

Rezistența materialelor 2

Sinteze de seminar

Conf. dr.ing. Marian MAREȘ

CUPRINS

2.1_Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri	p. 3
2.2_Calculul grinzilor plane cu zăbrele	p. 23
2.3_Forțe înclinate față de axele principale ale barelor	p. 46
2.4_Solicitări prin forțe axiale excentrice	p. 69
2.5_Calculul barelor cotite formate din segmente drepte	p. 90
2.6_Bare cotite care conțin nedeterminări interioare	p. 113
2.7_Bare în formă de arc de cerc	p. 126
2.8_Bare cotite care conțin contururi închise. Aplicații	p. 134
2.9_Răsucirea barelor cu secțiuni transversale necirculare	p. 145
2.10_Vase cu pereți subțiri care conțin lichide	p. 155
2.11_Tuburi cilindrice cu pereți groși	p. 170
2.12_Solicitări mecanice aplicate prin șocuri	p. 183
2.13_Calculul la oboseală în cazul arborilor de transmisie	p. 195

2.1

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Etape de lucru la calculul de flambaj longitudinal

Pentru o bară comprimată complet cunoscută, valoarea numerică a coeficientului ei de subțirime stabilește modul cum se va studia probabilitatea de pierdere a stabilității sale elastice: poziția acestui număr λ pe axa absciselor din graficul de variație a tensiunii critice arată în ce domeniu de flambaj se încadrează bara, deci relațiile de calcul care îi sunt potrivite.

Principiul de bază în calculele de stabilitate este că funcționarea sigură a barei se obține dacă valoarea efectivă (c_{ef}) – din relația *fundamentală* a flambajului – a coeficientului de siguranță la flambaj este cel puțin egală cu valoarea impusă prin enunțul problemei sau prin tema de proiectare. În funcție de cerințe, etapele de lucru se parcurg așa cum se arată în continuare.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

A. Pentru cazurile în care caracteristicile barei sunt cunoscute

⇒ Se stabilește coeficientul λ , folosind relația lui de definiție.

⇒ Dacă $\lambda < \lambda_1$ – bara cedează prin **compresiune**, încât calculele de rezistență se fac la fel ca la solicitările axiale.

⇒ Dacă $\lambda \in [\lambda_1; \lambda_0)$ – flambajul are loc în domeniul **elasto-plastic**; se calculează σ_{cr} din relația *Tetmajer*, apoi din condiția *fundamentală* de stabilitate se obține **forța maximă** aplicabilă barei, sau se **verifică** bara, din condiția $C_{ef} \geq C_{impus}$.

⇒ Dacă $\lambda \in [\lambda_0; \lambda_2]$ – flambajul barei este de tip **elastic**; forța critică se determină din relația *Euler*, apoi se face *verificarea* barei, sau calculul **forței sale capabile**, ca mai sus.

⇒ Dacă $\lambda > \lambda_2$ – bara e prea zveltă (adică *incorect dimensionată*) și trebuie regândită.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

B. Pentru dimensionarea barei

În acest caz nu se cunosc dimensiunile secțiunii transversale (deși se știe forma ei, adică proporțiile între dimensiuni), astfel încât nu poate fi stabilită valoarea coeficientului de zveltețe.

⇒ Se face **presupunerea** că bara flambează în domeniul **elastic** (adică valoarea efectivă a lui λ se află situată *la dreapta* limitei λ_0 care corespunde materialului barei).

⇒ Din relația *Euler* (punând $F_{cr} = c_{impus} \times F_{ef}$) se obține valoarea *minimă necesară* a momentului de inerție al secțiunii transversale, din care se calculează valoarea de pornire a dimensiunii secțiunii (adică se *pre-dimensionează* bara).

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

⇒ Folosind această dimensiune de pornire (rotunjită prin adaos!) se calculează coeficientul λ_{ef} al barei.

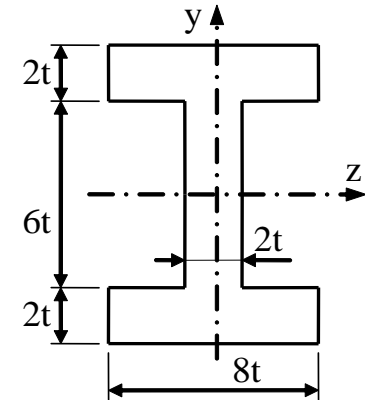
⇒ Dacă $\lambda_{ef} \geq \lambda_0$ – bara este deja dimensionată în mod corect și problema este rezolvată, adică dimensiunea stabilită mai sus poate fi adoptată ca definitivă.

⇒ Dacă $\lambda_{ef} < \lambda_0$ – presupunerea făcută inițial nu este confirmată și bara trebuie verificată, după regulile cunoscute pentru flambajul de tip *elasto-plastic*; în principiu, se va obține un coeficient de siguranță de valoare insuficientă, încât dimensiunile secțiunii trebuie *mărite* treptat, refăcând calculele de *verificare*, până când condiția de siguranță este îndeplinită.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicații

1. Să se calculeze forța de comprimare *suportabilă* pentru o tijă de lungime L , având secțiunea transversală ca în figură, *încastrată și articulată* la capete; tija este din OL37, având $E=21 \cdot 10^4 \text{MPa}$ și parametrii $L=0,6\text{m}$ și $t=4\text{mm}$; coeficientul de siguranță la flambaj se impune a fi $c=4$.



Rezolvare

Secțiunea are două axe de simetrie, axe principale centrale ale secțiunii, iar momentele principale centrale vor fi:

$$I_z = \frac{8t \cdot (10t)^3}{12} - 2 \cdot \frac{3t \cdot (6t)^3}{12} = \frac{1838}{3} t^4 \quad I_y = \frac{6t \cdot (2t)^3}{12} + 2 \cdot \frac{2t \cdot (8t)^3}{12} = \frac{524}{3} t^4$$

Pentru momentul față de axa z s-a făcut scăderea între momentul secțiunii brute și al celor două dreptunghiuri “verticale” ($3t \cdot 6t$); față de axa y s-a descompus secțiunea în două dreptunghiuri “orizontale” ($8t \cdot 2t$) și unul vertical – “inima” profilului – ($2t \cdot 6t$).

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 1

Momentul minim de inerție se obține față de axa de flambaj y , iar aria secțiunii este $A=44t^2$, astfel încât raza ei minimă de inerție va fi:

$$i_{\min} = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{524}{3} t^4 \cdot \frac{1}{44 t^2}} = t \sqrt{\frac{131}{33}} = 1,992 t$$

Din modul de rezemare rezultă lungimea de flambaj $L_f=0,707 \cdot L$; coeficientul de zveltețe al tijei este:

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{0,707 \cdot 600 \text{ mm}}{1,992 \cdot 4 \text{ mm}} = 53,238 \cong 53,2$$

Bara flambează *elasto-plastic*, cu tensiunea critică dată de relația Tetmajer și coeficienții indicați; din condiția *fundamentală* rezultă forța suportabilă a tijei:

$$F_{\max} = \frac{F_{\text{cr}}}{c_{\text{impus}}} = \frac{A \cdot \sigma_{\text{cr}}}{c} = \frac{44 t^2 (a - b \cdot \lambda)}{c}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 1

Înlocuind valorile numerice din problemă, se ajunge la valoarea maximă a forței de comprimare pe care bara considerată o poate suporta:

$$F_{\max} = \frac{44 \cdot (4\text{mm})^2 (304 - 1,12 \cdot 53,2) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{4} = 43,018\text{kN}$$

Observații:

1. Dacă valoarea coeficientului de zveltețe ar fi fost mai mare decât 105, atunci forța critică s-ar fi calculat folosind relația lui Euler.
2. Se remarcă efectuarea calculelor sub formă *literală*, până la obținerea relației matematice finale, singura în care (cu excepția determinării coeficientului λ) s-au făcut apoi înlocuiri numerice.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicații

2. Să se dimensioneze o bară *articulată* la capete, de secțiune dreptunghiulară, cu raportul laturilor $h/b=2$; bara este din oțel, cu $E = 21 \cdot 10^4 \text{MPa}$, are lungimea $L=0.5\text{m}$, forța preluată este $F_{\text{ef}}=10^4\text{N}$, iar coeficientul de siguranță la flambaj se va lua $c=3$.

Rezolvare

Coeficientul efectiv de zveltețe nu poate fi calculat, întrucât nu se cunosc dimensiunile transversale ale barei; se începe, așadar, de la *presupunerea* că flambajul barei se produce în domeniul *elastic* al materialului ei ($\lambda_{\text{ef}} \geq 105$); definiția coeficientului de siguranță dă $F_{\text{cr}} = c \cdot F_{\text{ef}}$, iar din relația *Euler* se poate calcula valoarea momentuilor de inerție *necesar* al secțiunii:

$$I_{\text{min nec}} = \frac{c \cdot F_{\text{ef}} \cdot L_f^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot (500 \text{ mm})^2}{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 3622,3 \text{ mm}^4$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 2

Pe de altă parte, exprimat în funcție de dimensiunile secțiunii, cel mai mic moment de inerție principal central al secțiunilor barei se scrie:

$$I_{\min} = I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{b^3 \cdot (2b)}{12} = \frac{b^4}{6}$$

Din egalarea celor două valori ale momentului de inerție rezultă o dimensiune *preliminară* a secțiunii transversale: $b = 12,142\text{mm}$; pentru simplitate se adoptă valoarea $b = 15\text{mm}$.

Aceasta ar putea fi dimensiunea finală a secțiunii, dacă ea ar face să fie îndeplinită presupunerea inițială, în legătură cu coeficientul λ ; aria secțiunii transversale a barei fiind $A = 2b^2$, raza ei minimă de inerție este

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{b^4}{6 \cdot 2b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 2

Pe aceste baze, valoarea efectivă a coeficientului de zveltețe λ al barei se calculează astfel:

$$\lambda_{\text{ef}} = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{L}{\frac{b\sqrt{3}}{6}} = \frac{2L\sqrt{3}}{b} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 500 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} = 115,47$$

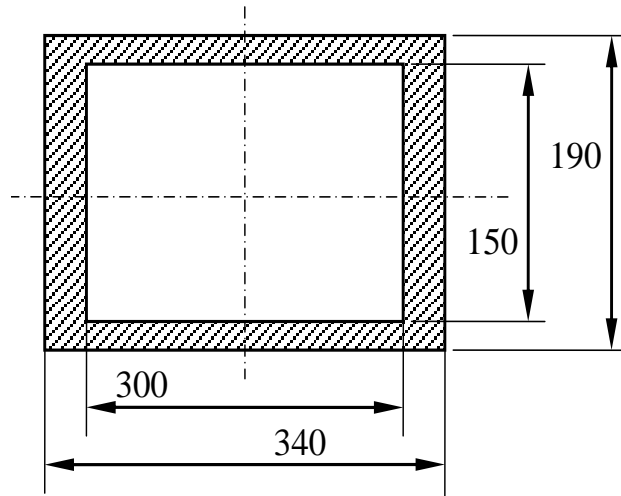
Coeficientul de zveltețe real este plasat, prin urmare, în domeniul flambajului *elastic* de pe graficul tensiunii critice; presupunerea făcută la început a fost așadar corectă, iar dimensionarea barei este valabilă: secțiunea ei dreptunghiulară trebuie să aibă dimensiunile **b=15mm, h=30mm**.

Desigur că, în cazul în care coeficientul λ ar fi avut o valoare mai mică decât 105, parametrul dimensiunilor transversale ar fi trebuit mărit treptat, făcând mereu verificări ale barei cu formula flambajului elasto-plastic.

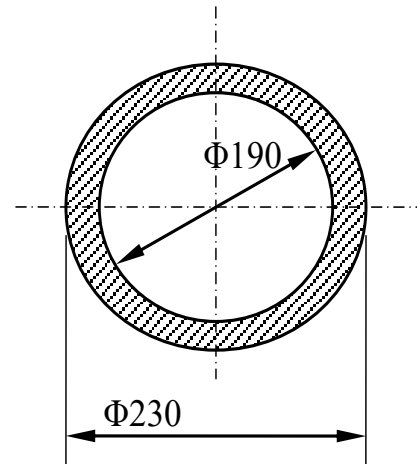
Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicații

3. Să se verifice stabilitatea elastică a unui stâlp din oțel, cu înălțimea de 3 metri, *încastrat* la partea de jos, care trebuie să susțină pe capătul liber o încărcare de 900kN și este realizat în două variante de secțiuni, ca în figura de mai jos.



(a)



(b)

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 3

Rezolvare

Se parcurg etapele precizate mai sus, pentru problemele de verificare la flambajul longitudinal al barelor drepte: se calculează aria transversală A , momentul de inerție I_{\min} , raza de inerție i_{\min} , respectiv coeficientul λ_{ef} (se știe că lungimea de flambaj este, pentru acest caz de rezemare, $2L=6m$), stabilind astfel relația potrivită pentru coeficientul de siguranță la flambaj.

a) Pentru *prima* variantă de secțiune aria transversală este:

$$A = (340 \cdot 190 - 300 \cdot 150) \text{mm}^2 = 19600 \text{mm}^2$$

Momentul de inerție minim se calculează față de axa orizontală de simetrie, în raport cu care materialul secțiunii este așezat mai aproape:

$$I_{\min} = \left(\frac{340 \cdot 190^3}{12} - \frac{300 \cdot 150^3}{12} \right) \text{mm}^4 = 10996,33 \cdot 10^4 \text{mm}^4$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 3

Prin urmare, raza de inerție și coeficientul efectiv de zveltețe se vor calcula astfel:

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = 74,9 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_{\text{ef}} = \frac{2L}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 3000 \text{ mm}}{74,9 \text{ mm}} = 80,1$$

Acest rezultat arată că stâlpul flambează *elasto-plastic*, deci coeficientul său de siguranță va fi:

$$c_{\text{ef}} = \frac{A(a - b \cdot \lambda_{\text{ef}})}{F_{\text{ef}}} = \frac{19600 \text{ mm}^2 (304 - 1,12 \cdot 80,1) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{9 \cdot 10^5 \text{ N}} = 4,66$$

Valoarea obținută este suficient de mare pentru a admite că stâlpul calculat nu este în pericol să-și piardă stabilitatea elastică.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 3

b) În cazul secțiunii **inelare** calculele menționate în etapa anterioară se fac după cum urmează:

$$A = \frac{\pi}{4} (230^2 - 190^2) \text{ mm}^2 = 4200 \pi \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} (230^2 - 190^2) (230^2 + 190^2) \text{ mm}^4 = \frac{4200 \pi}{16} (230^2 + 190^2) \text{ mm}^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{\sqrt{230^2 + 190^2}}{4} \text{ mm} \Rightarrow \lambda_{\text{ef}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3000 \text{ mm}}{\sqrt{230^2 + 190^2} \text{ mm}} = 80,45$$

Și pentru acest caz se obține că flambajul barei se produce în domeniul *elasto-plastic*, astfel încât valoarea efectivă a coeficientului său de siguranță se obține din formula bazată pe relația Tetmajer, astfel:

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 3

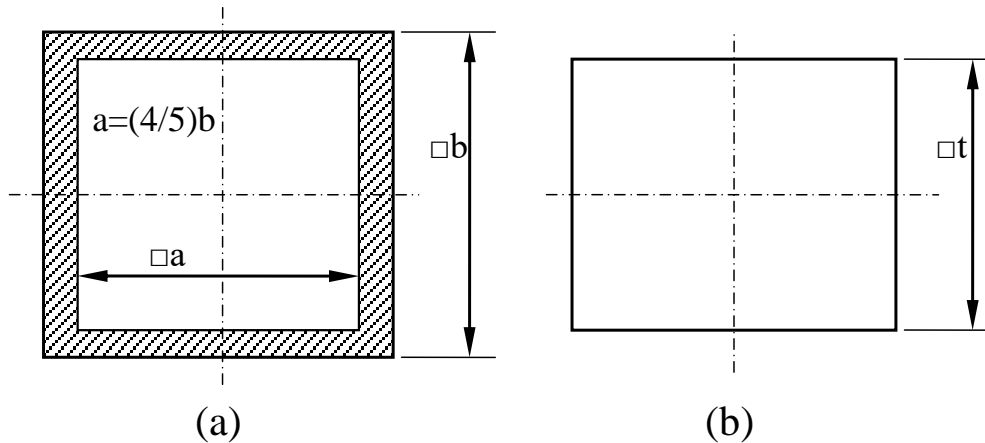
$$c_{ef} = \frac{4200 \pi \text{ mm}^2 (304 - 1,12 \cdot 80,45) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{9 \cdot 10^5 \text{ N}} = 3,13$$

Prin urmare, varianta inelară de secțiune conferă stâlpului calculat stabilitate elastică, la comprimare longitudinală, cu un coeficient de siguranță 3; dacă tema de proiectare sau beneficiarul proiectului solicită să se asigure pentru funcționarea stâlpului un grad mai mare siguranță, atunci bara trebuie să fie redimensionată, în sensul creșterii dimensiunilor sale transversale.

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicații

4. Un stâlp vertical din OL37 are înălțimea $H = 4$ metri și trebuie să suporte pe capătul liber o forță de 600kN, cu un coeficient de siguranță $c = 3$; se propun două variante de secțiuni transversale, constante pe înălțimea stâlpului: una *pătrată cu gol* (raportul laturilor celor două pătrate fiind $4/5$), cealaltă *pătrată plină*. Să se dimensioneze stâlpul în ambele variante, stabilind cum se modifică, de la una la alta, volumul de material pentru realizarea stâlpului.



Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 4

Rezolvare

Cele două variante de secțiune trebuie să aibă aceeași valoare a momentului minim *necesar* de inerție, calculată pe baza presupunerii că stâlpul flambează elastic.

Se pornește de la formula lui Euler pentru forța critică: $F_{cr} = c \cdot F_{ef} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(2H)^2}$

Valorile numerice ale mărimilor din problemă conduc la valoarea:

$$I_{min}^{nec} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot 4 \cdot (4 \cdot 10^3 \text{ mm})^2}{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \frac{6 \cdot 4^3 \cdot 10^7}{7 \cdot \pi^2} \text{ mm}^4$$

Pentru dimensionarea *inițială* se egalează rezultatul cu expresia momentului de inerție, scrisă în funcție de dimensiunile secțiunii; ambele variante de secțiuni (având câte 4 axe de simetrie) au moment de inerție unic, față de toate axele ce trec prin centrele lor de greutate!

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 4

a) Pentru secțiunea **tubulară** se obține:

$$I_{\min} = I = \frac{b^4 - a^4}{12} = \frac{b^4}{12} \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^4 \right] = \frac{123}{4 \cdot 625} b^4$$

Egalând acest rezultat cu valoarea de mai sus a momentului de inerție se ajunge la valoarea $b=183.4\text{mm} \approx 184\text{mm}$, de unde rezultă că $a=0.8 \cdot b \approx 147\text{mm}$; dimensiunile astfel stabilite vor fi cele *finale* dacă se confirmă că stâlpul proiectat flambează în domeniul elastic:

$$i_{\min}^2 = \frac{b^4 - a^4}{12} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 + a^2}{12} \Rightarrow \lambda_{\text{ef}} = \frac{2 \cdot H \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se obține $\lambda_{\text{ef}}=117,67 > 105$, adică se confirmă flambajul **elastic**, iar dimensiunile de mai sus sunt corecte.

b) Pentru secțiunea **pătrată fără gol** mărimea laturii se calculează astfel:

$$I_{\min} = I = \frac{t^4}{12} = I_{\min}^{\text{nec}} \Rightarrow t_{\min} = 160,7 \text{ mm} \Rightarrow t_{\text{adoptat}} = 161 \text{ mm}$$

Stabilitatea elastică a barelor comprimate lungi și subțiri

Aplicația 4

Pe această bază, coeficientul efectiv de zveltețe va fi:

$$i_{\min}^2 = \frac{I}{t^2} = \frac{t^2}{12} \Rightarrow \lambda_{\text{ef}} = \frac{2 \cdot H \cdot \sqrt{12}}{t} = \frac{2 \cdot 4000 \text{ mm} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{161 \text{ mm}} = 172,12$$

Și aici se confirmă flambajul **elastic**, dimensiunea a fost adoptată corect.

Pentru a stabili diferența de consum de material între variantele de secțiuni se observă că, lungimea fiind aceeași în ambele cazuri, variația de volum este dată de creșterea ariei transversale în cazul secțiunii pline, față de secțiunea tubulară; este deci suficient să se facă raportul dintre variația ariei și aria secțiunii pline:

$$\Delta V = \frac{A_b - A_a}{A_b} = \frac{t^2 - (b^2 - a^2)}{t^2} = \frac{(161^2 - 184^2 + 147^2) \text{ mm}^2}{161^2 \text{ mm}^2} = 0,528$$

Se deduce că folosirea secțiunii tubulare în locul celei pline conduce la o economie importantă de material, în cazul stâlpului aici proiectat diferența dintre cele două variante fiind de peste 50%!

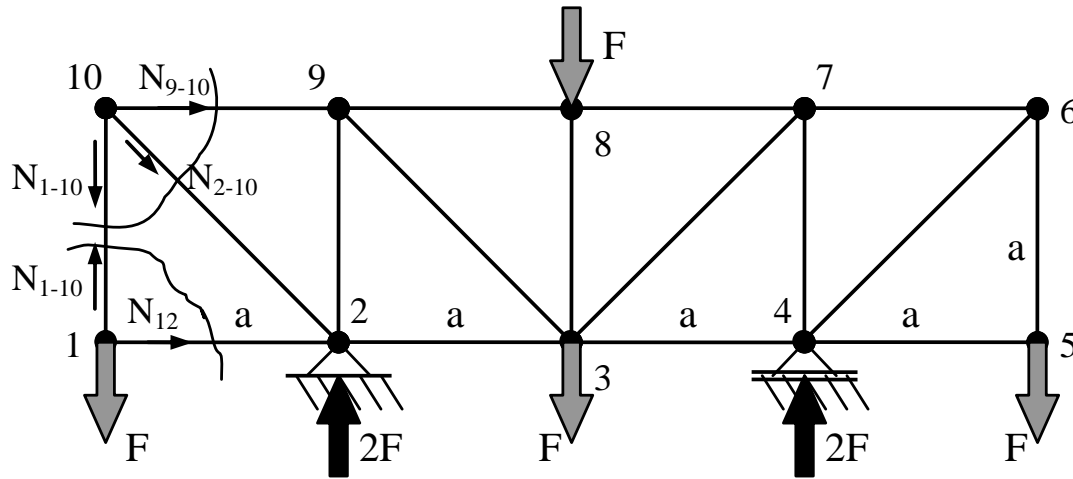
2.2

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Să se dimensioneze barele construcției de mai jos, făcute din oțel laminat cu $E=21 \times 10^4$ și $\sigma_a=160$ [MPa]; barele orizontale și verticale au lungimea $a=0.8\text{m}$, forțele exterioare au mărimea $F=3 \times 10^4$ N, iar coeficientul de siguranță la stabilitate longitudinală este $c=3$; barele au secțiune pătrată de latură t .



Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Pe desen s-au numerotat cele 10 noduri, s-au marcat lungimile a ale barelor și valorile celor două reacțiuni din reazeme: în nodul 2 se află o articulație, în care reacțiunea orizontală nu are oponent pe grindă și este nulă! Pe de altă parte, construcția este *simetrică*, la fel ca încărcarea prin cele 4 forțe F , deci reacțiunile verticale din reazeme trebuie să fie egale între ele, având mărimea $2F$.

Grinda este static determinată și nelabilă – criteriile de construcție sunt îndeplinite – din $N=10$ și $B=17$ rezultă $2 \times 10 = 17 + 3$, iar structura poate fi compusă începând de la oricare triunghi și adăugând mereu două bare prinse într-un nod comun.

a. Calculul eforturilor din bare – prin metoda **izolării nodurilor**

Pentru a nu încărca desenul, au fost marcate doar primele două secționări, făcute în nodurile de pe latura din stânga a construcției.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Nodul 1 are ecuații de echilibru foarte simple, care nu necesită explicații:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{12} = 0 \\ \sum Y_i = 0: N_{1-10} = F \end{cases}$$

Acestea sunt eforturile din primele două bare ale grinzii cu zăbrele.

Observații:

1. După cum s-a arătat, calculul trebuie să înceapă de la un nod în care apar doar două bare și să continue, pe cât posibil, cu noduri având numai câte două bare cu eforturi necunoscute! În vecinătatea nodului 1 doar nodul 10 respectă cerința, astfel încât va fi nodul următor abordat.
2. Toate triunghiurile construcției (în număr de 8) sunt *dreptunghic isoscele*, de unde rezultă că barele oblice sunt înclinate la 45° față de verticală și de orizontală.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

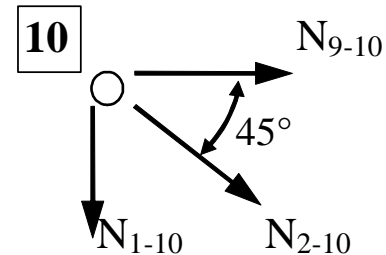
Nodul 10 este intersecția a trei bare, pentru care ecuațiile de echilibru se prezintă astfel:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: N_{9-10} + N_{2-10} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y_i = 0: N_{1-10} + N_{2-10} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

Folosind un rezultat anterior se obține:

$$N_{2-10} = -N_{1-10} \cdot \sqrt{2} = -F \cdot \sqrt{2}$$

$$N_{9-10} = -N_{2-10} \cdot \sqrt{2} = F$$

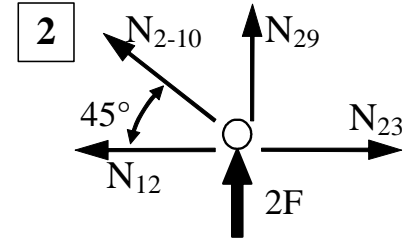


Nodul 2 conține 4 bare (două având eforturi necunoscute), iar în ecuații apare și reacțiunea verticală din acel punct:

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : N_{12} + N_{2-10} \cdot \cos 45^\circ = N_{23} \\ \sum Y_i = 0 : N_{29} + N_{2-10} \cdot \cos 45^\circ + 2F = 0 \end{cases}$$



Folosind rezultatele anterioare se obține că:

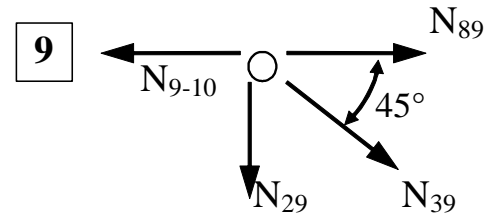
$$N_{23} = N_{2-10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -F \quad N_{29} = -2F - N_{2-10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -F$$

Nodul 9 conține tot 4 bare:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : N_{89} + N_{39} \cdot \cos 45^\circ = N_{9-10} \\ \sum Y_i = 0 : N_{29} + N_{39} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

$$N_{39} = -N_{29} \cdot \sqrt{2} = F \cdot \sqrt{2}$$

De aici rezultă:
$$N_{89} = F - N_{39} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$



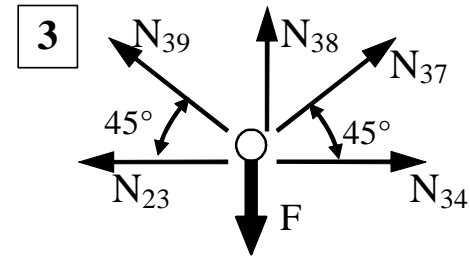
Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Nodul 8 are, pe verticală, două componente: $N_{38} = -F$. Acesta este efortul din a opta bară a grinzii, care închide jumătatea din stânga a construcției; este ultimul rezultat util al acestui calcul, întrucât simetria constructivă și de solicitare se reflectă în identitatea eforturilor din barele plasate simetric față de axa globală a grinzii, ce corespunde cu axa barei 38.

O confirmare se obține din ecuația de echilibru scrisă cu proiecțiile orizontale ale forțelor din nodul 8: $N_{78} = N_{89} = 0$ (conform rezultatului anterior).

Pe de altă parte, rezultă că ecuațiile de echilibru din ultimul nod semnificativ – nodul 3 – se folosesc pentru verificarea datelor deja obținute; trebuie remarcat că echilibrul proiecțiilor pe orizontală ale forțelor din nodul 3 se verifică de la sine, întrucât barele 23 și 39 sunt simetrice, respectiv, cu barele 34 și 37!



Ecuția proiecțiilor verticale se scrie: $\sum Y_i = 0 : N_{38} + 2 \cdot N_{39} \cdot \cos 45^\circ = F$

Se ajunge la: $-F + 2 \cdot F\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = F$ - o identitate, deci datele de mai sus sunt corecte.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Folosind legăturile de simetrie menționate, se scriu valorile eforturilor din cele 17 bare ale grinzii, prezentate în tabelul de sinteză de mai jos.

Bara „ij”	Lungimea L_{ij}	Efortul secțional real N_{ij}	Efortul fictiv n_{ij}	Efortul fictiv n^*_{ij}
1-2	a	0	0	0
2-3	a	-F	0	0
3-4	a	-F	0	-1
4-5	a	0	0	0
5-6	a	F	0	1
6-7	a	F	0	1
7-8	a	0	-1/2	1/2
8-9	a	0	-1/2	1/2
9-10	a	F	0	0

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

1-10	a	F	0	0
2-10	$a\sqrt{2}$	$-F\sqrt{2}$	0	0
2-9	a	-F	-1/2	1/2
3-9	$a\sqrt{2}$	$F\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
3-7	$a\sqrt{2}$	$F\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
3-8	a	-F	0	0
4-7	a	-F	-1/2	-1/2
4-6	$a\sqrt{2}$	$-F\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$

b. Calculul de rezistență – pentru barele grinzii cu zăbrele

Tabelul de valori arată solicitarea periculoasă în **cele patru bare oblice** ale grinzii, cu efortul de valoare maximă $N_{\max} = F\sqrt{2}$; calculul se face pentru barele 4-6 și 2-10, la care efortul este negativ, adică produce **comprimare**; așa cum s-a arătat, dimensionarea se face din condiția de stabilitate longitudinală (flambaj).

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Barele au secțiunea pătrată cu latura t și lungimea $L = a\sqrt{2}$ (egală cu lungimea lor de flambaj L_f); ipoteza de pornire este că *barele flambează elastic* și se pot calcula cu formula lui Euler pentru forța critică:

$$c \cdot F_{ef} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L_f^2}$$

de unde se poate obține o valoare *inițială* a momentului de inerție, respectiv a dimensiunii transversale a secțiunii barelor:

$$\frac{t^4}{12} = I_{\min} = \frac{c \cdot F\sqrt{2} \cdot (a\sqrt{2})^2}{\pi^2 \cdot E}$$

Folosind datele numerice ale grinzii considerate se parcurg etapele finale de calcul:

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

$$t^4 = \frac{12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \sqrt{2} \cdot (800 \text{ mm})^2 \cdot 2}{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^6 \cdot 2}{7 \cdot \pi^2} \text{ mm}^4 = 2^8 \cdot 10^4 \cdot \frac{18\sqrt{2}}{7 \cdot \pi^2} \text{ mm}^4$$

adică $t_{\min} = 31,164 \text{ mm}$, din care se adoptă valoarea $t = 32 \text{ mm}$.

Aceasta poate fi dimensiunea finală a barelor grinzii numai dacă se respectă ipoteza inițială, prin valoarea coeficientului de zveltețe efectiv al barelor; se observă că:

$$i_{\min}^2 = \frac{t^2}{12} \Rightarrow i_{\min} = \frac{t}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_{\text{ef}} = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}}{t} = \frac{2a\sqrt{6}}{t}$$

Datele numerice ale problemei conduc la următorul rezultat:

$$\lambda_{\text{ef}} = \frac{2 \cdot 800 \text{ mm} \cdot \sqrt{6}}{32 \text{ mm}} = 50 \cdot \sqrt{6} = 122,47$$

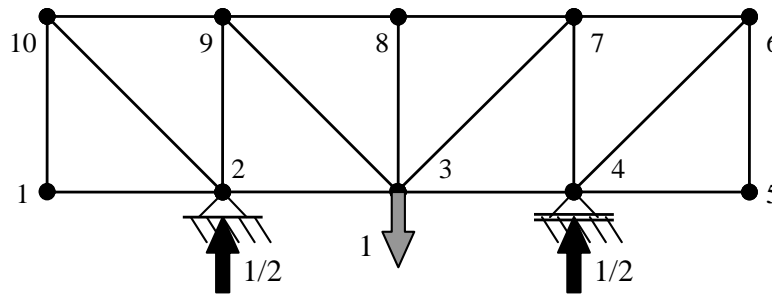
Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Valoarea este mai mare decât 105, limita la stânga, pentru oțelurile laminate, a domeniului Euler pentru forța critică de flambaj, deci calculele au fost corecte și grinda poate fi construită din bare de secțiune pătrată cu latura $t = 32\text{mm}$.

d. Calculul *deplasărilor*, pe verticală – pentru nodurile 3 și 5 ale grinzii

Încărcarea fictivă, cu forță *verticală* de o unitate (fără dimensiuni!), se face mai întâi în **nodul 3** al grinzii: calculul este simplificat de *simetria* solicitării (din care rezultă și valorile reacțiunilor din cele două reazeme ale grinzii), care permite ca studiul eforturilor să se facă *pe o jumătate* a construcției.



Calculul grinzilor plane cu zăbrele

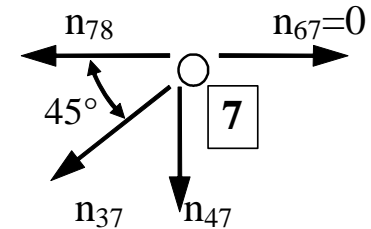
Aplicația 1

Dacă se alege partea din dreapta, se observă că izolarea succesivă a nodurilor 5, 6, 4 și 8 permite să se calculeze foarte ușor valorile următoarelor eforturi:

$$n_{45} = n_{56} = n_{46} = n_{67} = n_{34} = n_{38} = 0, n_{47} = -1/2$$

Se izolează apoi nodul 7, în care ecuațiile se scriu astfel:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : n_{78} + n_{37} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y_i = 0 : n_{47} + n_{37} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$



Folosind un rezultat anterior se obține:

$$n_{37} = -n_{47} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; n_{78} = -n_{37} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Valorile obținute sunt valabile și pentru barele simetrice cu cele calculate, față de axa mediană verticală a construcției, iar aceste eforturi fictive n_{ij} sunt

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

cuprinse și ele în tabelul de mai sus al rezultatelor problemei; echilibrul eforturilor din ultimul nod semnificativ – nodul 3 – se scrie simplu, doar două bare, cele oblice, având eforturi nenule; proiecțiile lor orizontale sunt de la sine în echilibru, datorită poziției simetrice a barelor în grinda considerată, iar suma proiecțiilor verticale ale forțelor se scrie:

$$2 \cdot n_{37} \cdot \cos 45^\circ = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

Ecuția este verificată, iar valorile calculate pot fi admise ca fiind corecte; folosind datele din tabelul de sinteză (coloanele 2, 3 și 4) și relația generală a deplasărilor, cu observația că barele au aceeași rigiditate axială ($E \cdot A$), deplasarea pe verticală a nodului 3 va fi (termenii dintre paranteze sunt trecuți în ordinea din tabel a barelor, fiind neglijați cei pentru care unul dintre factori este nul!):

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

$$\delta_v(3) = \frac{1}{E \cdot A} \left[2 \cdot F\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} + 2 \cdot (-F) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a \right] = \frac{F \cdot a}{E \cdot A} [2\sqrt{2} + 1]$$

Observații

1. Din tabel se deduce că, pentru 13 dintre cele 17 bare ale grinzii, este nul măcar unul dintre eforturile secționale (cel real N_{ij} , respectiv cel din starea de încărcare fictivă n_{ij}), încât în suma din paranteza de mai sus apar doar termenii ce corespund celor 4 bare cu eforturi de valori semnificative – acestea sunt simetrice în perechi – 37 cu 39 și 47 cu 29, de unde provine factorul 2 din fiecare termen din paranteză.
2. Rezultatul calculelor este *pozitiv*, deci deplasarea nodului 3 se produce **în jos** (în sensul forței unitare fictive care s-a introdus în acel nod).

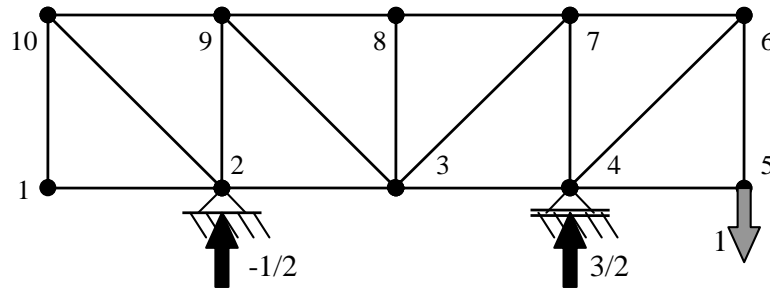
Folosind datele problemei se poate stabili valoarea concretă a deplasării calculate, astfel:

$$\delta_v(3) = (2\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm}}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (32 \text{ mm})^2} = (2\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{800}{7 \cdot 1024} \text{ mm} = 0,427 \text{ mm}$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Calculul deplasării pe verticală a nodului 5 este mult mai laborios, deoarece solicitarea din starea fictivă care îi corespunde *nu mai este simetrică*, astfel încât pentru această stare trebuie stabilite prin calcul eforturile (care se notează cu n^*_{ij}) din toate cele 17 bare ale grinzii.



