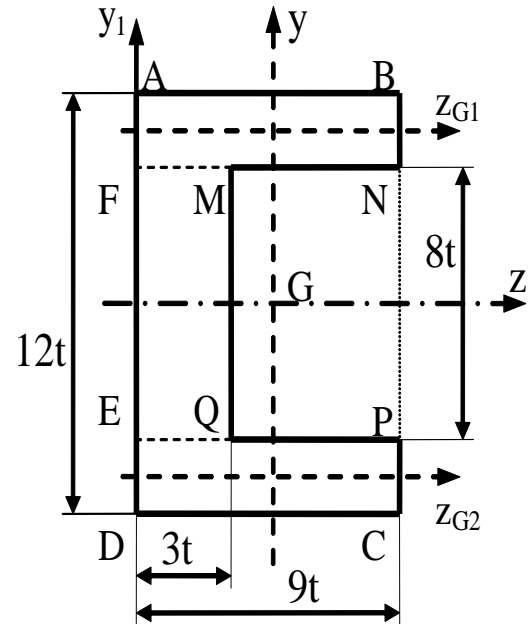
Aplicația 1

Se consideră secțiunea (de forma literei C) delimitată de punctele ABNMQPCD, formată prin decuparea dreptunghiului MNPQ din dreptunghiul ABCD.

Să se calculeze momentele de inerție principale centrale și modulii de rezistență pentru această secțiune compusă.

Rezolvare

Se observă că secțiunea are axă de simetrie orizontală, care deci va fi și axa ei principală centrală z ; rezultă că axa y va fi perpendiculară pe z în centrul G al secțiunii; pentru a stabili poziția pe axa z a lui G , se alege o axă inițială y_1 , de exemplu suprapusă peste latura verticală AD .



Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicația 1

Folosind relația momentelor statice se găsește coordonata căutată, ținând seama că centrele de greutate ale dreptunghiurilor elementare se află la distanțele $(9/2)t$ și $[3t + (6/2)t]$ de axa y_1 .

Rezultă:

$$z_G = \frac{\sum z_{G_i} A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{9}{2}t \cdot 9t \cdot 12t - \left(3t + \frac{6}{2}t\right) \cdot 6t \cdot 8t}{9t \cdot 12t - 6t \cdot 8t} = \frac{18t^3 (27 - 16)}{12t^2 (9 - 4)} = \frac{33}{10}t$$

Folosind acest rezultat, axa principală centrală y se trasează ca în figura de mai sus, iar pentru a calcula momentul global I_y se descompune secțiunea în cele două dreptunghiuri precizate, ABCD și MNPQ și se observă că nici unul nu are centrul de greutate pe axa globală y .

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicația 1

Prin urmare, pentru a se calcula momentul global de inerție față de această a doua axă principală centrală a secțiunii considerate se aplică una dintre relațiile lui Steiner, astfel:

$$\begin{aligned} I_y &= I_y(\text{ABCD}) - I_y(\text{MNPQ}) = \left[\frac{\text{BC} \cdot \text{AB}^3}{12} + \left(\frac{9}{2}t - z_G \right)^2 \cdot A_{\text{ABCD}} \right] - \\ &- \left[\frac{\text{NP} \cdot \text{MN}^3}{12} + (6t - z_G)^2 \cdot A_{\text{MNPQ}} \right] = \left[\frac{12t \cdot (9t)^3}{12} + \left(\frac{9}{2}t - \frac{33}{10}t \right)^2 \cdot 9t \cdot 12t \right] - \\ &- \left[\frac{8t \cdot (6t)^3}{12} + \left(6t - \frac{33}{10}t \right)^2 \cdot 6t \cdot 8t \right] = t^4 \left[9 \left(81 + \frac{144}{100} \cdot 12 \right) - 48 \left(3 + \frac{729}{100} \right) \right] = \\ &= t^4 \frac{243 \cdot 91 - 36 \cdot 343}{25} = \frac{9765}{25} t^4 = 390,6 t^4 \end{aligned}$$

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicația 1

Pe de altă parte, pentru calculul celui alt moment principal central al secțiunii, se poate proceda în două moduri, așa cum se arată în continuare.

a) Folosind descompunerea secțiunii în cele două dreptunghiuri de mai sus

În acest caz, dreptunghiurile elementare au centrul de greutate pe axa principală globală z , deci folosirea relațiilor Steiner nu este necesară:

$$\begin{aligned} I_z &= I_z(\text{ABCD}) - I_z(\text{MNPQ}) = \frac{AB \cdot BC^3}{12} - \frac{MN \cdot PN^3}{12} = \\ &= \frac{9t \cdot (12t)^3}{12} - \frac{6t \cdot (8t)^3}{12} = t^4 (9 \cdot 144 - 4 \cdot 64) = 1040t^4 \end{aligned}$$

b) Făcând descompunerea secțiunii în dreptunghiul vertical FMQE cu centrul pe axa z și dreptunghiurile orizontale ABNF și EPCD, cu centrele pe axele z_1 și z_2 , care sunt axele lor principale centrale, paralele cu z .

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicația 1

În această situație, momentul global al secțiunii în raport cu *axa ei de simetrie z* va fi calculat astfel:

$$\begin{aligned} I_z &= I_z(\text{FMQE}) + 2 \cdot I_z(\text{ABNF}) = \frac{\text{FM} \cdot \text{MQ}^3}{12} + 2 \left[\frac{\text{AB} \cdot \text{BN}^3}{12} \right] + \\ &+ 2 \left[(4t + t)^2 \text{AB} \cdot \text{BN} \right] = \frac{3t \cdot (8t)^3}{12} + 2 \left[\frac{9t \cdot (2t)^3}{12} + 25t^2 \cdot 9t \cdot 2t \right] = \\ &= t^4 \left[2 \cdot 64 + 2(6 + 450) \right] = t^4 (128 + 912) = 1040t^4 \end{aligned}$$

Atenție: S-a obținut același rezultat prin ambele metode, dar calculul al doilea a fost mai laborios! Este important ca descompunerea secțiunilor complexe să conducă la cele mai simple calcule (ceea ce se învață, prin exercițiu), micșorându-se probabilitatea apariției unor greșeli de calcul.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

Aplicația 1

Pentru a calcula modulii de rezistență ai secțiunii, se aplică definițiile lor.

Astfel, distanțele maxime ale punctelor secțiunii, în raport cu cele două axe principale centrale sunt următoarele:

$$y_{\max} = (12/2)t = 6t \qquad z_{\max} = 9t - z_G = 9t - (33/10)t = (57/10)t$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1040t^4}{6t} = 173,3t^3 \qquad \text{respectiv} \qquad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{9765}{25}t^4}{\frac{57}{10}t} = 68,53t^3$$

Prin urmare, grinda cu secțiunea propusă în această problemă rezistă cel mai bine la încovoiere dacă este rezemată astfel încât axa ei principală centrală z să se afle pe direcția momentului încovoietor (adică dacă îndoirea barei se produce în jurul acelei axe).

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane

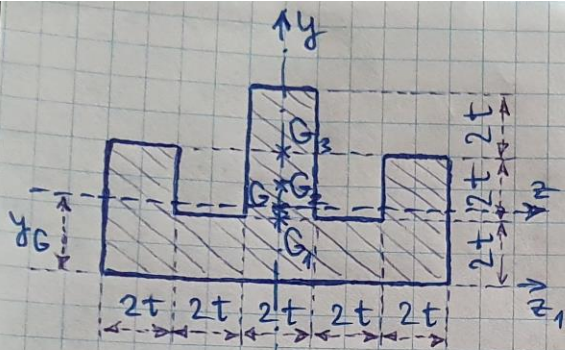
Aplicația 2

Se consideră secțiunea transversală desenată în pagina următoare. Urmând etapele de lucru precizate anterior, să se calculeze momentele de inerție principale centrale și modulii de rezistență, pentru această secțiune de formă complexă.

Rezolvare

Toate etapele care se parcurg pentru a răspunde acestor cerințe sunt cuprinse în imaginea de mai jos. Întrucât principiile aplicate și calculele care sunt de efectuat au fost descrise în întregime la prezentarea etapelor de lucru, s-a considerat că pentru această rezolvare nu sunt necesare explicații suplimentare.

Caracteristici geometrice și de inerție ale suprafețelor plane



Se descompune secțiunea în 3 dreptunghiuri (tratați cu centrul pe axa de simetrie):

$$(10t \times 4t) - (6t \times 2t) + (4t \times 2t)$$

$$y_{G_1} = 2t \quad y_{G_2} = 3t \quad y_{G_3} = 4t$$

$$y_G = \frac{2t \cdot (10t \cdot 4t) - 3t \cdot (6t \cdot 2t) + 4t \cdot (4t \cdot 2t)}{10t \cdot 4t - 6t \cdot 2t + 4t \cdot 2t} =$$

$$= \frac{4t^3(20 - 9 + 8)}{4t^2(10 - 3 + 2)} = \boxed{\frac{19}{9}t}$$

$$I_y = \frac{(10t)^3 \cdot 4t}{12} - \frac{(6t)^3 \cdot 2t}{12} + \frac{(2t)^3 \cdot 4t}{12} = \frac{2^3 \cdot 2t^4}{12} \left(\frac{5^3 \cdot 2}{250} - \frac{3^3}{27} + 2 \right) = \underline{300t^4}$$

$$I_z = \left[\frac{10t \cdot (4t)^3}{12} + (10t \cdot 4t) \left(\frac{19}{9}t - 2t \right)^2 \right] - \left[\frac{6t \cdot (2t)^3}{12} + (6t \cdot 2t) \left(\frac{19}{9}t - 3t \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{2t \cdot (4t)^3}{12} + (2t \cdot 4t) \left(\frac{19}{9}t - 4t \right)^2 \right] = t^4 \left[\frac{10 \cdot 16}{3} + 40 \cdot \frac{1}{81} - 4 - 12 \cdot \frac{64}{81} + \frac{2 \cdot 16}{3} + 8 \cdot \frac{289}{81} \right]$$

$$= t^4 \left[\frac{12 \cdot 16}{3} - 4 + \frac{40 - 12 \cdot 64 + 8 \cdot 289}{81} \right] = t^4 \left[60 + \frac{8 \cdot 198}{81} \right] = \frac{2070}{81} t^4 = \boxed{\frac{230}{9} t^4}$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{\frac{10t}{2}} = \frac{300t^4}{5t} = \underline{60t^3}; \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{230}{9}t^4}{6t - \frac{19}{9}t} = \frac{\frac{230}{9}t^4}{\frac{35}{9}t} = \underline{\frac{46}{7}t^3}$$