Se observă că nici reacțiunile din reazeme (care au fost calculate separat, din ecuațiile globale de echilibru) nu mai sunt egale între ele și nu au nici măcar aceeași orientare!

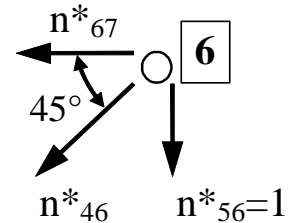
Se vor calcula eforturile prin metoda izolării nodurilor, cu mențiunea că toate valorile acestora au fost deja incluse în tabelul de rezultate de mai sus.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Din **nodul 5** se obțin $n^*_{45} = 0$, respectiv $n^*_{56} = 1$.

Nodul 6
$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : n^*_{67} + n^*_{46} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y_i = 0 : n^*_{56} + n^*_{46} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

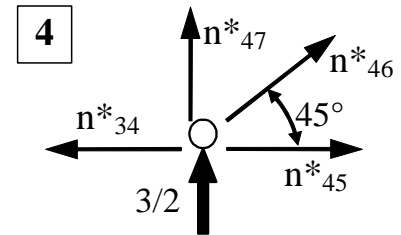


Folosind rezultatul anterior rezultă:

$$n^*_{46} = -n^*_{56} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$n^*_{67} = -n^*_{46} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

Nodul 4
$$\begin{cases} \sum X_i = 0 : n^*_{45} + n^*_{46} \cdot \cos 45^\circ = n^*_{34} \\ \sum Y_i = 0 : n^*_{47} + n^*_{46} \cdot \cos 45^\circ + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

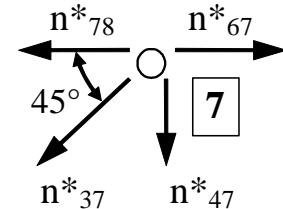


Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

$$\begin{cases} 0 + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = n^*_{34} \\ n^*_{47} + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^*_{34} = -1 \\ n^*_{47} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nodul 7 $\begin{cases} \sum X_i = 0: n^*_{78} + n^*_{37} \cdot \cos 45^\circ = n^*_{67} \\ \sum Y_i = 0: n^*_{47} + n^*_{37} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$



$$\begin{cases} n^*_{78} + n^*_{37} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \\ -\frac{1}{2} + n^*_{37} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^*_{37} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n^*_{78} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nodul 8 Aici rezultatele se obțin imediat: $n^*_{89} = n^*_{78} = \frac{1}{2}$, respectiv $n^*_{38} = 0$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Nodurile 1 și 10

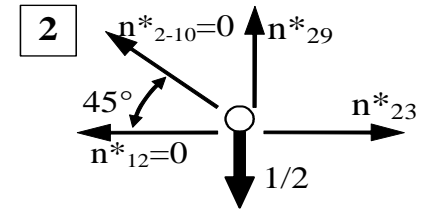
Ecuțiile din aceste noduri dau valorile:

$$n^*_{12} = n^*_{1-10} = n^*_{2-10} = n^*_{9-10} = 0$$

Nodul 2

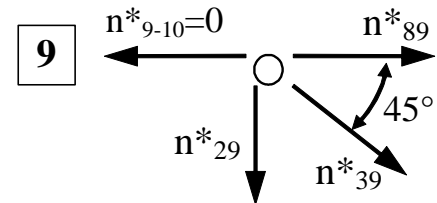
Aici ecuațiile conțin doar trei termeni de forță, întrucât cele două componente din partea stângă a figuri sunt egale cu zero, astfel că se obține:

$$n^*_{23} = 0, \text{ respectiv } n^*_{29} = \frac{1}{2}$$



Nodul 9

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: n^*_{89} + n^*_{39} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum Y_i = 0: n^*_{29} + n^*_{39} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$



de unde rezultă următoarele:

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

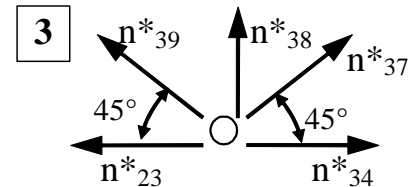
Aplicația 1

$$n^*_{39} = -n^*_{29} \cdot \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Cea de-a doua ecuație este deja una de verificare și se observă că reprezintă o *identitate*, arătând că valorile pe care le include sunt corecte. Verificarea finală se face în ultimul nod al grinzii, singurul în care se întâlnesc cinci bare:

Nodul 3

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: n^*_{34} + n^*_{37} \cdot \cos 45^\circ = n^*_{23} + n^*_{39} \cdot \cos 45^\circ \\ \sum Y_i = 0: n^*_{38} + n^*_{39} \cdot \cos 45^\circ + n^*_{37} \cdot \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$



Folosind rezultatele anterioare rezultă:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \end{aligned}$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

Aplicația 1

Relațiile sunt identități, valorile eforturilor sunt corecte. Pentru deplasarea pe verticală a nodului 5, termenii semnificativi (la care ambele eforturi – cel real N_{ij} și cel fictiv n^*_{ij} – sunt nenule) sunt dați de doar 8 dintre barele construcției - numerotate 34, 56, 67, 29, 39, 37, 47 și 46; termenii lor apar, în această ordine, între parantezele drepte din expresia următoare:

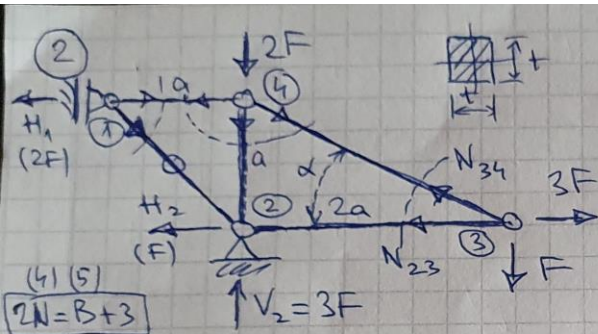
$$\delta_v(5) = \frac{1}{E \cdot A} \left[(-F) \cdot (-1) \cdot a + F \cdot 1 \cdot a + F \cdot 1 \cdot a + (-F) \cdot \frac{1}{2} \cdot a + F\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot a\sqrt{2} + F\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} + (-F) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a + (-F\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot a\sqrt{2} \right] = \frac{F \cdot a}{E \cdot A} (3 + 2\sqrt{2})$$

Rezultatul este *pozitiv*, nodul 5 se deplasează **în jos**, în sensul forței unitare din starea de încărcare fictivă; folosind datele numerice din problemă se poate calcula și valoarea reală a acestei deplasări, astfel:

$$\delta_v(5) = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm}}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (32 \text{ mm})^2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = \frac{800}{7 \cdot 1024} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \text{ mm} = 0,65 \text{ mm}$$

Mai trebuie observat că valorile ambelor deplasări calculate sunt pertinente și confirmă plasarea în domeniul *elastic* a deformațiilor pe care le capătă barele grinzii cu zăbrele, sub acțiunea încărcărilor pe care trebuie să le suporte.

Calculul grinzilor plane cu zăbrele



Să se dimensioneze: $F = 10^4 \text{ N}$; $\nu = 2,1$

$a = 0,6 \text{ m}$; $\sigma_a = 160$; $E = 21 \cdot 10^4 \text{ [MPa]}$

Rezolvare: - calculul reacțiilor

$$\sum X_i = 0: H_1 + H_2 = 3F$$

$$(\sum M_i)_2 = 0: H_1 \cdot \alpha = F \cdot 2a$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: H_2 \cdot \alpha = 3F \cdot \alpha - 2F \cdot \alpha - F \cdot 3a + V_2 \cdot \alpha \Rightarrow H_2 = F$$

Din triunghiul din partea dreaptă: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

- Calculul eforturilor din bare - metoda izolării nodurilor

$$\textcircled{3} \begin{cases} \sum X_i = 0: N_{23} + N_{34} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 3F \Rightarrow N_{23} = F \\ \sum Y_i = 0: N_{34} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = F \Rightarrow N_{34} = F\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} N_{14} = N_{34} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow N_{14} = 2F \\ N_{24} + N_{34} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2F = 0 \Rightarrow N_{24} = -3F \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2F = N_{14} + N_{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ N_{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow N_{12} = 0$$

Calculul grinzilor plane cu zăbrele

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sum X_i = 0: & H_2 = N_{23} \quad \checkmark \\ \sum Y_i = 0: & V_2 + N_{24} = 0 \quad \checkmark \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Solicitarea maximă: } N_{\max} = N_{24} = \underline{3F} \\ L_{24} = \cancel{a} = L_f! \end{array}$$

Dimensionarea se va face direct din flambaj: $I_{\min} = \frac{t^4}{12}$

Se presupune elastic flambajul barei 24 $\Rightarrow \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{L_f^2} = \kappa \cdot F_{ef}$

$$\Rightarrow I_{\min} = \frac{\kappa \cdot F_{ef} \cdot L_f^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{t^4}{12} \Rightarrow t^4 = \frac{12 \cdot 2,1 \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot (600 \text{ mm})^2}{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Se obține $t_{\min} = 6\sqrt{10} \text{ mm} \Rightarrow \boxed{t_{ad} = 20 \text{ mm}}$

Trebuie verificat domeniul de flambaj: $i_{\min}^2 = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^4}{12} = \frac{t^2}{12}$

$$\Rightarrow i_{\min} = \frac{t}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_{ef} = \frac{L_f}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{3}}{t} = \frac{2 \cdot 600 \text{ mm} \cdot \sqrt{3}}{20} = \underline{\underline{103,9}} < \underline{\underline{105}}$$

Trebuie calculat κ_{ef} pe baza relației T-I:

$$\kappa_{ef} = \frac{t^2 \cdot (a - b \cdot \lambda_{ef})}{F_{ef}} = \frac{(20 \text{ mm})^2 \cdot (304 - 1,12 \cdot 104) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{3 \cdot 10^4 \text{ N}} = \underline{\underline{2,5}} > \underline{\underline{\kappa_{imp}}}$$

Dimensiunea finală a barei este $t = 20 \text{ mm}$

2.3

**Solicitări prin forțe înclinate
față de axele principale ale
barelor**

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

Calcul de rezistență și de rigiditate la solicitările compuse

În capitolele anterioare s-a discutat în exclusivitate despre încărcări aplicate barelor drepte la care *eforturile* din secțiunile transversale (cele importante pentru calcule) erau **de un singur fel**, adică aveau o singură componentă nenulă, dirijată fie pe direcția *axei longitudinale* a barei, fie pe a uneia dintre *axele principale centrale* din secțiunile ei; astfel de solicitări se numesc **simple** și nu au echivoc privind stabilirea tensiunilor *periculoase* pentru integritatea barei, respectiv a valorii lor maxime, introdusă apoi în condiția de rezistență.

Prin contrast există multe situații practice în care solicitările sunt **compuse**, adică în secțiuni apar eforturi și tensiuni de cel puțin două categorii diferite; acestea sunt analizate separat, stabilind punctele din bară unde se produc cele mai mari tensiuni și în acele puncte sunt calculate efectele **globale**, în două modalități distincte:

- a) dacă tensiunile elementare sunt de *aceeași natură și la fel orientate* față de secțiunile transversale, atunci valorile lor dintr-un punct oarecare al barei se pot *aduna* algebric, rezultatul fiind numit **tensiune rezultantă** $\sigma_{\text{rez}}(x)$ sau $\tau_{\text{rez}}(x)$;
- b) dacă respectivele tensiuni sunt *orientate diferit sau au naturi diferite*, atunci sumarea algebrică nu este posibilă și efectul global este calculat ca **tensiune echivalentă** $\sigma_{\text{ech}}(x)$, folosindu-se una dintre teoriile de rupere cunoscute.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

Calcul de rezistență și de rigiditate la solicitările compuse

La finalul acestor operații valoarea cea mai mare a tensiunii globale se introduce în *condiția de rezistență*, adică se compară cu *rezistența admisibilă* (aleasă conform cu felul tensiunii globale) a materialului barei. Calculele de *rigiditate*, referitoare adică la deplasările și deformațiile unor puncte și segmente de puncte din bara analizată, se fac după principiile de la solicitările simple, luând în considerare efectele de deformare produse de *toate* solicitările elementare ce au loc simultan în bară.

Prin **axe principale** atașate unei bare se înțeleg axa ei *longitudinală*, notată cu **x** în sistemul tipic de coordonate folosit în rezistența materialelor, plus axele *principale centrale* de inerție, notate cu **z** (cea orizontală), respectiv cu **y**, ale secțiunilor transversale.

În scopul de a stabili ce tipuri de solicitări sunt produse de forțele cu orientări oarecare, se procedează la proiectarea fiecărei forțe care se analizează pe direcțiile axelor menționate, analizând apoi eforturile secționale *nenule* ce apar în bară și care pot fi de **șase** categorii:

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

Calcul de rezistență și de rigiditate la solicitările compuse

- a) proiecția pe axa x a unei forțe produce *întindere* sau *comprimare*, cu tensiuni care se distribuie *uniform* pe secțiunile transversale;
- b) proiecțiile pe y și z tind să producă *forfecare*, pentru care tensiunile sunt (cu excepția corpurilor masive, de tip bloc) *puțin semnificative* (pentru calculul de rezistență) față de efectele date de celelalte solicitări;
- c) dacă direcția forței nu întâlnește axa x a barei, atunci proiecția ei pe un plan perpendicular pe această axă va produce *moment de răsucire*; cazul în care se compun tensiuni σ și τ va fi discutat separat, astfel încât în acest capitol va fi vorba numai despre forțe (transversale) care *întâlnesc* axa x ;
- d) în fine, proiecțiile pe axele y și z produc și momente de *încovoiere*, în raport cu axele z , respectiv y din secțiunile aflate *la distanță* de punctele lor de aplicare.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

Calcul de rezistență și de rigiditate la solicitările compuse

Efectele din ultima categorie necesită o detaliere privind modul cum se calculează tensiunile pe care le produc; pentru fiecare moment secțional *axa de încovoiere* coincide cu direcția momentului, iar tensiunile sunt proporționale cu *distanța până la această axă* a fibrei unde se face calculul, conform relației lui Navier:

$$\sigma_{\text{inc } z}(x, y) = \frac{M_{iz}(x) \cdot y}{I_z} \quad \text{respectiv} \quad \sigma_{\text{inc } y}(x, z) = \frac{M_{iy}(x) \cdot z}{I_y}$$

Prin urmare, tensiunile sunt **nule** pe axa de încovoiere, care din acest motiv se numește **axă neutră** (notată de obicei **A.N.**) a secțiunii, *pentru solicitarea respectivă* și ating valorile **maxime** în punctele de pe secțiune aflate *la distanța cea mai mare* față de axa neutră, adică la *extremitățile* ei (față de direcția momentului ce produce încovoierea); se reamintește și că tensiunile de încovoiere au *semne contrare*, de o parte și de alta a respectivei axe neutre a secțiunii. Aceste noțiuni vor fi utilizate în discuțiile următoare, cu scopul de a se stabili valoarea *tensiunilor globale maxime* și respectiv plasarea lor pe secțiunile barelor analizate.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei

Se înțelege prin plan *longitudinal* unul format de axele **y** sau **z** cu axa **x** a barei; discuția se poate face pentru oricare dintre ele, iar pentru simplitate se alege planul „vertical”, acela care conține axa **y**; încărcarea exterioară este dată de cel puțin o forță, cuprinsă în acest plan și înclinată sub un unghi α în raport cu axa **x** a barei.

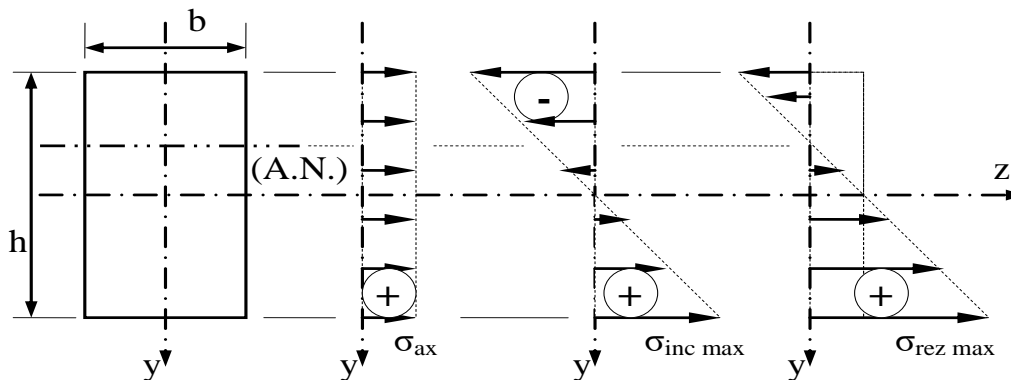
Cel mult trei componente ale eforturilor sunt prezente în secțiunile barei – forța axială $N(x)$, cea tăietoare $T_y(x)$ și momentul de încovoiere $M_{iz}(x)$; s-a precizat că importante în calcule sunt *tensiunile axiale* și cele de *încovoiere*, care sunt de *aceeași natură* (produc întindere sau comprimare în toate punctele secțiunilor transversale) și *la fel orientate* (perpendiculare pe secțiuni), adică se pot *aduna algebric* în orice punct $P(x, y, z)$ din volumul barei. Se obțin astfel tensiunile **rezultante**, care trebuie să îndeplinească în fiecare punct *condiția de rezistență*:

$$\sigma_{\text{rez}}(x, y) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M_{iz}(x) \cdot y}{I_z(x)} \leq \sigma_a$$

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei

Se poate vizualiza (ca în figura de mai jos) *repartiția tensiunilor* pe înălțimea unei secțiuni transversale; graficul poate fi prezentat în planul median longitudinal (x - y), pentru că tensiunile rezultante *nu variază* în funcție de coordonata z a punctelor secțiunii, adică sunt constante pe orice „fibră” orizontală a ei; secțiunea **dreptunghiulară** are avantajul *simetriei* față de axa de încovoiere, dar discuția se poate extinde ușor la secțiunile fără simetrie. S-a abordat situația în care eforturile $N(\mathbf{x})$ și $M_{iz}(\mathbf{x})$ au semne considerate *pozitive*, de unde orientarea ca în figură a tensiunilor; în plus, axa y a fost dirijată *în jos*, pentru ca tensiunile *pozitive* de încovoiere să aibă loc în dreptul coordonatelor y *pozitive*.



Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei

Sumarea algebrică a celor două categorii de tensiuni elementare face să *transleze*, cu mărirea tensiunilor axiale, *linia vârfulilor* tensiunilor de încovoiere; **axa neutră** (A.N.) translează și ea, ajungând să nu mai treacă prin centrul de greutate al secțiunii barei, încât cea mai mare tensiune rezultantă se înregistrează la acea *extremitate* a secțiunii unde cele două tensiuni elementare au *același semn* (adică sunt la fel orientate).

Pe de altă parte se știe că, pentru secțiunile *simetrice* față de axa de încovoiere, tensiunile de la extremitățile secțiunii sunt **egale și de semn contrar**, încât membrul stâng din condiția de rezistență se va scrie *la fel*, în valori *absolute*, orice orientare ar avea tensiunile axiale; din acest motiv, *semnul* din diagrame al eforturilor N și M nu are relevanță în relația calculului de rezistență!

Observație: Axa neutră *intersectează* secțiunea numai dacă între tensiunile elementare există relația $\sigma_{ax} < \sigma_{max\ inc}$, în caz contrar toate valorile $\sigma_{rez}(x)$ vor avea un singur semn și aceeași orientare în orice punct al secțiunii.

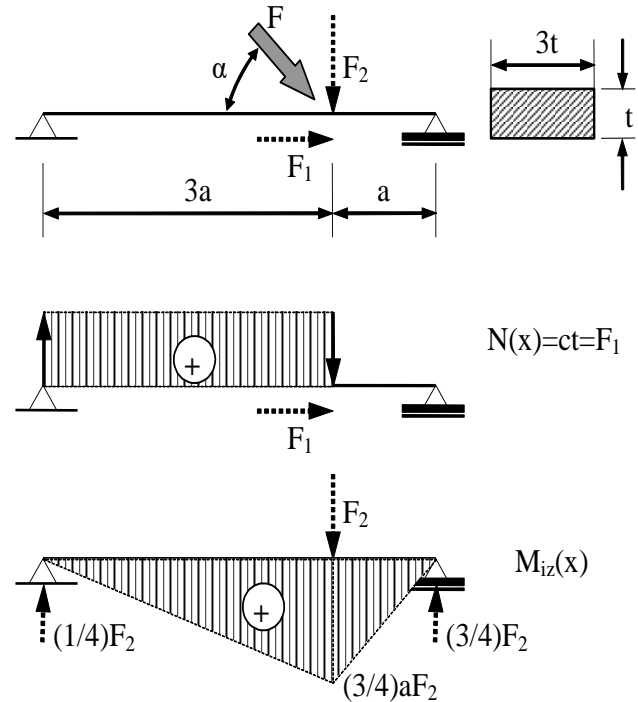
Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei. Aplicație

Se consideră o bară dreaptă, așezată pe un reazem simplu și o articulație, de secțiune dreptunghiulară, cu laturile în raport de 1:3; pe bară acționează o forță concentrată, cuprinsă în planul ei median longitudinal și plasată la distanța de *un sfert* din lungimea totală, față de reazemul *simplu*; forța $F = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$ e dirijată spre reazem și înclinată la $\alpha = 60^\circ$ față de axa orizontală. Să se dimensioneze bara, făcută din oțel laminat cu $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$, cunoscând lungimea ei totală de 1,6m.

Rezolvare

Componenta orizontală $F_1 = F \cdot \cos\alpha$ a forței produce *întindere*, pe distanța dintre reazemul articulat și punctul ei de aplicare, iar componenta verticală $F_2 = F \cdot \sin\alpha$ produce *încovoiere* (ca solicitare semnificativă).



Solicitări prin forțe înclinate față de axe principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei. Aplicație

Se observă că solicitarea totală *maximă* are loc chiar în secțiunea în care acționează forța F , iar valorile din acea secțiune ale celor două eforturi secționale vor fi introduse în relația calculului de rezistență.

Componentele forței F pe cele două axe principale din planul problemei vor fi înlocuite în relațiile de calcul cu valorile lor:

$$F_1 = F \cdot \cos 60^\circ = \frac{F}{2}; \quad F_2 = F \cdot \sin 60^\circ = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

Se reamintește că, atunci când se calculează tensiunea *maximă* de încovoiere, la numitorul fracției apare modulul de rezistență W_z al secțiunii calculate, încât condiția de rezistență se scrie sub forma:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_{iz}(x)}{W_z} = \frac{F}{t \cdot 3t} + \frac{\frac{3}{4} \cdot a \cdot \frac{F\sqrt{3}}{2}}{3t \cdot t^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{t^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{aF}{t^3} \leq \sigma_a$$

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

1. Forțe incluse într-un plan principal longitudinal al barei. Aplicație

În condițiile în care relația se folosește pentru *dimensionarea* unei bare, este preferabil să se înceapă cu un calcul *preliminar*, bazat doar pe al doilea termen al sumei, adică pe solicitarea de încovoiere, din care aici rezultă următoarele:

$$t_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{aF}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{400\text{mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 40,197 \text{mm}$$

Dimensiunea adoptată, de exemplu la valoarea $t_{\text{ad}} = 42\text{mm}$, trebuie verificată în condiția *completă* de rezistență, astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 10^4 \text{N}}{(42\text{mm})^2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{400\text{mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{N}}{(42\text{mm})^3} = 142,14\text{MPa} < \sigma_a$$

Condiția este îndeplinită, deci secțiunea transversală a barei calculate poate avea dimensiunile $(42 \times 126)\text{mm}^2$.

Solicitări prin forțe înclinate față de axe principale ale barelor

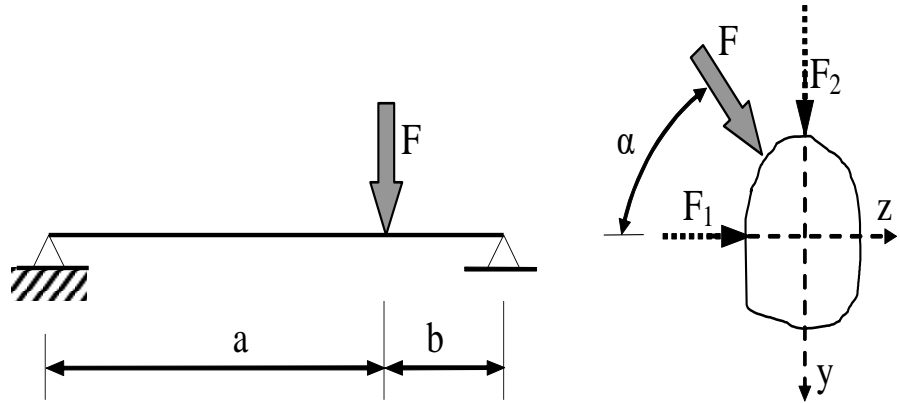
2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei

În aceste situații forțele exterioare *nu vor da componente axiale*, încât efectele de *încovoiere* față de axele z și y vor fi doar ele importante pentru calculul de rezistență al barei.

Solicitarea se numește *încovoiere oblică (dublă)*

și tensiunile elementare pot fi sumate algebric în toate punctele secțiunilor transversale, deoarece oricare dintre componentele de tensiune tinde să producă *întindere* sau *comprimare*; tensiunea **rezultantă** într-un punct oarecare $P(x, y, z)$ va fi:

$$\sigma_{\text{rez}}(x, y, z) = \frac{M_{iy}(x) \cdot z}{I_y(x)} + \frac{M_{iz}(x) \cdot y}{I_z(x)} \leq \sigma_a$$



Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei

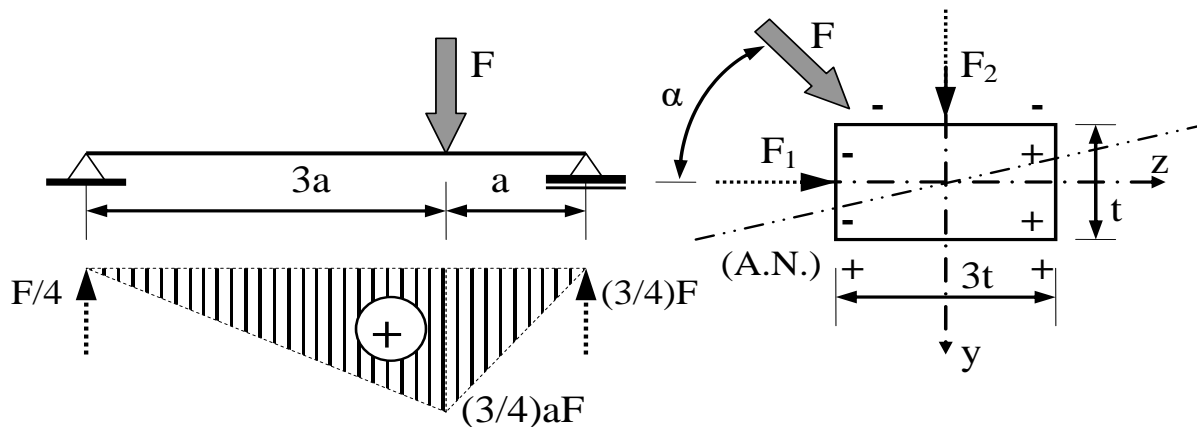
Observații

1. Dacă există o proiecție a forței F pe axa *longitudinală* a barei, apare și o solcitare *axială*, producând efecte care se adaugă celor de încovoiere, la fel ca la solicitările de tipul 1 de mai sus.
2. Așa cum s-a explicat mai sus, dacă forța F *nu intersectează* axa barei, atunci ea produce și un *moment de răsucire*, față de această axă; se ajunge astfel la un tip diferit de solcitare compusă, în care se suprapun tensiuni σ și τ și care se va discuta separat.
3. Dacă secțiunea transversală a barei este construită *simetric*, atunci calculul tensiunilor rezultante se simplifică, așa cum se arată în rezolvarea problemei care urmează.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Se consideră aceeași bară ca la aplicația anterioară, solicitată de o forță având aceeași mărime ca acolo, dar acționând *perpendicular* pe axa *longitudinală* a barei și *înclinată* față de celelalte două axe principale ale ei, ca în figura de mai jos. Să se dimensioneze bara, știind că înclinarea forței este tot la unghiul $\alpha = 60^\circ$ și luând $\sigma_a = 160\text{MPa}$ – ca parametru de rezistență pentru materialul barei.



Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Rezolvare

Valorile reacțiunilor din reazeme apar în desen, la fel și diagrama momentelor de încovoiere din secțiunile transversale ale barei, în planul *longitudinal* pe care forța \mathbf{F} îl formează cu axa \mathbf{x} a barei; este important de observat că alura diagramei va fi *aceeași* în orice astfel de plan longitudinal, inclusiv în planele pe care componentele \mathbf{F}_1 și \mathbf{F}_2 le formează cu axa \mathbf{x} ; valorile momentelor – în aceste diagrame – se pot obține făcând simpla înlocuire a lui \mathbf{F} cu proiecția ei din planul respectiv.

Mai este interesant de remarcat că bara tinde să fie îndoită, în orice clipă a solicitării sale, atât în planul longitudinal *orizontal*, adică în jurul axei principale \mathbf{y} – de către forța \mathbf{F}_1 , cât și în planul *vertical*, în jurul axei \mathbf{z} – sub acțiunea componentei \mathbf{F}_2 .

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Pe aceste baze, relația generală cu care se calculează tensiunile *rezultante*, în punctele din secțiunea unde se aplică forța F (și unde efortul de încovoiere este **maxim**) se scrie:

$$\sigma_{\text{rez}}(y, z) = \frac{\left(\frac{3}{4} a \cdot F_1\right) \cdot z}{I_y} + \frac{\left(\frac{3}{4} a \cdot F_2\right) \cdot y}{I_z} = \frac{3}{4} a \cdot F \cdot \left(\frac{z \cdot \cos \alpha}{I_y} + \frac{y \cdot \sin \alpha}{I_z} \right)$$

Condiția de rezistență se bazează pe cea mai mare dintre valorile acestor tensiuni, care poate fi stabilită folosind proprietățile *axei neutre* a unei secțiuni: dacă există o axă (A.N.) în problema de față, atunci valorile maxime ale tensiunii globale se produc în punctele aflate la distanța *maximă* de (A.N.); chestiunea se clarifică observând că $\sigma_{\text{rez}} = 0$ implică egalitatea cu zero a ultimei paranteze din relație, de unde rezultă:

$$\frac{y \cdot \sin \alpha}{I_z} = -\frac{z \cdot \cos \alpha}{I_y} \Leftrightarrow y = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot z$$

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Ultima egalitate are forma unei ecuații de gradul I, reprezentând grafic o **dreaptă** care trece (după cum se observă în figura de mai sus) prin *originea* axelor de coordonate și prin cadranele trigonometrice I și III.

Este remarcabil că dreapta respectivă se va așeza exact pe direcția *perpendiculară* pe forța \mathbf{F} (direcția efortului de încovoiere pe care forța îl produce), pentru secțiunile care au $I_z = I_y$ – adică momentele principale centrale de inerție **egale** ca valoare. Această proprietate se regăsește, după cum s-a arătat, la toate secțiunile care au *3 sau mai multe axe de simetrie* (poligoanele *regulate*), pentru care rezultă că nu se va produce *niciodată* încovoiere oblică (îndoirea se produce la fel față de orice axă *centrală*)!

Cele mai *depărtate* puncte de pe secțiune în raport cu (A.N.) sunt cele două colțuri ale dreptunghiului aflate aproape de direcția forței \mathbf{F} , deci coordonatele $(3t/2; t/2)$, respectiv $(-3t/2; -t/2)$ trebuie înlocuite în relație pentru a calcula valorile $\sigma_{\text{rez max}}$.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Observație importantă

Se poate urma și o altă logică pentru a stabili punctele cele mai sollicitate de pe secțiunea transversală, în problemele de genul abordat aici, așa cum se explică în continuare.

Se reamintește, mai întâi, că sensurile axelor de coordonate au fost alese astfel încât **tensiunile pozitive** să se obțină de partea *coordonatelor pozitive*, pentru fiecare dintre momentele elementare de încovoiere (adică pentru fiecare fracție din relația tensiunilor rezultante).

Așa cum apare schițat pe figura inițială a problemei, cele două categorii de tensiuni elementare au *aceleași semne* (în cazul de față!) numai în punctele din secțiune aflate în cadranele II și IV, astfel încât doar acolo suma lor poate atinge valoarea cea mai mare posibilă; în plus, valorile lor absolute sunt maxime *simultan* numai în colțurile secțiunii, deci în colțurile din acele cadrane se vor produce tensiunile $\sigma_{\text{rez max}}$.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Explicațiile de mai sus arată că, pentru problema de față, condiția calculului de rezistență se va construi astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}} = \frac{3}{4} a \cdot F \cdot \left[\frac{\frac{3}{2} t \cdot \cos \alpha}{\frac{t \cdot (3t)^3}{12}} + \frac{\frac{t}{2} \cdot \sin \alpha}{\frac{t^3 \cdot 3t}{12}} \right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot F}{t^3} \left(\frac{2}{3} \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \right)$$

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \sigma_{\text{rez max}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot F}{t^3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot F}{t^3} \leq \sigma_a$$

Dimensiunea necesară a secțiunii va fi:

$$t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{1 + 3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{400 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 42,626 \text{ mm}$$

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

Acest rezultat arată că o bară având secțiunea dreptunghiulară cu dimensiunile (43×129) mm² (aproape de cele adoptate în aplicația precedentă) este suficientă pentru a prelua forța concentrată F , în condițiile date în problema de față.

Ca exercițiu interesant se poate urmări ce se schimbă în calcule atunci când bara se sprijină pe latura mică a dreptunghiului, adică secțiunea ei transversală se rotește cu 90° , celelalte elemente ale problemei rămânând nemodificate.

Așa cum este ușor de înțeles, singura modificare ce trebuie făcută în calcule este că, în relația tensiunilor rezultante, componentele F_1 și F_2 fac schimb de locuri:

$$\sigma_{\text{rez}}(y, z) = \frac{\left(\frac{3}{4} a \cdot F_2\right) \cdot z}{I_y} + \frac{\left(\frac{3}{4} a \cdot F_1\right) \cdot y}{I_z} = \frac{3}{4} a \cdot F \cdot \left(\frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} + \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} \right)$$

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor

2. Forțe cuprinse în plane principale transversale ale barei. Aplicație

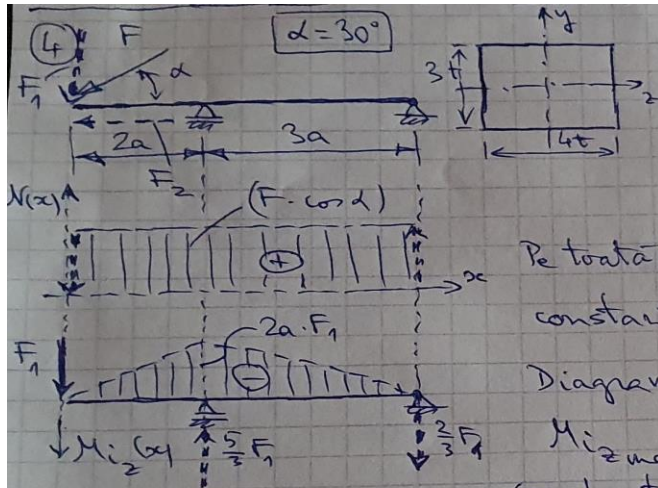
Pe de altă parte, valorile maxime ale tensiunilor globale se vor produce, pe secțiunile transversale, tot în colțurile cele mai apropiate de direcția forței și înlocuind coordonatele lor în relație se obține:

$$\sigma_{\text{rez max}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot F}{t^3} \left(\frac{2}{3} \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot F}{t^3} \leq \sigma_a$$

După înlocuirea valorilor numerice ale mărimilor fizice din problemă se ajunge la valoarea $t_{\text{min}} = 38,963\text{mm}$ și deci secțiunea barei trebuie să aibă măcar dimensiunile $(39 \times 117)\text{mm}^2$.

Ca o concluzie a acestui capitol se observă că toate variantele de solicitări analizate produc efecte *apropiate* ca intensitate în bara studiată; mai trebuie spus că, pentru a efectua calcule de *dimensionare* pe baza unei condiții de genul de mai sus, este *necesar* să fie cunoscută o relație (un raport) între dimensiunile secțiunii barei, ceea ce pentru exemplul abordat se preciza cu claritate, în enunț.