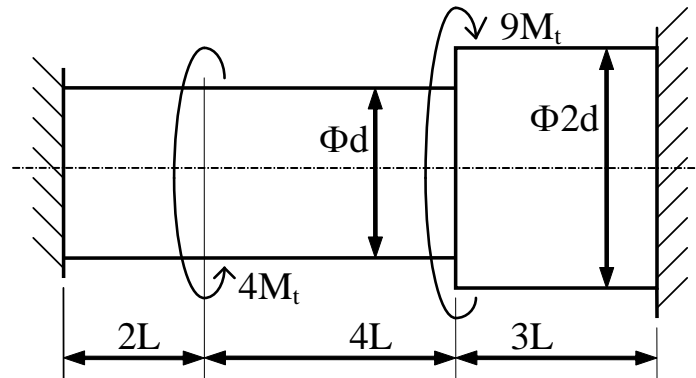
1.5

Rezolvarea problemelor static nedeterminate la răsucire

Problemă static nedeterminată – la răsucire

Pentru bara cu capetele fixate din figură se cer următoarele:

- Să se traseze diagramele de eforturi $M_t(x)$, de tensiuni maxime $\tau_{\max}(x)$ și de deplasări unghiulare $\Delta\varphi(x)$ ale secțiunilor transversale.
- Să se dimensioneze bara ($d=?$), pentru $M_t=10\text{kNm}$, $G=8\cdot 10^4\text{MPa}$, $L=0,1\text{m}$ și $\tau_a=125\text{MPa}$.
- Să se stabilească rotirea maximă a unei secțiuni transversale $\Delta\varphi_{\max}(x)$, precizând și sensul în care se produce acea deplasare.



Rezolvare

Se notează M_1 și M_2 reacțiunile de tip moment din reazeme; orientările lor se aleg la întâmplare, iar singura ecuație de echilibru semnificativă se va scrie:

$$M_1 - 4M_t + 9M_t - M_2 = 0 \Leftrightarrow M_2 = M_1 + 5M_t$$

Problemă static nedeterminată – la răsucire

A. Rezolvarea nedeterminării: Problema este simplu static nedeterminată ($n = N - E = 1$), iar a doua ecuație se va putea obține prin mai multe metode.

A1. Aplicarea metodei geometrice

Se folosește condiția fizică de fixare a capetelor barei – rotirea între capetele ei trebuie să fie nulă.

Valorile literale ale parametrilor $M_t(x_i)$ și $I_p(x_i)$ vor fi:

Pentru $x_1 \in (0; 2L)$ $M_t(x_1) = M_1$

$I_p(x_1) = \frac{\pi d^4}{32}$ făcând notația $I = \frac{\pi d^4}{32}$,

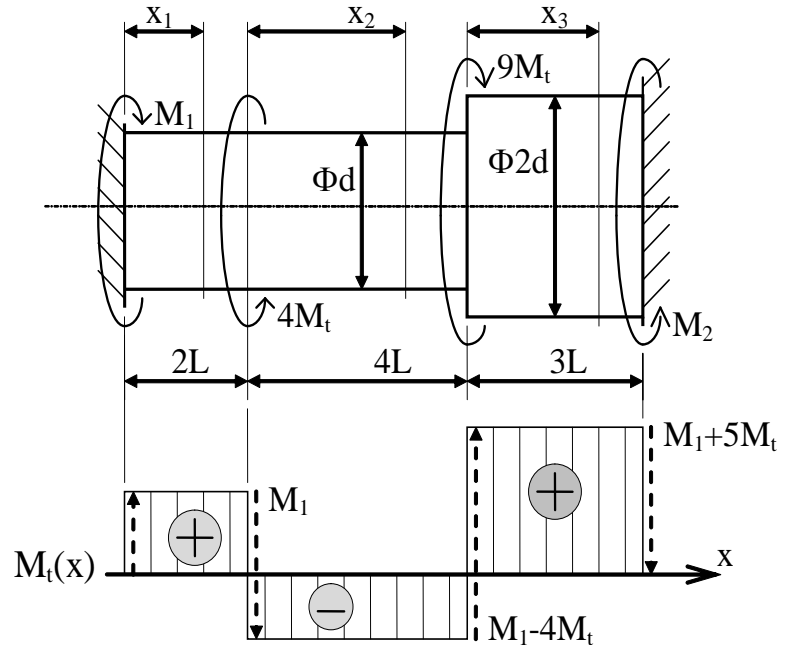
rezultă $I_p(x_1) = I$

Pentru $x_2 \in (0; 4L)$ $M_t(x_2) = M_1 - 4M_t$

$I_p(x_2) = I$

Pentru $x_3 \in (0; 3L)$ $M_t(x_3) = M_1 + 5M_t$

$I_p(x_3) = 16 I$



Problemă static nedeterminată – la răsucire

Notă: În expresiile eforturilor secționale s-au considerat **pozitive** momentele care acționează în același sens cu încărcările concentrate M_1 și $9M_t$.

Diagrama de momente de răsucire este schițată, în pagina anterioară, în exprimarea dependentă de reacțiunea necunoscută M_1 .

Ecuția deformației unghiulare totale are trei termeni, sub formă de fracții, astfel:

$$\frac{M_1 \cdot 2L}{G \cdot I} + \frac{(M_1 - 4M_t) \cdot 4L}{G \cdot I} + \frac{(M_1 + 5M_t) \cdot 3L}{G \cdot 16I} = 0$$

Înmulțind fiecare termen cu fracția (strict pozitivă) $\frac{16I \cdot G}{L}$, se obține o ecuație cu singura necunoscută M_1 (deoarece eforturile secționale s-au calculat din partea stângă a barei, în raport cu secțiunile considerate):

$$32M_1 + 64M_1 - 256M_t + 3M_1 + 15M_t = 0$$

Problemă static nedeterminată – la răsucire

Rezultă că $M_1 = \frac{241}{99} M_t$, iar ecuația de echilibru duce la $M_2 = \frac{736}{99} M_t$

Iar în acest fel nedeterminarea problemei a fost îndepărtată.

Atenție: Este preferabil să se lucreze, în etapele următoare ale rezolvării, cu aceste valori numerice, *fracționare*, ale reacțiunilor calculate; transformarea lor în numere zecimale implică, în principiu, rotunjiri, apariția în calcule a unor valori aproximative și creșterea impreciziei rezultatului final.

A2. Aplicarea teoremei lui Castigliano

Deoarece secțiunea care este fixată în reazemul din stânga nu se poate roti rezultă, după a doua teoremă a lui Castigliano, că derivata parțială a energiei de deformare față de reacțiunea M_1 trebuie să fie zero, încât se ajunge la ecuația:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^{L_i} \frac{M_t(x_i)}{G \cdot I_p(x_i)} \frac{\partial M_t(x_i)}{\partial M_1} dx \right]$$

Problemă static nedeterminată – la răsucire

Urmărind expresiile eforturilor secționale $M_t(x_i)$, stabilite mai sus, rezultă că derivatele lor în raport cu M_1 au valoarea egală cu 1, pentru toate regiunile barei analizate; înlocuind apoi mărimile de sub integrale cu valorile sau expresiile lor (literale), se observă că integralele conțin numai mărimi constante.

Așadar, sub fiecare integrală va rămâne numai mărimea dx , iar rezultatul unei astfel de integrale este chiar lungimea intervalului pe care trebuie făcută integrarea, astfel încât ecuația dată de teorema lui Castigliano devine:

$$0 = \int_0^{2L} \frac{M_1}{G \cdot I} \cdot 1 dx + \int_0^{4L} \frac{(M_1 - 4M_t)}{G \cdot I} \cdot 1 dx + \int_0^{3L} \frac{(M_1 + 5M_t)}{G \cdot 16I} \cdot 1 dx$$
$$\Rightarrow \frac{M_1 \cdot 2L}{G \cdot I} + \frac{(M_1 - 4M_t) \cdot 4L}{G \cdot I} + \frac{(M_1 + 5M_t) \cdot 3L}{G \cdot 16I} = 0$$

Ultima formă care s-a obținut este identică ecuației similare de la metoda A1, deci la fel ca acolo vor fi și valorile reacțiunilor, încât se poate considera că nedeterminarea problemei a fost rezolvată.

Problemă static nedeterminată – la răsucire

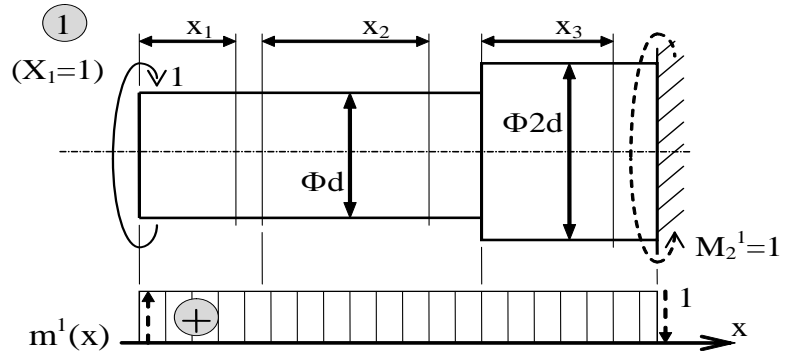
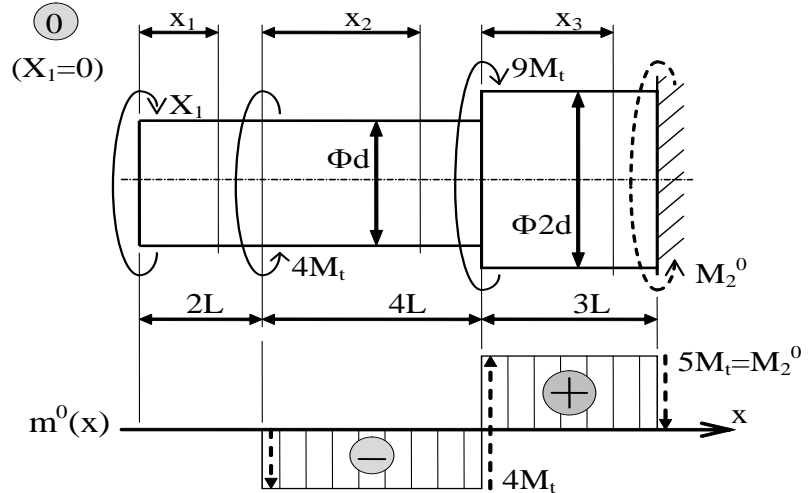
A3. Aplicarea metodei eforturilor

Se face aplicarea algoritmului (care a fost explicat anterior, pentru cazul general) la problema de față.

Se transformă sistemul într-unul *static determinat*, îndepărtând imaginar *reazemul din stânga*, înlocuit prin momentul axial *necunoscut* X_1 .

Două stări de solicitare imaginare se vor studia:

- starea “zero” – cu momentele exterioare prezente și $X_1=0$;
- starea “unu” – cu momentele exterioare îndepărtate și $X_1=1$.



Problemă static nedeterminată – la răsucire

Împărțirea barei în regiuni va trebui făcută (în conformitate cu regula generală din algoritmul metodei) în mod **identic**, pentru toate stările de solicitare fictive care se analizează, iar eforturile secționale vor fi următoarele:

$$\text{Pt. } x_1 \in (0; 2L) \quad m^0(x_1)=0 \quad m^1(x_1)=1$$

$$\text{Pt. } x_2 \in (0; 4L) \quad m^0(x_2)=-4M_t \quad m^1(x_2)=1$$

$$\text{Pt. } x_3 \in (0; 3L) \quad m^0(x_3)=5M_t \quad m^1(x_3)=1$$

Aceste rezultate apar pe diagramele de momente de răsucire ale celor două stări imaginare (fictive) de solicitare, prezentate în pagina anterioară.

Întrucât problema este simplu static nedeterminată, aplicarea metodei eforturilor va conduce la obținerea unei singure ecuații suplimentare, având necunoscuta X_1 și forma următoare:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

Problemă static nedeterminată – la răsucire

Cei doi coeficienți necunoscuți din această ecuație se vor calcula din relația lor generală, după cum urmează:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum_{k=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^1(x_k)}{G \cdot I_p(x_k)} dx = \int_0^{2L} \frac{1 \cdot 1}{G \cdot I} dx + \int_0^{4L} \frac{1 \cdot 1}{G \cdot I} dx + \int_0^{3L} \frac{1 \cdot 1}{G \cdot 16I} dx = \\ &= \frac{L}{G \cdot I} \left(2 + 4 + \frac{3}{16} \right) = \frac{99}{16} \frac{L}{G \cdot I} \\ \delta_{10} &= \sum_{k=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{m^1(x_k) \cdot m^0(x_k)}{G \cdot I_p(x_k)} dx = \int_0^{2L} \frac{1 \cdot 0}{G \cdot I} dx + \int_0^{4L} \frac{1 \cdot (-4M_t)}{G \cdot I} dx + \int_0^{3L} \frac{1 \cdot 5M_t}{G \cdot 16I} dx = \\ &= \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I} \left(0 - 16 + \frac{15}{16} \right) = - \frac{241}{16} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I}\end{aligned}$$

Înlocuind coeficienții și rezolvând ecuația scrisă mai sus, se calculează momentul necunoscut X_1 , adică reacțiunea M_1 din problemă:

$$X_1 = M_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{241}{99} M_t$$

Această soluție a problemei coincide cu valoarea obținută prin metoda geometrică, ceea ce confirmă rezolvarea corectă a nedeterminării.

Problemă static nedeterminată – la răsucire

B. Răspunsul la cerințele problemei

a) Trasarea diagramelor

Înlocuind valoarea lui M_1 în expresiile eforturilor stabilite mai sus, rezultă:

$$M_t(x_1) = \frac{241}{99} M_t \quad M_t(x_2) = -\frac{155}{99} M_t \quad M_t(x_3) = \frac{736}{99} M_t$$

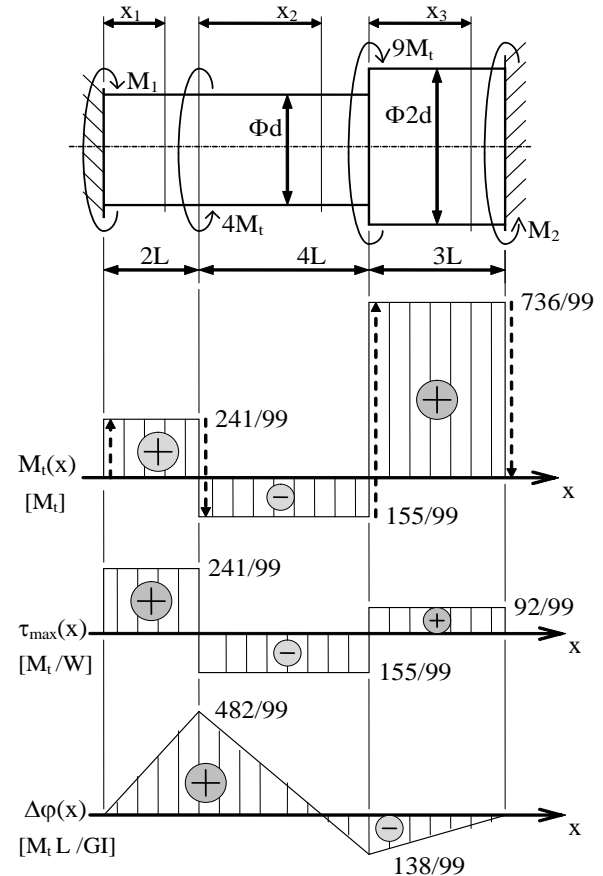
Făcând notația simplificatoare $W = \frac{\pi d^3}{16}$,
modulii de rezistență vor fi

$$W_p(x_1) = W_p(x_2) = W, \quad W_p(x_3) = 8W,$$

iar tensiunile maxime de pe cele trei regiuni se obțin astfel:

$$\tau_{\max}(x_1) = \frac{241 M_t}{99 W} \quad \tau_{\max}(x_2) = -\frac{155 M_t}{99 W} \quad \tau_{\max}(x_3) = \frac{736 M_t}{8 \cdot 99 W} = \frac{92 M_t}{99 W}$$

Diagramele de eforturi și de tensiuni maxime sunt prezentate în figura alăturată.



Problemă static nedeterminată – la răsucire

Observații

Salturile din diagrama de momente corespund ca mărime, punct de aplicație și semn (orientare) cu momentele concentrate de răsucire care acționează pe bară (inclusiv în secțiunile de capăt, unde se află reacțiunile, calculate în etapa anterioară a rezolvării).

Cea mai mare solicitare (cea mai mare valoare de moment) de răsucire se produce pe tronsonul din dreapta, dar cea mai mare tensiune se produce în prima regiune, deci simpla trasare a diagramei de momente nu este suficientă pentru a se caracteriza intensitatea solicitării studiate!

Pentru a trasa diagrama rotirilor secțiunilor transversale este suficient să fie calculate valorile de la capetele tronsoanelor:

$$\Delta\varphi(x_2 = 0) = \frac{M_t(x_1) \cdot 2L}{G \cdot I_p(x_1)} = \frac{241 M_t \cdot 2L}{99 G \cdot I} = \frac{482 M_t \cdot L}{99 G \cdot I}$$

$$\Delta\varphi(x_3 = 0) = \Delta\varphi(x_2 = 0) + \frac{M_t(x_2) \cdot 4L}{G \cdot I_p(x_2)} = \frac{482 M_t \cdot L}{99 G \cdot I} - \frac{155 M_t \cdot 4L}{99 G \cdot I} = -\frac{138 M_t \cdot L}{99 G \cdot I}$$

Problemă static nedeterminată – la răsucire

Folosind aceste valori și cunoscând că secțiunile de la capetele barei nu se pot deplasa, a rezultat diagrama din figura de mai sus.

Observații:

Pentru problemele static nedeterminate sensul efectiv al rotirilor care sunt calculate trebuie atent analizat, deoarece semnele termenilor din relațiile de calcul se alocă în mod subiectiv, întrucât apar din compararea rotirilor de pe tronsoanele învecinate ale barei.

De exemplu, pentru problema de față, rotirile considerate (și marcate pe diagramă) ca având semn pozitiv se produc în sensul momentului concentrat exterior $4M_t$; în plus, există o secțiune, pe tronsonul de mijloc al barei, care nu se rotește (are unghiul de rotire egal cu zero) în urma solicitării, dar stabilirea ei precisă nu prezintă interes practic.

Problemă static nedeterminată – la răsucire

b) Dimensionarea barei

Solicitarea periculoasă se produce în toate secțiunile din prima regiune de pe bară, încât condiția de rezistență a barei analizate se va scrie astfel:

$$\tau_{\text{ef max}} = \tau_{\text{max}}(x_1) \Rightarrow \frac{241 M_t}{99 W} = \frac{241 M_t}{99 \frac{\pi d^3}{16}} = \frac{3856 M_t}{99 \pi d^3} \leq \tau_a$$

Ultima inegalitate permite să fie stabilită dimensiunea minimă necesară a secțiunilor transversale, care se calculează astfel:

$$d_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{3856 M_t}{99 \pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{3856 \cdot 10^7 \text{ Nmm}}{99 \pi \cdot 125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 99,184 \text{ mm}$$

Pe baza acestui rezultat se adoptă ca dimensiune finală o valoare potrivită a parametrului **d**, cum ar fi **d_{ad} = 100mm**.

Problemă static nedeterminată – la răsucire

c) Calculul deplasării unghiulare maxime a unei secțiuni transversale

Valoarea adoptată, pe baza ultimului rezultat de mai sus, a diametrului barei se folosește în calculele ulterioare din problemă, inclusiv la stabilirea rotirii maxime.

Conform diagramei rotirilor, această valoare maximă se va înregistra în secțiunea în care acționează momentul concentrat exterior $4M_t$ și în sensul acestuia.

Folosind datele numerice din problema de față, relația rotirii maxime se dezvoltă astfel:

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{482}{99} \frac{M_t \cdot L}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32 \cdot 482}{99} \frac{10^7 \text{ Nmm} \cdot 100 \text{ mm}}{8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 10^8 \text{ mm}^4} = 0,0062 \text{ grad}$$

Observație: Această valoare arată că bara este *foarte rigidă*, în raport cu mărimea încărcărilor ei exterioare, încât rotirea maximă a unei secțiuni transversale este de numai șase miimi de grad.