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor



Forța înclinată în planul median

longitudinal - să se scrie condiția de rezistență a barei

$$F_1 = F \sin \alpha = \frac{F}{2}; F_2 = F \cos \alpha = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

Pe toată lungimea barei forța axială este constantă: $N(x) = +F_2 = F \cos \alpha = \frac{F\sqrt{3}}{2}$

Diagrama de momente se trasează ușor!

$$M_{i2 \max}(x) = -2a \cdot F_1 = -2a \cdot \frac{F}{2} = -aF$$

(în dreptul rezonului simplu)

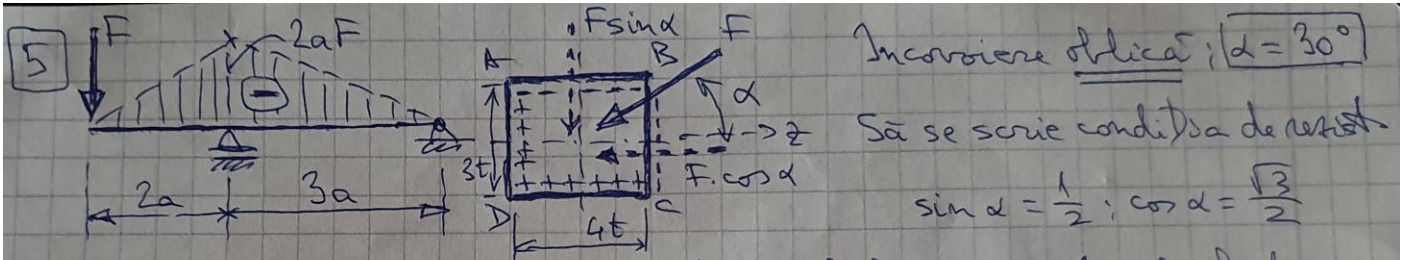
Tensiunile produse de cele 2 solicitări sunt perpendiculare pe secțiunile barei și produc întindere sau comprimări, adică se pot aduna algebric

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_{i2}(x)}{W_z} \leq \sigma_a \quad (\text{în rezonul simplu!})$$

$$\sigma_{\max}(x) = \left[\frac{\frac{F\sqrt{3}}{2}}{4t \cdot 3t} + \frac{a \cdot F}{\frac{4t(3t)^2}{6}} \leq \sigma_a \right] (*)$$

(Condiția de rezistență)

Solicitări prin forțe înclinate față de axele principale ale barelor



Rezolvare: au loc două încovoieri, date de cele 2 componente ale forței, diagrama de momente fiind la fel în cele 2 plane $\rightarrow M_{\max} (x) = -2aF$

$$\sigma_{\text{inc}_z} = \frac{(F \cdot \sin \alpha) \cdot 2a \cdot y_{\max}}{I_z}$$

$$\sigma_{\text{inc}_y} = \frac{(F \cdot \cos \alpha) \cdot z_{\max}}{I_y}$$

$$I_z = \frac{4t(3t)^3}{12} = 9t^4; \quad y_{\max} = \frac{3t}{2}; \quad I_y = \frac{(4t)^3 \cdot 3t}{12} = 16t^4; \quad z_{\max} = \frac{4t}{2}$$

$$\sigma_{\text{rez}_{\max}} = \sigma_{\text{rez}}(D) = \frac{2a \cdot F \sin \alpha \cdot \frac{3}{2}t}{9t^4} + \frac{2a \cdot F \cos \alpha \cdot \frac{4}{2}t}{16t^4} =$$

$$= \frac{a \cdot F \sin \alpha}{3t^3} + \frac{a \cdot F \cos \alpha}{4t^3} \leq \sigma_a (*) \quad (\alpha = 30^\circ) \Rightarrow \boxed{\frac{4 + 3\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{aF}{t^3} \leq \sigma_a} (*)$$

2.4

Solicitări prin forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

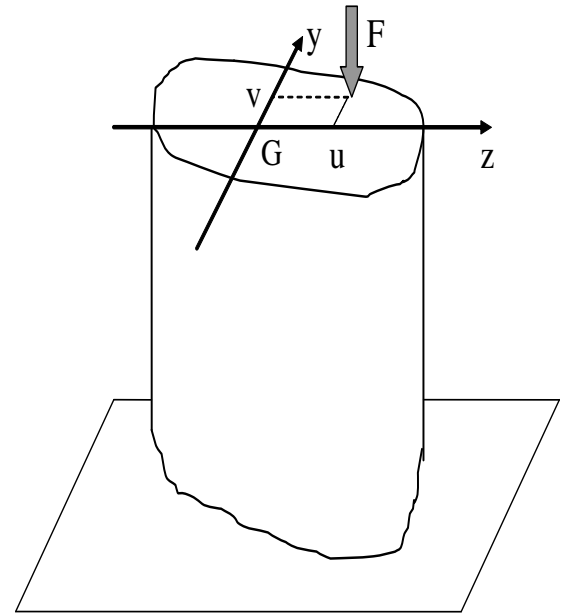
Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Solicitările din această categorie sunt numite *axiale excentrice* și prezintă importanță pentru multe situații practice, așa cum se va arăta în continuare.

Cel mai frecvent se întâlnesc bare – având secțiuni transversale de forme diverse, fiind așezate vertical și rezemate la bază – care trebuie să susțină încărcări, de mărimi importante, care le comprimă la capătul liber.

De îndată ce sarcina exterioară nu este plasată în centrul de greutate G al secțiunii de capăt, ea va produce nu doar **comprimare**, ci și **încovoiere**, în raport cu axa (axele) din secțiune față de care se află la distanță.

În exemplul din figură, coordonatele (u, v) ale punctului unde se aplică încărcarea coincid cu *distanțele* la care se află forța, în raport cu cele două axe principale centrale din secțiunile transversale ale barei.



Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Se observă că în orice punct al barei vor acționa simultan *trei categorii de tensiuni*, explicitate astfel:

- tensiunea produsă prin *comprimare*

$$\sigma_{ax} = \frac{F}{A}$$

- tensiunea dată de *încovoierea față de axa z*

$$\sigma_{inc z} = \frac{(F \cdot v) \cdot y}{I_z}$$

- tensiunea dată de *încovoierea față de axa y*

$$\sigma_{inc y} = \frac{(F \cdot u) \cdot z}{I_y}$$

Deja aspectul acestor relații arată că valorile tensiunilor *globale* vor depinde mereu numai de coordonatele *y* și *z* ale punctelor barei, astfel încât nu va avea importanță *localizarea* secțiunii *transversale* în care se face calculul; pe această bază se va constata că *înălțimea* (sau *lungimea*) barei calculate nu influențează calculele de rezistență, pentru solicitările axiale excentrice! Există totuși, și trebuie avut în vedere, pericolul de pierdere a stabilității longitudinale, astfel că lungimea ei trebuie să fie destul de mică pentru ca acest pericol să fie evitat.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Pe de altă parte, se poate înțelege că cele trei tipuri de tensiuni elementare au aceeași natură (fiecare dintre ele tinde să producă **întindere** sau **comprimare**) și sunt la fel orientate (*perpendicular*) față de secțiunile transversale ale barei, deci se pot aduna algebric în fiecare punct; pentru ca *aria* **A** să poată fi extrasă factor comun, de la *numitorul* celor trei fracții, se scriu momentele principale în funcție de *razele de inerție* care le corespund, iar relația tensiunii *rezultante* din punctul arbitrar P(z, y) al secțiunii va avea forma:

$$\sigma_{\text{rez}}(\mathbf{P}) = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot v \cdot y}{A \cdot i_z^2} + \frac{F \cdot u \cdot z}{A \cdot i_y^2} = \frac{F}{A} \cdot \left[1 + \frac{u}{i_y^2} \cdot z + \frac{v}{i_z^2} \cdot y \right]$$

Logica pentru găsirea tensiunilor maxime, la fel ca mai sus, are la bază existența *axei neutre* a secțiunilor transversale, pentru această solicitare; se observă că, orice formă ar avea secțiunea barei, locul geometric al punctelor ei în care $\sigma_{\text{rez}} = 0$ este dat de egalitatea cu zero a ultimei paranteze de mai sus, iar expresia ce rezultă are forma unei ecuații **de gradul I** ($1+by+cz=0$); ea se reprezintă grafic printr-o dreaptă, care este tocmai *axa neutră* căutată a secțiunilor barei:

$$1 + \frac{u}{i_y^2} \cdot z + \frac{v}{i_z^2} \cdot y = 0 \quad (\text{A.N.})$$

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Este important de spus că această dreaptă nu trece prin originea axelor de coordonate, încât se trasează de obicei „prin tăieturi”, adică folosind punctele unde intersectează axele de coordonate; acestea se obțin făcând pe rând, în ecuația dreptei, una dintre coordonate egală cu zero.

Odată trasată axa neutră, punctele *maxim distanțate* de ea vor fi cele mai solicitate de pe secțiune, iar coordonatele lor se vor introduce în expresia (scrisă mai sus a) *tensiunilor rezultante*, pentru a ajunge (în formă literală) la valoarea lor *maximă*; aceasta va alcătui membrul stâng al condiției de rezistență, pentru bara care este calculată.

Trebuie semnalat și un alt tip de caz, întâlnit frecvent, de solicitare axială excentrică – cel al barelor la care, din rațiuni diverse, se fac *decupări transversale asimetrice* pe anumite porțiuni din lungimea lor, așa cum se va exemplifica în Aplicația 3, din partea finală a acestui capitol.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 1

Se imaginează o bară verticală, rezemată ca în ultima figură anterioară, având lungime oarecare, dar suficient de mică pentru a nu exista pericol de flambaj longitudinal; secțiunea ei transversală este *dreptunghiulară*, constantă pe toată lungimea; nu sunt necesare ipoteze speciale privind proporțiile secțiunii, încât laturile ei se notează simplu cu **h** și **b**.

Se cere să se scrie *relația tensiunii globale maxime* pentru această bară, știind că este încărcată cu o forță concentrată, de comprimare, aplicată în acel colț al dreptunghiului aflat în cadranul unde ambele coordonate sunt pozitive.

Rezolvare

Este remarcabil că soluția problemei se poate găsi fără ca gradul de generalitate să se restrângă în vreun fel, întrucât totul va fi calculat în litere, iar datele numerice nu sunt necesare.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 1

Pentru început, se precizează coordonatele punctului de pe secțiune în care acționează forța \mathbf{F} ; acestea sunt:

$$u = \frac{b}{2} \text{ respectiv } v = \frac{h}{2}$$

Pentru a nu deduce din nou, ca mai sus, termenii din relația tensiunilor globale (cea ce totuși poate fi făcut în orice problemă, adică nu este deloc necesară memorarea relației!), se scriu valorile mărimilor care o compun, după cum urmează:

$$A = b \cdot h; \quad I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}; \quad i_z^2 = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12}$$

Cu aceste valori, ecuația axei neutre a secțiunii se poate scrie, în acest caz, direct, în forma dedusă la începutul acestui capitol, astfel:

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 1

$$1 + \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b^2}{12}} \cdot z + \frac{\frac{h}{2}}{\frac{h^2}{12}} \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{6}{b} \cdot z + \frac{6}{h} \cdot y = 0 \quad (\text{A.N.})$$

Pentru a trasa această dreaptă pe desenul secțiunii, se stabilesc punctele ei de intersecție cu axele de coordonate:

$$z = 0 \Rightarrow y = -\frac{h}{6} \quad \text{punctul } N(0; -\frac{h}{6}) \quad y = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{6} \quad \text{punctul } M(-\frac{b}{6}; 0)$$

Prin aceste puncte se duce axa neutră (a se vedea figura din pagina următoare) și se observă că punctul cel mai depărtat față de ea de pe secțiune este chiar cel în care se aplică forța, încât tensiunea rezultantă maximă din bară se va calcula astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}} = \sigma_{\text{rez}} \left(z = \frac{b}{2}; y = \frac{h}{2} \right) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{6}{b} \cdot \frac{b}{2} + \frac{6}{h} \cdot \frac{h}{2} \right) = 7 \frac{F}{A}$$

Se observă că aplicarea forței F la distanță de centrul de greutate al secțiunii mărește (în acest caz de 7 ori!) valoarea tensiunii maxime, față de cazul aplicării ei centrice!

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

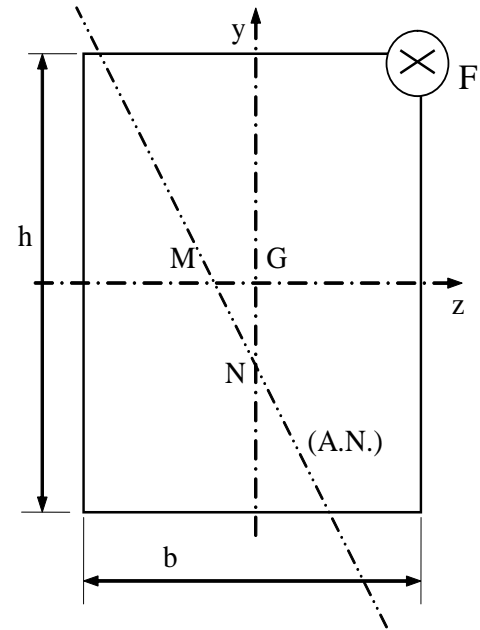
Problema sâmburelui central

Ultimul rezultat obținut mai sus este valabil pentru orice bară de secțiune dreptunghiulară, având forța axială aplicată într-un colț al secțiunii ei de capăt; se deduce că abaterea forței de la poziția centrică duce la creșteri importante ale tensiunilor maxime din bară, față de cele produse de aceeași forță aplicată pe direcția axei longitudinale a barei!

Condiția de rezistență se va scrie:

$$\sigma_{\text{rez max}} = 7 \frac{F}{A} \leq \sigma_a$$

Așadar, aplicarea *excentrică* a forței face necesar un consum de material de 7 ori mai mare, sau face ca bara să poată suporta o forță axială maximă de 7 ori mai mică, față de cazul standard de solicitare; se înțelege astfel că efectele excentricității forțelor lor nu sunt de neglijat și trebuie calculate riguros.



Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Problema sâmburelui central

Pe de altă parte, apare necesar ca în faza de proiectare să se stabilească ce *abateri față de axa barei* sunt permise, la montarea sarcinilor ei de comprimare, pentru a nu i se pune în pericol funcționarea stabilă și reversibilă.

De exemplu, în cazul unui stâlp de beton solicitat ca în problema de mai sus, este bine să se evite apariția în volumul său a unor tensiuni de *întindere*, care se vor produce de îndată ce axa neutră va ajunge să taie secțiunea stâlpului: tensiunile din punctele aflate de partea forței vor avea același semn cu F , iar cele situate dincolo de (A.N.) vor fi de întindere!

Definiție: Se numește **sâmbure central** al secțiunii transversale a unei bare locul geometric al punctelor ei în care poate fi aplicată o forță axială, astfel încât tensiunile de pe întreaga secțiune să aibă același semn cu forța.

Acest loc geometric se găsește din condițiile matematice ca axa neutră a secțiunii, la solicitarea respectivă, să fie *cel mult tangentă* la secțiune, adică să aibă un singur punct de contact cu ea.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Problema sâmburelui central

Pentru secțiunile cu *contururi curbilinii* calculul poate fi destul de laborios, dar dacă se poate scrie o *ecuație* pentru conturul dat, atunci de obicei se găsește *tot o ecuație* și pentru sâmburele central (care de exemplu este un cerc, respectiv o elipsă, pentru secțiunile care au aceste forme).

În schimb, pentru secțiunile cu forme *poligonale* calculul se face simplu și logic – există întotdeauna un număr finit de poziții de tangentă la secțiune pe care le poate ocupa axa neutră; se scriu ecuațiile acelor drepte și se identifică cu ecuația literală (A.N.), de unde rezultă coordonatele punctului de aplicare a forței ce corespunde fiecăreia dintre drepte.

Punctele astfel găsite reprezintă vârfurile unui *poligon*, iar acesta va coincide cu sâmburele central al secțiunii analizate. Trasarea laturilor aceluși poligon se bazează pe următoarea regulă:

Teoremă: Atunci când *axa neutră* a unei secțiuni ocupă poziții care au *un punct comun* (adică se rotește în jurul aceluși punct), forța care produce solicitarea se aplică în puncte ale secțiunii care se află *pe o aceeași dreaptă*.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Problema sâmburelui central. Aplicația 2

Să se traseze sâmburele central al unei secțiuni în formă de dreptunghi dintr-o bară solicitată în condițiile descrise în aplicația anterioară.

Rezolvare

Particularitatea acestei probleme este că trebuie aflate niște *coordonate* - ale unor puncte anumite, în care trebuie aplicată forța \mathbf{F} , adică se știe secțiunea, dar (inițial) nu se știe nimic despre valorile notate mai sus prin \mathbf{u} și \mathbf{v} ; nici în acest caz nu sunt necesare valori numerice ale dimensiunilor, încât concluziile vor fi valabile pentru orice secțiune cu această formă.

Se pornește de la *ecuația literală a axei neutre*, având ca singură particularizare valorile razelor de inerție date mai sus, cu care ecuația se scrie:

$$1 + \frac{12 \cdot \mathbf{u}}{b^2} \cdot z + \frac{12 \cdot \mathbf{v}}{h^2} \cdot y = 0 \quad (\text{A.N.})$$

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Problema sâmburelui central. Aplicația 2

Așa cum s-a arătat, această dreaptă trebuie făcută să coincidă, succesiv, cu laturile secțiunii poligonale considerate; pentru a scrie condițiile în care (A.N.) coincide cu latura AB, ecuația dreptei ce trece prin aceste puncte se aduce la forma ecuației de mai sus a axei neutre:

$$(AB) \quad y = \frac{h}{2} \quad \left| \cdot \frac{2}{h} \right. \Rightarrow \quad \frac{2}{h} \cdot y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{h} \cdot y = 0$$

Cele două ecuații reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă au aceleași valori ale coeficienților lui y și z , adică:

$$\frac{12 \cdot u}{b^2} = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{respectiv} \quad \frac{12 \cdot v}{h^2} = -\frac{2}{h} \Rightarrow v = -\frac{h}{6} \Leftrightarrow \text{punctul } M(0; -\frac{h}{6})$$

S-a obținut că, dacă forța este aplicată în punctul M, marcat pe desenul următor, axa neutră trece prin punctele A și B.

În mod analog se procedează pentru a scrie condițiile de coincidență a axei neutre cu latura BC a secțiunii:

$$(BC) \quad z = \frac{b}{2} \quad \left| \cdot \frac{2}{b} \right. \Leftrightarrow \quad \frac{2}{b} \cdot z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{b} \cdot z = 0$$

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

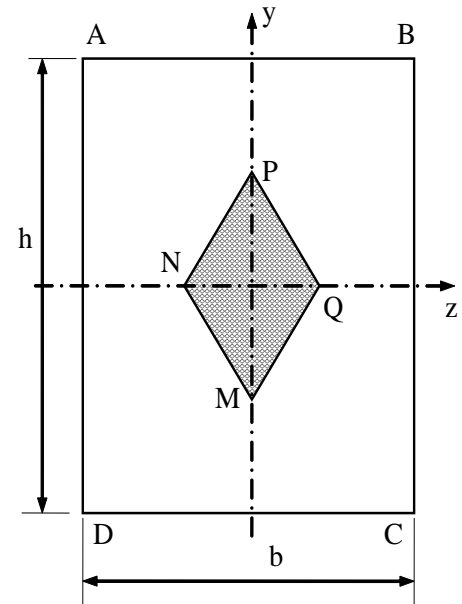
Problema sâmburelui central. Aplicația 2

de unde rezultă că:

$$(A.N.) \equiv (BC) \Leftrightarrow \frac{12 \cdot u}{b^2} = -\frac{2}{b} \Rightarrow u = -\frac{b}{6} \text{ respectiv } \frac{12 \cdot v}{h^2} = 0 \Rightarrow v = 0 \Leftrightarrow N(-\frac{b}{6}; 0)$$

Așadar, dacă forța se aplică în N, axa neutră trece prin colțurile B și C ale secțiunii; după teorema de mai sus, când (A.N.) va ocupa o poziție oarecare de tangentă la secțiune în B (adică se va roti în jurul acestui punct), forța care îi corespunde va fi aplicată într-un punct de pe segmentul MN.

Analog, când axa neutră va ocupa pozițiile de tangentă din C, rotindu-se din poziția BC în CD, punctul de aplicare a forței se va afla mereu pe segmentul NP (unde P este simetric lui M, în raport cu originea axelor de coordonate); la fel, rotirile în jurul lui D și A vor corespunde aplicării forței în puncte de pe segmentele PQ și QM (Q fiind simetric cu N).



Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Problema sâmburelui central. Aplicația 2

Așadar, pentru cazul particular studiat, tensiunile rezultante produse de solicitarea axială excentrică vor avea în toate punctele barei același semn cu forța (pentru că axa neutră va fi doar *tangentă* la secțiune), începând din momentele în care forța axială va fi aplicată în punctele de pe *conturul rombului* MNPQ, care reprezintă **sâmburele central** al secțiunii dreptunghiulare considerate.

Pe de altă parte, atunci când forța axială va acționa în *interiorul rombului* menționat, axa neutră nu va avea puncte comune cu secțiunea (deci cu atât mai mult tensiunile globale vor avea peste tot același semn!), iar dacă forța se va aplica într-un punct *exterior rombului*, atunci axa neutră va tăia secțiunea în două părți, în care tensiunile rezultante vor avea semne contrare.

Pe baza acestor raționamente se vor stabili, prin urmare, condițiile de toleranță care trebuie prescrise, în legătură cu abaterile care se pot produce la aplicarea centrică a forței axiale concentrate.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Proprietăți generale ale axei neutre

Există și alte *proprietăți* interesante *ale axei neutre* a unei secțiuni oarecare, dintre care unele derivă direct din cele prezentate până aici:

- a) axa neutră trece mereu prin cadranul opus celui unde acționează forța axială;
- b) dacă greutatea proprie a barei este neglijabilă față de forța exterioară, poziția axei neutre nu este influențată de mărimea forței, ci numai de coordonatele punctului în care aceasta este aplicată;
- c) dacă punctul de aplicare a forței se deplasează către centrul de greutate al secțiunii, atunci axa neutră se îndepărtează de acest centru (și reciproc);
- d) atunci când forța se deplasează pe o dreaptă ce trece prin centrul de greutate, axa neutră translează paralel cu ea însăși;
- e) dacă deplasarea forței se face chiar pe una dintre axele principale centrale ale secțiunii, atunci axa neutră se mișcă paralel cu cealaltă axă p.c.;
- f) din relația tensiunii rezultante se observă că valoarea acesteia nu se schimbă dacă punctul unde se face calculul se mută în punctul de aplicare a forței, iar forța se așează în punctul inițial de calcul.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

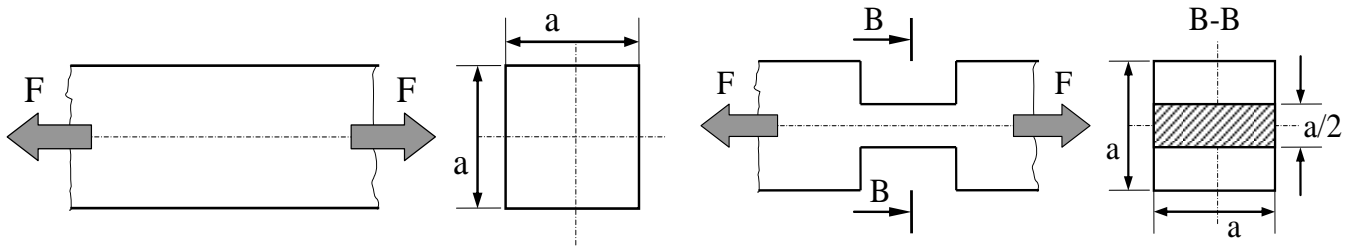
Alte aplicații

3. Se consideră o tijă, având secțiunea transversală de formă pătrată, cu latura a , sollicitată la *tracțiune* prin forțele egale și contrare F (ca în figura următoare).

a. Să se arate în ce fel se modifică tensiunea din tijă, atunci când pe o porțiune din lungimea ei secțiunea este micșorată, prin intermediul a două *decupări simetrice*, fiecare având adâncimea $a/4$.

b. Să se observe apoi care vor fi consecințele produse de o *decupare asimetrică* a secțiunii, tot pe adâncimea $a/4$.

Rezolvare



a. Figura prezintă solicitarea barei în starea inițială și în cea de după prelucrarea decupărilor *simetrice*; în ambele cazuri forțele sunt aplicate pe direcția axei longitudinale a tijei și tensiunile vor fi numai de întindere.

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 3

Se înțelege ușor că în tija *fără decupări* se or produce tensiuni normale, de aceeași valoare în orice punct din volumul ei:

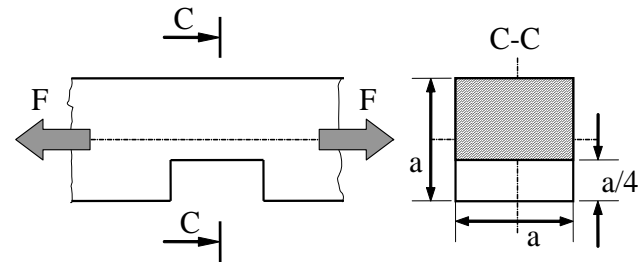
$$\sigma_{ax} = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{F}{a^2}$$

Pe de altă parte, în cazul tijeii *cu decupări*, tensiunile vor avea valorile maxime în respectiva zonă slăbită:

$$\sigma_{B-B} = \frac{N(x)}{A(B-B)} = \frac{F}{a \cdot \frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{F}{a^2} = 2 \cdot \sigma_{ax}$$

Rezultatul obținut putea fi preliminar, întrucât secțiunea transversală din zona decupărilor este ca mărime *jumătate* din cea inițială, astfel că tensiunile maxime sunt *duble* ca mărime față de cele din zona nedecupată.

b. Atunci când secțiunea tijeii este micșorată *nesimetric*, tensiunile maxime se produc tot în zona slăbită, dar forțele F vor acționa decalat, în raport cu centrul de greutate al secțiunii nete a barei.



Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 3

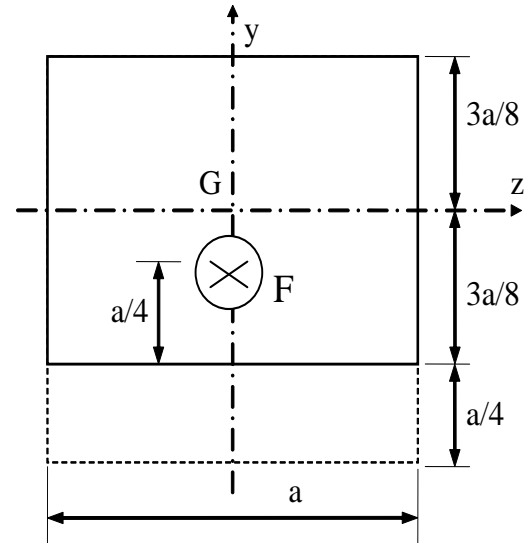
Calculul tensiunilor care apar în acea zonă trebuie făcut după metoda aplicată la solicitările axiale excentrice, folosind parametrii care sunt prezentați pe imaginea mărită (alăturată) a secțiunii slăbite.

Astfel, tensiunile date de solicitarea axială propriuzisă vor fi:

$$\sigma_{ax} (C - C) = \frac{F}{a \cdot \frac{3}{4} a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{a^2}$$

Tensiunile de încovoiere provin din decalarea forței F , cu distanța $a/8$, față de centrul de greutate al ariei slăbite, iar valorile lor maxime sunt:

$$\sigma_{inc \max} = \frac{M_{iz} \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{F \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{3a}{8}}{a \cdot \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{F \cdot \frac{3a^2}{64}}{a \cdot \frac{9a^2}{16}} = \frac{F \cdot \frac{3a^2}{64}}{\frac{9a^3}{16}} = \frac{F \cdot \frac{3a^2}{64} \cdot \frac{16}{9a^3}}{1} = \frac{F \cdot \frac{3 \cdot 16}{64 \cdot 9} \cdot \frac{a^2}{a^3}}{1} = \frac{F \cdot \frac{48}{576} \cdot \frac{1}{a}}{1} = \frac{F \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{a}}{1} = \frac{F}{12a}$$



Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor

Aplicația 3

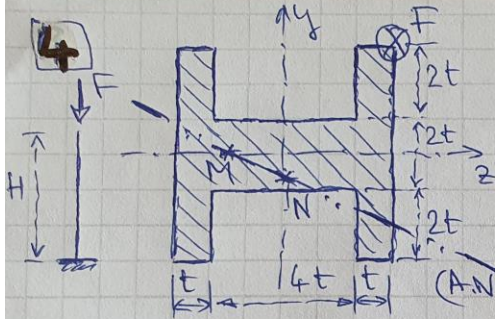
După efectuarea simplificărilor în ultima fracție se ajunge la același rezultat ca la tensiunile axiale, calculate anterior, astfel încât *tensiunile rezultante maxime*, care se produc *la limita de jos* a secțiunii slăbite (unde cele două categorii de tensiuni elementare sunt orientate la fel) vor avea valoarea următoare:

$$\sigma_{\text{rez max}} (C-C) = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{a^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{a^2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{F}{a^2} = 2,67 \cdot \frac{F}{a^2}$$

O observație importantă și paradoxală trebuie făcută la finalul rezolvării acestei probleme: tensiunile maxime din tijă cresc mai mult, față de cazul tijeii fără decupări, atunci când decuparea este *nesimetrică*, deși cantitatea de material îndepărtată este mai mică și secțiunea netă este mai mare decât în cazul în care se fac două decupări simetrice.

Explicația este dată de caracterul *excentric* al solicitării axiale din cazul *nesimetric*; prin urmare, orice astfel de modificări de secțiune trebuie stabilite după analize și calcule riguroase, întrucât pot să conducă la apariția unor salturi periculoase, în valorile tensiunilor maxime din bară!

Forțe axiale care nu trec prin centrele de greutate ale secțiunilor



Comprimare excentrică: cât de mare poate fi forța F (flambajul nu se poate produce!)

Rezolvare: $I_z = \frac{4 \cdot 29}{3} t^4$; $I_y = \frac{4 \cdot 65}{3} t^4$; $A = 20t^2$

$$(A.N.) i_z^2 = \frac{1}{20t^2} \cdot \frac{4 \cdot 29}{3} t^4 = \frac{29}{15} t^2; \quad i_y^2 = \frac{4 \cdot 65}{3 \cdot 20} t^2 = \frac{13}{3} t^2$$

$$\sigma_{ax} = \frac{F}{A}; \quad \sigma_{incaz} = \frac{(F \cdot 3t) \cdot y}{I_z}; \quad \sigma_{inca y} = \frac{(F \cdot 3t) \cdot z}{I_y}$$

$$\sigma_{res}(z, y) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{3t}{i_z^2} \cdot y + \frac{3t}{i_y^2} \cdot z \right)$$

$$(A.N.) \quad 1 + \frac{3t}{\frac{29}{15} t^2} \cdot y + \frac{3t}{\frac{13}{3} t^2} \cdot z = 0 \quad \begin{cases} y=0 \Rightarrow z = -\frac{13}{9} t & M(-\frac{13}{9} t; 0) \\ z=0 \Rightarrow y = -\frac{29}{45} t & M(0; -\frac{29}{45} t) \end{cases}$$

Punctul cel mai depărtat de (A.N.) este chiar cel în care se aplică forța F :

$$\sigma_{res \max}(z, y) = \sigma_{res}(3t, 3t) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{3 \cdot 15}{29t} \cdot 3t + \frac{3 \cdot 3}{13t} \cdot 3t \right) = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{135}{29} + \frac{27}{13} \right)$$

$$\sigma_{res \max} = 7,73 \cdot \frac{F}{A} \leq \sigma_a(*) \Rightarrow \boxed{F_{\max} = \frac{20t^2 \cdot \sigma_a}{7,73}}$$

2.5

Bare cotite formate din segmente drepte

Bare cotite formate din segmente drepte

Aspecte generale

Axele barelor din această categorie nu au o singură direcție, pe lungimea lor; ele sunt formate din segmente *drepte* sau *curbe*, îmbinate *rigid* în noduri, dar având axele orientate diferit; o astfel de bară este numită *plană* dacă aceste axe sunt toate coplanare, cuprinse deci în *planul median longitudinal* al barei.

În cele ce urmează vor fi discutate bare ale căror solicitări își produc efectele în mod exclusiv în interiorul acestui plan, de unde rezultă că în orice punct al barelor vor exista cel mult trei feluri de eforturi secționale – **forțe axiale**, respectiv **tăietoare** dirijate *pe axele planului*, plus un efort de tip **moment de încovoiere** – orientat ca vector *perpendicular pe planul barei*.

Specifică acestor bare este schimbarea direcției axei longitudinale, la granițele dintre segmentele care le formează: de o parte și de alta față de granițe **eforturile** secționale vor avea expresii diferite, adică vor trebui separate regiuni diferite ale barei.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aspecte generale

Când două segmente învecinate sunt *reciproc perpendiculare*, între cele două regiuni au loc *permutări* ale efectelor date de încărcările exterioare de tip **forță**: cele de tip *axial* de pe prima regiune devin *tăietoare* pe a doua, fiind desigur adevărată și afirmația reciprocă; pe această bază, diagramele eforturilor $N(\mathbf{x})$ și $T(\mathbf{x})$ vor conține întotdeauna *salturi* atipice (*artificiale* – întrucât nu sunt provocate de prezența în acele secțiuni a unor forțe concentrate exterioare), la intersecția unor astfel de segmente, având direcții diferite între ele.

În schimb, *momentele* secționale sunt calculate mereu în raport cu anumite *puncte* (reprezentând centrele de greutate ale secțiunilor alese ca reper), astfel încât diagramele lor vor fi *continue* pe lungimea barelor, în toate situațiile!

Desigur că acest aspect nu exclude prezența pe aceste grafice a salturilor de tip clasic, date de momentele concentrate exterioare, dar care sunt de fapt tot o probă a *continuității* diagramelor.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aspecte generale

Se reamintește că efectele forțelor tăietoare sunt puțin semnificative, pentru barele cu secțiuni transversale de înălțime mică față de lungimea lor, încât *calculul de rezistență* se face și în acest caz ca la solicitările studiate anterior, de tip „ $\sigma + \sigma$ ”, folosind următoarea formă a condiției de rezistență:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M_{iz}(x)}{W_z(x)} \leq \sigma_a$$

Discuțiile asupra acestei relații rămân valabile, așa cum s-au făcut la analiza introductivă a solicitărilor compuse, iar calculul se face de obicei în secțiunea în care *momentul de încovoiere* are valoarea cea mai mare de pe bară.

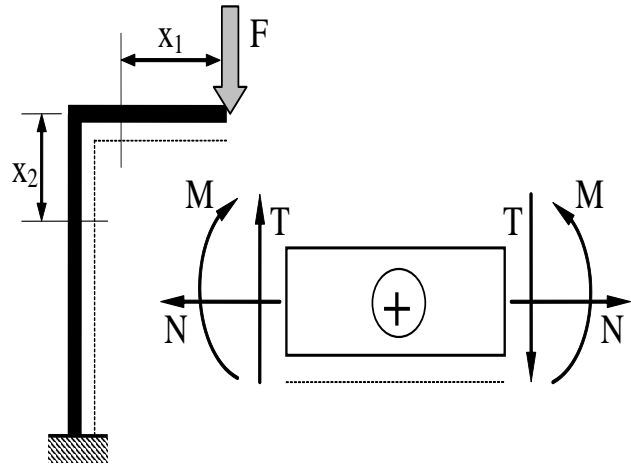
În situațiile în care există o altă secțiune transversală, a barei cotite calculate, în care *forța axială* atinge maximul, iar momentul are și el o valoare semnificativă, este indicat ca rezultatul obținut în urma calculelor de mai sus să fie verificat, cu aceeași relație, în secțiunea respectivă.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aspecte generale

O precizare suplimentară trebuie făcută despre adoptarea *convențiilor de semne*, pentru barele cotite, folosite atunci când se stabilesc expresiile eforturilor secționale:

convențiile de la barele drepte se păstrează în totalitate, așa cum se observă în figura alăturată, iar pentru ca semnele momentelor de încovoiere să păstreze pe toată lungimea barei aceeași regulă, se duce o *fibră punctată*, alăturată axei ei.



Păstrarea poziției „interioare” a acestei fibre față de axa longitudinală a barei și pe toată lungimea ei este esențială, iar regula de semne se definește luând-o ca reper; de obicei sunt considerate *pozitive* acele momente care tind să *solicite la tracțiune fibra punctată din secțiunea de calcul*.

Bare cotite formate din segmente drepte

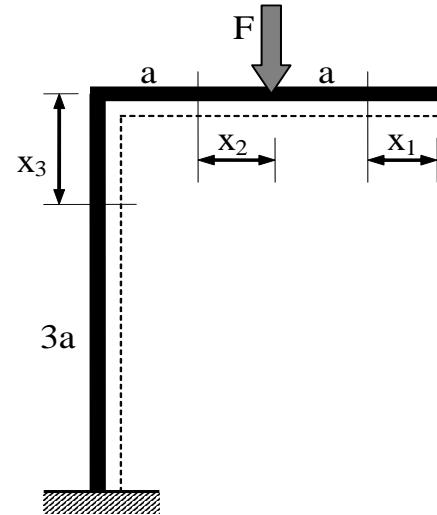
Aplicații

1. Să se dimensioneze bara schițată alăturat, știind că are secțiunile de formă *pătrată*, constantă pe lungime și este din oțel, cu $E=21 \times 10^4$ și $\sigma_a=180$ [MPa]; se mai cunosc valorile $F=3 \times 10^4$ N și $a=0,3$ m. Pentru bara astfel calculată să se stabilească și deplasarea pe verticală a punctului unde este aplicată forța concentrată F .