1.6

Calculul convențional la forfecare

Calculul convențional la forfecare

Particularități în calculul elementelor de îmbinare folosite în ingineria mecanică

- Elementele componente ale diverselor îmbinări mecanice suportă simultan *mai multe tipuri de solicitări*; scriind condițiile de rezistență pentru fiecare dintre acestea se obține un **sistem de inecuații**, din care apoi se calculează pe rând dimensiunile pieselor considerate.
- În acest context, în mod frecvent apare fenomenul de **strivire**, produs pe suprafețe de contact *semi-cilindrice*, pentru care s-a arătat că se admite o arie de calcul la strivire egală cu produsul dintre *diametrul și înălțimea* semi-cilindrului respectiv.
- Dacă în ansamblul calculat apar *mai multe piese de același fel*, solicitate în mod identic calculul lor se va face **o singură dată**, pentru acea piesă care trebuie să preia *solicitarea cea mai mare*, dintre toate.

Calculul convențional la forfecare

Particularități în calculul elementelor de îmbinare folosite în ingineria mecanică

- Pentru a putea stabili mai ușor în ce mod este pus în pericol un anumit element dintr-un ansamblu mecanic, este util să se observe că **aria de rupere** va fi *perpendiculară* pe forțele care produc solicitarea – dacă acel element este supus la *întindere* sau *comprimare*, dar va fi *paralelă* cu forțele – la *forfecare*.
- Trebuie subliniat că, pentru a putea fi alese și calculate în moduri unitare, elementele de îmbinare (nituri, șuruburi și piulițe, suduri, pene etc.) sunt în general **standardizate**; prin urmare, după calculul lor de rezistență, dimensiunile finale se aleg și se adoptă din *standardul* corespunzător, sau (de preferat!) din *cataloge* ale firmelor care produc și/sau furnizează acele elemente.

Calculul convențional la forfecare

Calculul îmbinărilor prin nituri (sau șuruburi)

Niturile sunt elemente cilindrice de îmbinare *nedemontabile*, care împiedică deplasarea relativă a pieselor (de obicei foi sau table) pe care le îmbină.

Este de semnalat că niturile nu sunt destinate să realizeze și strângerea între ele a tablelor, astfel că ele **nu** trebuie calculate și la solicitare axială.

Ca și alte organe de îmbinare, niturile sunt *standardizate*, încât **diametrul** lor se adoptă, din standarde sau din cataloage ale firmelor producătoare, la valori imediat superioare celor rezultate din calculul de rezistență.

Principial, se consideră unică solicitare de calcul *forfecarea* niturilor, socotind implicită rezistența lor la celelalte solicitări, determinate de încărcările pe care le preiau tablele îmbinate.

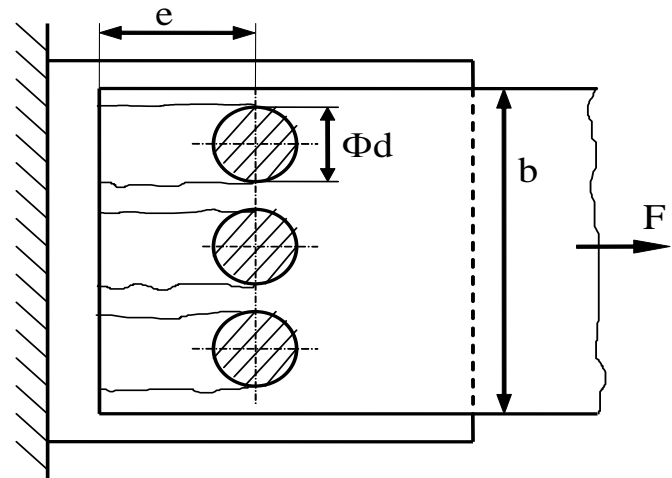
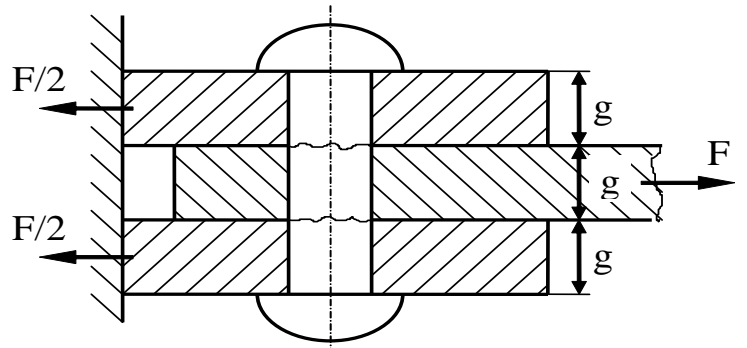
Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

Să se dimensioneze îmbinarea cu nituri din figura alăturată (în vederea de sus tabla de deasupra a fost îndepărtată!).

Două dintre foile de tablă sunt fixate (încastate) pe laturile din stânga, iar tabla intermediară, prinsă de celelalte prin trei nituri, trebuie să preia forța concentrată F .

Se cunosc forța $F=4 \cdot 10^4 \text{N}$, dar și rezistențele admisibile ale materialelor folosite: $\sigma_{atb}=160 \text{MPa}$, $\tau_{atb}=120 \text{MPa}$, $p_{a \text{ str}}=180 \text{MPa}$ – pentru table, $\tau_{a \text{ nit}}=90 \text{MPa}$ – pentru nituri.



Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

Rezolvare

Se observă că cele două reacțiuni din reazemul încastrat sunt forțe orizontale, simetrice și egale fiecare cu jumătate din F , astfel încât tabla cea mai sollicitată este cea intermediară. Ca atare, *calculele de rezistență ale foilor de tablă se fac pentru tabla din mijloc.*

Pe de altă parte, trebuie remarcat că în această îmbinare se produc mai multe solicitări simultan; se va analiza, pentru fiecare în parte, modul în care se pot defecta elementele constructive ale îmbinării, dacă una dintre dimensiunile ei ar fi insuficient de mare (adică greșit calculată!).

După ce se identifică o anumită solicitare, se scriu relațiile de calcul care îi corespund; se obține astfel un *sistem de inecuații* (în număr egal cu cel al

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

necunoscutelor din problemă), din care se calculează și apoi se adoptă valorile efective ale dimensiunilor îmbinării.

Pentru problema de față se începe analiza cu elementele de îmbinare: se poate înțelege faptul că, în cazul în care diametrul lor d ar fi mai mic decât cel necesar, ele s-ar putea rupe, pe direcția suprafețelor de separare dintre table (a se vedea liniile ondulate subțiri de pe desen); altfel spus, *pentru fiecare nit există două suprafețe de rupere*, paralele cu forța F care produce solicitarea. S-a precizat că această direcție a ruperii indică apariția unei solicitări de *forfecare*, care se va lua în considerare pentru calculul niturilor.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

Pe de altă parte, observând efectele unei eventuale dimensionări incorecte a *tablelor*, se pot remarca următoarele fenomene posibile:

- O valoare insuficient de mare a lățimii **b** a tablei (din mijloc) poate să conducă la ruperea ei, pe direcție *perpendiculară* pe forța exterioară F , ceea ce corespunde, așa cum s-a explicat, unei solicitări de *tracțiune*; secțiunea periculoasă va fi *cea mai mică dintre secțiunile transversale efective ale tablei* (cea de pe axa diametrală a niturilor!).
- Dacă dimensiunea **e** (distanța niturilor până la marginea tablei) nu ar fi suficient de mare, atunci se poate produce “sfâșierea” tablei pe direcția forței F , la fiecare margine de nit, adică ar apărea o solicitare de *forfecare*, pe *câte două secțiuni (de rupere)* ale tablei (marcate cu linii subțiri ondulate pe desen) *pentru fiecare nit*.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

- Grosimea g are rol decisiv în rezistența foilor de tablă la *strivire*, care se va produce pe suprafețe *semi-cilindrice*, la contactul tablă-nituri (cu câte o suprafață de rupere pentru fiecare nit).

Toate observațiile de mai sus se concretizează, pentru problema de față, în relațiile de calcul (condițiile de rezistență) care sunt scrise, pentru fiecare tip de element din îmbinare, în cele ce urmează.

a) Calculul niturilor la forfecare

$$\tau_{\text{ef nit}} = \frac{F}{3 \text{ nit} \times 2 \frac{A_f}{\text{nit}} \times \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2}{3} \frac{F}{\pi d^2} \leq \tau_{\text{a nit}}$$

Din ultima relație rezultă prima inecuație a problemei, care se referă la *diametrul* niturilor:

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

$$d^2 \geq \frac{2}{3} \frac{F}{\pi \cdot \tau_{\text{anit}}} \quad (1)$$

b) Calculul tablelor la tracțiune

$$\sigma_{\text{ef max tb}} = \frac{F}{A_{\text{min}}} = \frac{F}{b \cdot g - 3 d \cdot g} = \frac{F}{g(b - 3d)} \leq \sigma_{\text{atb}}$$

La numitorul fracției din această relație apare valoarea minimă (slăbită prin găurile pentru nituri) a ariei transversale a tablei din mijloc.

Din ultima inegalitate rezultă o condiție pentru stabilirea valorii minime necesare a *lățimii* tablelor:

$$b \geq \frac{F}{g \cdot \sigma_{\text{atb}}} + 3d \quad (2)$$

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

c) Calculul tablelor la forfecare

$$\tau_{\text{ef tb}} = \frac{F}{3\text{nit} \times 2 \frac{A_f}{\text{nit}} \times e \cdot g} = \frac{F}{6e \cdot g} \leq \tau_{\text{atb}}$$

Rezultă astfel o condiție pentru a stabili valoarea minimă necesară a distanței la care se plasează linia niturilor, față de marginea tablelor:

$$e \geq \frac{F}{6g \cdot \tau_{\text{atb}}} \quad (3)$$

d) Calculul tablelor la strivire

S-a dedus anterior că *aria de calcul* la strivire este, atunci când contactul se produce pe suprafețe semi-cilindrice, produsul dintre diametrul și înălțimea cilindrului de contact, încât condiția se va scrie astfel:

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

$$P_{\text{ef str}} = \frac{F}{3n_{\text{it}} \times d \cdot g} = \frac{F}{3d \cdot g} \leq P_{\text{astr}}$$

Din ultima inegalitate rezultă condiția pentru a stabili grosimea minimă necesară a foilor de tablă:

$$g \geq \frac{F}{3d \cdot P_{\text{astr}}} \quad (4)$$

Folosind raționamentele descrise mai sus, au fost obținute *patru inecuații* cu *patru necunoscute*, pe baza cărora se vor putea calcula valorile *necesare* ale dimensiunilor îmbinării analizate.

Aceste valori numerice vor fi apoi rotunjite, *prin adaos*, ținând seama și de anumite considerente fizice, privind aspectul și pozițiile reciproce ale elementelor respective.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

Astfel, din condiția (1) rezultă diametrul minim necesar al niturilor:

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot 90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 9,71 \text{ mm}$$

Pe această bază și folosind, de exemplu, un catalog al unui furnizor de nituri, pentru realizarea îmbinării care s-a proiectat se pot achiziționa nituri cu diametrul $d_{\text{ad}} = 10 \text{ mm}$.

Înlocuind în condiția (4) datele numerice ale problemei care sunt cunoscute până la acest moment al rezolvării, se calculează grosimea tablelor:

$$g_{\min} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{3 \cdot 10 \text{ mm} \cdot 180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 7,4 \text{ mm}$$

Se poate stabili folosirea unor foi de tablă cu grosimea $g_{\text{ad}} = 8 \text{ mm}$.

Calculul convențional la forfecare

Exemplu: calculul niturilor așezate pe o linie

Introducând aceste valori în condiția (3), rezultă:

$$e_{\min} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{6 \cdot 8 \text{ mm} \cdot 120 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 6,94 \text{ mm}$$

Distanța obținută este mică (mai mică decât diametrul nitului), încât se adoptă (de obicei) o valoare de câteva ori mai mare (urmărind un îndrumar de proiectare), cum ar fi **$e_{\text{ad}} = 25 \text{ mm}$** .

În fine, lățimea tablelor se va calcula din inecuația (2), astfel:

$$b_{\min} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{8 \cdot 160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} + 3 \cdot 10 \text{ mm} = 61,25 \text{ mm}$$

Această valoare a lățimii este și ea foarte mică, încât dimensiunea efectivă se va adopta pe baza altor cerințe (funcționale, estetice sau de standardizare dimensională) pe care trebuie să le îndeplinească tablele îmbinate.

1.7

Calculul la încovoiere în cazul barelor drepte

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda figurată alăturat.

Rezolvare

a) Calculul reacțiilor

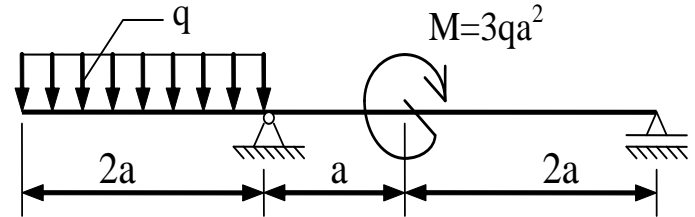
Se notează cu V_1 forța de reacțiune verticală din articulație și cu V_2 – cea din reazemul simplu (aflat în capătul din dreapta al barei).

Cele două ecuații de echilibru semnificative ale problemei se scriu astfel:

$$\sum Y_i = 0: V_1 + V_2 = 2qa \quad \sum (M_i)_1 = 0: V_2 \cdot 3a - 3qa^2 + 2qa \cdot a = 0$$

Ecuția de momente conduce la valoarea reacțiunii din dreapta:

$$V_2 = (1/3)qa.$$



Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

Valoarea celei de-a doua reacțiuni se calculează dintr-o altă formă a ecuației de momente:

$$\sum (M_i)_2 = 0: V_1 \cdot 3a + 3qa^2 - 2qa \cdot 4a = 0$$

din care se obține că $V_1 = (5/3)qa$.

Pentru a verifica dacă valorile celor două reacțiuni au fost corect stabilite, acestea se înlocuiesc în prima ecuație de echilibru scrisă la început – care se referă la suma proiecțiilor verticale ale forțelor de pe bara analizată:

$$V_1 + V_2 = (1/3)qa + (5/3)qa = 2qa$$

Se observă că ecuație de echilibru este confirmată, deci rezultatele obținute sunt corecte!

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

b) Stabilirea expresiilor eforturilor secționale și trasarea diagramelor de efort

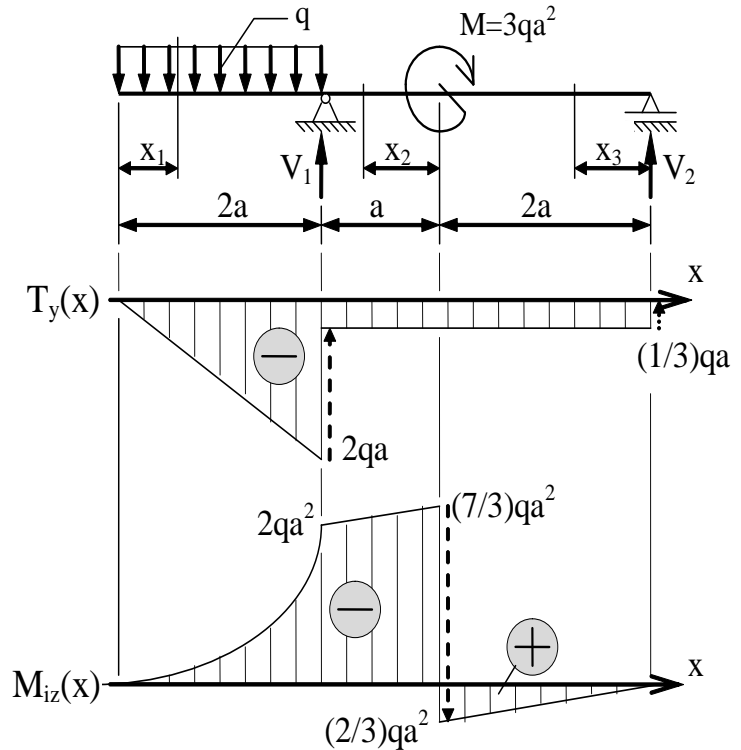
Punctele unde se aplică încărcările delimitează pe grindă trei regiuni.

Pentru $x_1 \in (0; 2a)$ $T_y(x_1) = -q x$
funcție liniară $T(0) = 0; T(2a) = -2qa$

$M_{iz}(x_1) = -q x \cdot (x/2) = -(1/2)q x^2$
funcție de gradul al doilea.

Derivata este $M'_{iz}(x_1) = -q x = T_y(x_1)$
și se anulează în $x_1 = 0$, unde apare un punct de extrem pentru $M(x_1)$.

A doua derivată este $M''_{iz}(x_1) = -q < 0$ deci extremul este un maxim.



Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

În fine, valorile funcției la capetele regiunii sunt $M(0)=M_{\max}(x_1)=0$; $M(2a)=-2qa^2$.

Pentru $x_2 \in (0; a)$, alegem să calculăm efectele produse de încărcările care acționează în partea dreaptă față de secțiunea de lucru:

$$T_y(x_2) = -V_2 = -(1/3)qa = \text{ct.};$$

$$M_{iz}(x_2) = V_2 (2a+x) - M = (1/3)qa (2a+x) - 3qa^2 = \\ = (2/3)q a^2 + (1/3)qa x - 3qa^2 = - (7/3)qa^2 + (1/3)qa x$$

funcție de gradul întâi, a cărei derivată este $M'(x_2)=(1/3)qa = -T_y(x_2)=\text{ct.}$

Este verificată astfel legătura cunoscută între expresiile eforturilor secționale de pe o aceeași regiune a unei bare.

Pe de altă parte, se știe că derivata momentului și expresia forței tăietoare au în acest caz semne contrare, datorită convențiilor *inverse* de semne, în *partea dreaptă* față de secțiunea de calcul).

Valorile de la capetele regiunii sunt $M(x_2=0)=- (7/3) qa^2$; $M(x_2=a)=-2qa^2$.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

Pentru $x_3 \in (0; 2a)$, calculând tot din partea dreaptă se obțin expresii ale eforturilor care sunt similare celor de pe intervalul precedent:

$$T_y(x_3) = -V_2 = -qa/3 = \text{ct.}$$

$$M_{iz}(x_3) = V_2 x = (1/3)qa x \quad \text{cu} \quad M'(x_3) = qa/3 = -T(x_3) = \text{ct.}$$

Valorile momentelor la capetele regiunii sunt $M(x_3=0)=0$; $M(x_3=2a)=(2/3)qa^2$.

Folosind expresiile și rezultatele explicate până aici, se trasează cele două diagrame de eforturi ale barei studiate (care sunt figurate într-o pagină anterioară), acordând atenție la următoarele aspecte:

1. Derivata $M'(x)$ este aceeași în regiunile 2 și 3, unde graficul (liniar) are o aceeași “pantă” (înclinare)!
2. Așa cum s-a precizat anterior, momentele de încovoiere se reprezintă cu valorile pozitive sub axa absciselor!!

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

c) Verificarea corectitudinii diagramei

⇒ Din relațiile diferențiale dintre expresiile eforturilor rezultă:

- pe regiunile cu *forță distribuită uniform* (funcția $q(x)$ este constantă, adică de grad zero), efortul tăietor este funcție polinomială *de gradul întâi* (în variabila x), iar cel de încovoiere – *de gradul doi*;
- pe regiunile *fără forțe distribuite* forțele tăietoare nu variază de la o secțiune la alta (funcție *constantă*), iar variația momentelor e dată de o funcție *de gradul întâi*.

Aceste condiții sunt îndeplinite de graficele de mai sus, pe care se verifică și legăturile dintre funcția momentului și derivata ei – forța tăietoare:

⇒ Derivata momentelor este *negativă* pe toată lungimea grinzii, deci funcția $M(x)$ trebuie să fie strict *descrescătoare* peste tot – condiție îndeplinită dacă se parcurge bara *de la stânga către dreapta*; dacă se alege sensul invers de parcurs atunci derivata momentului și forța tăietoare au semne contrare, adică derivata este pozitivă, iar funcția – *crescătoare*.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

⇒ Secțiunile în care forța tăietoare este *nulă* trebuie să corespundă unor valori extreme ale momentului; aceasta se întâmplă în capătul din stânga, unde funcția momentelor are un *punct de maxim* (ceea ce se confirmă prin a doua derivată a funcției $M(x)$, sau prin sensul descrescător al funcției pe bară).