Rezolvare

Se observă că regiunea x_1 , care începe chiar de la capătul liber al barei, înainte de punctul unde se aplică forța, nu este deloc solicitată, adică eforturile secționale de pe acea regiune sunt *nule*.

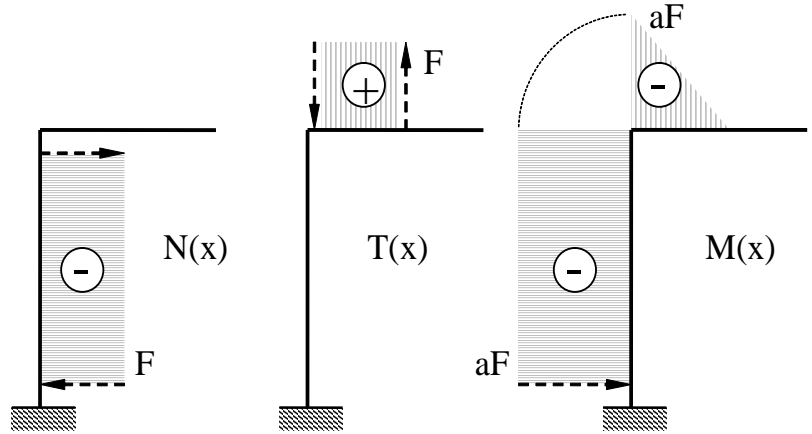
Se știe că, dacă o bară are un singur reazem *încastat*, se evită apariția în calcule a reacțiilor lui luând mereu în considerare încărcările din partea dinspre capătul liber (adică dinspre forța F , în acest caz); rezultă că nu este nevoie, în cazul de față, de calculul reacțiilor. Acestea există, sunt în principiu în număr de trei, dar valorile lor se vor putea obține *direct* de pe diagramele de eforturi, sub forma *salturilor* care vor figura în dreptul reazemului.



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

Folosind împărțirea în regiuni din figura de mai sus, expresiile eforturilor sectionale de pe cele două regiuni semnificative ale barei cotite se calculează și se scriu astfel:



$$\forall x_2 \in (0;a) : N(x_2) = 0, T_y(x_2) = F = ct, M_{iz}(x_2) = -F \cdot x \text{ deci } M(0) = 0, M(a) = -aF$$

$$\forall x_3 \in (0;3a) : N(x_3) = -F = ct, T_y(x_3) = 0, M_{iz}(x_3) = -F \cdot a = ct$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate alături și arată solicitarea periculoasă în toate secțiunile de pe segmentul vertical al barei; condiția de rezistență va fi:

$$\sigma_{ef \max}(x) = \frac{|N(x)|}{A(x)} + \frac{|M_{iz}(x)|}{W_z(x)} = \frac{F}{t^2} + \frac{aF}{\frac{t^3}{6}} = \frac{F}{t^2} + \frac{6aF}{t^3} \leq \sigma_a$$

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

Pentru dimensionarea secțiunii pe baza acestei relații se face mai întâi un calcul aproximativ, numai pe baza solicitării de încovoiere, adică se scrie că:

$$t_{\min} = \sqrt[3]{\frac{6aF}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ N}}{180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{300} \text{ mm} = 66,943 \text{ mm}$$

Mărind puțin dimensiunea astfel obținută, de exemplu alegând **t=68mm**, se face un calcul de *verificare* din condiția exactă:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N}}{4624 \text{ mm}^2} \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 300 \text{ mm}}{68 \text{ mm}} \right) = 178,222 \text{ MPa}$$

Această valoare se plasează foarte bine în preajma rezistenței admisibile a materialului barei și este potrivită ca rezultat al calculelor de proiectare.

Observații

1. La stabilirea expresiilor de mai sus ale eforturilor secționale s-au folosit *convențiile de semne* definite în figura de la începutul acestui capitol.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

2. Expresiile și diagramele eforturilor arată că *legăturile* dintre expresiile $T_y(x)$ și $M_{iz}(x)$ sunt la fel ca la barele drepte.
3. Diagrama de momente s-a obținut *continuă*, cum s-a arătat că trebuie să se întâmple, în vreme ce *salturile* din diagramele de forțe, produse în secțiunea unde axa barei își schimbă direcția, trebuie citite cu înțelesul că forța *tăietoare* F de pe segmentul orizontal devine forța *axială* F (de comprimare) pe segmentul vertical.
4. Salturile din diagrame din dreptul reazemului încastrat sunt date de reacțiunile din acel reazem – o forță *axială*, de mărime \mathbf{F} și un *moment*, de mărime \mathbf{aF} (reacțiunea tăietoare este nulă!).

Deplasarea *pe verticală* a punctului (notat în continuare cu C) în care acționează forța F (având chiar direcție verticală) se poate calcula direct, pe baza expresiilor de mai sus ale eforturilor secționale, aplicând *prima teoremă a lui Castigliano*.

Este important de precizat că, deoarece *energia potențială de deformare elastică* este acumulată în bară în mod *preponderent* datorită solicitării de *încovoiere* (încât efectele

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

solicitărilor axiale sunt practic neglijabile, din acest punct de vedere), aplicarea teoremelor energetice la barele plane cotite și curbe se referă exclusiv la aceasta. Prin urmare, deplasarea cerută se calculează astfel:

$$\delta_V(C) = \frac{\partial L_e}{\partial F} = \int_L \frac{M_{iz}(x)}{E \cdot I_z} \cdot \frac{\partial M_{iz}(x)}{\partial F} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (-Fx)(-x) dx + \int_0^{3a} (-Fa)(-a) dx \right]$$
$$\delta_V(C) = \frac{F}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^a + a^2 \cdot x \Big|_0^{3a} \right] = \frac{10}{3} \cdot \frac{a^3 F}{EI} = \frac{10}{3} \cdot \frac{(300\text{mm})^3 \cdot 3 \cdot 10^4 \text{N}}{21 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{(68\text{mm})^4}{12}} = \frac{4 \cdot 27 \cdot 10^7}{7 \cdot 68^4} \text{mm} = 7,214 \text{mm}$$

Dacă se preferă la calculul deplasării aplicarea *teoremei Mohr-Maxwell*, se observă mai întâi (folosind figura următoare) că expresiile eforturilor $m(x)$ din starea de încărcare fictivă coincid cu derivatele parțiale în raport cu F de pe cele două regiuni, calculate atunci când s-a folosit teorema lui Castigliano; expresiile și rezultatul calculului se vor obține așadar exact la fel ca mai sus.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

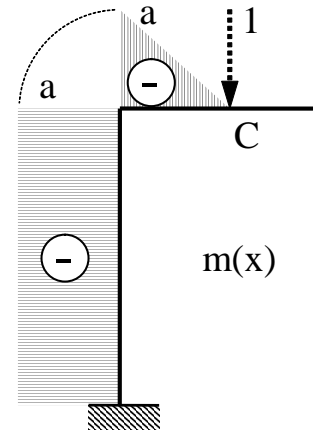
Trebuie remarcată ușurința cu care se trasează diagrama de momente din starea fictivă de încărcare:

graficele de pe regiuni sunt *asemenea* celor din diagrama reală, față de care se împart toate valorile la mărimea F !

Desigur că pentru calculul deplasării se poate folosi, fără dificultăți speciale, inclusiv metoda *grafică* de înmulțire a diagramelor (a lui Vereșceaghin), descrisă și aplicată la solicitările simple; cu acest algoritm deplasarea pe verticală din punctul C va fi:

$$\delta_V(C) = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot (-aF) \right] \cdot \frac{2}{3} \cdot (-a) + [3a \cdot (-aF)](-a) = \frac{10}{3} \cdot \frac{a^3 F}{EI}$$

Așa cum era de așteptat, s-a obținut același rezultat ca mai sus, dar pe o cale mult mai simplă și mai rapidă, față de metodele analitice; nu este de neglijat faptul că rezultatul este *pozitiv*, arătând că punctul C se deplasează chiar în sensul forței F (adică în jos), confirmând ceea ce este ușor de intuit, din aspectul fizic al solicitării.



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 1

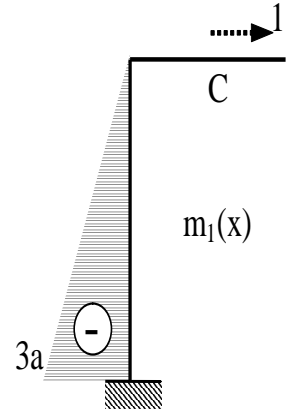
Dacă ar trebui calculată **deplasarea totală** din punctul C, atunci o metodă ca mai sus s-ar folosi pentru componenta ei *orizontală* $\delta_H(C)$; de exemplu, teorema Mohr-Maxwell implică diagrama *fictivă* din figură, iar înmulțirea ei (prin metoda Vereșceaghin) cu diagrama *reală* de momente duce la următorul calcul al deplasării:

$$\delta_H(C) = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot (-3a) \right] \cdot (-aF) = \frac{9}{2} \cdot \frac{a^3 F}{EI}$$

Deplasarea **totală** va fi *rezultanta* celor două componente:

$$\delta(C) = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_V^2} = \frac{a^3 F}{EI} \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{a^3 F}{EI} \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{100}{9}} = \frac{a^3 F}{6EI} \sqrt{1129} = 5,6 \frac{a^3 F}{EI}$$

Folosind datele numerice ale problemei se ajunge la o deplasare de 12,118 mm (de direcție *oblică* și sens către *dreapta jos*); cu totul acceptabilă pentru dimensiunile de gabarit ale barei considerate, ea poate fi asumată ca deformare din domeniul *elastic* de deformabilitate, pentru oțelul din care bara este realizată.



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicații

2. Să se observe în ce fel se schimbă solicitările, pentru bara din problema precedentă, atunci când îi este adăugat un reazem simplu suplimentar, în capătul ei liber.

Rezolvare

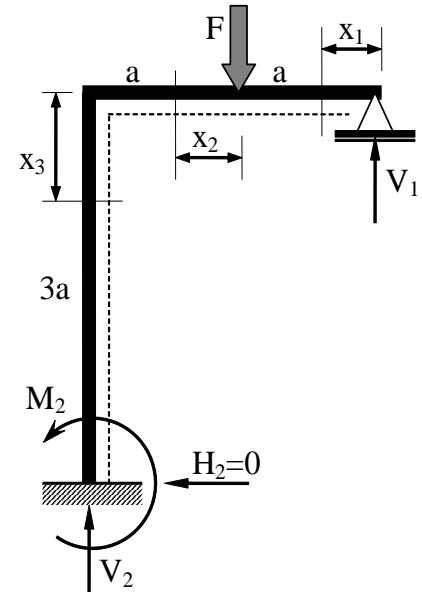
Se înțelege, pentru început, că apare o nouă reacțiune verticală V_1 , iar problema devine simplu *static nedeterminată*; calculul reacțiunilor nu poate fi, în acest caz, evitat.

Proiecțiile de forțe pe orizontală se reduc la reacțiunea H_2 , care va fi nulă, încât rămân necunoscute trei reacțiuni, din numai două ecuații de echilibru semnificative:

$$\sum Y_i = 0: V_1 + V_2 = F; \quad (\sum M_i)_2 = 0: V_1 \cdot 2a - F \cdot a + M_2 = 0$$

Observând că împărțirea în regiuni s-a făcut la fel ca la problema anterioară, se alege V_1 ca necunoscută de lucru și se scriu eforturile de încovoiere în funcție de ea:

$$M_{iz}(x_1) = V_1 \cdot x; \quad M_{iz}(x_2) = V_1 \cdot (a + x) - F \cdot x; \quad M_{iz}(x_3) = 2a \cdot V_1 - a \cdot F$$



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 2

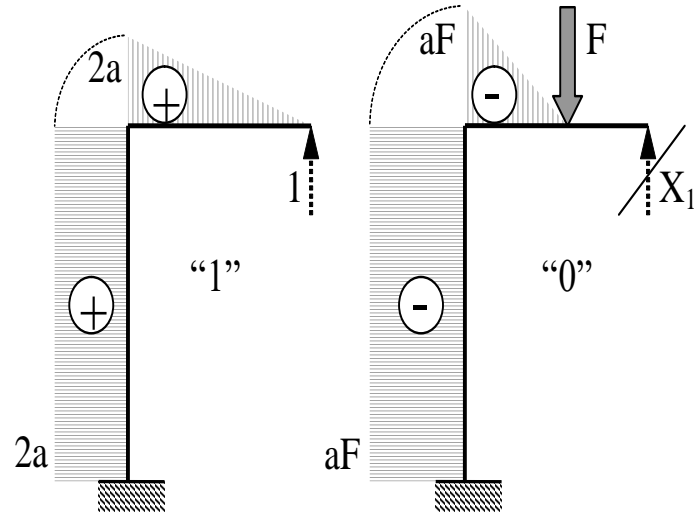
Aplicarea teoremei lui Castigliano în raport cu reacțiunea V_1 se face astfel:

$$\frac{\partial L_e}{\partial V_1} = 0 = \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^a (V_1 \cdot x) \cdot x \, dx + \int_0^a [V_1 \cdot (a+x) - F \cdot x] \cdot (a+x) \, dx + \int_0^{3a} (2aV_1 - a \cdot F) \cdot 2a \, dx \right]$$

După efectuarea operațiilor se găsește că reacțiunea necunoscută trebuie să aibă valoarea

$$V_1 = (41/88)F.$$

Pentru a verifica acest rezultat, se poate rezolva nedeterminarea pe o altă cale, precum *metoda eforturilor*: reazemul simplu va fi cel îndepărtat, pentru a obține sistemul de bază pe care se construiesc cele două stări de încărcare imaginare, așa cum se arată în figura alăturată.



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 2

Pe baza diagramelor de momente din stările fictive, cei doi coeficienți ceruți de metodă se calculează astfel:

$$\begin{cases} EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + 3a \cdot 2a \cdot 2a = \frac{44}{3} a^3 \\ EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-aF) \cdot \frac{5}{3} a + 3a \cdot (-aF) \cdot 2a = -\frac{41}{6} a^3 F \end{cases}$$

Folosind aceste rezultate se poate stabili mărimea forței necunoscute, pornind de la ecuația metodei eforturilor:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = V_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{41}{6} \cdot \frac{3}{44} F = \frac{41}{88} F$$

Se observă că, așa cum era normal, rezolvarea nedeterminării prin cele două metode aplicate a condus la aceeași valoare a necunoscutei, iar aceasta va fi folosită în continuare la stabilirea expresiilor eforturilor secționale, după care se vor trasa diagramele de eforturi ce corespund barei *reale*.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 2

Revenind la împărțirea în regiuni și la celelalte notații din desenul inițial, se ajunge la următoarele calcule:

$$\forall x_1 \in (0; a) : N(x_1) = 0, T_y(x_1) = -V_1 = -\frac{41}{88}F = ct, M_{iz}(x_1) = \frac{41}{88}F \cdot x, \text{ deci } M(0) = 0, M(a) = \frac{41}{88}aF$$

$$\forall x_2 \in (0; a) : N(x_2) = 0, T_y(x_2) = -V_1 + F = \frac{47}{88}F = ct,$$

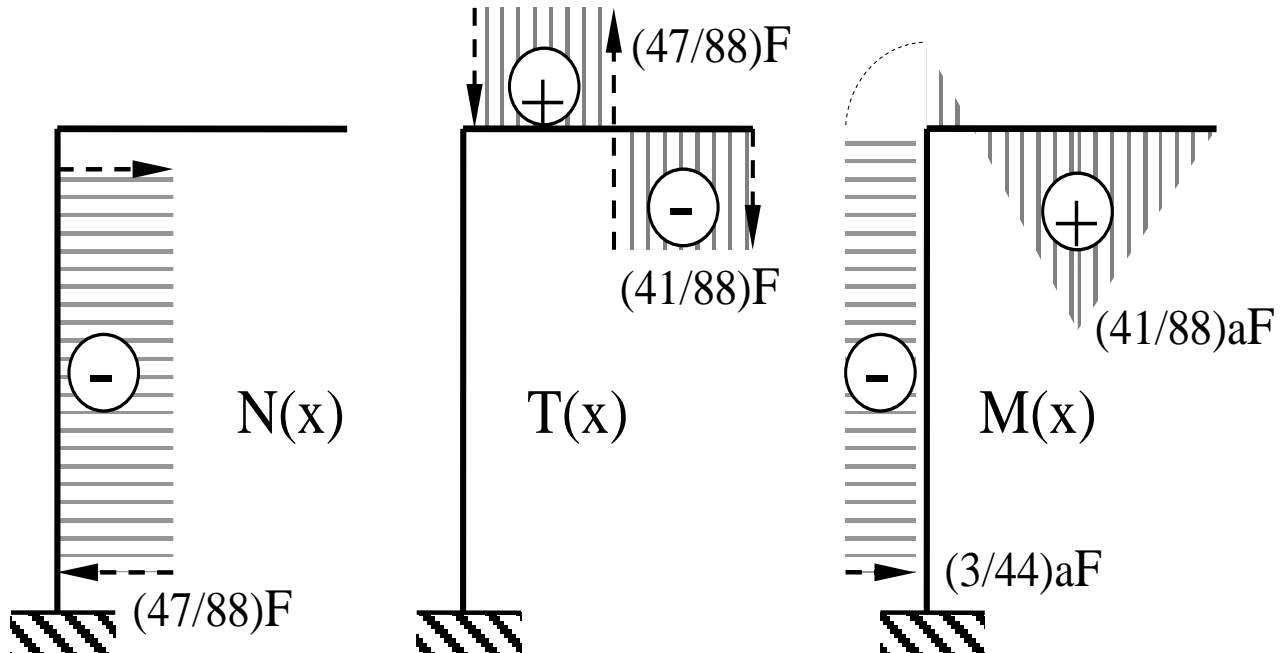
$$M_{iz}(x_2) = \frac{41}{88}F(a + x) - F \cdot x = \frac{41}{88}aF - \frac{47}{88}Fx, \text{ deci } M(0) = \frac{41}{88}aF, M(a) = -\frac{3}{44}aF$$

$$\forall x_3 \in (0; 3a) : N(x_3) = V_1 - F = -\frac{47}{88}F = ct, T_y(x_3) = 0, M_{iz}(x_3) = -\frac{3}{44}aF = ct$$

Diagramele de mai jos arată că reazemul suplimentar uniformizează solicitarea, pe lungimea barei cotite și scade la jumătate valorile forțelor secționale; este importantă consecința că efortul maxim de încovoiere scade cu peste 50% și nu mai apare pe segmentul vertical al barei, ci chiar în secțiunea forței F . Faptul că problema a devenit static nedeterminată a dus la complicări de calcul, dar scăderea solicitării maxime face posibile economii de material; pentru a le evalua trebuie făcut calculul de rezistență pentru noua variantă de rezemare a barei.

Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 2



Bare cotite formate din segmente drepte

Aplicația 2

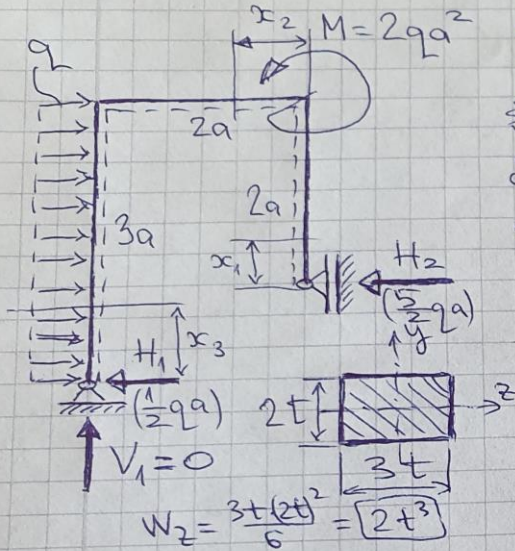
Trebuie observat că în secțiunea periculoasă efortul axial este nul, astfel încât dimensionarea barei cotite se poate face numai pe baza solicitării de încovoiere, astfel:

$$t_{\min} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \frac{41}{88} aF}{\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 41 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ N}}{44 \cdot 180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 51,88 \text{ mm}$$

Acest rezultat arată că secțiunea transversală pătrată cu latura 52 mm va fi suficientă, pentru ca bara cotită (static nedeterminată) calculată în această problemă să suporte solicitarea pentru care este destinată.

Din micșorarea de arie, față de secțiunea cu latura de 68 mm din prima variantă a barei (care era static determinată), se deduce că economia de material (deci și micșorarea greutateii barei!) este (în acest caz) de 41,5%!

Bare cotite formate din segmente drepte



3. Să se dimensioneze construcția alăturată știind că secțiunile ei transversale au formă de dreptunghi, iar mărimile fizice necesare în calcul sunt: $a = 0,4\text{m}$; $q = 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $\sigma_a = 160\text{MPa}$.

Rezolvare:

Ecuațiile de echilibru globale sunt

$$\sum X_i = 0: H_1 + H_2 = 3qa; \quad \sum Y_i = 0: \boxed{V_1 = 0}$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: H_2 \cdot a = 3qa \cdot \frac{3a}{2} - 2qa^2 \Rightarrow \boxed{H_2 = \frac{5}{2}qa}$$

$$(\sum M_i)_2 = 0: H_1 \cdot a = 2qa^2 - 3qa \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{H_1 = \frac{1}{2}qa}$$

Expresiile eforturilor:

$$(\forall) x_1 \in (0; 2a): N(x_1) = 0; \quad \sigma_y(x_1) = +\frac{5}{2}qa = ct; \quad M_{i_2}(x_1) = -\frac{5}{2}qax \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(2a) = -5qa^2 \end{array} \right.$$

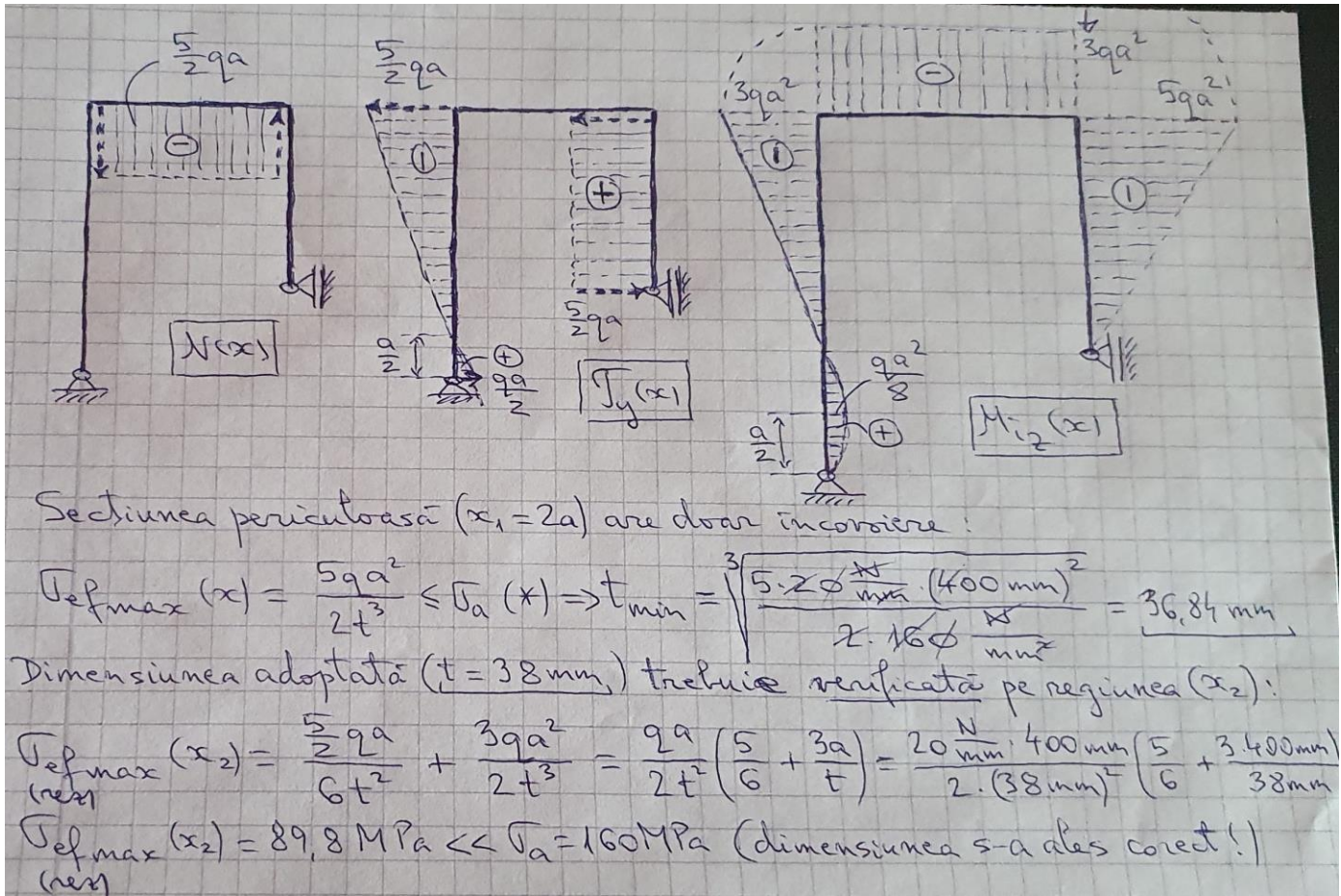
$$(\forall) x_2 \in (0; 2a): N(x_2) = -\frac{5}{2}qa = ct; \quad \sigma_y(x_2) = 0; \quad M_{i_2}(x_2) = 2qa^2 - \frac{5}{2}qa \cdot x_2 = -3qa^2 = ct$$

$$(\forall) x_3 \in (0; 3a): N(x_3) = 0; \quad \sigma_y(x_3) = \frac{qa}{2} - q \cdot x \quad \left\{ \begin{array}{l} T(0) = +\frac{qa}{2} \\ T(3a) = -\frac{5}{2}qa \end{array} \right. \quad \sigma_y\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \rightarrow \text{extrem pt. momente!}$$

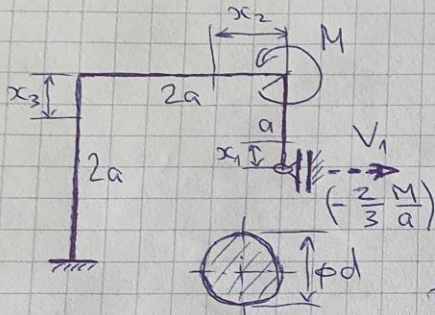
$$M_{i_2}(x_3) = \frac{qa}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}; \quad M_{\max}(x_3) = M\left(x_3 = \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 qa^2 = \frac{1}{8} qa^2$$

$$M(0) = 0; \quad M(3a) = qa^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right) = -3qa^2$$

Bare cotite formate din segmente drepte



Bare cotite formate din segmente drepte



4. Să se scrie condiția de rezistență pentru bara cotită alăturată (în litere!).

Rezolvare

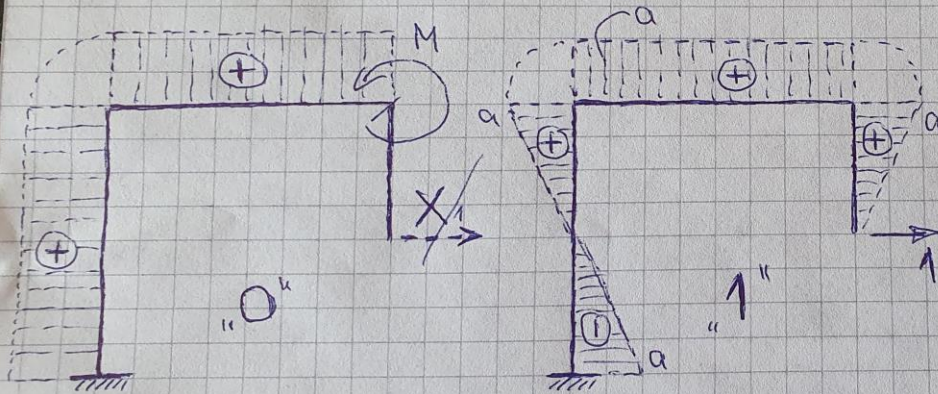
Problema este simply static nedeterminată.

Rezolvarea se poate face cu metoda eforturilor:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = V_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{2a^2 M}{3a^3} = \boxed{-\frac{2M}{3a}}$$



$$EI_2 \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{a \cdot (-a)}{2} \cdot \frac{2}{3} (-a) + (a \cdot 2a) \cdot a = 3a^3$$

$$EI_2 \cdot \delta_{10} = a \cdot 2a \cdot M + \frac{a \cdot a}{2} \cdot M + \frac{a \cdot (-a)}{2} \cdot M = 2a^2 M$$

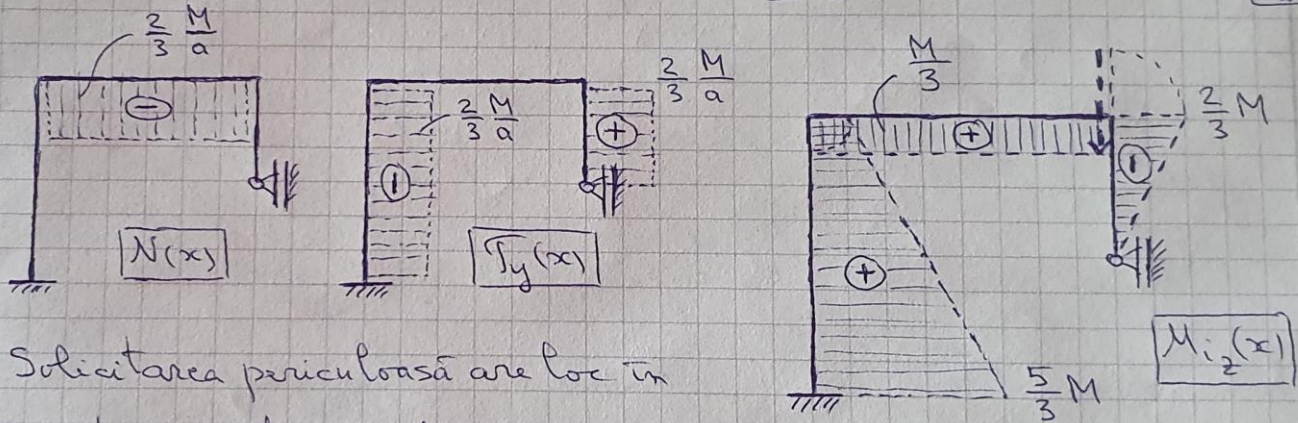
Bare cotite formate din segmente drepte

$(\forall) x_1 \in (0, a): N(x_1) = 0; T_y(x_1) = + \frac{2}{3} \frac{M}{a}; M_{i_2}(x_1) = - \frac{2}{3} \frac{M}{a} \cdot x$

$(\forall) x_2 \in (0, 2a): N(x_2) = - \frac{2}{3} \frac{M}{a}; T_y(x_2) = 0; M_{i_2}(x_2) = + M - \frac{2}{3} M = + \frac{M}{3} = \text{ct}$

$(\forall) x_3 \in (0, 2a): N(x_3) = 0; T_y(x_3) = - \frac{2}{3} \frac{M}{a}$

$M_{i_2}(x_3) = + M - \frac{2}{3} \frac{M}{a} \cdot (a - x) \Rightarrow M(0) = + \frac{M}{3}; M(a) = + M; M(2a) = + \frac{5}{3} M$



Solicitarea periculoasă are loc în

încăstare, unde se produce numai încovoiere:

$$\sigma_{ef \max}(x) = \frac{|M_{i_2 \max}(x)|}{W_z} = \frac{\frac{5}{3} M}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq \sigma_a(x)$$

2.6

Bare cotite cu nedeterminări interioare

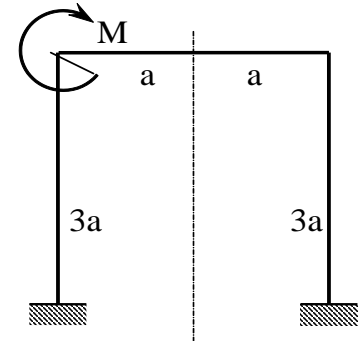
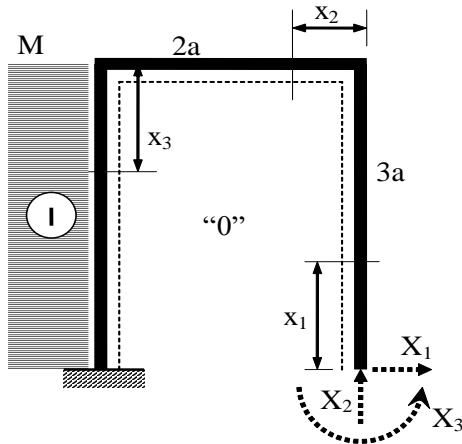
Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicații

1. Să se dimensioneze bara din figură, având secțiunile de formă pătrată și fiind făcută din oțel cu $E=21 \times 10^4$ și $\sigma_a=180$ [MPa]; se cunosc $M=12\text{kNm}$ și $a=0,2\text{m}$.

Rezolvare

Problema e **triplu static nedeterminată exterior**; construcția are axă verticală de simetrie, dar solicitarea este **nesimetrică** și nu se pot face simplificări în rezolvarea nedeterminărilor.



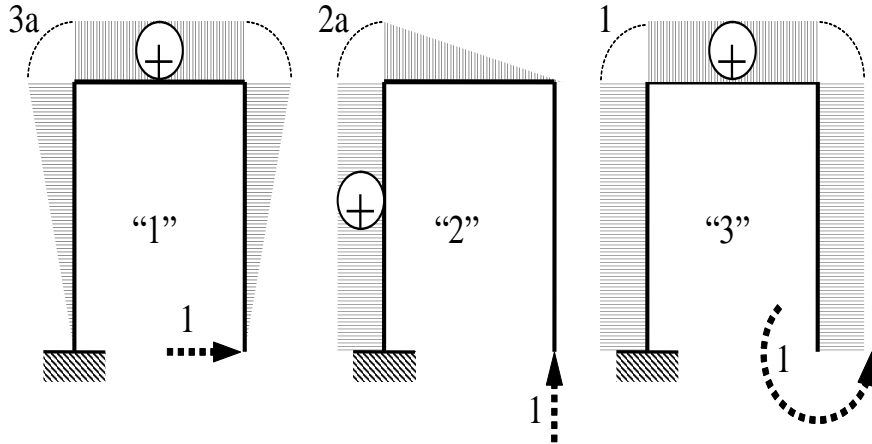
Sistemul de bază se obține îndepărtând o încastrare (schița prezintă necunoscutele de lucru și regiunile barei); este schițată și diagrama de momente a stării fictive „0”, cu sistemul de bază având ca singură încărcare momentul exterior M de pe bara reală.