Trebuie verificată și concordanța între **salturile** (discontinuitățile) care apar în diagrame și încărcările prezente pe grindă:

⇒ pe diagrama de forțe tăietoare există *două salturi* – în dreptul reazemelor, coincidente ca valori și sensuri cu reacțiunile V_1 și V_2 ;

⇒ pe diagrama de momente este permis să apară *un singur salt*, în corespondență cu singurul moment concentrat, în valoare de $3qa^2$, care există pe bară; și acest lucru se verifică ușor pe diagrama trasată mai sus.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 1

Trebuie observat că sensul salturilor din diagrama de momente depinde de sensul în care se parcurge grinda: dacă se merge către dreapta – saltul (din diagrama de față) este *pozitiv*, deoarece momentul M se află la stânga secțiunii de calcul și corespunde semnului considerat pozitiv în convenția de semne; mergând spre stânga, momentul are sens negativ față de secțiunea de calcul, iar saltul se face de la o valoare pozitivă ($2/3 qa^2$) la una negativă ($-7/3 qa^2$) a efortului.

Se recomandă ca verificarea diagramelor de eforturi să nu lipsească dintre etapele de rezolvare, în cazul problemelor de încovoiere; calculele ulterioare depind de corectitudinea expresiilor eforturilor secționale, respectiv a graficelor acestora.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda figurată alăturat.

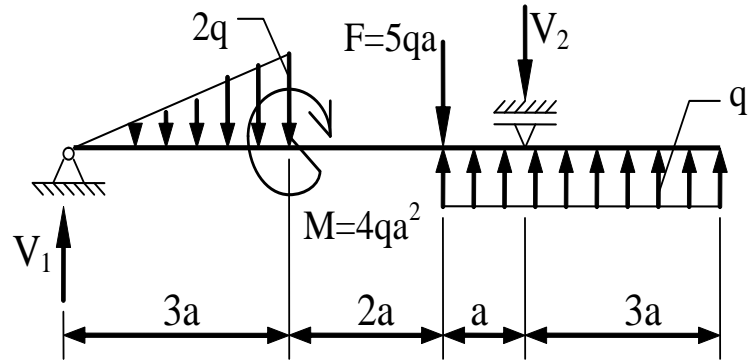
Rezolvare

Reacțiunile au fost calculate anterior (într-o aplicație din seminarul cu această tematică):

$$V_1 = (17/6)qa \quad V_2 = -(7/6)qa$$

Felul și amplasarea încărcărilor exterioare fac ca pe bară să se delimiteze patru regiuni.

Pentru $x_1 \in (0; 3a)$, încărcarea este distribuită *neuniform*, iar legea de distribuție se află stabilind intensitatea $q(x)$ a forței în secțiunea curentă: din asemănarea unor triunghiuri, se obține $q(x_1) = (2q/3a)x$.



Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Întrucât și pe această regiune trebuie să fie adevărate relațiile analitice între expresiile eforturilor secționale rezultă că forțele tăietoare vor avea o funcție *parabolică*, iar momentele o funcție de *gradul al treilea*, ceea ce se va confirma în continuare, în calculele bazate pe definițiile eforturilor.

La stânga față de secțiunea x_1 se observă, pe lângă reacțiunea V_1 , o forță distribuită în formă de triunghi, având catetele x_1 și $q(x_1)$; rezultanta acestei distribuții va fi dată de aria triunghiului, încât expresia forțelor tăietoare se va scrie astfel:

$$T_y(x_1) = V_1 - q(x_1) x/2 = (17/6) qa - (2q/3a) x^2/2 = (17/6) qa - (q/3a) x^2$$

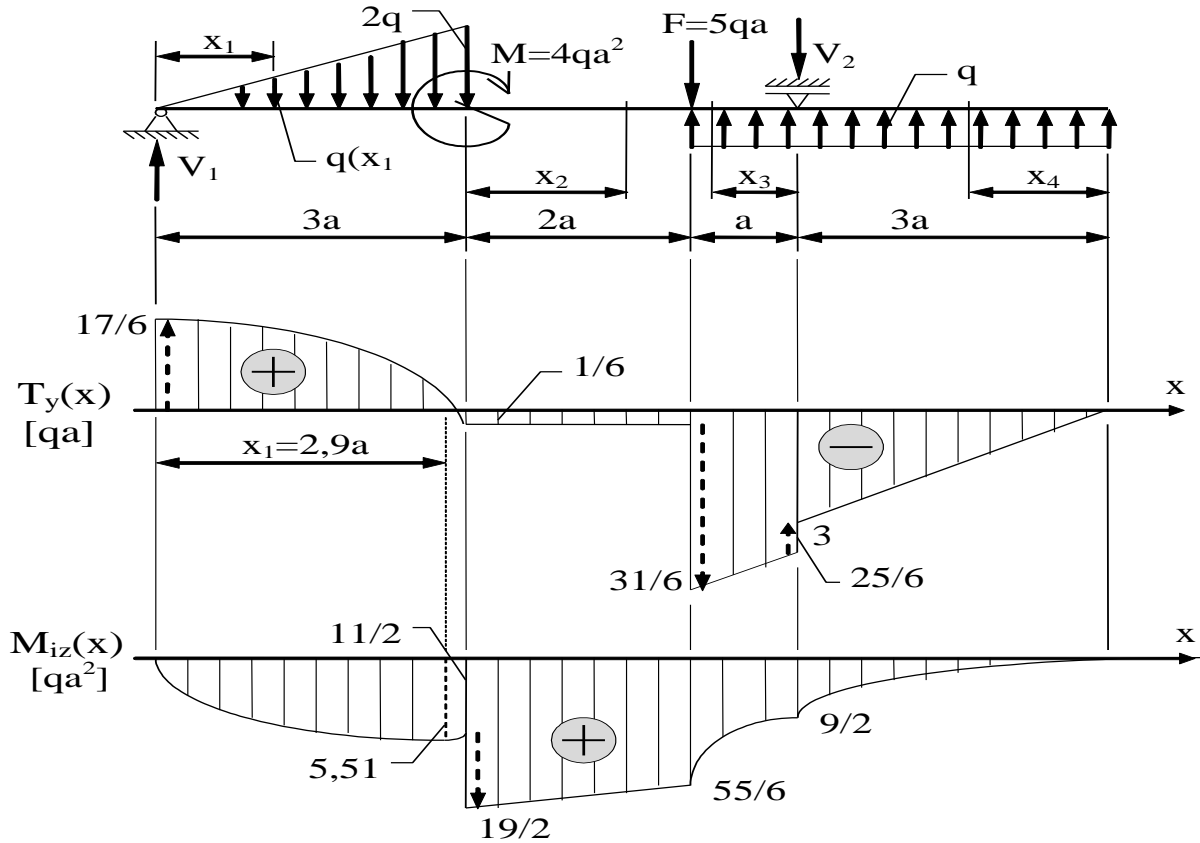
Această funcție, de gradul al doilea, are derivatele

$$T'(x_1) = -(2q/3a)x = -q(x_1)$$

(semnul negativ rezultă din convenția de semne)

$$T''(x_1) = -(2q/3a) < 0$$

Încovoierea barelor drepte



Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Prima derivată a expresiei forțelor se anulează în $x_1=0$, care va reprezenta un punct de *maxim* al funcției (întrucât derivata a doua a expresiei este negativă).

Valorile forțelor la capetele regiunii sunt:

$$T(0) = T_{\max}(x_1) = (17/6) qa; \quad T(3a) = (17/6 - 3) qa = -(1/6) qa$$

Este importantă și secțiunea în care forța tăietoare se anulează (în care funcția momentelor va avea un extrem), adică punctul definit prin distanța

$$x_1 = \sqrt{\frac{17}{2}} a^2 = a\sqrt{8,5} \cong 2,9 a$$

Din calculul rezultantei unei distribuții în formă de triunghi, ca și din poziția pe axa distanțelor a centrului ei de greutate, rezultă că expresia momentelor încovoietoare se va scrie astfel:

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

$$M_{iz}(x_1) = V_1 \cdot x - \frac{q(x_1) \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{17}{6} qa \cdot x - \frac{q \cdot x^3}{9a}$$

adică o funcție de *gradul al treilea* în x , așa cum era de așteptat.

Prima derivată a acestei expresii va fi:

$$M'_{iz}(x_1) = (17/6) qa - (q/3a) x^2 = T_y(x_1)$$

Această funcție a fost complet studiată anterior, observându-se că în $x_1=(2,9 \cdot a)$ apare un *punct de extrem* pentru $M(x_1)$; a doua derivată a expresiei momentelor este *negativă* (pentru că așa este semnul coeficientului lui x^3), însemnând că extremul va fi un punct de **maxim** al funcției.

Valorile care prezintă importanță la trasarea graficului vor fi următoarele:

$$M(0)=0; \quad M(2,9a)=M_{\max}(x_1)=5,51 qa^2; \quad M(3a)=(11/2) qa^2=5,5 qa^2$$

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Atenție: Notarea variabilei x cu indici numerici este folosită doar pentru precizarea regiunii pentru care se scrie expresia unui efort secțional! Orice astfel de expresie nu poate include două variabile cu indici diferiți (x_i și x_j), astfel încât în expresiile eforturilor nu se pun indici variabilei (ar complica inutil scrierea!), așa cum se observă în relații mai sus.

Pentru $x_2 \in (0; 2a)$, calculăm efectele încărcărilor din partea stângă față de secțiunea de lucru și rezultă expresiile de mai jos ale celor două eforturi; acestea respectă relațiile dintre moment și forța tăietoare.

$$T_y(x_2) = V_1 - R[q(x_1)] = \frac{17}{6} qa - \frac{2q \cdot 3a}{2} = -\frac{1}{6} qa = \text{ct.}$$

$$M_{iz}(x_2) = \frac{17}{6} qa(3a + x) - \frac{2q \cdot 3a}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 3a + x \right) + 4qa^2 = \frac{19}{2} qa^2 - \frac{1}{6} qax$$

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Pentru a fi trasate graficele celor două eforturi este nevoie doar să mai fie stabilite valorile de la capetele intervalului ale funcției momentelor de încovoiere:

$$M(0) = 9,5 qa^2; \quad M(2a) = (55/6) qa^2 = 9,17 qa^2.$$

Pentru $x_3 \in (0; a)$ (cu precizarea că variabila crește spre stânga!), calculând efectele încărcărilor din dreapta față de secțiune, se consideră forța distribuită ca alcătuită din două porțiuni – una de lungime $3a$, din capătul barei până la reazem, cealaltă de lungime x , din reazem până la secțiunea arbitrară – și se obțin următoarele expresii ale eforturilor secționale:

$$T_y(x_3) = -(q \cdot 3a) + V_2 - (q \cdot x) = -3qa - \frac{7}{6}qa - qx = -\frac{25}{6}qa - qx$$
$$M_{iz}(x_3) = (q \cdot 3a) \left(\frac{3a}{2} + x \right) - V_2 \cdot x + (q \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{9}{2}qa^2 + \frac{25}{6}qax + \frac{1}{2}qx^2$$

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Desigur că și în acest caz este nevoie să se respecte relațiile dintre expresiile eforturilor, inclusiv în privința semnelor inverse (datorită calculării efectelor care se produc la dreapta față de secțiunea de calcul).