Stările fictive au diagrame de tip liniar și coeficienții δ_{ij} din ecuațiile metodei eforturilor se pot calcula înmulțind *grafic* diagramele (din pagina următoare), iar expresiile analitice ale eforturilor respective nu mai sunt necesare.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 1

Pentru a construi cele trei ecuații ale metodei eforturilor sunt de calculat 6 coeficienți, iar metoda grafo-analitică se aplică astfel:



$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a + 2a \cdot 3a \cdot 3a = 36a^3; \quad EI \cdot \delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 3a + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 2a = 15a^3$$

$$EI \cdot \delta_{13} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot 1 + 3a \cdot 3a \cdot 1 = 18a^2; \quad EI \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + 3a \cdot 2a \cdot 2a = \frac{44}{3}a^3$$

$$EI \cdot \delta_{23} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 + 3a \cdot 2a \cdot 1 = 8a^2; \quad EI \cdot \delta_{33} = 2 \cdot 3a \cdot 1 \cdot 1 + 2a \cdot 1 \cdot 1 = 8a$$

$$EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot (-M) = -\frac{9}{2}a^2M; \quad EI \cdot \delta_{20} = 3a \cdot 2a \cdot (-M) = -6a^2M; \quad EI \cdot \delta_{30} = 3a \cdot 1 \cdot (-M) = -3aM$$

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 1

Se introduc rezultatele în sistemul de ecuații ale metodei, simplificând prin EI:

$$\begin{cases} 36a^3 X_1 + 15a^3 X_2 + 18a^2 X_3 = \frac{9}{2}a^2 M \\ 15a^3 X_1 + \frac{44}{3}a^3 X_2 + 8a^2 X_3 = 6a^2 M \\ 18a^2 X_1 + 8a^2 X_2 + 8a X_3 = 3a M \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obțin cele trei eforturi (reacțiuni) necunoscute:

$$X_1 = \bar{T} = \frac{2}{13} \frac{M}{a}; \quad X_2 = \bar{N} = \frac{27}{52} \frac{M}{a}; \quad X_3 = \bar{M} = -\frac{51}{104} M$$

Introducând aceste mărimi pe schema reală de mai sus, expresiile eforturilor sunt:

$$\forall x_1 \in (0, 3a): \quad N(x_1) = -\frac{27}{52} \frac{M}{a}; \quad T(x_1) = -\frac{2}{13} \frac{M}{a};$$

$$M(x_1) = \frac{2}{13} \frac{M}{a} \cdot x - \frac{51}{104} M; \quad \text{de unde} \quad M(0) = -\frac{51}{104} M; \quad M(3a) = -\frac{3}{104} M$$

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 1

$$\forall x_2 \in (0, 2a) : T(x_2) = -\frac{27}{52} \frac{M}{a}; N(x_2) = +\frac{2}{13} \frac{M}{a};$$

$$M(x_2) = -\frac{3}{104} M + \frac{27}{52} \frac{M}{a} \cdot x; \text{ de unde } M(0) = -\frac{3}{104} M; M(2a) = \frac{105}{104} M$$

$$\forall x_3 \in (0, 3a) : N(x_3) = +\frac{27}{52} \frac{M}{a}; T(x_3) = +\frac{2}{13} \frac{M}{a}; M(x_3) = \frac{105}{104} M - M - \frac{2}{13} \frac{M}{a} \cdot x$$

$$\Rightarrow M(x_3) = \frac{1}{104} M - \frac{2}{13} \frac{M}{a} \cdot x; \text{ de unde } M(0) = \frac{1}{104} M; M(3a) = -\frac{47}{104} M$$

Solicitarea periculoasă se produce la capătul din stânga al segmentului orizontal de pe bară, înaintea punctului unde se aplică momentul concentrat M ; în acel punct efortul de încovoiere coincide practic cu M (cu o eroare mai mică de $1/100$), iar efortul axial are valoare neglijabilă, încât se admite ca dimensionarea să se facă luând în considerare numai solicitarea de încovoiere:

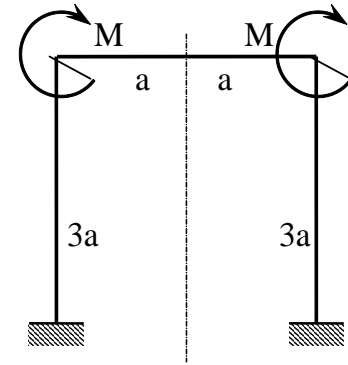
$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{M}{W} = \frac{6M}{t^3} \leq \sigma_a \quad \Rightarrow \quad t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 12 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{200} \text{ mm} = 58,48 \text{ mm}$$

Prin urmare, se poate adopta secțiunea pătrată cu latura $t = 60$ mm.

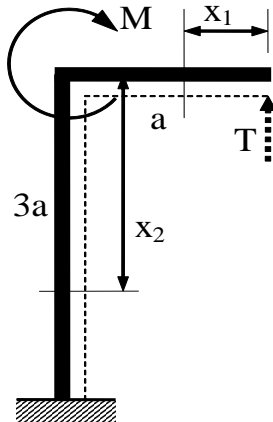
Bare cotate – nedeterminări interioare

Aplicații

2. Să se arate cum se modifică solicitarea barei de mai sus, dacă încărcarea ei se completează cu încă un moment M , simetric cu primul, dar având același sens de rotație cu acela (cele două momente având deci acțiune **antisimetrică**).



Rezolvare



Calculul se poate simplifica, prin secționarea imaginară a barei pe axa ei de simetrie; gradul de nedeterminare se reduce astfel la **1** (în necunoscuta T), eforturile N și M fiind *nule* în acea secțiune, deoarece corespund unor diagrame *antisimetrice*.

Pe de altă parte, bara poate fi studiată *pe o jumătate* a ei (ca în figura alăturată), cu sistemul de bază și împărțirea în regiuni alese pe aceleași baze ca în rezolvările aplicațiilor precedente.

Bare cotate – nedeterminări interioare

Aplicația 2

Stările fictive de solicitare sunt arătate în figura alăturată, cu diagramele care le corespund: expresiile eforturilor sunt simple și se poate face abstracție de ele în această etapă, întrucât graficele se trasează cu ușurință și permit aplicarea, la calculul coeficienților δ_{ij} , a algoritmului de înmulțire grafică:

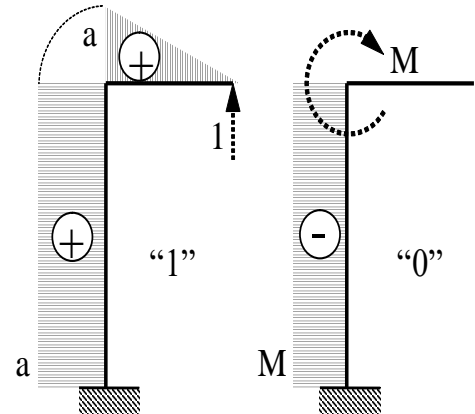
$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 3a \cdot a \cdot a = \frac{10}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{10} = 3a \cdot a \cdot (-M) = -3a^2 M$$

Din ecuația metodei eforturilor rezultă:

$$X_1 = T = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{3a^2 M}{\frac{10}{3} a^3} = \frac{9}{10} \frac{M}{a}$$

Această valoare se introduce pe schema de solicitare din figura anterioară și se stabilesc expresiile eforturilor secționale pentru jumătatea din stânga a barei reale, astfel:



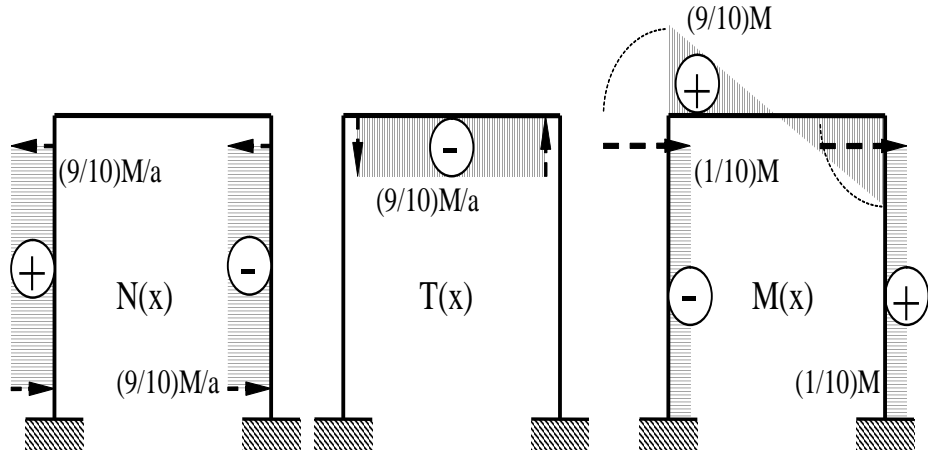
Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 2

$$\forall x_1 \in (0; a) : N(x_1) = 0; T(x_1) = -\frac{9}{10} \frac{M}{a}; M(x_1) = \frac{9}{10} \frac{M}{a} \cdot x \text{ de unde } M(0) = 0; M(a) = \frac{9}{10} M$$

$$\forall x_2 \in (0; 3a) : T(x_2) = 0; N(x_2) = +\frac{9}{10} \frac{M}{a}; M(x_2) = \frac{9}{10} M - M = -\frac{1}{10} M = ct$$

Cu aceste date se trasează diagramele de eforturi pe jumătatea din stânga a barei, după care se prelungește prin simetrie diagrama $T(x)$, iar $N(x)$ și $M(x)$ prin antisimetrie, pe întreaga lungime a construcției.



Se remarcă pe diagrame că eforturile necunoscute N , T , M (dintre care doar T era nenul) plasate la începutul

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 2

rezolvării în secțiunea imaginară de pe axa de simetrie a barei coincid cu valorile din acea secțiune din diagramele eforturilor respective.

Solicitarea periculoasă are loc *la capetele segmentului orizontal* al barei, unde calculul se face numai din solicitarea de **încovoiere**:

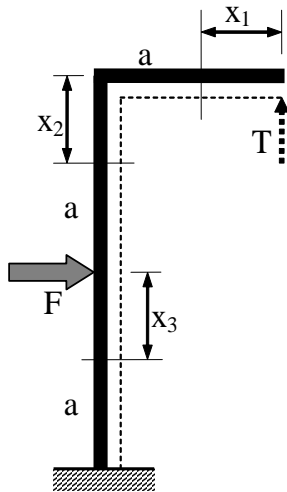
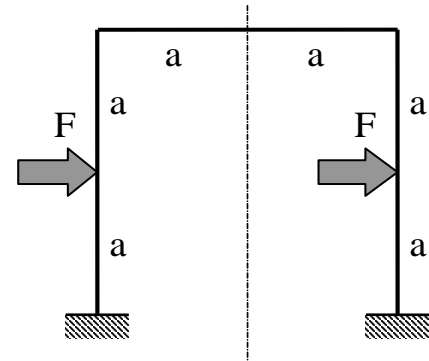
$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \frac{M(x)}{W} = \frac{9}{10} M \cdot \frac{6}{t^3} \leq \sigma_a \Rightarrow t_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 9}{5} \cdot \frac{12 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{360} = 71,13 \text{ mm}$$

Calculul de dimensionare conduce la rezultatul că secțiunea pătrată cu latura de **72mm** va fi suficientă pentru ca bara cotită considerată să suporte solicitările sale exterioare; se poate constata că adăugarea pe bară a celui de-al doilea moment concentrat face să crească latura necesară a secțiunilor transversale cu 20%, astfel încât consumul de material pentru realizarea barei se va mări cu 44%.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicații

3. Să se dimensioneze bara alăturată, știind că are secțiunile transversale de formă circulară plină, constantă pe lungime și că este din oțel, cu $E=21 \times 10^4$ și $\sigma_a=160$ [MPa]; se mai cunosc $F=2 \times 10^4$ N și $a=0,2$ m.



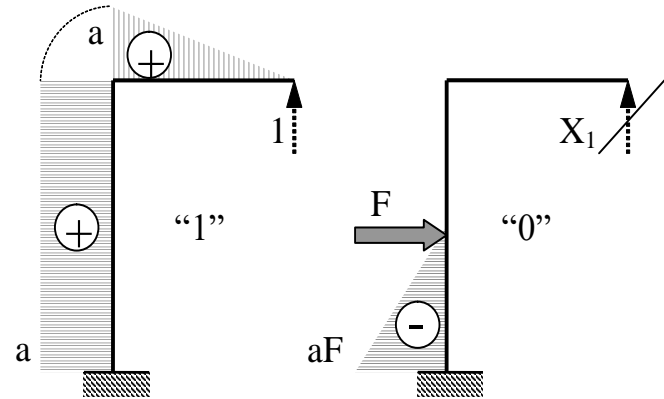
Rezolvare

Cele două reazeme încastrate introduc fiecare câte trei reacțiuni, problema fiind **triplu static nedeterminată exterior**. Pe de altă parte, construcția este **simetrică** solicitată **antisimetric**; tăierea imaginară pe axa de simetrie scade gradul de nedeterminare: diagramele $N(x)$ și $M(x)$ fiind **antisimetrice**, necunoscutele ce le corespund vor fi nule în tăietură, **singura** necunoscută static nedeterminată rămasă fiind **forța tăietoare T** ; studiul se face pe jumătate din construcția inițială (reprezentată alăturat), iar nedeterminarea se rezolvă simplu cu metoda eforturilor.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 3

Sistemul de bază și stările fictive se obțin ca în figură; se observă ușurința trasării diagramelor acestor stări de încărcare, practic fără să fie nevoie de expresiile eforturilor; diagramele sunt *liniare* pe toate regiunile, deci coeficienții δ_{ij} se obțin după regula lui Verescheghin:



$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a = \frac{7}{3} a^3 ; \quad EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-aF) \cdot a = -\frac{1}{2} a^3 F$$

Din ecuația metodei eforturilor se calculează forța necunoscută:

$$X_1 = T = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2} a^3 F \cdot \frac{3}{7a^3} = \frac{3}{14} F$$

Plasând această valoare pe schema simplificată inițială, se găsesc expresiile eforturilor secționale reale, dezvoltate în pagina următoare.

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 3

Diagramele de eforturi (prezentate mai jos) se trasează mai întâi pentru partea stângă a barei, apoi se prelungesc în partea ei dreaptă prin *simetrie* – pentru forța tăietoare $T(x)$, respectiv prin *antisimetrie* – pe celelalte două diagrame.

$$\forall x_1 \in (0;a) : N(x_1) = 0, \quad T_y(x_1) = -T = -\frac{3}{14}F = \text{ct},$$

$$M_{iz}(x_1) = +T \cdot x = \frac{3}{14}F \cdot x, \quad \text{deci} \quad M(0) = 0, \quad M(a) = \frac{3}{14}aF$$

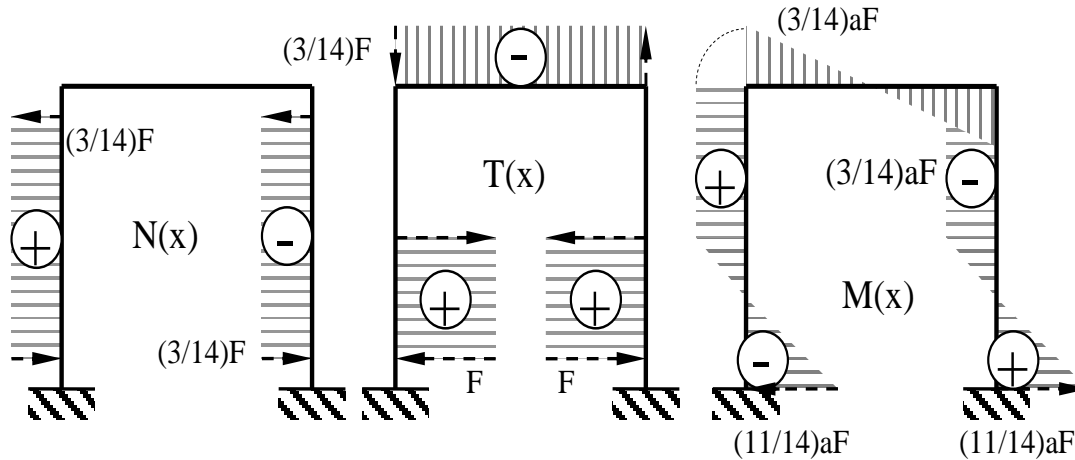
$$\forall x_2 \in (0;a) : N(x_2) = T = \frac{3}{14}F = \text{ct}, \quad T_y(x_2) = 0, \quad M_{iz}(x_2) = T \cdot a = \frac{3}{14}aF = \text{ct}$$

$$\forall x_3 \in (0;a) : N(x_3) = \frac{3}{14}F = \text{ct}, \quad T_y(x_3) = F = \text{ct},$$

$$M_{iz}(x_3) = -F \cdot x + T \cdot a = \frac{3}{14}aF - Fx, \quad \text{deci} \quad M(0) = \frac{3}{14}aF, \quad M(a) = -\frac{11}{14}aF$$

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 3



Solicitarea periculoasă are loc în secțiunile din încastrări și ținând seama că secțiunile transversale sunt circulare pline, condiția calculului de rezistență se va scrie astfel:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{W} = \frac{3}{14} \frac{F}{\pi d^2} + \frac{11}{14} \frac{aF}{\pi d^3} \leq \sigma_a$$

Bare cotite – nedeterminări interioare

Aplicația 3

La fel cum s-a procedat într-o aplicație anterioară, întrucât găsirea valorii diametrului d prin rezolvarea directă a inecuației este dificilă, devine necesară o pre-dimensionare, din încovoiere:

$$\frac{11}{14} aF \cdot \frac{32}{\pi d^3} \leq \sigma_a \Rightarrow d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{11 \cdot 16}{7\pi} \cdot \frac{200 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{4400}{7\pi}} \text{ mm} = 58,48 \text{ mm}$$

Se mărește puțin acest diametru, de exemplu la valoarea de 60mm și se face verificarea condiției exacte de rezistență:

$$\sigma_{\text{rez max}}(x) = \frac{6}{7\pi} \cdot \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N}}{3600 \text{ mm}^2} + \frac{11 \cdot 16}{7 \cdot \pi} \cdot \frac{200 \text{ mm} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ N}}{216000 \text{ mm}^3} = 149,722 \text{ MPa}$$

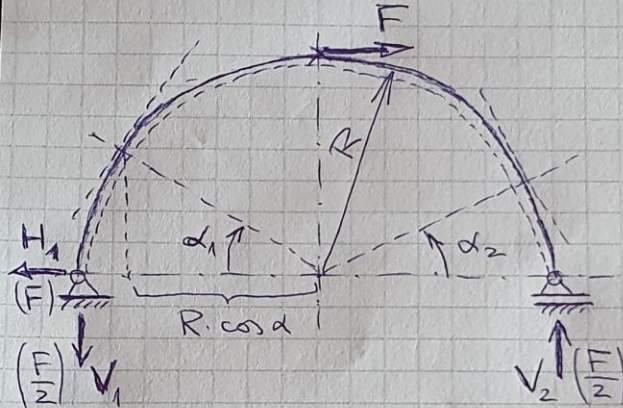
Tensiunea maximă din bară nu depășește rezistența admisibilă a materialului ei, iar diametrul secțiunilor transversale poate avea valoarea $d = 60 \text{ mm}$.

2.7

Calculul barelor în formă de arc de cerc

Calculul barelor în formă de arc de cerc

1. Să se scrie condiția de rezistență pentru bara de mai jos.



Reacțiunile verticale se obțin din

ecuații de momente: $V_1 \cdot 2R = F \cdot R$

$$\begin{aligned} & \forall \alpha_2 \in (0; \frac{\pi}{2}): N(\alpha_2) = -\frac{F}{2} \cdot \cos \alpha & \begin{cases} N(0) = -\frac{F}{2} \\ N(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \\ & T_y(\alpha_2) = -\frac{F}{2} \cdot \sin \alpha & \begin{cases} T(0) = 0 \\ T(\frac{\pi}{2}) = -\frac{F}{2} \end{cases} \\ & M_{i2}(\alpha_2) = +\frac{F}{2} \cdot R(1 - \cos \alpha) & \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(\frac{\pi}{2}) = \frac{FR}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\forall \alpha_1 \in (0; \frac{\pi}{2}): N(\alpha_1) = \frac{F}{2} \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha \rightarrow N(0) = \frac{F}{2}; N(\frac{\pi}{2}) = F$$

$$N'(\alpha_1) = F \cdot \cos \alpha - \frac{F}{2} \sin \alpha \rightarrow \text{se anulează pt. } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha_M = 63^\circ 30'$$

$$N_{\max} = N(\alpha_M) = \frac{F}{2} \cdot 0,447 + F \cdot 0,895 = 1,185 \cdot F \quad \sin \alpha_M = 0,895; \cos \alpha_M = 0,447$$

$$T_y(\alpha_1) = F \cdot \cos \alpha - \frac{F}{2} \cdot \sin \alpha \rightarrow T(0) = F; T(\frac{\pi}{2}) = -\frac{F}{2}; T'(\alpha_1) = -F \sin \alpha - \frac{F}{2} \cdot \cos \alpha < 0$$

este strict descrescătoare și trece prin 0 când $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ - pct de extrem pt. moment!

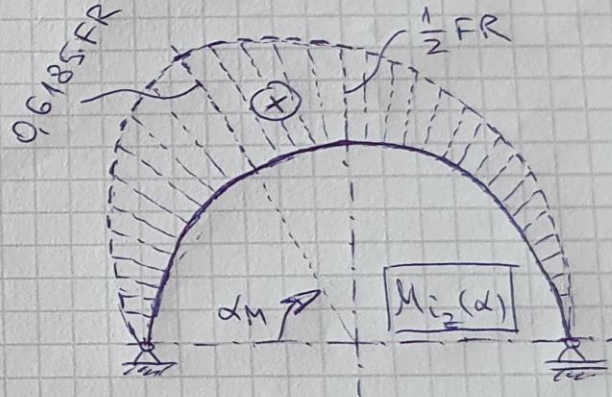
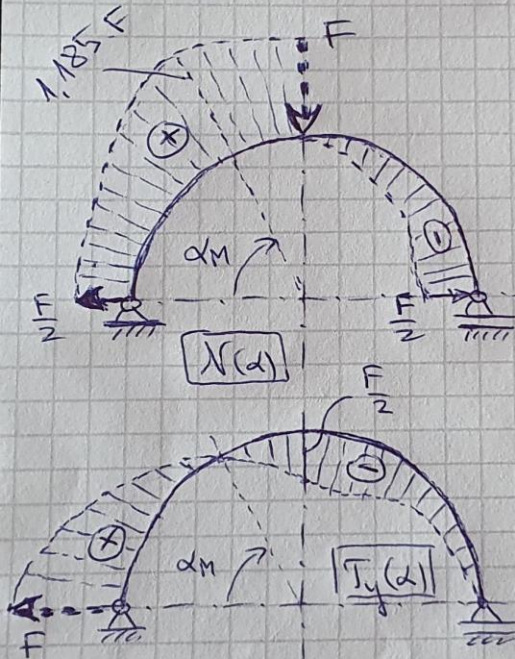
$$M_{i2}(\alpha_1) = H_1 \cdot R \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot R(1 - \cos \alpha) = F \cdot R \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} FR(1 - \cos \alpha)$$

$$M'(\alpha_1) = FR \cos \alpha - \frac{1}{2} FR \cdot \sin \alpha = R \cdot T_y(\alpha_1) !! \quad M(0) = 0; M(\frac{\pi}{2}) = \frac{FR}{2}$$

Calculul barelor în formă de arc de cerc

$$M_{i2 \max}(\alpha_1) = M_{i2}(\alpha_M) = FR \cdot \left[0,895 + \frac{1}{2} (0,447 - 1) \right] = \underline{0,6185 FR}$$

Folosind rezultatele de mai sus, diagramele se trasează astfel:



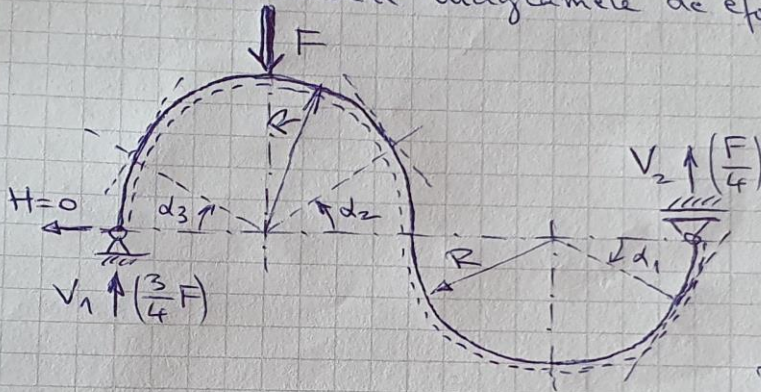
Secțiunea periclitată este $\alpha_1 = \alpha_M = 63^\circ 30'$

Condiția de rezistență (pentru secțiuni transversale circulare, cu diam. $[d]$) se scrie:

$$\sigma_{rez \max}(\alpha) = \sigma_{rez \max}(\alpha_M) = \frac{1,185 \cdot F}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{0,6185 FR}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq \sigma_a (*)$$

Calculul barelor în formă de arc de cerc

2. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara de mai jos.



$$\sum X_i = 0 : H = 0 ; \sum Y_i = 0 : V_1 + V_2 = F$$

$$(\sum M_i)_1 = 0 : V_2 \cdot 4R = F \cdot R \Rightarrow V_2 = \frac{F}{4}$$

$$(\sum M_i)_2 = 0 : V_1 \cdot 4R = F \cdot 3R \Rightarrow V_1 = \frac{3}{4} F$$

$$(\forall) \alpha_3 \in (0; \frac{\pi}{2}) : N(\alpha_3) = -\frac{3}{4} F \cdot \cos \alpha$$

$$N(0) = -\frac{3}{4} F ; N(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$T_y(\alpha_3) = +\frac{3}{4} F \cdot \sin \alpha ; T(0) = 0 ; T(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{4} F$$

$$M_{i2}(\alpha_3) = +\frac{3}{4} F \cdot R (1 - \cos \alpha) \rightarrow M(0) = 0 ; M(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{4} F R$$

$$(\forall) \alpha_2 \in (0; \frac{\pi}{2}) : N(\alpha_2) = -\frac{F}{4} \cdot \cos \alpha ; N(0) = -\frac{F}{4} ; N(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$T_y(\alpha_2) = -\frac{F}{4} \cdot \sin \alpha ; T(0) = 0 ; T(\frac{\pi}{2}) = -\frac{F}{4}$$

$$M_{i2}(\alpha_2) = +\frac{F}{4} \cdot (2R + R - R \cos \alpha) \rightarrow M(0) = 2 \cdot \frac{FR}{4} = \frac{FR}{2} ; M(\frac{\pi}{2}) = 3 \cdot \frac{FR}{4}$$

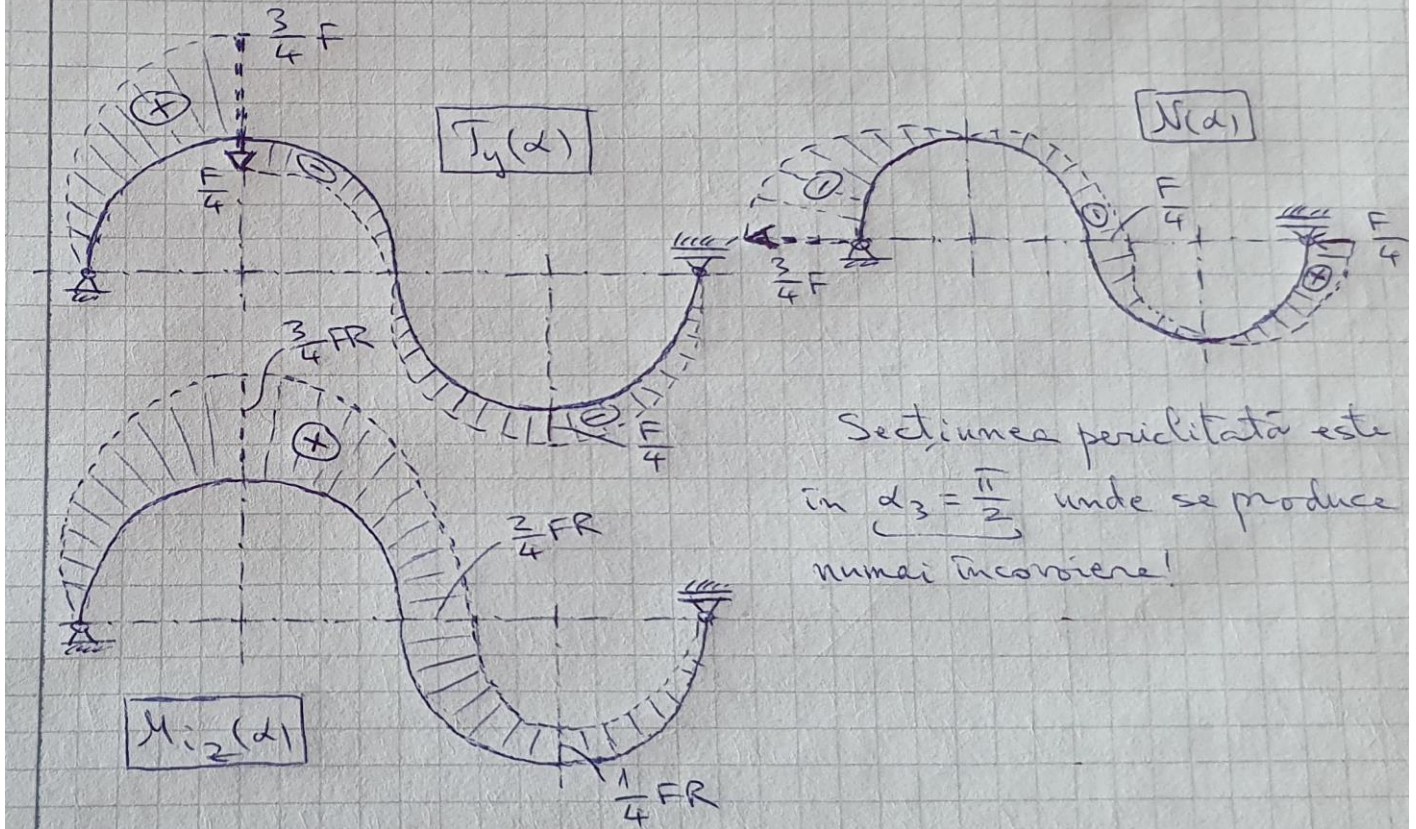
$$(\forall) \alpha_1 \in (0; \pi) : N(\alpha_1) = \frac{F}{4} \cdot \cos \alpha \rightarrow N(0) = \frac{F}{4} ; N(\frac{\pi}{2}) = 0 ; N(\pi) = -\frac{F}{4}$$

$$T_y(\alpha_1) = -\frac{F}{4} \cdot \sin \alpha \rightarrow T(0) = T(\pi) = 0 ; T(\frac{\pi}{2}) = -\frac{F}{4}$$

$$M_{i2}(\alpha_1) = +\frac{F}{4} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) \rightarrow M(0) = 0 ; M(\frac{\pi}{2}) = \frac{FR}{4} ; M(\pi) = 2 \cdot \frac{FR}{4}$$

Calculul barelor în formă de arc de cerc

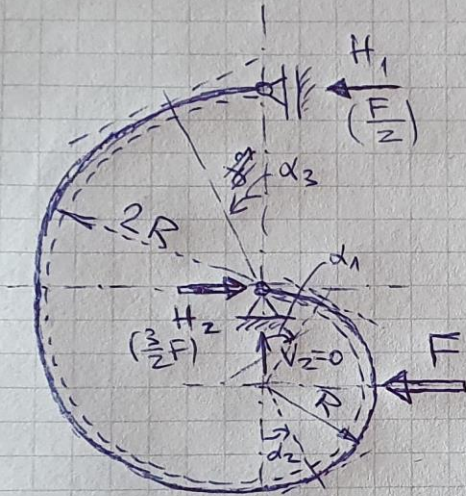
Diagramele de eforturi se trasează astfel:



Secțiunea periclitată este în $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ unde se produce numai încovoiere!

Calculul barelor în formă de arc de cerc

3. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara de mai jos.



$$\sum Y_i = 0: V_2 = 0 \quad \sum X_i = 0: H_2 = H_1 + F$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: H_2 \cdot 2R = F \cdot 3R \Rightarrow H_2 = \frac{3}{2}F$$

$$(\sum M_i)_2 = 0: H_1 \cdot 2R = F \cdot R \Rightarrow H_1 = \frac{F}{2}$$

$$(\forall) \alpha_3 \in (0; \pi): N(\alpha_3) = -\frac{F}{2} \cdot \cos \alpha \quad \begin{cases} N(0) = -\frac{F}{2} \\ N(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ N(\pi) = +\frac{F}{2} \end{cases}$$

$$T_y(\alpha_3) = -\frac{F}{2} \cdot \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} T(0) = T(\pi) = 0 \\ T(\frac{\pi}{2}) = -\frac{F}{2} \end{cases}$$

$$M_{i_2}(\alpha_3) = +\frac{F}{2} \cdot 2R(1 - \cos \alpha) \rightarrow M(0) = 0; M(\frac{\pi}{2}) = FR$$

$$(\forall) \alpha_2 \in (0; \frac{\pi}{2}): N(\alpha_2) = +\frac{F}{2} \cdot \cos \alpha \rightarrow \begin{cases} M(\pi) = 2FR \\ N(0) = \frac{F}{2}; N(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$T_y(\alpha_2) = +\frac{F}{2} \sin \alpha \rightarrow T(0) = 0; T(\frac{\pi}{2}) = \frac{F}{2}$$

$$M_{i_2}(\alpha_2) = +\frac{F}{2} [4R - R(1 - \cos \alpha)] \rightarrow M(0) = 2FR; M(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}FR$$

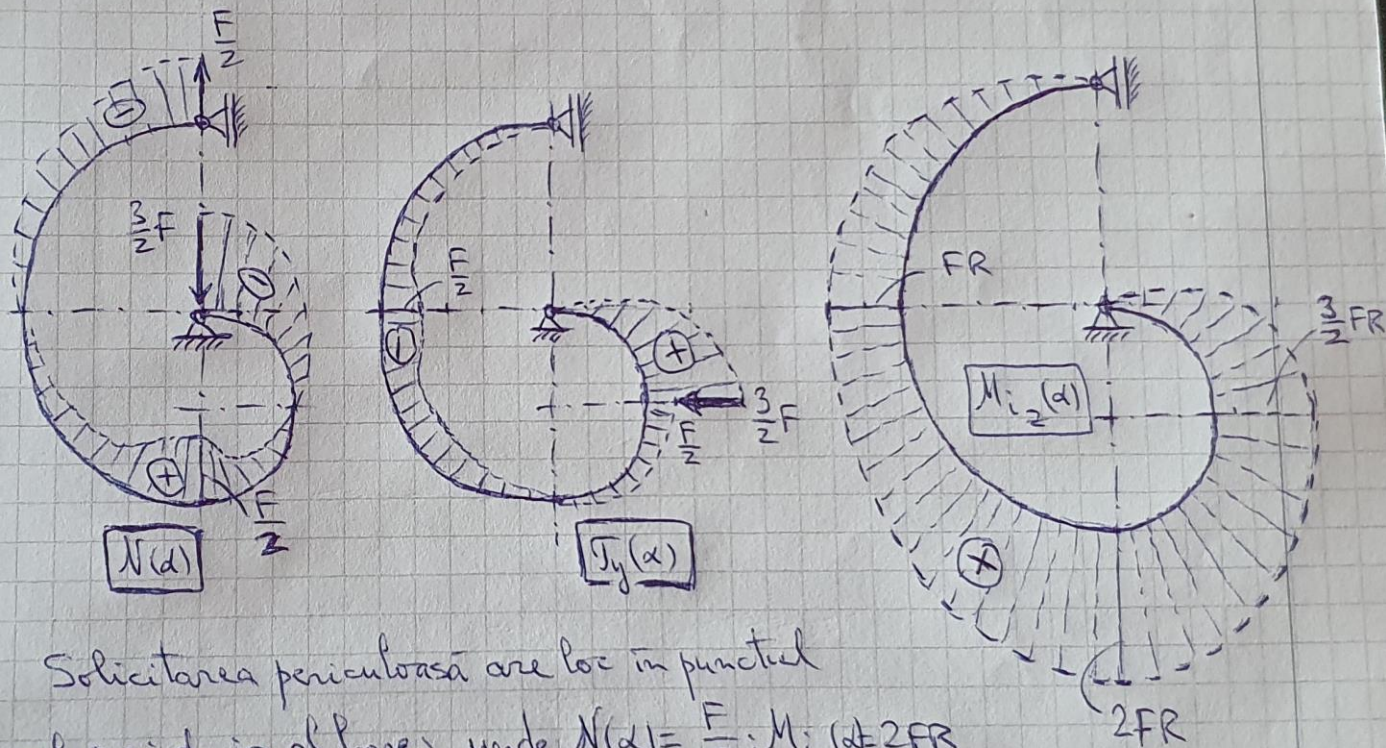
$$(\forall) \alpha_1 \in (0; \frac{\pi}{2}): N(\alpha_1) = -\frac{3}{2}F \cdot \cos \alpha \rightarrow N(0) = -\frac{3}{2}F; N(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$T_y(\alpha_1) = +\frac{3}{2}F \cdot \sin \alpha \rightarrow T(0) = 0; T(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}F$$

$$M_{i_2}(\alpha_1) = \frac{3}{2}F \cdot R(1 - \cos \alpha) \rightarrow M(0) = 0; M(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}FR$$

Calculul barelor în formă de arc de cerc

Diagramele de eforturi se prezintă astfel:



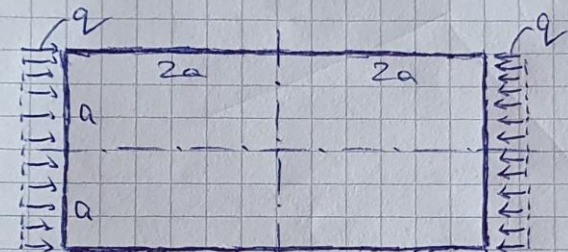
Solicitarea periculoasă are loc în punctul cel mai de jos al barei, unde $N(\alpha) = \frac{F}{2}$; $M_{i2}(\alpha) = 2FR$

2.8

Construcții care includ contururi închise

Construcții care includ contururi închise

① Să se dimensioneze cadrul închis din figura de mai jos

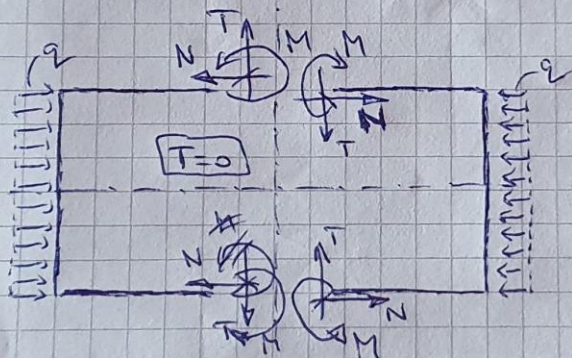


$$\sigma_a = 160 \text{ MPa}; a = 0,4 \text{ m}$$

$$q = 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Construcția și încărcările ei au două axe de simetrie, ceea ce simplifică mult rezolvarea nedeterminării.

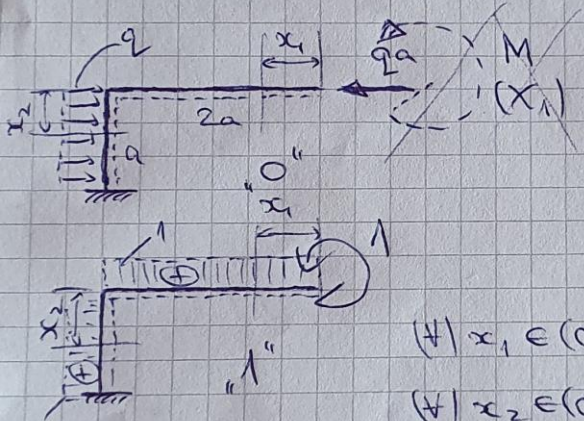
Se face o secționare (imaginară) pe axa verticală de simetrie; cele 3 încărcări necunoscute introduse pe fiecare față a tăieturilor au valori simetrice față de axa orizontală!



Echilibrul pe orizontală $\sum X_i = 0$ scris pentru oricare jumătate din construcția inițială conduce la: $2N = q \cdot 2a \Leftrightarrow \boxed{N = qa}$
 Gradul nedeterminării rămâne $\boxed{m=1}$ în necunoscuta \textcircled{M} !

Construcții care includ contururi închise

Fiecare jumătate de cadru are axa de simetrie orizontală, astfel încât toate calculele următoare se pot face pentru un sfert din construcția de la început. Pentru a evita apariția unor noi necunoscute se introduce un reazem încastat imaginar în noua tăietură a barei:



Pentru a rezolva nedeterminarea prin metoda eforturilor, cele două stări de încărcare imaginare (fictive) se obțin ca în figura alăturată.

$$\forall x_1 \in (0; 2a): m^0(x_1) = 0; m^1(x_1) = 1$$

$$\forall x_2 \in (0; a): m^0(x_2) = qa \cdot x - \frac{q x^2}{2}; m^1(x_2) = 1$$

$$EI \delta_{10} = \int_0^a q \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \cdot 1 dx = q \left(a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{1}{3} qa^3$$

$$EI \delta_{11} = 2a \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot 1 = 3a \quad X_1 = M = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{3} qa^3$$

$$\Rightarrow M = - \frac{qa^2}{9}$$

Construcții care includ contururi închise

Pentru a rezolva nedeterminarea prin teorema lui Castigliano, se scriu expresiile eforturilor de încoviere, folosind schema de la starea „0”:

$$M_{i2}(x_1) = \underline{+M} ; M_{i2}(x_2) = \underline{M + qa \cdot x - \frac{q x^2}{2}}$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = 0 = \int \frac{M_{i2}(x) \cdot \frac{\partial M_{i2}(x)}{\partial M}}{EI_2} dx$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = 0 = \int_0^{2a} M \cdot 1 dx + \int_0^a (M + qa x - \frac{q x^2}{2}) \cdot 1 dx$$

$$0 = M \cdot x \Big|_0^{2a} + \left(M \cdot x + qa \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

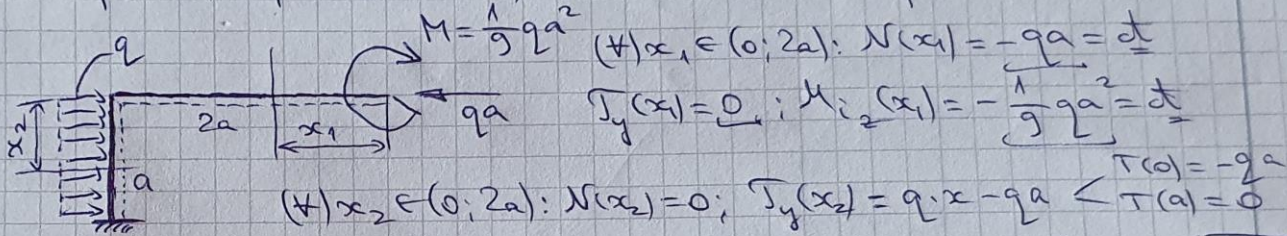
$$0 = M \cdot 2a + M \cdot a + \frac{qa^3}{2} - \frac{qa^3}{6} \quad | \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 3M = -\frac{qa^2}{3} \Rightarrow \boxed{M = -\frac{qa^2}{9}}$$

Ambele metode au condus la aceeași valoare a necunoscutei!

Construcții care includ contururi închise

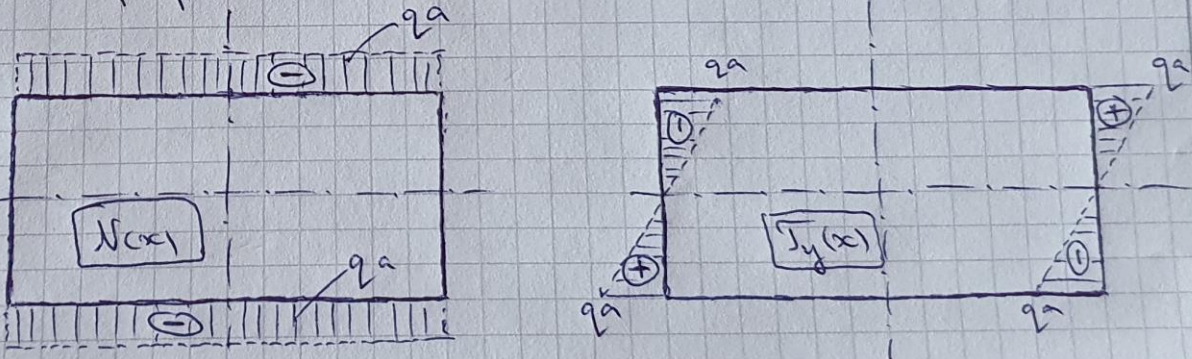
Expresiile eforturilor sectionale se vor stabili pe schema următoare:



Graficul momentelor va avea punctul de extrem în secțiunea $x_2 = a$

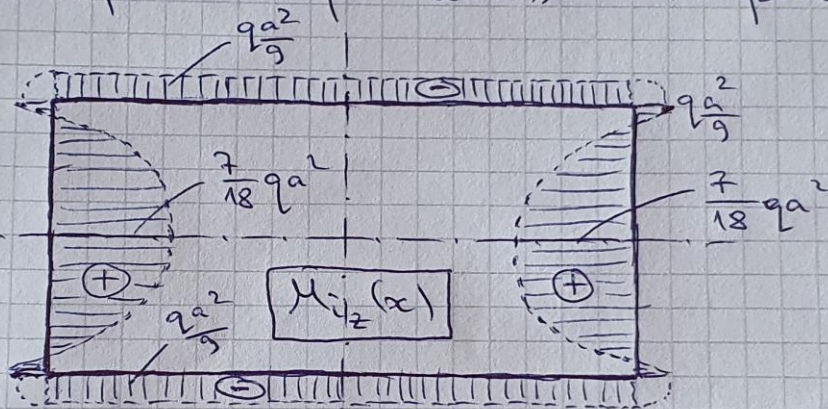
$$M_{i_2}(x_2) = -\frac{1}{2}qa^2 + qa \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \begin{cases} M(0) = -\frac{1}{2}qa^2 \\ M(a) = M_{\max}(x_2) = \frac{7}{18}qa^2 \end{cases}$$

Diagramele de eforturi se prelungesc pe întreaga lungime a cadrului folosind proprietățile lor de simetrie - $N(x_1)$, $M_{i_2}(x_1)$ și antisimetrie ($T(x_1)$)



Construcții care includ contururi închise

Atunci când este reprezentată cu valori pozitive în interiorul cadrului (adică de partea fibrei punctate), diagrama de momente aproximează forma pe care o capătă axa ~~de~~ barei după aplicarea încărcărilor ei.



Solicitarea periculoasă are loc la mijlocul lungimii segmentelor verticale, unde $N(x) = 0$

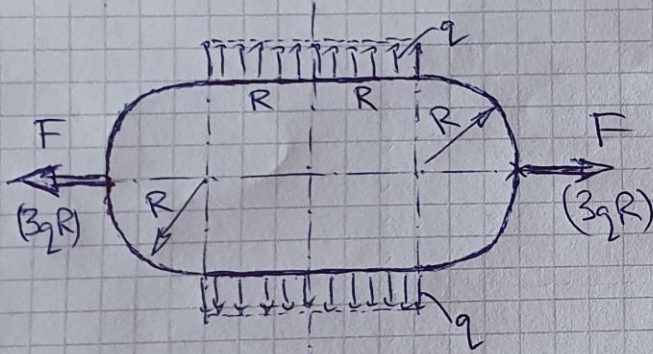
Dimensionarea cadrului se face numai la încovășire:

$$\sigma_{ef \max}(x) = \frac{M_{z \max}(x)}{W_z} = \frac{\frac{7}{18} q a^2}{\frac{3t \cdot t^2}{6}} = \frac{\frac{7}{9} q a^2}{t^3} \leq \sigma_a (*)$$

$$t_{\min} = \sqrt[3]{\frac{7}{9} \cdot \frac{20 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (400 \text{ mm})^2}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} \Rightarrow t_{ad} = 25 \text{ mm}$$

Construcții care includ contururi închise

② Să se traseze diagramele de eforturi pentru construcția de mai jos.



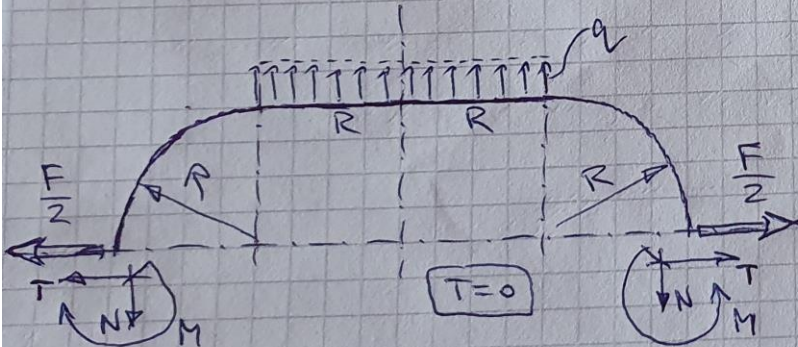
Conturul închis introduce trei necunoscute interioare static nedeterminate, dar cele 2 axe de simetrie (inclusiv ale încărcărilor) simplifică mult rezolvarea.

După sectionarea imaginară pe axa orizontală de simetrie, încărcările de pe jumătatea de sus a cadrului se pot reprezenta astfel:

$$\sum X_i = 0: q \cdot 2R = 2N$$

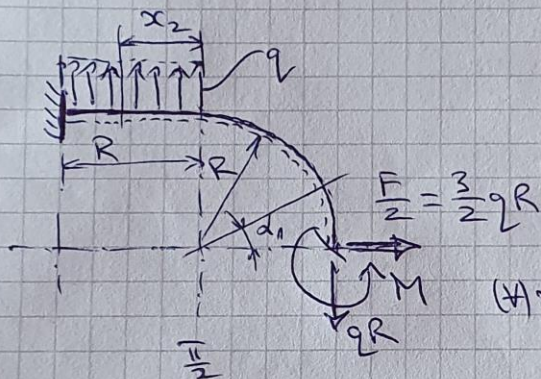
$$\Rightarrow \boxed{N = qR}$$

Problema a rămas simply static nedeterminată, cu necunoscuta (M)!



Construcții care includ contururi închise

Folosind și a doua axă de simetrie, analizele pot fi contornate pe un sfert din construcția inițială.



Rezolvarea nedeterminării folosind
teorema lui CASTIGLIANO

$$(\forall \alpha_1 \in (0; \frac{\pi}{2})):$$

$$M_{i_2}(\alpha_1) = + \frac{3}{2} qR \cdot R \sin \alpha - qR \cdot R(1 - \cos \alpha) + M$$

$$(\forall x_2 \in (0; R)): M_{i_2}(x_2) = \frac{3}{2} qR \cdot R - qR(R + x_2) + M + \frac{q x_2^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} qR^2 + M - qR \cdot x_2 + \frac{q x_2^2}{2}$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} qR^2 \cdot \sin \alpha - qR^2 + qR^2 \cdot \cos \alpha + M \right) \cdot 1 \cdot R d\alpha +$$

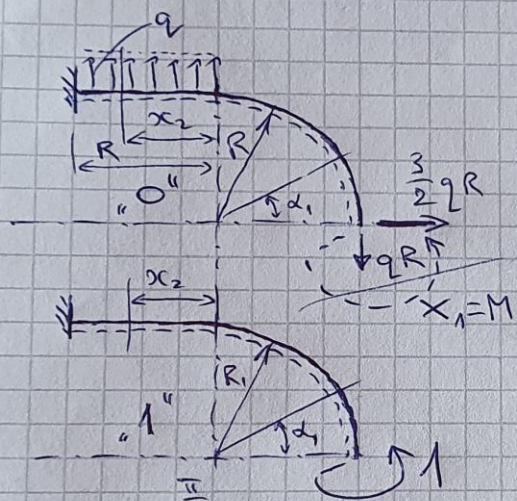
$$+ \int_0^R \left(\frac{qR^2}{2} + M - qR \cdot x_2 + \frac{q x_2^2}{2} \right) \cdot 1 \cdot dx_2 \quad \left(\frac{\partial M_{i_2}}{\partial M} \right)$$

$$0 = R \cdot \left(\frac{3}{2} qR^2 - \frac{\pi}{2} qR^2 + qR^2 + \frac{\pi}{2} \cdot M \right) + M \cdot R + \frac{q}{6} R^3$$

$$M \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) + qR^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \right) = 0 \Rightarrow M = - \frac{\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1} qR^2 = \underline{\underline{-0,428 qR^2}}$$

Construcții care includ contururi închise

Rezolvarea nedeterminării folosind metoda eforturilor



Cele două stări de încărcare fictive se analizează astfel:

$$m^0(\alpha_1) = \frac{3}{2} qR \cdot R \sin \alpha - qR \cdot R(1 - \cos \alpha)$$

$$m^0(x_2) = \frac{3}{2} qR \cdot R - qR(R + x) + \frac{q x^2}{2}$$

$$m^1(\alpha_1) = m^1(x_2) = \underline{+1} = \underline{\underline{d}}$$

Coefficienții δ_{ij} vor fi:

$$EI \cdot \delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot 1 \cdot R d\alpha + \int_0^R 1 \cdot 1 dx = \underline{R \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)}$$

$$EI \cdot \delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} qR^2 \cdot \sin \alpha - qR^2 + qR^2 \cdot \cos \alpha \right) \cdot 1 \cdot R d\alpha + \int_0^R \left(\frac{qR^2}{2} - qR \cdot x + \frac{q x^2}{2} \right) \cdot 1 dx =$$

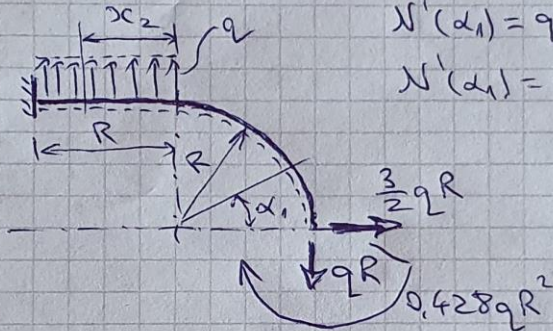
$$= qR^3 \left[\frac{3}{2} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] + \left(\frac{qR^2}{2} \cdot x - qR \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R =$$

$$= qR^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{6} \right) = qR^3 \left(\frac{16}{6} - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow X_1 = M = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1} \cdot qR^2$$

(Ambele metode au condus la același rezultat!)

Construcții care includ contururi închise

Trasarea diagramelor de eforturi se bazează pe următoarea schemă de solicitare:



$$(\forall) \alpha_1 \in (0; \frac{\pi}{2}): N(\alpha_1) = +qR \cdot \cos \alpha + \frac{3}{2}qR \cdot \sin \alpha \quad \begin{matrix} N(0) = qR \\ N(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}qR \end{matrix}$$

$$N'(\alpha_1) = qR(-\sin \alpha + \frac{3}{2} \cdot \cos \alpha)$$

$$N'(\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{2} = \tan \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_M = 56^\circ 20'$$

$$\sin \alpha_M = 0,832 \quad \cos \alpha_M = 0,554$$

$$N_{\max}(\alpha_1) = N(\alpha_M) = 1,8qR$$

$$T_y(\alpha_1) = -\frac{3}{2}qR \cdot \cos \alpha + qR \cdot \sin \alpha \quad \begin{matrix} T(0) = -\frac{3}{2}qR \\ T(\frac{\pi}{2}) = qR \end{matrix}$$

$$T'(\alpha_1) = qR \left(+\frac{3}{2} \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \right) > 0 \quad \text{— nu are extrem!}$$

$$T_y(\alpha_1) = 0 \text{ dacă } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{2} \rightarrow \sin \alpha_M \text{ va fi un extrem și pt } M_{i_2}(\alpha_1)!$$

$$M_{i_2}(\alpha_1) = -0,428qR^2 + \frac{3}{2}qR \cdot R \sin \alpha - qR \cdot R(1 - \cos \alpha) =$$

$$= qR^2 \left(-0,428 + \frac{3}{2} \sin \alpha - 1 + \cos \alpha \right); \quad M(0) = -0,428qR^2; \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right) = +0,072qR^2$$

$$M_{\max}(\alpha_1) = M(\alpha_M) = qR^2 \left(-1,428 + \frac{3}{2} \cdot 0,832 + 0,054 \right) = 0,372qR^2$$

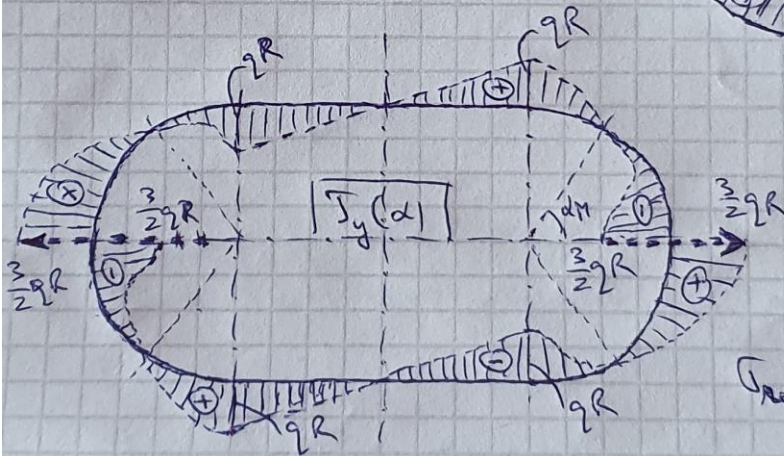
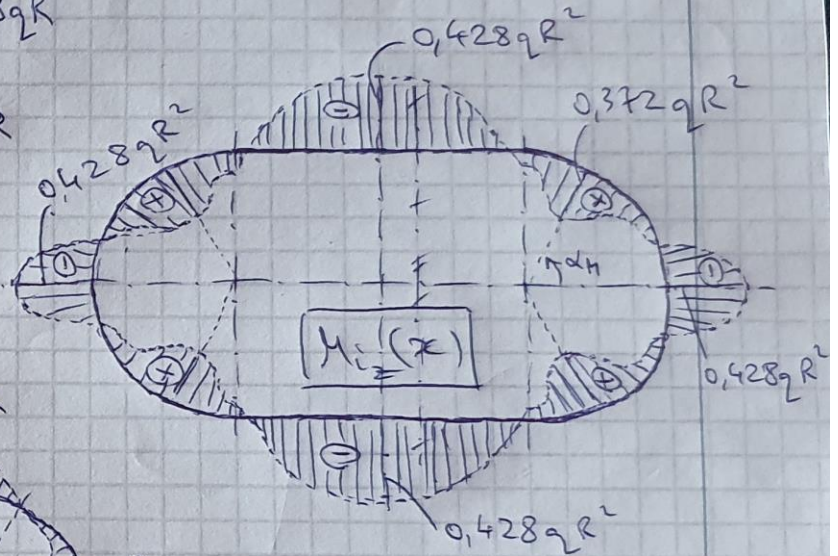
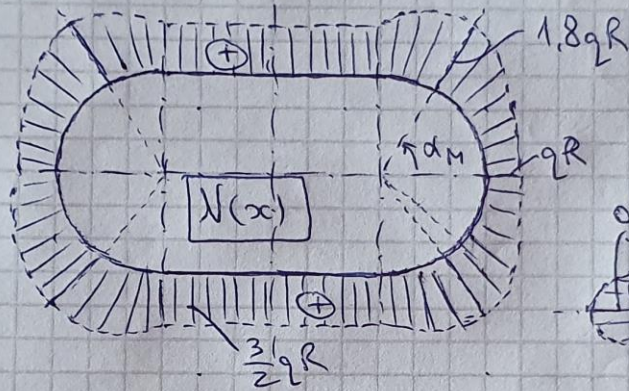
$$(\forall) x_2 \in (0; R): N(x_2) = +\frac{3}{2}qR = \text{ct}; \quad T_y(x_2) = qR - qx \quad \begin{matrix} T(0) = qR \\ T(R) = 0 \end{matrix} \quad \text{extrem pt } M_{i_2}(x_1)!$$

$$M_{i_2}(x_2) = -0,428qR^2 - qR(R+x) + \frac{3}{2}qR \cdot R + \frac{qx^2}{2} = 0,072qR^2 - qRx + \frac{qx^2}{2}$$

$$M(0) = 0,072qR^2; \quad M_{\min}(x_2) = M(R) = -0,428qR^2$$

Construcții care includ contururi închise

Reprezentarea diagramei de eforturi (pentru întreaga structură)



Solicitarea periculoasă are loc la mijlocul secțiunii orizontale:

$$\sigma_{resmax} = \frac{\frac{3}{2}qR}{A} + \frac{0,428qR^2}{W_z} \leq \sigma_a (*)$$

2.9

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

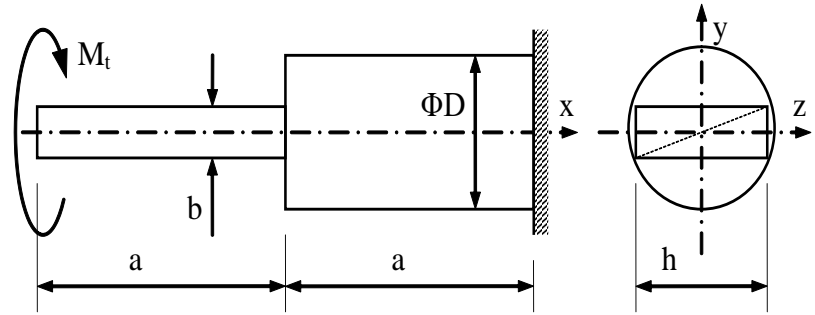
1. O bară de secțiune *circulară plină* solicitată la răsucire prin momentul M_t trebuie prelucrată prin așchiere, astfel încât pe o jumătate din lungimea ei secțiunile transversale capătă formă *dreptunghiulară*, având laturile de mărimi h și b ; să se analizeze *scăderile* de rezistență/rigiditate produse prin această micșorare de secțiune, pentru trei variante diferite de proporții ale secțiunii: a) $h = b$; b) $h = 2b$; c) $h = 3b$.

Rezolvare

Câteva aspecte ale problemei sunt valabile pentru toate variantele de secțiuni dreptunghiulare abordate: capacitatea fiecărei porțiuni de bară de a rezista la răsucire se evaluează prin momentul maxim $M_{t \text{ cap}}$ pe

care îl poate suporta, iar acesta este proporțional cu modulul de rezistență de pe regiunea respectivă; notând cu **I** situația inițială, a barei cu secțiune *circulară*, respectiv cu **II** – situația regiunii cu secțiune *micșorată* prin așchiere, raportul momentelor capabile este:

$$\frac{M_{t \text{ cap II}}}{M_{t \text{ cap I}}} = \frac{W_{t \text{ II}} \cdot \tau_a}{W_{p \text{ I}} \cdot \tau_a} = \frac{W_{t \text{ II}}}{W_{p \text{ I}}}$$



Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

Rigiditatea (deformabilitatea) celor două regiuni, atunci când este exprimată prin unghiul specific de răsucire θ , este invers proporțională cu momentul de inerție, deci raportul rigidităților se va scrie:

$$\frac{\theta_{II}}{\theta_I} = \frac{\frac{M_t}{G \cdot I_t}}{\frac{M_t}{G \cdot I_p}} = \frac{I_{pI}}{I_{tII}}$$

Porțiunea de secțiune circulară plină are următoarele caracteristici de răsucire:

$$I_{pI} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \quad \text{respectiv} \quad W_{pI} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

Dimensiunile secțiunii reduse *nu sunt independente* de diametrul cercului inițial (diagonala dreptunghiului obținut prin așchiere), fiind adevărată relația: $D = \sqrt{b^2 + h^2}$

Rămâne ca aceste relații să fie aplicate în analiza fiecărui caz dimensional.

a) Dacă $b = h$ înseamnă că secțiunea redusă are formă de *pătrat*, pentru care coeficienții din relațiile (4) sunt $\alpha = 0,208$ și $\beta = 0,141$, iar diametrul cercului inițial este $D = b \cdot \sqrt{2}$; în aceste condiții caracteristicile de răsucire vor fi:

$$W_{tII} = 0,208 \cdot b^3 \quad \text{respectiv} \quad I_{tII} = 0,141 \cdot b^4$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

Relațiile de comparație între cele două regiuni ale barei se scriu astfel:

$$\frac{W_{tII}}{W_{pI}} = \frac{0,208 \cdot b^3}{\frac{\pi}{16} \cdot (b \cdot \sqrt{2})^3} = \frac{8 \cdot 0,208}{\pi \cdot \sqrt{2}} = 0,3745 \quad \frac{\theta_{II}}{\theta_{I}} = \frac{\frac{\pi}{32} \cdot (b \cdot \sqrt{2})^4}{0,141 \cdot b^4} = \frac{\pi}{8 \cdot 0,141} = 2,7855$$

Rezultă că, dacă secțiunea se micșorează la un pătrat, atunci rezistența la răsucire scade, pe acea porțiune de bară, cu peste 62%, iar deformabilitatea crește de aproape 2,8 ori (sau rigiditatea scade tot de atâtea ori), adică slăbirea barei este destul de consistentă.

b) Dacă $h = 2b$, atunci $D = b \cdot \sqrt{5}$, iar coeficienții sunt $\alpha = 0,246$ și $\beta = 0,229$, încât relațiile de comparație devin:

$$\frac{W_{tII}}{W_{pI}} = \frac{0,246 \cdot b^2 \cdot 2b}{\frac{\pi}{16} \cdot (b \cdot \sqrt{5})^3} = \frac{32 \cdot 0,246}{\pi \cdot 5\sqrt{5}} = 0,224 \quad \frac{\theta_{II}}{\theta_{I}} = \frac{\frac{\pi}{32} \cdot (b \cdot \sqrt{5})^4}{0,229 \cdot b^3 \cdot 2b} = \frac{\pi \cdot 25}{64 \cdot 0,229} = 5,359$$

Pentru acest caz, se observă că rezistența barei prelucrate scade cu mai mult de 77%, iar rigiditatea de aproape 5,4 ori – față de varianta inițială.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

c. Dacă $h = 3b$, atunci $D = b \cdot \sqrt{10}$, coeficienții sunt $\alpha = 0,267$ și $\beta = 0,263$, iar relațiile de comparație devin:

$$\frac{W_{tII}}{W_{pI}} = \frac{0,267 \cdot b^2 \cdot 3b}{\frac{\pi}{16} \cdot (b \cdot \sqrt{10})^3} = \frac{24 \cdot 0,267}{\pi \cdot 5\sqrt{10}} = 0,1289 \quad \frac{\theta_{II}}{\theta_I} = \frac{\frac{\pi}{32} \cdot (b \cdot \sqrt{10})^4}{0,263 \cdot b^3 \cdot 3b} = \frac{\pi \cdot 100}{96 \cdot 0,263} = 12,5$$

Această variantă de slăbire a secțiunii micșorează rezistența la răsucire a barei considerate cu 87%, iar rigiditatea ei scade de 12,5 ori.

Concluzie

Trecerea de la secțiunea circulară plină la cea dreptunghiulară **scade** calitățile barei de a suporta momente de răsucire (cea ce e adevărat inclusiv dacă secțiunea se reduce pe o porțiune foarte mică din bară!), iar efectele sunt cu atât mai defavorabile cu cât este mai mare disproporția dintre laturile dreptunghiului.

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

2. Se consideră o bară cu secțiunea transversală din figură (desenul nu respectă proporțiile între dimensiuni); să se evalueze rezistența și rigiditatea ei la răsucire și să se analizeze cum se modifică aceste caracteristici atunci când secțiunea se deschide, printr-o tăietură făcută într-un punct oarecare al profilului, pe toată grosimea peretelui și pe toată lungimea barei.

Rezolvare

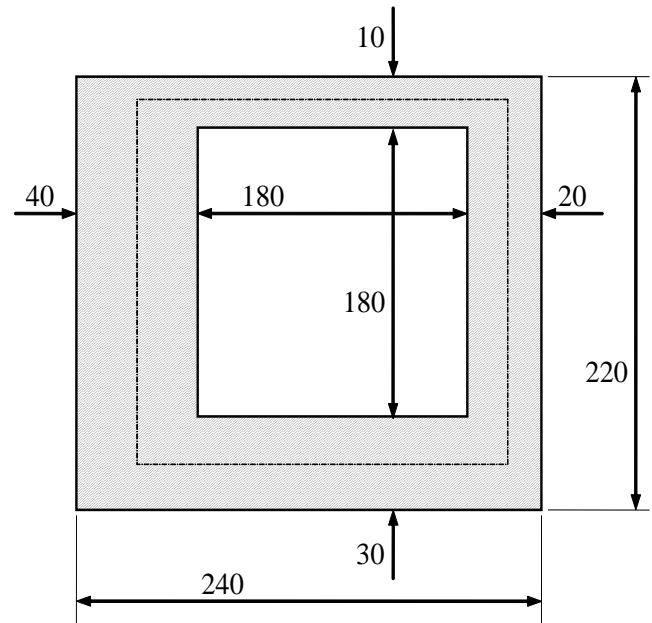
Inițial secțiunea este **dublu conexă** și curba mediană închisă are aria

$$\Omega = 210\text{mm} \times 200\text{mm} = 42000\text{mm}^2$$

Grosimea minimă a profilului este $\delta_{\min} = 10\text{mm}$, încât modulul de rezistență la răsucire al secțiunii va fi:

$$W_{tl} = 2 \Omega \cdot \delta_{\min} = 84 \times 10^4 \text{mm}^3$$

Integrala pe lungimea curbei mediane închise - de la numitorul relației momentului de inerție la răsucire - se reduce la o sumă de fracții constante, dacă se observă că există segmente ale curbei mediane pe care grosimea



Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

profilului este constantă:

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{210}{30} + \frac{200}{20} + \frac{210}{10} + \frac{200}{40} = 7 + 10 + 21 + 5 = 43$$

Observații

1. Fiind o sumă de rapoarte între lungimi, ultimul rezultat nu are dimensiuni (adică este un număr abstract).
2. Se poate verifica ușor că descompunerea în dreptunghiuri a profilului secțiunii, sugerată de fracțiile din ultima relație și bazată pe segmentarea liniei mediane este corectă; în plus, se obține același rezultat dacă descompunerea se face, de exemplu, împărțind fizic în 4 dreptunghiuri profilul secțiunii.
3. Valoarea fracțiilor de mai sus arată că nu toate dreptunghiurile utilizate respectă riguros condiția precizată, pentru încadrarea între cele înguste, dar o astfel de aproximare este de obicei admisă în practică, mai ales în calcule de genul celor prezente, de evaluare a **deosebirilor** dintre profilele simplu și dublu conexe.

Se introduc rezultatele în relația momentului de inerție al barei cu profil dublu conex:

$$I_{t1} = \frac{4 \cdot (42 \cdot 10^3 \text{ mm}^2)^2}{43} = 164,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

Dacă profilul secțiunii se decupează, *pe toată lungimea*, indiferent de locul decupării, el devine **simplicon**, iar calculul începe cu descompunerea secțiunii în dreptunghiuri înguste și introducerea parametrilor acestora în relația momentului de inerție generalizat; de exemplu, folosind divizarea de mai sus a secțiunii, momentul ei de inerție va fi:

$$I_{t2} = \frac{1}{3} \sum (b_i^3 \cdot h_i) = \frac{1}{3} \cdot (30^3 \cdot 210 + 20^3 \cdot 200 + 10^3 \cdot 210 + 40^3 \cdot 200) = 6,76 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Raportul rezultatelor arată că prin decupare longitudinală parametrul de rigiditate scade de 24,28 ori, încât bara devine tot de atâtea ori *mai ușor de deformat* prin răsucire.

Pe de altă parte, caracteristica de rezistență se calculează astfel:

$$W_{t2} = \frac{I_{t2}}{\max\{b_i\}} = \frac{676 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{40 \text{ mm}} = 16,9 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

Așadar, rezistența barei scade și ea, în urma „deschiderii” profilului inițial, în acest caz de 4,97 ori!

Este important să se observe că această scădere se întâmplă indiferent cât de lungă sau de scurtă este decuparea pe lungime a barei: dacă într-o singură secțiune transversală are loc deschiderea profilului (de exemplu printr-o fisură longitudinală ce străpunge peretele secțiunii), aceea devine *secțiunea periculoasă* a barei, secțiune care poate prelua doar momente de 5 ori mai mici față de restul barei!

În concluzie, cele două aplicații de mai sus au arătat, mai întâi, că secțiunile *circulare* fac ca barele să fie mult mai rezistente și mai rigide la răsucire, în comparație cu secțiunile *dreptunghiulare*.

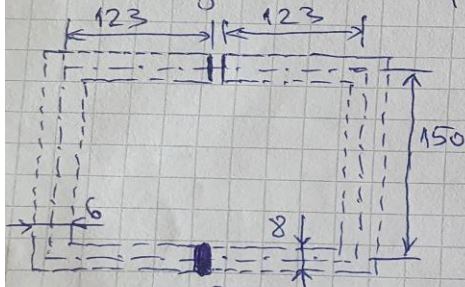
La fel se întâmplă cu profilele **închise** (*dublu* conexe), în raport cu cele **deschise** (*simplu* conexe).

Răsucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații

4 O bară solicitată ca în figura trebuie realizată din două profile laminată de tip U, de lungime L . Dacă profilele au secțiunea alăturată, să se compare rezistența și rigiditatea la răsucire care se obțin pentru 3 variante de așezare a profilelor:

(a) sudură (b) (c)

Rezolvare: Rezistența la răsucire se exprimă prin modulul W_t , iar rigiditatea (dificultatea de deformare) este proporțională cu I_t .