Pe de altă parte se observă că derivata momentului (expresia forței tăietoare, cu semne inversate) nu poate avea valoarea zero pe acest interval, ceea ce înseamnă că funcția $M(x_3)$ nu are extrem.

Mai trebuie observat că derivata respectivă este *strict pozitivă*, adică funcția este *strict crescătoare*, atunci când regiunea este parcursă *de la dreapta către stânga*, așa cum s-a considerat aici (a se vedea figura de mai sus).

Valorile celor două funcții la capetele regiunii sunt:

$$T(0) = -\frac{25}{6} qa; \quad T(a) = -\frac{31}{6} qa; \quad M(0) = \frac{9}{2} qa^2; \quad M(a) = \frac{55}{6} qa^2$$

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

În fine, pentru $x_4 \in (0; 3a)$, calculând din partea cea mai simplă – adică aceea din dreapta față de secțiunea de lucru – rezultă expresiile următoare:

$$T_y(x_4) = -q x \qquad M_{iz}(x_4) = (q/2) x^2$$

Aceste funcții sunt relativ simplu de analizat, în sensul că derivata momentului (egală și de semn contrar cu expresia forței tăietoare) se anulează în $x_4=0$, care va reprezenta un *punct de minim* al funcției, pentru că $M''(x_4) = q > 0$.

Pentru trasarea celor două diagrame mai este important faptul că valorile celor două funcții ale eforturilor la capetele regiunii sunt:

$$T(0)=0; \quad T(3a)=-3qa; \quad M(0)=M_{\min}(x_4)=0; \quad M(3a)=(9/2)qa^2$$

Desigur că deducțiile explicate aici, precum și rezultatele tuturor calculelor care au fost efectuate s-au folosit pentru construirea diagramelor de eforturi de mai sus.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

Verificarea corectitudinii diagramelor de eforturi

- a) *Corelația dintre gradul funcțiilor și încărcările de pe grindă: pe porțiunea fără forță distribuită – forțele tăietoare sunt constante, momentele se distribuie liniar; pe regiunile cu forță distribuită uniform – $T_y(x)$ este liniară (cu aceeași pantă pe ambele regiuni, pentru că este aceeași intensitatea forței), iar $M_{iz}(x)$ – parabolică; în zona cu forță distribuită liniar – $T_y(x)$ are gradul doi, iar $M_{iz}(x)$ – gradul trei.*
- b) *Salturile: pentru funcția $T(x)$ apar pe grafic trei salturi, în dreptul forțelor concentrate de direcția axei y de pe grindă; diagrama $M(x)$ conține un singur salt – în dreptul momentului concentrat $M=4qa^2$, încât graficul începe și se termină chiar pe axa absciselor (efortul de tip moment este nul la capetele lipsite de momente concentrate ale grinzilor!).*

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 2

c) *Legătura dintre funcțiile eforturilor și derivatele lor:* atunci când grinda este parcursă către dreapta, funcția $M(x)$ este *crescătoare* unde $T(x)$ este pozitivă și *descrescătoare* unde $T(x)$ este negativă; în plus, secțiunile în care graficul $T(x)$ trece prin zero ($x_1=2,9a$ și $x_4=0$) corespund unor *puncte de extrem* ale funcției $M(x)$; pe prima regiune funcția liniară $q(x)$ trece prin zero în secțiunea de capăt ($x_1=0$), care corespunde unui *punct de maxim* pentru funcția forțelor tăietoare.

Explicațiile de mai sus arată că în rezolvarea problemei de față au fost respectate toate criteriile de verificare prezentate anterior, astfel încât se poate afirma că diagramele trasate sunt corecte.

Încovoierea barelor drepte

Aplicația 3

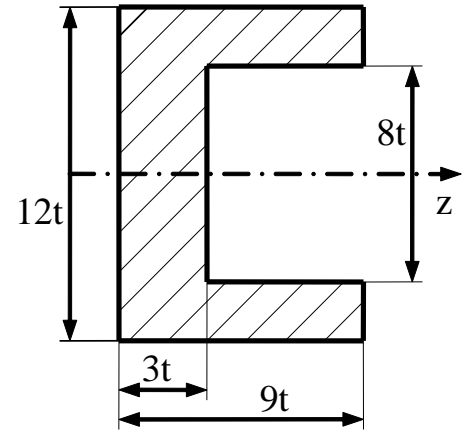
Să se dimensioneze grinda solicitată ca în aplicația anterioară, având secțiunea de forma și proporțiile din schița alăturată.

Se cunosc valorile mărimilor $q=25\text{N/mm}$;
 $a=0,1\text{m}$ și $\sigma_a=180\text{MPa}$.

Rezolvare

Se observă că secțiunea are ca axă de îndoire axa de simetrie orizontală z ; caracteristicile ei în raport cu această axă principală centrală I_z și W_z au fost calculate într-o aplicație anterioară – în cadrul cursului cu această tematică:

$$I_z = 1040 t^4; \quad W_z = (1040/6) t^3$$



Încovoierea barelor drepte

Aplicația 3

Folosind rezultatele anterioare, poate calcula tensiunea efectivă maximă din secțiunea periculoasă a grinzii ($x_2=0$) sub forma:

$$\sigma_{\text{ef max}} = \frac{M_{\text{iz max}}(x)}{W_z(x)} = \frac{19}{2} qa^2 \cdot \frac{3}{520t^3} = \frac{57}{1040} \frac{qa^2}{t^3}$$

Comparând această valoare, în condiția de rezistență, cu rezistența admisibilă a materialului, rezultă:

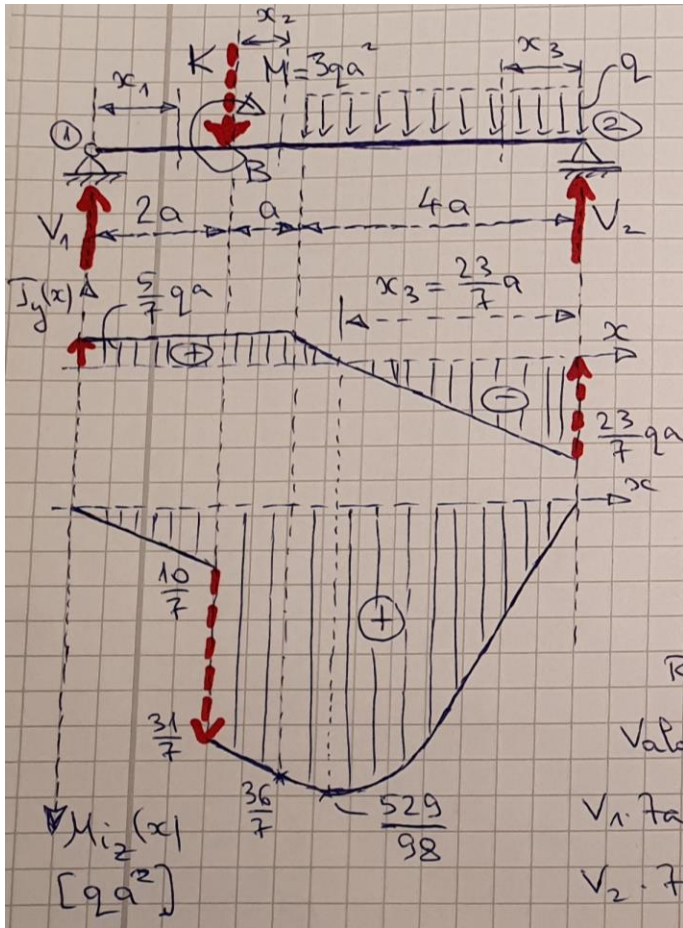
$$t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{57}{1040} \frac{qa^2}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{57}{1040} \frac{25 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (100 \text{ mm})^2}{180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 4,238 \text{ mm}$$

Pe baza acestui rezultat, se adoptă o valoare convenabilă a parametrului secțiunii transversale a grinzii, de exemplu $t_{\text{ad}}=5 \text{ mm}$; în acest fel, secțiunea va avea dimensiunile de gabarit $(45 \times 60) \text{ mm}^2$.

1.8

Calculul deplasărilor la solicitarea de încovoiere

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte



Problema la încovoiere
 Să se calculeze cele 2 feluri de deplasări în punctul B al barei alăturate.

Aplicarea teoremelor lui Castigliano
 (în raport cu forța K și momentul M)

$$\sum Y_i = 0 : V_1 + V_2 = K + 4qa \quad (1)$$

$$(\sum M_i)_2 = 0 : V_1 \cdot 7a = K \cdot 5a - M + 4qa \cdot 2a$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{5}{7}K - \frac{M}{7a} + \frac{8}{7}qa$$

$$(\sum M_i)_1 = 0 : V_2 \cdot 7a = K \cdot 2a + M + 4qa \cdot 5a$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{2}{7}K + \frac{M}{7a} + \frac{20}{7}qa$$

Rezultatele verifică ec. de forțe (1)

Valorile reale ale reacțiilor:

$$V_1 \cdot 7a = -3qa^2 + 4qa \cdot 2a \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{5}{7}qa}$$

$$V_2 \cdot 7a = 3qa^2 + 4qa \cdot 5a \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{23}{7}qa}$$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

(+) $x_1 \in (0; 2a)$: $T_y(x_1) = +\frac{5}{7}qa = \underline{ct}$; $M_{i2}(x_1) = +V_1 \cdot x = \frac{5}{7}qa x$ ($M(0)=0$)
 $M(2a) = \frac{10}{7}qa^2$

Derivatele: $\frac{\partial M_{i2}(x_1)}{\partial K} = \frac{\partial V_1}{\partial K} \cdot x = \frac{5}{7}x$ $\frac{\partial M_{i2}(x_1)}{\partial M} = \frac{\partial V_1}{\partial M} \cdot x = \frac{x}{7a}$

(+) $x_2 \in (0; a)$: $T_y(x_2) = +\frac{5}{7}qa = \underline{ct}$ (aceeași derivată a lui M_{i2} ca pe neg. x_1 !)