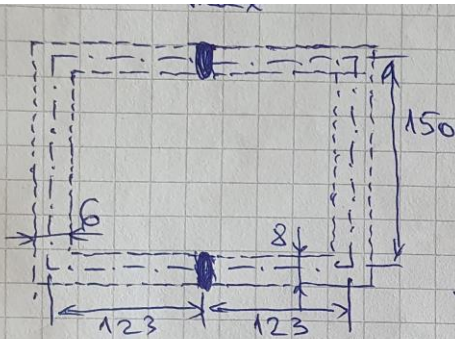
(b) Varianta fără sudură sus este simple conexă, iar descompunerea în dreptunghiuri înguste se face simplu pe linia mediană a profilului:

$$\begin{cases} - 4 \text{ dreptunghiuri } 8 \times 123 \text{ mm}^2 \\ - 2 \text{ dreptunghiuri } 6 \times 150 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$I_t = \sum_i \frac{b_i \cdot h_i^3}{3} = \frac{1}{3} [4 \cdot 8^3 \cdot 123 + 2 \cdot 6^3 \cdot 150] = \underline{105.568} [\text{mm}^4]$$

$$W_t = \frac{I_t}{b_i} = \frac{1}{8 \text{ mm}} \cdot I_t = \underline{13.196} [\text{mm}^3]$$

Răucirea barelor cu secțiuni necirculare. Aplicații



(c) Varianta dublu-sudată = dublu conexă!
 (aceeași descompunere, pt. calculul integralei \oint)
 Aria închisă de linia mediană este:

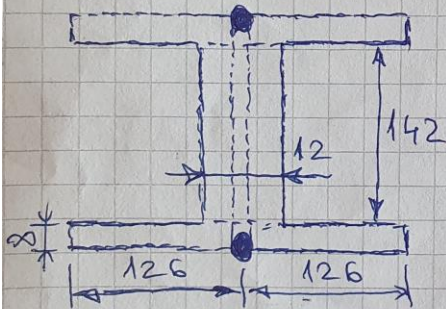
$$\Omega = 246 \times 150 \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$W_t = 2 \cdot \Omega \cdot \delta_{\min} = 2 \cdot 246 \times 150 \times 6 = 442.800 \text{ [mm}^3\text{]}$$

(de 33,6 ori mai mare față de cazul anterior!)

$$\oint \frac{ds}{\delta(s)} = 4 \cdot \frac{123 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} + 2 \cdot \frac{150 \text{ mm}}{6 \text{ mm}} = 111,5 \text{ [-]}$$

$$I_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} = \frac{4(246 \times 150)^2}{111,5} = 48.846.996 \text{ [mm}^4\text{]} \quad (\text{de } 463 \text{ de ori mai mare!})$$



(a) Varianta simple conexă; descomp. posibilă:

$$\begin{cases} - 4 \text{ dreptunghi. } 8 \times 126 \text{ mm}^2 \\ - 1 \text{ dreptunghi. } 12 \times 142 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$I_t = \frac{1}{3} (4 \cdot 8^3 \cdot 126 + 12^3 \cdot 142) = 167.808 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$W_t = \frac{1}{12 \text{ mm}} \cdot I_t = 13.984 \text{ [mm}^3\text{]}$$

2.10

**Calculul vaselor cu pereți
subțiri, conținând lichide**

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

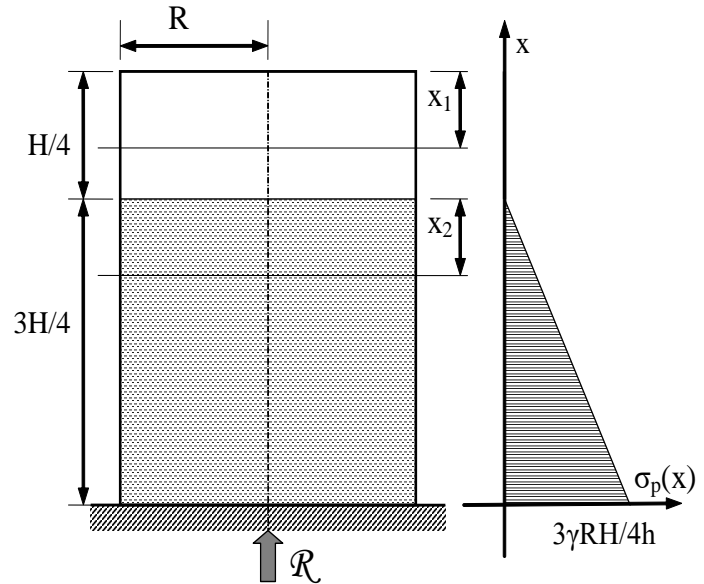
I. Vase cilindrice rezemate la bază

Specific acestei rezemări este că apare la baza vasului o forță de **reacțiune** R , egală ca mărime cu greutatea lichidului din vas; celelalte elemente necesare la calculul tensiunilor din pereții vasului au fost deja discutate și se vor folosi în continuare.

Ecuția lui Laplace se scrie la fel ca la vasele cu gaze:

$$\frac{\sigma_m(x)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x)}{R} = \frac{p(x)}{h} \Rightarrow \sigma_p(x) = \frac{p(x) \cdot R}{h}$$

Trebuie observat că la vasele cilindrice este util ca *poziția* x a secțiunii transversale de calcul să fie indicată față de *nivelul superior* al lichidului din vas, așa cum se observă în figură; în acest fel **presiunea** din *zona cu lichid* (care în cazul de față ocupă trei sferturi din înălțimea



Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

I. Vase cilindrice rezemate la bază

vasului) se exprimă sub forma $p(x)=\gamma x$, iar expresia și valorile importante ale tensiunilor circumferențiale se vor scrie astfel:

$$\sigma_p(x) = \frac{\gamma \cdot R}{h} \cdot x \quad \Rightarrow \quad \sigma_p(0) = 0; \quad \sigma_p\left(\frac{3}{4}H\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma \cdot R \cdot H}{h}$$

Pentru regiunea din partea de sus a vasului, în care nu există lichid, pereții nu sunt încărcăți cu presiune, deci membrul drept din ecuația lui Laplace este nul și se obține că $\sigma_p(x_1) = 0$, așa cum este arătat și pe grafic.

Analiza tensiunilor $\sigma_m(x)$ necesită scrierea ecuației de echilibru, pe verticală, pentru forțele din pereți, având la acest vas următorul aspect:

$$F_r(x) = G(x) + F[p(x)] - R \Leftrightarrow \sigma_m(x) \cdot A_m(x) = \gamma \cdot V_f(x) + p(x) \cdot A_f(x) - R$$

Ariile $A_m(x)$ și $A_f(x)$ se scriu la fel ca în aplicațiile rezolvate anterior, iar rezultanta R este egală cu greutatea lichidului din vas: $R = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot (3H/4)$

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

I. Vase cilindrice rezemate la bază

Presiunea $p(x)$ și volumul $V(x)$ – al lichidului de sub secțiune sunt diferite pe cele două regiuni de pe înălțimea vasului, pe care ecuația se particularizează astfel:

- pentru $x_1 \in (0; H/4)$ (regiunea fără lichid) $p(x_1) = 0$, $V_f(x_1) = \pi R^2 \cdot (3H/4)$

$$\sigma_m(x_1) \cdot 2\pi R \cdot h = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \frac{3}{4} H + 0 \cdot \pi R^2 - \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \frac{3}{4} H$$

termenii din membrul drept al ultimei ecuații se reduc, deci $\sigma_m(x_1) = 0$;

- pentru $x_2 \in (0; 3H/4)$ (regiunea cu lichid) $p(x_2) = \gamma \cdot x$, $V_f(x_1) = \pi R^2 \cdot [(3H/4) - x]$

$$\sigma_m(x_2) \cdot 2\pi R \cdot h = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \left(\frac{3}{4} H - x\right) + \gamma \cdot x \cdot \pi R^2 - \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \frac{3}{4} H$$

La fel ca mai sus, membrul drept este nul, deci $\sigma_m(x_2) = 0$.

Concluzia acestei aplicații este că, la vasele cilindrice cu lichide care sunt *rezemate la bază*, tensiunile de pe direcția *meridiană* sunt nule pe toată înălțimea vasului, indiferent dacă acesta este umplut complet sau parțial!

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

I. Vase cilindrice rezemate la bază

Prin urmare, pereții vasului sunt solicitați doar prin tensiunile *circumferențiale*, care au mărimi proporționale cu presiunea din vas, adică există numai în zonele care conțin lichid; presiunea fiind crescătoare odată cu adâncimea în lichid, tensiunile sunt maxime la baza vasului (unde se formează prima fisură, pe direcție *verticală*, dacă vasul nu este bine proiectat), iar relația calculului de rezistență se va scrie ca la o stare *uniaxială* de tensiuni:

$$\sigma_{\text{ef max}}(x) = \sigma_p(x_2 = \frac{3}{4}H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma R H}{h} \leq \sigma_a$$

Exemplu numeric: se proiectează un rezervor *ca mai sus*, pentru apă (având greutatea specifică $\gamma=10^4\text{N/m}^3=10^{-5}\text{N/mm}^3$) din tablă de oțel cu $\sigma_a = 160\text{MPa}$, rezemat pe sol la partea de jos și având dimensiunile $R = 8\text{m}$ și $H = 5\text{m}$; să se calculeze grosimea minimă a tablei care va trebui folosită.

Rezolvare: din condiția de rezistență se scrie relația grosimii minime

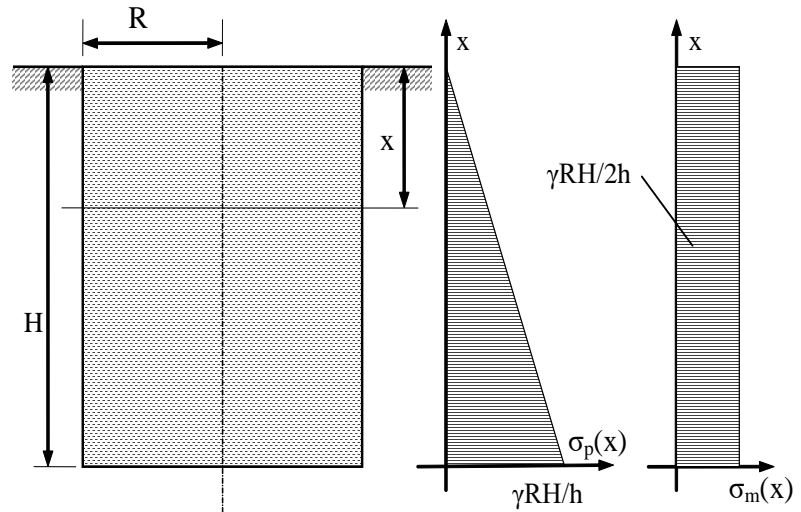
$$h \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma R H}{\sigma_a} \Rightarrow h_{\text{min}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 8 \cdot 10^3 \text{mm} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{mm}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \frac{15}{8} \text{mm}$$

Tabla groasă de doar 2mm este deci suficientă pentru realizarea rezervorului!

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

II. Vase cilindrice rezemate pe marginea de sus

În acest caz, reacțiunea datorată rezemării acționează *deasupra* nivelului secțiunii de calcul, astfel încât nu afectează forțele care compun ecuația de echilibru, iar valorile $\sigma_m(x)$ nu mai sunt nule pe nici o zonă a vasului; ecuațiile de echilibru se scriu la fel ca în cazul studiat anterior.



II.1. cu umplere completă

Ecuția lui Laplace conduce la:

$$\sigma_p(x) = \frac{\gamma \cdot R}{h} \cdot x \Rightarrow \sigma_p(0) = 0; \quad \sigma_p(H) = \frac{\gamma \cdot R \cdot H}{h}$$

Ecuția a doua se particularizează astfel:

$$\sigma_m(x) \cdot 2\pi R \cdot h = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot (H - x) + \gamma \cdot x \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow 2h \cdot \sigma_m(x) = \gamma \cdot R \cdot H$$

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

II. Vase cilindrice rezemate pe marginea de sus

Tensiunile de pe curbele meridian sunt așadar **constante** pe înălțimea vasului, iar valoarea lor este următoarea:

$$\sigma_m(x) = (1/2) (\gamma RH/h) = (1/2) \sigma_{p \max}$$

Cele mai mari tensiuni sunt de tip circumferențial și se produc la baza vasului, încât condiția de rezistență pentru acest vas se va scrie:

$$\sigma_{ef \max}(x) = \sigma_{p \max}(x) = \frac{\gamma RH}{h} \leq \sigma_a$$

Prin urmare, grosimea necesară a tablei de oțel, cu $\sigma_a = 160$ MPa, pentru a se construi un rezervor cu $R = 3$ m și $H = 4$ m, umplut complet cu apă va fi:

$$h \geq \frac{\gamma RH}{\sigma_a} \Rightarrow h_{\min} = \frac{10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 4 \cdot 10^3 \text{ mm}}{160 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \frac{3}{4} \text{ mm} = 0,75 \text{ mm}$$

Calculul de rezistență arată că tabla de nici măcar 1mm grosime este suficientă pentru realizarea vasului studiat.

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

II.2. cu umplere parțială

Pe aceleași principii ca mai sus, ecuațiile de echilibru se particularizează astfel:

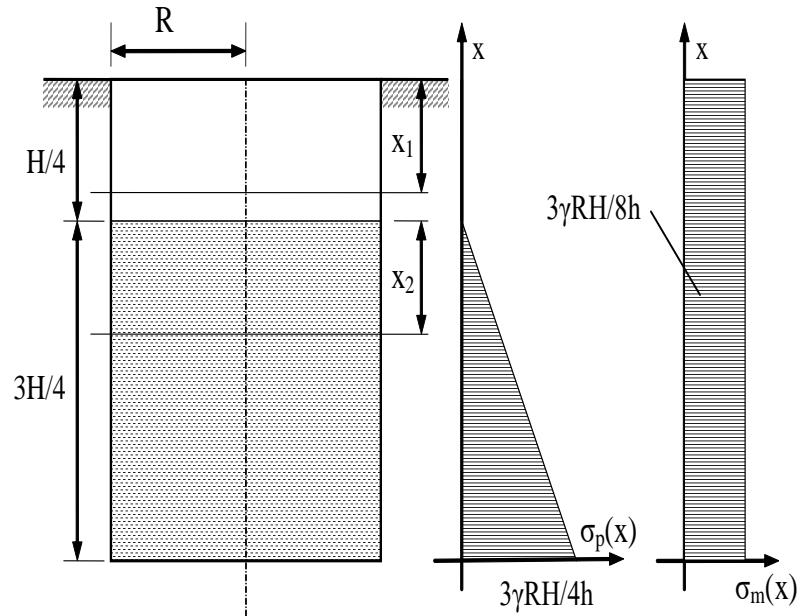
- pt. $x_1 \in (0; H/4)$ $p(x_1) = 0$, deci
 $\sigma_p(x_1) = 0$, iar $V_f(x_1) = \pi R^2 \cdot (3H/4)$

$$\sigma_m(x_1) \cdot 2\pi R \cdot h = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \frac{3}{4} H + 0 \cdot \pi R^2$$

$$\Rightarrow \sigma_m(x_1) = ct = \frac{3}{8} \cdot \frac{\gamma R H}{h}$$

- pt. $x_2 \in (0; 3H/4)$ $p(x_2) = \gamma \cdot x$

$$\Rightarrow \sigma_p(x_2) = \frac{\gamma \cdot R}{h} \cdot x \Rightarrow \sigma_p(0) = 0; \sigma_p\left(\frac{3}{4} H\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma \cdot R \cdot H}{h}$$



Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

II.2. cu umplere parțială

În ecuația de echilibru pe verticală apare mărimea volumului de lichid de sub secțiune, $V_f(x_2) = \pi R^2 \cdot [(3H/4) - x]$, iar ecuația se scrie:

$$\sigma_m(x_2) \cdot 2\pi R \cdot h = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot \left(\frac{3}{4}H - x\right) + \gamma \cdot x \cdot \pi R^2 \Rightarrow \sigma_m(x_2) = ct = \frac{3}{8} \cdot \frac{\gamma R H}{h} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{p \max}(x)$$

Folosind aceste rezultate se trasează diagramele celor două categorii de tensiuni, ca în figura de mai sus; pe această bază trebuie observat că valoarea cea mai mare a tensiunilor, deci și condiția de rezistență, se vor scrie exact la fel ca la vasul așezat pe suprafața lui inferioară.

Concluzie comună pentru vasele *cilindrice* ce conțin lichide: solicitarea lor periculoasă apare, indiferent de rezemare, în secțiunea de la baza vasului, iar prima fisură tinde să se producă pe direcția generatoarei (care este perpendiculară pe direcția tensiunilor principale maxime).

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

III. Vase conice rezemate pe marginea de sus

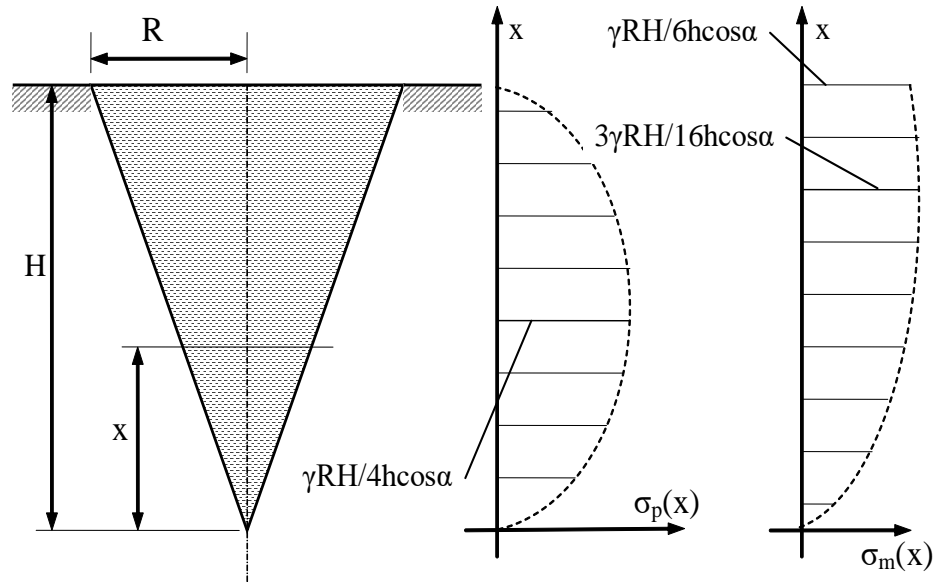
La fel ca la vasul conic cu gaz, discutat anterior, având în vedere că generatoarea vasului este o dreaptă, se admite că

$$\rho_m(\mathbf{x}) = \infty.$$

Cea de-a doua rază de curbură principală variază ca mărime, de la o secțiune la alta, întrucât depinde de raza $r(x)$ a secțiunii și de înclinarea generatoarei, după relația

$$\rho_p(\mathbf{x}) = r(x)/\cos\alpha.$$

Trebuie observat că, pentru ca raza curentă $r(x)$ să varieze proporțional cu poziția x a secțiunii, este avantajos ca această distanță să fie măsurată față de vârful conului (ca în figură), iar ecuația lui Laplace va avea următoarea formă:



Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

III. Vase conice rezemate pe marginea de sus

$$\frac{\sigma_m(x)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x) \cdot \cos \alpha}{r(x)} = \frac{p(x)}{h} \Rightarrow \sigma_p(x) = \frac{p(x) \cdot r(x)}{h \cdot \cos \alpha}$$

Presiunea este direct proporțională cu înălțimea coloanei de lichid de deasupra secțiunii x , $p(x) = \gamma (H-x)$, iar raza secțiunii se scrie în funcție de parametrii conului, din asemănarea semi-triunghiului de sub secțiune cu cel global:

$$\frac{r(x)}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow r(x) = \frac{R}{H} \cdot x$$

Înlocuind aceste valori în ultimul rezultat de mai sus se explicitază $\sigma_p(x)$ în funcție de poziția secțiunii:

$$\sigma_p(x) = \frac{\gamma \cdot (H-x)}{h \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{R}{H} \cdot x = \frac{\gamma R}{H h \cos \alpha} \cdot x \cdot (H-x)$$

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

III. Vase conice rezemate pe marginea de sus

Ultima expresie reprezintă grafic o *porțiune de parabolă* având rădăcinile $x=0$ și $x=H$, adică tensiunile circumferențiale din pereții vasului conic sunt nule - la capetele lui și ating valoarea lor maximă la mijlocul înălțimii vasului:

$$\sigma_{p \max}(x) = \sigma_p \left(x = \frac{H}{2} \right) = \frac{\gamma R}{H h \cos \alpha} \cdot \frac{H}{2} \cdot \left(H - \frac{H}{2} \right) = \frac{\gamma R H}{4 h \cos \alpha}$$

Ecuția de echilibru pe verticală se obține folosind argumentele discutate anterior, precum și faptul că lichidul de sub secțiune ocupă un volum *conic* de rază $r(x)$ și înălțime x , inclus în ultimul termen din această ecuație:

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) \cdot 2\pi \cdot r(x) \cdot h \cdot \cos \alpha &= \gamma \cdot (H-x) \cdot \pi \cdot r(x)^2 + \gamma \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot r^2(x) \cdot x \\ \Leftrightarrow \sigma_m(x) \cdot 2h \cdot \cos \alpha &= \gamma \cdot \left(\frac{R}{H} \cdot x \right) \cdot \left(H - x + \frac{x}{3} \right) \Rightarrow \sigma_m(x) = \frac{\gamma R}{2H h \cos \alpha} \cdot x \cdot \left(H - \frac{2}{3} x \right) \end{aligned}$$

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

III. Vase conice rezemate pe marginea de sus

Tensiunile meridiane variază tot *parabolic*, dar au valori nule în $x=0$ și într-o secțiune care este dincolo de limitele vasului, $x=3H/2$; valoarea maximă va fi (la jumătatea distanței dintre rădăcini) în $x=3H/4$:

$$\sigma_{m \max}(x) = \sigma_m(x = \frac{3H}{4}) = \frac{\gamma R}{2Hh \cos \alpha} \cdot \frac{3H}{4} \cdot (H - \frac{2}{3} \cdot \frac{3H}{4}) = \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma R H}{h \cos \alpha}$$

Deoarece $1/4=4/16$, tensiunile cele mai mari sunt circumferențiale, încât condiția de rezistență se scrie:

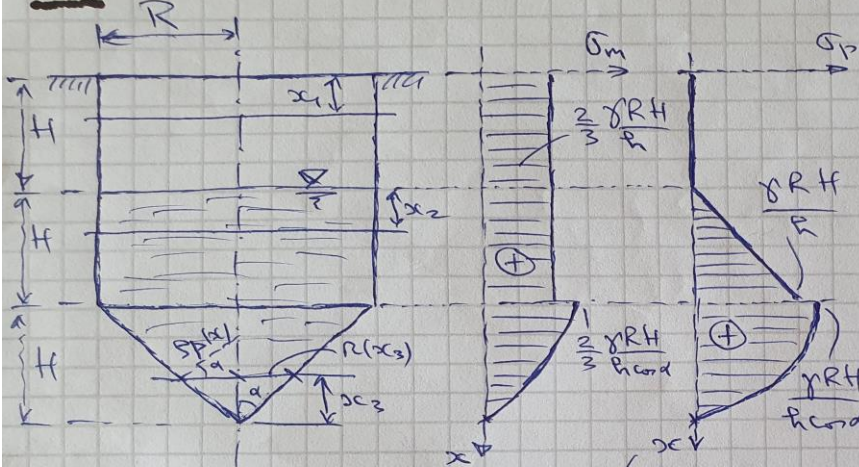
$$\sigma_{\max}(x) = \sigma_p(x = \frac{H}{2}) = \frac{\gamma R H}{4h \cos \alpha} \leq \sigma_a$$

Concluzia acestei aplicații este că și pentru vasele *conice* cu lichid, dacă nu au fost calculate corect, prima fisură tinde să apară pe direcția generatoarei (adică pe verticală), mai precis în secțiunea de la jumătatea înălțimii vasului.

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

IV

Să se scrie condiția de rezistență pentru vasul de mai jos.



Parametrii vasului:
 $\sigma_m(x) = \infty$ (generatoare dreaptă)

$$\sigma_p(x_1) = \sigma_p(x_2) = R$$

$$\sigma_p(x_3) = \frac{r(x_3)}{\cos \alpha}; \tan \alpha = \frac{R}{H}$$

$$\frac{r(x_3)}{R} = \frac{x}{H} \rightarrow r(x_3) = \frac{R}{H} \cdot x$$

$$p(x_1) = 0; p(x_2) = \gamma \cdot x$$

$$p(x_3) = \gamma \cdot (2H - x)$$

(*) $x_1 \in (0; H)$: ec. Laplace $\frac{\sigma_m(x_1)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x_1)}{R} = \frac{0 - p(x_1)}{H} \Rightarrow \sigma_p(x_1) = 0$

Adoua ecuație: $\sigma_m(x_1) \cdot 2\pi R H = p(x_1) \cdot \pi R^2 + \gamma \cdot (\pi R^2 \cdot H + \pi R^2 \cdot \frac{H}{3})$

$$2H \cdot \sigma_m(x_1) = \frac{4}{3} \gamma \cdot R \cdot H \Rightarrow \sigma_m(x_1) = \frac{2}{3} \gamma R H$$

(*) $x_2 \in (0; H)$: Laplace $\frac{\sigma_m(x_2)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x_2)}{R} = \frac{\gamma \cdot x}{H} \Rightarrow \sigma_p(x_2) = \frac{\gamma R}{H} \cdot x$

$$\sigma_p(0) = 0; \sigma_p(x_2 = H) = \frac{\gamma R H}{H}$$

Calculul vaselor cu pereți subțiri, conținând lichide

Ec. a doua: $\sigma_m(x_2) \cdot 2\pi R \cdot h = \underbrace{(\gamma \cdot x)}_{p(x_2)} \cdot \pi R^2 + \gamma \left[\underbrace{\pi R^2 (H-x)}_{\text{cil. parțial}} + \underbrace{\pi R^2 \cdot \frac{H}{3}}_{\text{con}} \right]$

$$\Rightarrow \sigma_m(x_2) = \underline{\underline{\sigma}} = \boxed{\frac{2}{3} \frac{\gamma R H}{h}}$$

($\forall x_3 \in (0; H)$): Laplace $\frac{\sigma_m(x_3)}{\infty} + \frac{\sigma_p(x_3) \cdot \cos \alpha}{\frac{R}{H} \cdot x} = \gamma \frac{(2H-x)}{h}$

$$\Rightarrow \sigma_p(x_3) = \frac{\gamma R}{H \cdot h \cdot \cos \alpha} \cdot x \cdot (2H-x) \quad (\text{parabolă cu rădăcini } \begin{cases} x=0 \\ x=2H \end{cases})$$

-pt. de maxim în $x = \underline{\underline{H}} \Rightarrow \sigma_{p \max} = \sigma_p(x_3=H) = \boxed{\frac{\gamma R H}{h \cdot \cos \alpha}}$

Ec. a doua: $\sigma_m(x_3) \cdot 2\pi R(x_3) \cdot h \cdot \cos \alpha = \underbrace{[\gamma \cdot (2H-x)]}_{p(x_3)} \cdot \pi R^2(x_3) + \gamma \cdot \underbrace{\pi \cdot R^2(x_3) \cdot \frac{x}{3}}_{\text{conul de sub secțiune}}$

$$2h \cdot \sigma_m(x_3) \cdot \cos \alpha = \gamma \left(\frac{R}{H} \cdot x \right) \cdot \frac{(2H-x + \frac{x}{3})}{(2H - \frac{2}{3}x)} \quad \text{parab. cu răd } \begin{cases} x=0 \\ x=3H \end{cases}$$

$$\cancel{2}h \cdot \sigma_m(x_3=H) \cdot \cos \alpha = \frac{\gamma R}{H} \cdot H \cdot \frac{2}{3} H \Rightarrow \sigma_m(x_3=H) = \boxed{\frac{2}{3} \frac{\gamma R H}{h \cdot \cos \alpha}}$$

Tensiunea periculoasă este ~~σ~~ circumferențială:

$$\sigma_{p \max}^{\text{circ}}(x) = \sigma_p(x_3=H) = \boxed{\frac{\gamma R H}{h \cdot \cos \alpha} \leq \sigma_a} \quad (*1)$$

2.11

Tuburi cilindrice cu pereți groși **Aplicații**

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

1. Calculul cilindrilor de prese

Se proiectează o presă hidraulică, care trebuie să poată dezvolta o forță maximă de apăsare $F_{\max} = 250$ tf; se cere să se dimensioneze cilindrul presei, știind că diametrul său interior este $D_i = 400$ mm, iar pentru materialul din care este făcut se admite o rezistență admisibilă $\sigma_a = 100$ MPa.

Rezolvare

Din punct de vedere constructiv, cilindrul unei prese este un tub cu pereți groși, sollicitat de presiunea interioară de lucru, a cărei valoare maximă trebuie calculată ca raport între forța pe care trebuie să o dezvolte presa și aria utilă a pistonului pe care se distribuie această forță, astfel:

$$P_{i \max} = \frac{F_{\max}}{\pi \cdot R_i^2} = \frac{250 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi \cdot (200 \text{ mm})^2} = \frac{125}{2\pi} \text{ MPa} = 19,9 \text{ MPa} = 199 \text{ atm}$$

Se poate observa că tuburile de acest fel sunt destinate să suporte presiuni ridicate, de obicei cu un ordin de mărime mai mari decât cele întâlnite la vasele cu pereți subțiri; de aici apare necesitatea grosimilor mari ale pereților acestor structuri.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

1. Calculul cilindrilor de prese

Întrucât diametrul interior al cilindrului a fost impus prin tema de proiectare, dimensionarea cilindrului înseamnă stabilirea valorii minime necesare a razei sale exterioare R_e .

În acest scop, se folosește relația de calcul stabilită anterior:

$$R_{e\min} = R_i \cdot \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p_i}} = 200\text{mm} \cdot \sqrt{\frac{100\text{MPa}}{(100 - 2 \cdot 20)\text{MPa}}} = 258,2\text{mm}$$

Pe baza acestui rezultat se poate adopta valoarea $R_{e\text{ ad}} = 260$ mm, astfel încât cilindrul calculat va avea dimensiunea exterioară $D_e = 520$ mm.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

2. Calculul de optimizare a fretărilor

Se proiectează un tub cu pereți groși, care este destinat să suporte o presiune interioară $p_i = 150$ MPa, în condițiile în care materialul avut la dispoziție este un oțel, cu rezistența admisibilă de doar 250 MPa; este nevoie, prin urmare, să fie realizat un tub *compus*, cu îmbinare prin fretare, cu diametrul interior $D_i = 2R_1 = 300$ mm.

Să se stabilească valorile potrivite ale razelor R_2 , R_3 și strângerii de fretare δ , pentru ca tubul final să funcționeze în cele mai bune condiții posibile.

Rezolvare

Calculul *optimizat* al îmbinării se bazează pe relațiile lui Gâdolin, care au fost discutate anterior.

Mai întâi se poate stabili *raza exterioară* a tubului global, plecând de la formula tensiunii echivalente optimizate:

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

2. Calculul de optimizare a fretărilor

$$\sigma_{\text{ech max}}^{\min} = \sigma_a = \frac{R_3}{R_3 - R_1} \cdot p_i \Rightarrow R_{3\text{nec}} = \frac{\sigma_a}{\sigma_a - p_i} \cdot R_1 = \frac{250}{250 - 150} \cdot 150\text{mm} = 375\text{mm}$$

Se calculează apoi valoarea necesară pentru *raza comună optimă* a celor două tuburi, folosind formula corespunzătoare:

$$R_{2\text{optim}} = \sqrt{R_1 \cdot R_3} = \sqrt{150\text{mm} \cdot 375\text{mm}} = 237,17\text{mm} \approx 237\text{mm}$$

Această valoare a razei comune trebuie înlocuită în relația care dă *strângerea optimă de fretare* pentru montarea celor două tuburi:

$$\delta_{\text{optim}} = \frac{p_i \cdot R_2}{E} = \frac{150\text{MPa} \cdot 237\text{mm}}{21 \cdot 10^4\text{MPa}} = 0,169\text{mm}$$

Pornind de la acest rezultat, tubul suplimentar trebuie să aibă diametrul interior *mai mic* cu 0,338 mm față de cota exterioară a tubului de bază.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

2. Calculul de optimizare a fretărilor

Dacă se alege ca îmbinarea să fie realizată prin *încălzirea* tubului exterior, admițând că temperatura va crește cu o cantitate ΔT și luând valoarea uzuală, pentru oțeluri carbon, a coeficientului de dilatare liniară $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$, se poate scrie valoarea creșterii de diametru din relația clasică a dilatărilor liniare $\Delta D = \alpha \times D_i \times \Delta T$.

Folosind apoi valoarea strângerii optime, care a fost stabilită mai sus, se calculează diferența de temperatură cu care tubul suplimentar trebuie încălzit, astfel:

$$\Delta T_{\text{nec}} = \frac{\delta_{\text{optim}}}{\alpha \cdot D_2} = \frac{0,338 \text{ mm}}{1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1} \cdot (2 \cdot 237 \text{ mm})} = \frac{16900}{1,2 \cdot 237} \text{ grad} = 59,423 \text{ grad} \approx 60 \text{ grad}$$

Acest rezultat arată așadar că, pentru o montare corectă a îmbinării fretate care s-a proiectat, tubul suplimentar trebuie încălzit cu cel puțin 60°C în raport cu temperatura ambiantă.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

3. Strângerea maximă de fretare

Să se deducă strângerea maximă cu care un inel din oțel, având caracteristicile de material $\sigma_a = 180\text{MPa}$, $E = 21 \times 10^4 \text{MPa}$, iar ca dimensiuni lățimea $L = 40 \text{mm}$ și diametrele $D_i = 100 \text{mm}$, $D_e = 120 \text{mm}$, poate fi montat pe un arbore din același material.

Dacă se admite între piese un coeficient de frecare $\mu = 0,2$ să se afle forța axială de apăsare F_{\min} necesară, în cazul în care strângerea între cele două piese are valoarea maximă posibilă, pentru a se efectua montarea (sau demontarea) prin presare a inelului pe (sau de pe) arbore.

Rezolvare

Ideea de bază în calculul acestei îmbinări este că se produce *fretarea inelului* pe un *tub* cu formă particulară, în sensul că este *plin*, având adică diametrul interior nul, încât în relațiile prezentate anterior se va trece $R_1=0$.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

3. Strângerea maximă de fretare

Înainte de a se calcula strângerea admisibilă, cu formulele de la tuburi fretate din același material, trebuie stabilită *presiunea interioară maximă* pe care inelul o poate suporta, folosind condiția lui de rezistență, bazată pe ipoteza de rupere τ_{\max} :

$$\sigma_{\text{ech max}} = p_i \cdot \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \leq \sigma_a \Rightarrow$$
$$p_{i \text{ max}} = \frac{R_e^2 - R_i^2}{2R_e^2} \cdot \sigma_a = \frac{6^2 \cdot 10^2 - 5^2 \cdot 10^2}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^2} \cdot 180 \text{ MPa} = \frac{11}{72} \cdot 180 \text{ MPa}$$

Rezultatul nu este unul final, astfel încât poate fi folosit în calcule ulterioare chiar sub această formă; strângerea maximă permisă se găsește din relația fundamentală a tuburilor fretate, pe baza presiunii maxime de mai sus:

$$\delta = \frac{p_0 \cdot R_2}{E} \cdot \left(\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

3. Strângerea maximă de fretare

Folosind datele problemei de față, această relație se dezvoltă astfel:

$$\delta_{\max} = \frac{11}{72} \cdot 180 \text{MPa} \cdot 50 \text{mm} \cdot \left(\frac{36+25}{36-25} + \frac{25+0}{25-0} \right) = \frac{11 \cdot 18 \cdot 5}{72 \cdot 21 \cdot 100} \cdot \frac{72}{11} \text{mm} = \frac{3}{7 \cdot 10} \text{mm} = 0,0428 \text{mm}$$

Pentru ca inelul să reziste operației de montare, diametrul arborelui poate fi mai mare decât diametrul interior al inelului cu cel mult $85\mu\text{m}$.

Forța de apăsare pentru introducerea sau scoaterea inelului pe arbore trebuie să învingă (adică să fie măcar cu 10% mai mare decât) *forța de frecare* F_f dintre cele două piese; valoarea acestei mărimi depinde de coeficientul de frecare dintre piese și de forța normală de presare N_f de pe *suprafața cilindrică* (având diametrul D_i și înălțimea L), pe care se produce contactul dintre inel și arbore:

$$F_{\min} = 1,1 \cdot F_f = 1,1 \cdot \mu \cdot N_f = 1,1 \cdot \mu \cdot p_0 \cdot \pi D_i \cdot L \Rightarrow$$

$$F_{\min} = 1,1 \cdot 0,2 \cdot \frac{11}{72} \cdot 180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 100 \text{mm} \cdot 40 \text{mm} = 121 \cdot 5 \cdot 40 \pi \text{N} = 76 \text{kN}$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

3. Strângerea maximă de fretare

Montarea/demontarea inelului prin presare la rece necesită forțe apreciabile, adică folosirea unor prese de capacitate mare; devine interesant de văzut în ce condiții s-ar putea executa operația de fretare prin *încălzirea* inelului, provocând creșterea diametrului său, prin dilatare termică.

Considerând că temperatura va crește cu o cantitate ΔT și luând valoarea uzuală, pentru oțeluri carbon, a coeficientului de dilatare liniară $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{grd}^{-1}$, se aplică relația clasică a dilatărilor liniare $\Delta D = \alpha \times D_i \times \Delta T$, din care folosind valoarea strângerii maxime de mai sus se obține diferența de temperatură necesară:

$$\Delta T_{\text{nec}} = \frac{\delta_{\text{max}}}{\alpha \cdot D_i} = \frac{0,085 \text{ mm}}{1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1} \cdot 100 \text{ mm}} = \frac{85}{1,2} \text{ grd} = 70,833 \text{ grd}$$

Operația de montare (respectiv aceea inersă, de demontare) se poate face, așadar, prin încălzirea prealabilă a inelului cu o diferență de temperatură de cel puțin 71°C ; în funcție de dotările tehnologice de care se dispune, este probabil că această metodă va fi preferată, în locul variantei de presare la rece a inelului.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

4. Montarea cu strângere a unei roți pe ax

O roată de curea cu diametrul $D = 400\text{mm}$ și lățimea $L = 100\text{mm}$ trebuie montată prin presare, pe un arbore de transmisie de secțiune circulară cu diametrul $d = 100\text{mm}$; ambele piese sunt din oțel carbon, cu modulul de elasticitate $E = 21 \times 10^4 \text{MPa}$, coeficientul de frecare pe suprafețele de contact fiind $\mu = 0.1$; roata trebuie să transmită la arbore, cu un coeficient de siguranță $c = 2$, momentul dezvoltat de motorul de antrenare având turația nominală $n = 750$ ture/minut și puterea $P = 300\text{kW}$.

Să se calculeze strângerea de fretare necesară pentru realizarea îmbinării, ca și forța axială minimă de presare pentru montarea, respectiv demontarea celor două piese.

Rezolvare

Există mai multe aspecte de bază în analiza acestei teme de proiectare; mai întâi trebuie clarificat înțelesul noțiunii de *coeficient de siguranță* în funcționarea unei transmisii de mișcare și putere: în cazul de față este necesar ca îmbinarea calculată să poată suporta un moment de răsucire de c ori mai mare decât momentul dezvoltat de motorul folosit pentru acționare.

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

4. Montarea cu strângere a unei roți pe ax

Folosind cunoștințele de la solicitarea de răsucire, privind legătura între caracteristicile din fabricație ale motorului și momentul (cuplul) pe care acesta îl transmite, se poate calcula *momentul capabil necesar* pentru îmbinarea proiectată, astfel:

$$M_{t \text{ nec}} = c \cdot M_{t \text{ motor}} = c \cdot \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} = 2 \cdot \frac{30}{\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^5 \text{ W}}{750 \frac{\text{rot}}{\text{min}}} = \frac{24}{\pi} \cdot 10^3 \text{ Nm} = \frac{24}{\pi} \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Momentul efectiv pe care îmbinarea îl transmite se stabilește pe baza rezultantei forțelor de frecare dezvoltate la contactul dintre arbore și roată, care se calculează la fel ca la o aplicație anterioară; momentul rezultantei față de axa longitudinală a arborelui este:

$$M_{t \text{ ef}} = (\mu \cdot N_f) \cdot \frac{d}{2} = \mu \cdot (p_0 \cdot \pi \cdot d \cdot L) \cdot \frac{d}{2} = \frac{\mu \cdot \pi}{2} \cdot p_0 \cdot d^2 \cdot L$$

Se scrie condiția că cele două momente calculate prin ultimele relații trebuie să aibă, în realitate, valori egale între ele:

$$\frac{0,1 \cdot \pi}{2} \cdot p_0 \cdot (100 \text{ mm})^2 \cdot 100 \text{ mm} = \frac{24}{\pi} \cdot 10^6 \text{ Nmm} \Rightarrow p_{0 \text{ nec}} = \frac{480}{\pi^2} \text{ MPa} = 48,63 \text{ MPa}$$

Tuburi cilindrice cu pereți groși. Aplicații

4. Montarea cu strângere a unei roți pe ax

Strângerea necesară, între cotele comune ale celor două piese se obține din relația fundamentală a fretărilor:

$$\delta_{\text{nec}} = \frac{48,63 \text{MPa} \cdot 50 \text{mm}}{21 \cdot 10^4 \text{MPa}} \left(\frac{200^2 + 50^2}{200^2 - 50^2} + 1 \right) = \frac{48,63}{4200} \cdot \left(\frac{425}{375} + 1 \right) \text{mm} = 0,0247 \text{mm}$$

Acest rezultat arată că diametrul arborelui trebuie să fie *cu 50μm mai mare* decât diametrul interior al roții.

În aceste condiții, *forța minimă de presare* pentru montarea sau demontarea roții va fi:

$$F_{\text{min}} = 1,1 \cdot (\mu \cdot N_f) = 1,1 \cdot 0,1 \cdot 48,63 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \pi \cdot 100 \text{mm} \cdot 100 \text{mm} = 152,78 \text{kN}$$

Se observă și în acest caz mărimea apreciabilă a forței axiale minime, care ar fi necesară pentru realizarea prin *presare la rece* a îmbinării analizate.

2.12

Solicitări prin șocuri. Aplicații

Solicitări prin șocuri. Aplicații

1. Să se scrie condiția de rezistență pentru bara prismatică verticală din figură, având secțiunea transversală oarecare și constantă; pe capătul barei ajunge masa m , căzând de la înălțimea H ; se vor considera cunoscute valorile mărimilor necesare pentru acest calcul.

Rezolvare

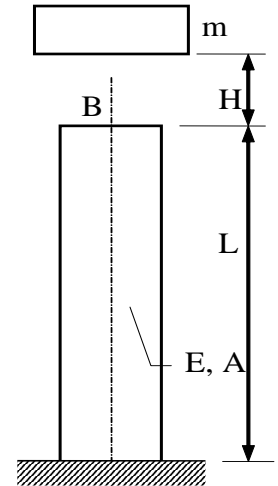
Solicitarea statică echivalentă este axială (de comprimare) sub forța concentrată $G=mg$, iar deformația statică din punctul de impact are relația $f_{st}(B) = mgL/EA$, astfel că factorul de impact va fi:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + 2H \cdot \frac{EA}{mgL}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2EAH}{mgL}}$$

Tensiunea statică maximă este constantă în toate punctele barei și deci condiția de rezistență pentru bara considerată se va scrie:

$$\sigma_{d \max}(x) = \psi \cdot \sigma_{st \max}(x) = \psi \cdot \frac{mg}{A} \leq \sigma_a$$

Folosind această relație se vor putea rezolva cele trei tipuri de probleme întâlnite în calculul ingineresc – de verificare, de dimensionare, sau de încărcare maximă.



Solicitări prin șocuri. Aplicații

2. Se consideră o grindă în consolă, din lemn, de secțiune dreptunghiulară, lovită pe capăt, vertical, de o masă m , aflată în cădere de la înălțimea H ; să se calculeze valoarea tensiunii maxime care apare în grindă în urma șocului, considerând $L = 1\text{m}$, $H = 0.4\text{m}$, $t = 40\text{mm}$, $E = 10^4\text{MPa}$, $m = 30\text{kg}$.

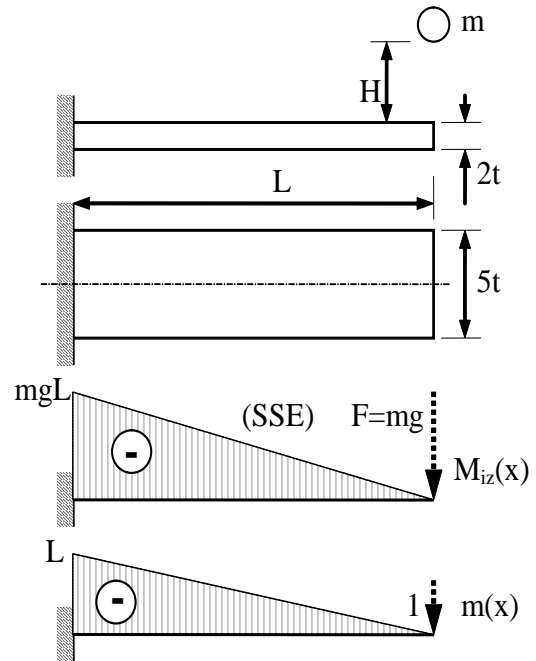
Rezolvare

În figură apar diagramele de momente pentru SSE și pentru starea fictivă de la teorema Mohr-Maxwell (cu forță unitară în locul forței F); folosind algoritmul grafic de înmulțire a diagramelor, deplasarea statică din punctul de impact (notat cu B, nemarcat pe desen) va fi:

$$f_{\text{st}}(\mathbf{B}) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot (-mgL) \cdot \frac{2}{3} (-L) = \frac{mgL^3}{3EI}$$

Momentul de inerție al secțiunii, în raport cu axa ei de încovoiere se calculează astfel:

$$I = \frac{1}{12} \cdot 5t \cdot (2t)^3 = \frac{10}{3} t^4$$



Solicitări prin șocuri. Aplicații

Aplicația 2

În relația de mai sus, pentru calculul deplasării căutate, se introduc valorile mărimilor fizice din problemă:

$$f_{st}(B) = \frac{30\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10^3 \text{mm})^3}{3 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{10}{3} \cdot (40\text{mm})^4} = \frac{3 \cdot 98}{256} \text{mm} = 1,148 \text{mm}$$

Acest rezultat se introduce în relația pentru calculul factorului de impact:

$$\Psi_{ef} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 400 \text{mm}}{1,148 \text{mm}}} = 27,42$$

Tensiunea maximă din starea statică se produce în secțiunea din încastrare a barei și are mărimea următoare:

$$\sigma_{st \max}(x) = \frac{M_{i \max}(x) \cdot t}{I} = \frac{30 \cdot 9,8 \text{N} \cdot 10^3 \text{mm} \cdot 40 \text{mm}}{\frac{10}{3} \cdot (40 \text{mm})^4} = \frac{9 \cdot 9,8}{64} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1,38 \text{MPa}$$

Solicitări prin șocuri. Aplicații

Aplicația 2

Prin urmare, tensiunea dinamică maximă din grinda analizată, care se produce tot în secțiunea în care solicitarea statică este periculoasă, va avea valoarea:

$$\sigma_{d\max}(x) = \psi_{ef} \cdot \sigma_{st\max}(x) = 27,42 \cdot 1,38\text{MPa} = 37,84\text{MPa}$$

Pe același principiu se poate stabili cât de mare este deformația dinamică maximă a barei, care în mod evident apare chiar în punctul în care se produce impactul barei cu masa aflată în cădere:

$$f_{d\max}(x) = \psi_{ef} \cdot f_{st}(B) = 27,42 \cdot 1,148\text{mm} = 31,48\text{mm}$$

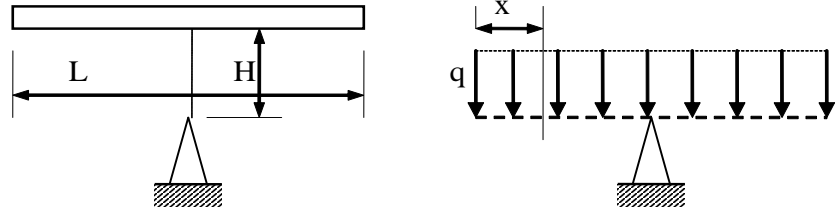
Ambele aceste rezultate permit să se afirme că efectele solicitării dinamice analizate păstrează *materialul* barei în domeniul deformațiilor *liniar-elastice*, deci calculele au fost în mod corect făcute prin metoda factorului de impact.

Solicitări prin șocuri. Aplicații

3. Să se scrie relația multiplicatorului de impact pentru o bară dreaptă, ai cărei parametri constructivi se consideră cunoscuți și care cade de la o înălțime H asupra unui reazem simplu, plasat la mijlocul lungimii L a barei.

Rezolvare

Aceasta reprezintă una dintre situațiile particulare de solicitare produsă prin șoc, în care deplasarea care se produce în punctul de impact este discutabilă, sau greu de calculat, așa cum se observă pe schițele alăturate.



Din acest motiv, valoarea factorului ψ trebuie într-un astfel de caz să fie stabilită folosind prima variantă a relației de calcul pentru acest coeficient, aceea bazată pe mărimile *energetice*.

În partea dreaptă a figurii de mai sus apare schițată *solicitarea statică echivalentă*, în care bara, așezată simplu pe reazem, se consideră a fi încărcată numai cu propria ei greutate, ca forță *uniform distribuită* de intensitate q .

Solicitări prin șocuri. Aplicații

Aplicația 3

În acest caz, intensitatea distribuției poate fi pusă în legătură cu parametrii specifici ai barei calculate, astfel:

$$q = \frac{G}{L} = \frac{\gamma AL}{L} = \gamma A$$

unde γ este *greutatea specifică* a materialului barei, iar A – *aria secțiunii* transversale, admisă a fi de formă oarecare, dar constantă pe toată lungimea ei.

Pe de altă parte, se observă că plasarea reazemului chiar în punctul de impact face dificil de definit și de calculat deplasarea pe verticală a secțiunii respective.

Trecând la stabilirea mărimilor energetice necesare pentru calculul factorului de impact, se observă că lucrul mecanic *exterior* coincide cu energia *potențială* pe care o are bara atunci când este ridicată la înălțimea H :

$$L_e = G \cdot H = q \cdot L \cdot H$$

Solicitări prin șocuri. Aplicații

Aplicația 3

Pentru a calcula lucrul mecanic elastic denumit *interior*, se folosesc formulele cunoscute de la solicitările simple, bazate pe integrarea pe lungimea barei a pătratului eforturilor secționale de pe fiecare regiune:

$$L_i = \int_{(L)} \frac{[M_{iz}(x)]^2}{2EI_z} dx$$

Relația face referire la solicitarea de încovoiere *în starea statică* a barei de față, care are particularitatea **simetriei** perfecte a încărcărilor, pe cele două jumătăți de bară, separate prin punctul de contact cu reazemul; în consecință, studiul se face pe una dintre jumătăți, pentru care eforturile secționale sunt:

$$M_{iz}(x) = -\frac{qx^2}{2}, \quad (\forall) x \in (0, \frac{L}{2})$$

Se poate constata că momentul secțional de încovoiere este nul la capetele barei și atinge valoarea maximă chiar în punctul de impact, secțiune în care va trebui făcut calculul de rezistență pentru bara analizată.

Solicitări prin șocuri. Aplicații

Aplicația 3

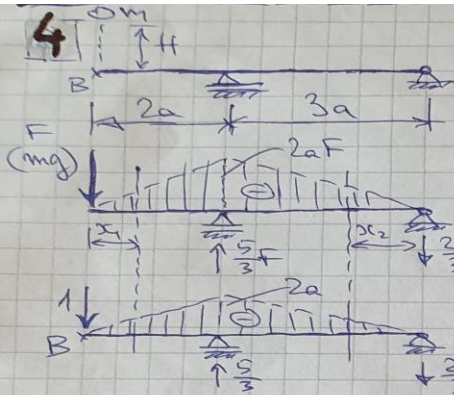
Problema de față nu include această cerință, fiind cerută doar **expresia** factorului de impact ψ ; pentru scrierea ei, se detaliază calculul analitic al lucrului mecanic interior; observând că integrala pe lungimea barei se divide în două integrale identice, pe câte una dintre jumătățile ei, lucrul mecanic de deformare elastică se stabilește astfel:

$$L_i = 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI_z} dx = \frac{q^2}{4EI_z} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{q^2 \cdot L^5}{20 \cdot 32 \cdot EI_z} = \frac{q^2 \cdot L^5}{640 \cdot EI_z}$$

Factorul de impact va fi:
$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_e}{L_i}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{q \cdot L \cdot H}{\frac{q^2 \cdot L^5}{640 \cdot EI_z}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{640 \cdot H \cdot EI_z}{q \cdot L^4}}$$

Se poate constata că în această expresie apar numai mărimi fizice ale căror valori au fost considerate cunoscute, prin enunțul problemei, adică valoarea coeficientului poate fi calculată în orice variantă de formulare a temei de proiectare.

Solicitări prin șocuri. Aplicații



Aceeași bară ca mai sus! Să se calculeze tensiunea și deformația maximă din cazul dinamic

$$m = 4 \text{ kg}; t = 5 \text{ mm}; a = 100 \text{ mm}; H = 100 \text{ mm}$$

$$[mg = 4 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 39,24 \text{ N}]$$

$$\sigma_{st \max}(x) = \frac{2a \cdot mg \cdot \frac{3}{2}t}{9t^4} = \frac{a \cdot m \cdot g}{3t^3}$$

$$\sigma_{st \max} = \frac{100 \text{ mm} \cdot 39,24 \text{ N}}{3 \cdot 125 \text{ mm}^3} = \underline{10,46 \text{ MPa}}$$

Calculul deplasării $f_{st}(B)$ prin 2 metode:

a) Analitic: $M(x_1) = -F \cdot x$; $M(x_2) = -\frac{2}{3}F \cdot x$; $m(x_1) = -1 \cdot x$; $m(x_2) = -\frac{2}{3}x$

$$EI_2 \cdot v(B) = \int_0^{2a} (-F \cdot x)(-x) dx + \int_{2a}^{4a} (-\frac{2}{3}F \cdot x) \cdot (-\frac{2}{3}x) dx =$$

$$= F \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2a} + \frac{4}{9} F \frac{x^3}{3} \Big|_{2a}^{4a} = F \cdot a^3 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{9} \cdot 3^3 \right) = \underline{\frac{20}{3} F \cdot a^3}$$

b) Grafic: $EI_2 \cdot v(B) = \left[\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (-2aF) \right] \cdot \frac{2}{3}(-2a) + \left[\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot (-2aF) \right] \cdot \frac{2}{3}(-2a) = \underline{\frac{20}{3} F a^3}$

Rezultat: $f_{st}(B) = \frac{20}{3} \frac{mg \cdot a^3}{EI_2} = \frac{20}{3} \cdot \frac{39,24 \text{ N} \cdot (100 \text{ mm})^3}{21 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot 9 \cdot (5 \text{ mm})^4} = \underline{0,22 \text{ mm}}$

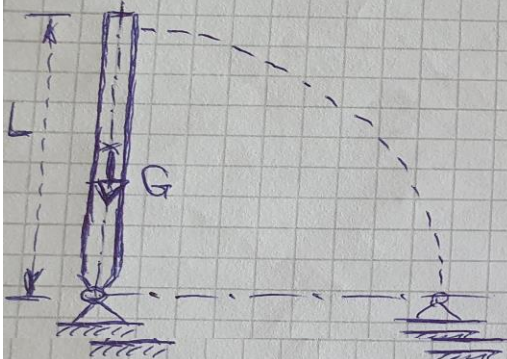
Factorul de impact: $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{st}(B)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \text{ mm}}{0,22 \text{ mm}}} = \underline{31}$

Tensiunea dinamică maximă: $\sigma_{d \max} = \psi \cdot \sigma_{st \max} = 31 \cdot 10,46 \text{ MPa} = \underline{324 \text{ MPa}}$

Deformația dinamică maximă: $f_{d \max} = \psi \cdot f_{st}(B) = 31 \cdot 0,22 \text{ mm} = \underline{6,8 \text{ mm}}$

Solicitări prin șocuri. Aplicații

5 Bara de mai jos are toate caracteristicile cunoscute și se află inițial în poziție verticală. Să se scrie condiția ei de rezistență pentru situația în care cade către orizontală și lovește reazemul din dreapta, ca în figură.

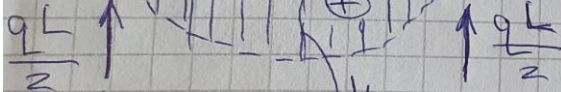


Rezolvare: Solicitarea statică echivalentă a fost figurată alături; se produce încovoiere, sub forța distribuită (q) dată de greutatea proprie a barei $q = \frac{G}{L}$ adică $G = q \cdot L$

Energia potențială inițială este

$$L_e = G \cdot \frac{L}{2} = \left[qL \cdot \frac{L}{2} \right]$$

(S.S.E) (Deformația în punctul de impact)



(*) $x \in (0; L)$: nu se poate calcula!

Solicitări prin șocuri. Aplicații

$$\downarrow M_{i2}(x) \quad M_{i2\max} \quad M_{i2}(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - q \frac{x^2}{2} = \frac{qx}{2} (L-x)$$

Funcția este parabolă, cu rădăcinile $x=0$ și $x=L$

Punctul de extrem este la mijlocul barei: $M_{i2\max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{8}$

Tensiunea statică maximă: $\sigma_{st\max} = \frac{M_{i2\max} \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{\frac{qL^2}{8} \cdot y_{\max}}{I_z}$

(Parametrii secțiunii nu sunt precizați!!)

Lucrul mecanic interior se calculează astfel:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_0^L \frac{M_{i2}^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L \left[\frac{qx}{2} (L-x) \right]^2 dx = \\ &= \frac{q^2}{4 \cdot 2EI_z} \int_0^L x^2 (L^2 - 2Lx + x^2) dx = \frac{q^2}{8EI_z} \left(L^2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2L \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^L = \\ &= \frac{q^2 \cdot L^5}{8EI_z} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{q^2 \cdot L^5}{8 \cdot EI_z} \cdot \frac{1}{30} = \frac{q^2 \cdot L^5}{240EI_z} \end{aligned}$$

Factorul de multiplicare va fi: $\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{qL \cdot \frac{L}{2}}{\frac{q^2 \cdot L^5}{240EI_z}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{120EI_z}{2 \cdot L^3}}$

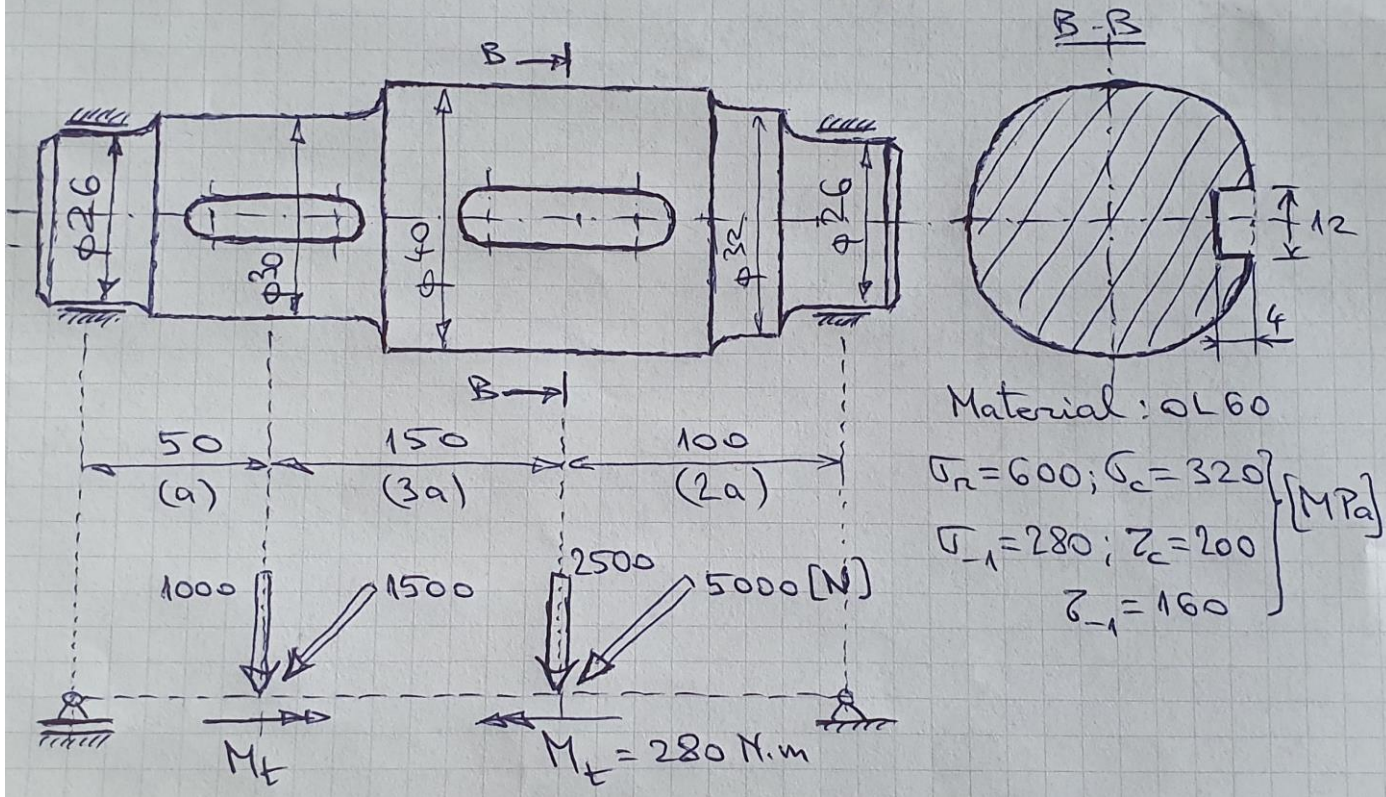
Condiția de rezistență se scrie:

$$\sigma_{d\max}(x) = \psi \cdot \sigma_{st\max}(x) \leq \sigma_a(x)$$

2.13

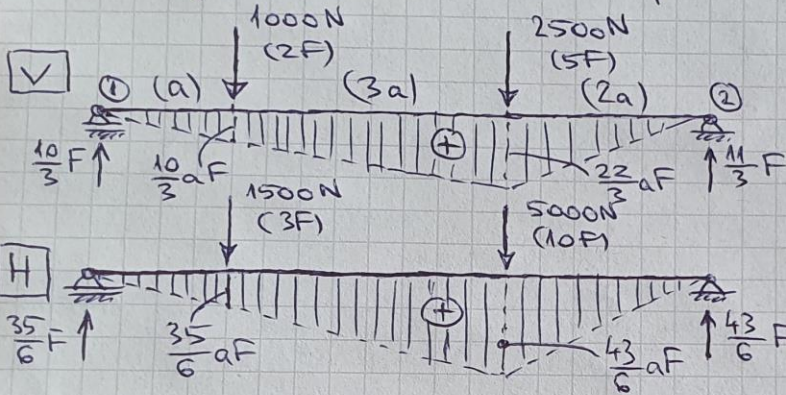
**Calculul la oboseală în cazul
arborilor de transmisie**

Să se verifice la oboseală arborele de mai jos.



Diagramele de eforturi se prezintă astfel:

Notatii
 $a = 50 \text{ mm}$
 $F = 500 \text{ N}$



$$(\sum M_i)_2 = 0: V_1 \cdot 6a = 2F \cdot 5a + 5F \cdot 2a$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: V_2 \cdot 6a = 2F \cdot a + 5F \cdot 4a$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{10}{3} F; V_2 = \frac{11}{3} F$$

$$(\sum M_i)_2 = 0: H_1 \cdot 6a = 3F \cdot 5a + 10F \cdot 2a$$

$$(\sum M_i)_1 = 0: H_2 \cdot 6a = 3F \cdot a + 10F \cdot 4a$$

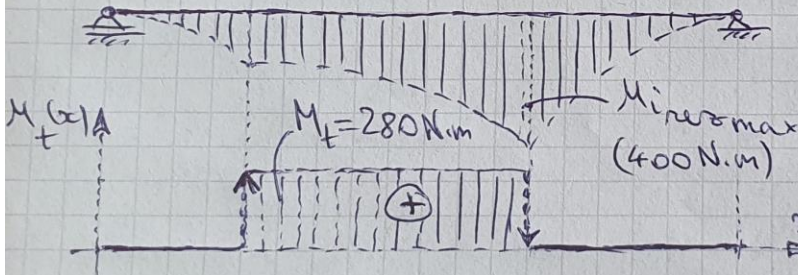
$$\Rightarrow H_1 = \frac{35}{6} F; H_2 = \frac{43}{6} F$$

$$M_{\text{inter}}(x) = \sqrt{\frac{M_{i_1}^2(x) + M_{i_2}^2(x)}{v_{iH}}}$$

$$M_{\text{intermax}}(x) = aF \cdot \sqrt{\left(\frac{23}{3}\right)^2 + \left(\frac{43}{3}\right)^2} =$$

$$= 16,1aF \approx 400 \text{ Nm}$$

$$[a \cdot F = 50 \text{ mm} \cdot 500 \text{ N} = 25 \text{ N} \cdot \text{m}]$$



Obs: Tensiunea globală maximă ar fi $\sigma_{\text{ech,max}}$ (folosind criteriul von Mises)

$$\sigma_{\text{ech,max}}(x) = \frac{\sqrt{M_{\text{inter}}^2(x) + \frac{3}{4} \cdot M_{+}(x)^2}}{W_z}$$

Verificarea la oboseală se face, de obicei, în câteva secțiuni ale piesei, acolo unde solicitările sunt mari și există concentrații de tensiuni. Se va exemplifica modul de calcul pentru secțiunea B-B, în care solicitarea este maximă și canalul de pană este concentrator de tensiuni.

Obs: pt. secțiunile stăbte prin canale de pană, modulii de rezistență pot fi aproximați, folosind un diametru net $d_{net} = D - t$

Aici $D = 40 \text{ mm}$, iar canalul are adâncimea $t = 4 \text{ mm} \Rightarrow \underline{d_{net} = 38 \text{ mm}}$

Solicitarea variabilă se consideră a fi compusă (încovoiere + răsucire)

(*) Ciclul de încovoiere este axial-simetric (cu tensiuni extreme egale și contrare ca semn) $\Rightarrow \sigma_m = 0$ $\sigma_v = \frac{\sigma_{max \text{ încov}}}{\cancel{\text{XXXXXX}}} = \frac{M_{încov}(\sigma_1)}{W_z}$

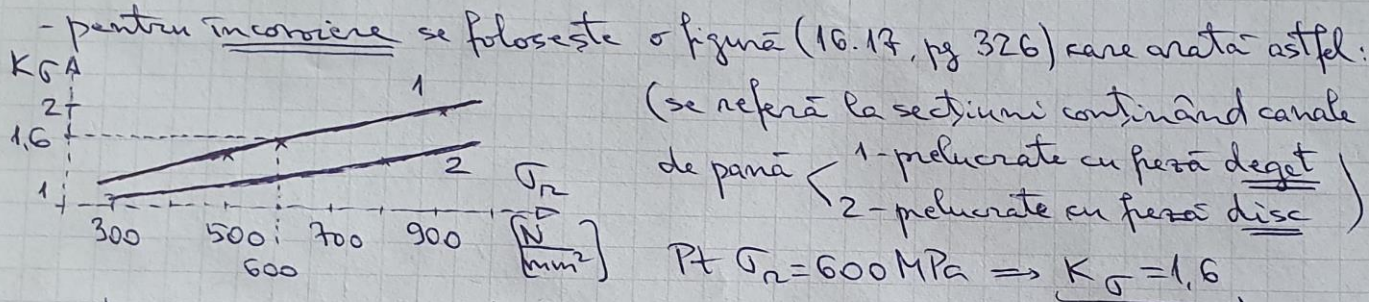
$$\sigma_v = \frac{M_{încov}(B-B)}{\pi (d_{net})^3} = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}}{\pi \cdot (38 \text{ mm})^3} = 74,25 \text{ MPa} \approx \underline{75 \text{ MPa}}$$

(*) Ciclul de răsucire se consideră pulsant ($\sigma_{min} = 0$) $\Rightarrow Z_m = Z_v = \frac{\tau_{max}(\sigma_1)}{2}$

$$Z_m = Z_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t(B-B)}{\frac{1}{16} \cdot (d_{net})^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 28 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{mm}}{\pi (38 \text{ mm})^3} = \frac{25,988 \text{ MPa}}{2} \approx \underline{13 \text{ MPa}}$$

Alegerea coeficienților de influență se începe cu factorul legat de concentrarea tensiunilor, care ^{este} de obicei destul de greu de stabilit.

Sursa: AL. Anghel - RMZ, Ed. Univ. Ploiesti, 2005



- pentru răsucire se extrage dintr-un tabel de valori (pg. 356), pe aceea care corespunde oțelului cu $\sigma_n = 600 \text{ MPa} \Rightarrow K_2 = 1.5$

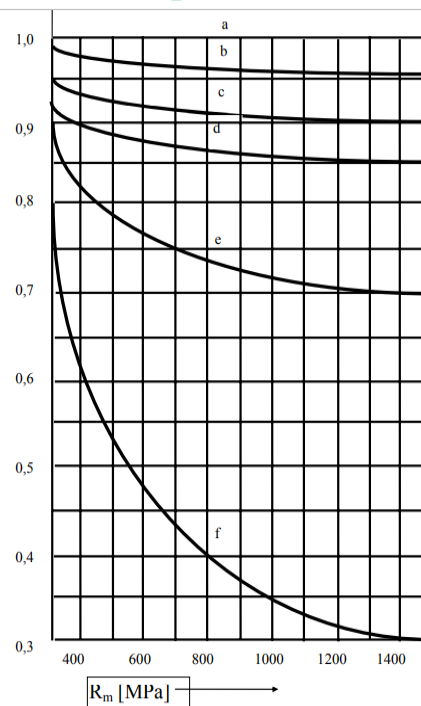
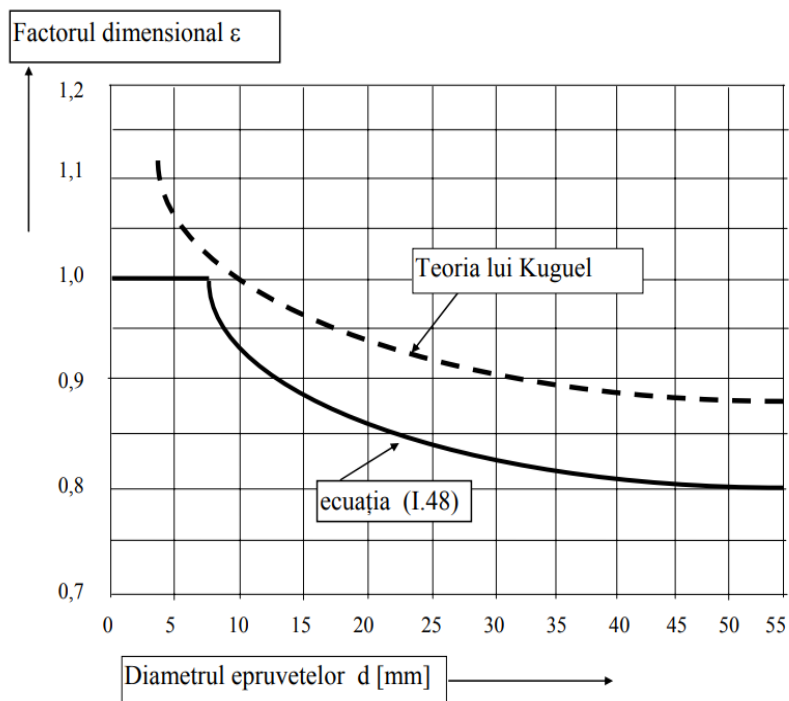
Pentru ceilalți factori s-a folosit cartea: J. Dumitru, N. Faur - RM, 1997

- factorul dimensional - pe diagrama punctată, la $d = 40 \text{ mm} \Rightarrow \epsilon = 0.88$

- factorul calității de suprafață - pe graf. pt. piese finisate prin strunjire (curba [d]), la $\sigma_n = 600 \text{ MPa}$ se găsește $\gamma_S = 0.87$

- pt. răsucire se folosește relația $\gamma_2 = 0.6 \cdot \gamma_S + 0.4 \Rightarrow \gamma_2 = 0.92$

Alegerea coeficienților de influență (dimensional și de calitate a suprafețelor)



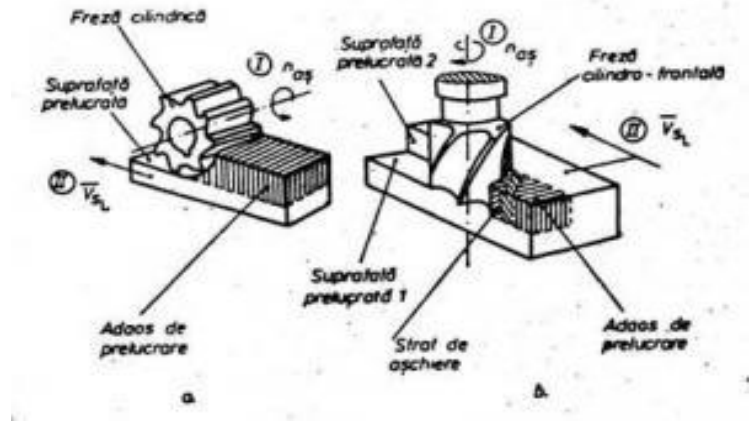
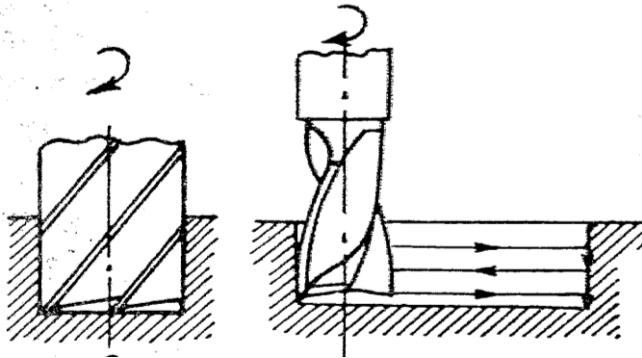
- a) Epruvete fin polizate
- b) Epruvete cu polizaj mijlociu
- c) Epruvete fin șlefuite
- d) Epruvete șlefuite mijlociu sau finisate la strună

Deosebirea dintre frezele deget și frezele disc



Exemple de freze frontale (deget)

Deosebirea dintre frezele deget și frezele disc



Folosind rezultatele de mai sus, se calculează mai întâi valorile coeficientului de siguranță la oboseală pentru fiecare categorie de solicitare variabile:

- pt ciclul alternant-simetric de încoviere

$$k_1 = \frac{1}{\frac{0,88 \cdot 0,87}{1,6} \cdot \frac{75 \text{ MPa}}{280 \text{ MPa}} + \frac{\sigma}{320 \text{ MPa}}} = \underline{7,8}$$

- pt ciclul pulsant de răsucire

$$k_2 = \frac{1}{\frac{0,88 \cdot 0,92}{1,5} \cdot \frac{13 \text{ MPa}}{160 \text{ MPa}} + \frac{13 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}}} = \underline{9,18}$$

Se calculează apoi coeficientul de siguranță la solicitarea compusă:

$$k_g = \frac{k_1 \cdot k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{7,8 \cdot 9,18}{\sqrt{7,8^2 + 9,18^2}} = \underline{5,94}$$

Rezultă că secțiunea calculată nu este periclitată de solicitările variabile pe care trebuie să le suporte!