$M_{i2}(x_2) = \underline{V_1 \cdot (2a+x) - K \cdot x + M} = \frac{5}{7}qa(2a+x) + 3qa^2 = \frac{5}{7}qax + \frac{31}{7}qa^2$

Derivatele:

$M(0) = \frac{31}{7}qa^2$; $M(a) = \frac{36}{7}qa^2$

$\frac{\partial M_{i2}(x_2)}{\partial K} = \frac{5}{7} \cdot (2a+x) - x = \frac{10}{7}a - \frac{2}{7}x$

$\frac{\partial M_{i2}(x_2)}{\partial M} = -\frac{1}{7a} \cdot (2a+x) + 1 = \frac{5}{7} - \frac{x}{7a}$

(+) $x_3 \in (0; 4a)$: $T_y(x_3) = +q \cdot x - \frac{23}{7}qa$; $T(0) = -\frac{23}{7}qa$; $T(4a) = +\frac{5}{7}qa$

Graficul $T(x_3)$ trece prin zero în $x_3 = \frac{23}{7}a$ → pt. de extrem pt. momente!

$M_{i2}(x_3) = +\underline{V_2 \cdot x - \frac{q x^2}{2}} = +\frac{23}{7}qa \cdot x - \frac{q x^2}{2}$

$M'(x_3) = -T_y(x_3)$

$M''(x_3) = -q < 0$ ()

Derivatele: $\frac{\partial M_{i2}(x_3)}{\partial K} = \frac{\partial V_2}{\partial K} \cdot x = \frac{2}{7}x$ $\frac{\partial M_{i2}(x_3)}{\partial M} = +\frac{x}{7a}$

$M_{i2}(x_3=0) = 0$; $M_{i2}(x_3=4a) = qa^2 \left(\frac{23}{7} \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{2} \right) = qa^2 \cdot \frac{92-56}{7} = \frac{36}{7}qa^2$

$M_{\max}(x_3) = M_{i2}(x_3 = \frac{23}{7}a) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{23}{7} \right)^2 qa^2 = \frac{529}{98} qa^2$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

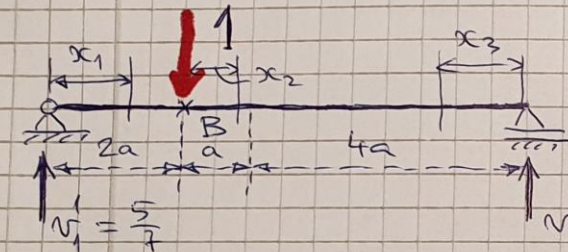
$$\begin{aligned}
 EI_2 \cdot v(B) &= \frac{\partial L_e}{\partial K} = \int_0^{2a} \left(\frac{5}{7} qa \cdot x \right) \cdot \left(\frac{5}{7} x \right) dx + \int_0^a \left(\frac{5}{7} qa x + \frac{31}{7} qa^2 \right) \cdot \left(\frac{10}{7} a - \frac{2}{7} x \right) dx \\
 &+ \int_0^{4a} \left(\frac{23}{7} qa x - \frac{q x^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{7} x \right) dx = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7} qa \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} + qa \cdot \frac{1}{7 \cdot 7} \left(50 \cdot a \cdot \frac{x^2}{2} - 10 \cdot \frac{x^3}{3} + \right. \\
 &+ \left. 310 a^2 \cdot x - 31 \cdot 2 a \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a + \frac{2}{7} \left(\frac{23}{7} qa \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{4a} = \\
 &= qa^4 \left[\frac{25 \cdot 8}{49 \cdot 3} + \frac{1}{49} \left(25 - \frac{10}{3} + 310 - 31 \right) + \frac{2}{7} \left(\frac{23 \cdot 64}{3 \cdot 7} - \frac{16 \cdot 16}{8} \right) \right] = qa^4 \left[\frac{25 \cdot 8}{49 \cdot 3} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{49} \left(304 - \frac{10}{3} \right) + \frac{2 \cdot 32}{7} \left(\frac{46}{21} - 1 \right) \right] = \frac{qa^4}{49 \cdot 3} (25 \cdot 8 + 902 + 64 \cdot 25) = \boxed{\frac{2702}{49 \cdot 3} qa^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_2 \cdot \varphi(B) &= \frac{\partial L_e}{\partial M} = \int_0^{2a} \left(\frac{5}{7} qa \cdot x \right) \cdot \left(-\frac{x}{7a} \right) dx + \int_0^a \left(\frac{5}{7} qa x + \frac{31}{7} qa^2 \right) \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{x}{7a} \right) + \\
 &+ \int_0^{4a} \left(\frac{23}{7} qa x - \frac{q x^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{x}{7a} \right) dx = -\frac{5}{49} qa \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} + \frac{qa}{7 \cdot 7} \left(25 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 31 \cdot 5 \cdot a \cdot x - \right. \\
 &- \left. 31 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a + \frac{q}{7a} \left(\frac{23}{7} a \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{4a} = qa^3 \left[-\frac{5 \cdot 8}{49 \cdot 3} + \frac{1}{49} \left(\frac{25}{2} - \frac{5}{3} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. 155 - \frac{31}{2} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{23 \cdot 64}{3 \cdot 7} - \frac{16 \cdot 16}{8} \right) \right] = qa^3 \left[-\frac{40}{49 \cdot 3} + \frac{1}{49} \left(152 - \frac{5}{3} \right) + \frac{32}{7} \left(\frac{46}{3 \cdot 7} - 1 \right) \right] = \\
 &= \frac{qa^3}{49 \cdot 3} (-40 + 451 + 32 \cdot 25) = \boxed{\frac{1211}{49 \cdot 3} qa^3}
 \end{aligned}$$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Aplicarea teoremei MOHR-MAXWELL

Derivatele parțiale în raport cu M și K ale expresiilor $M_{i2}(x_i)$ se pot calcula ca eforturi sectionale din 2 stări fictive de încărcare



$$\sum Y_i = 0: v_1^1 + v_2^1 = 1$$

$$\textcircled{1} (\sum M_i)_2 = 0: v_1^1 \cdot 7a = 1.5a \Rightarrow v_1^1 = \frac{5}{7}$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: v_2^1 \cdot 7a = 1.2a \Rightarrow v_2^1 = \frac{2}{7}$$

$$m^1(x_3) = \frac{2}{7} \cdot x = \frac{\partial M_{i2}(x_3)}{\partial K}$$

$$m^1(x_1) = \frac{5}{7} \cdot x = \frac{\partial M_{i2}(x_1)}{\partial K}; m^1(x_2) = \frac{5}{7} \cdot (2a+x) - 1 \cdot x = \frac{10}{7}a - \frac{2}{7} \cdot x = \frac{\partial M_{i2}(x_2)}{\partial K}$$

$$\sum Y_i = 0: v_1^2 + v_2^2 = 0 \Rightarrow v_1^2 = -v_2^2$$

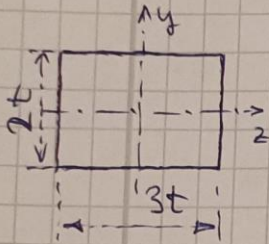
$$\textcircled{2} (\sum M_i)_2 = 0: v_1^2 \cdot 7a + 1 = 0 \Rightarrow v_1^2 = -\frac{1}{7a}$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: v_2^2 \cdot 7a = 1 \Rightarrow v_2^2 = +\frac{1}{7a}$$

$$m^2(x_3) = +\frac{1}{7a} \cdot x = \frac{\partial M_{i2}(x_3)}{\partial M}$$

$$m^2(x_1) = -\frac{1}{7a} \cdot x = \frac{\partial M_{i2}(x_1)}{\partial M}; m^2(x_2) = -\frac{1}{7a} \cdot (x+2a) + 1 = \frac{5}{7} - \frac{x}{7a} = \frac{\partial M_{i2}(x_2)}{\partial M}$$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte



Să se dimensioneze bara de mai sus, considerând că are secțiunea transversală ca în figura alăturată și:

$$\text{c} \ddot{a} \ a = 0,2 \text{ m}; \ q = 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}}; \ \sigma_a = 160 \text{ MPa}; \ E = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Să se calculeze apoi valorile celor 2 deplasări din punctul B.

$$\text{Rezolvare: } I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{3t(2t)^3}{12} = \boxed{2 \cdot t^4} \quad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{3t \cdot (2t)^2}{6} = \boxed{2 \cdot t^3}$$

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{M_{iz \text{ max}}}{W_z} = \frac{1}{2t^3} \cdot \frac{529}{98} qa^2 \leq \sigma_a \quad (*)$$

$$\Rightarrow t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{529}{2 \cdot 98} \cdot \frac{20 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (200 \text{ mm})^2}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = \sqrt[3]{\frac{5290}{98 \cdot 4}} \cdot 10 \text{ mm} = 23,80876 \text{ mm}$$

Se adoptă $t_{\text{ad}} = 24 \text{ mm}$

Secțiunea va avea dimensiunile $72 \text{ mm} \times 48 \text{ mm}$

Calculul deplasărilor la încovoierea barelor drepte

Calculul numeric al celor două deplasări

a) Valoarea rotirii din B depinde de următorul parametru

$$\frac{qa^3}{E \cdot I_2} = \frac{20 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (200 \text{ mm})^3}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2 \cdot (24 \text{ mm})^4} = \frac{20 \cdot 8 \cdot 10^6}{21 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 8^4 \cdot 3^4} = \frac{125}{21 \cdot 64 \cdot 81} \text{ [rad]}$$

Se obține că $\frac{qa^3}{EI_2} = 0,0011 \text{ rad} = 0,063 \text{ grad}$

$$\Rightarrow \varphi(B) = \frac{1211}{49 \cdot 3} \frac{qa^3}{EI_2} \approx \underline{1,25 \text{ grad}}$$

b) Valoarea deplasării verticale din B

$$\frac{qa^4}{E \cdot I_2} = \frac{20 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (200 \text{ mm})^4}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2 \cdot (24 \text{ mm})^4} = \frac{16 \cdot 10^4 \cdot 10^4}{21 \cdot 10^4 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 9 \cdot 9} \text{ mm} = \frac{625}{16 \cdot 81 \cdot 21} \text{ mm}$$

Se obține $\frac{qa^4}{EI_2} = 0,023 \text{ mm} \Rightarrow v(B) = \frac{2702}{49 \cdot 3} \frac{qa^4}{EI_2} = \underline{0,423 \text{ mm}}$

Ambele rezultate s-au obținut pozitive, adică deplasările se produc chiar în sensul momentului M, respectiv al forței imaginare K.

