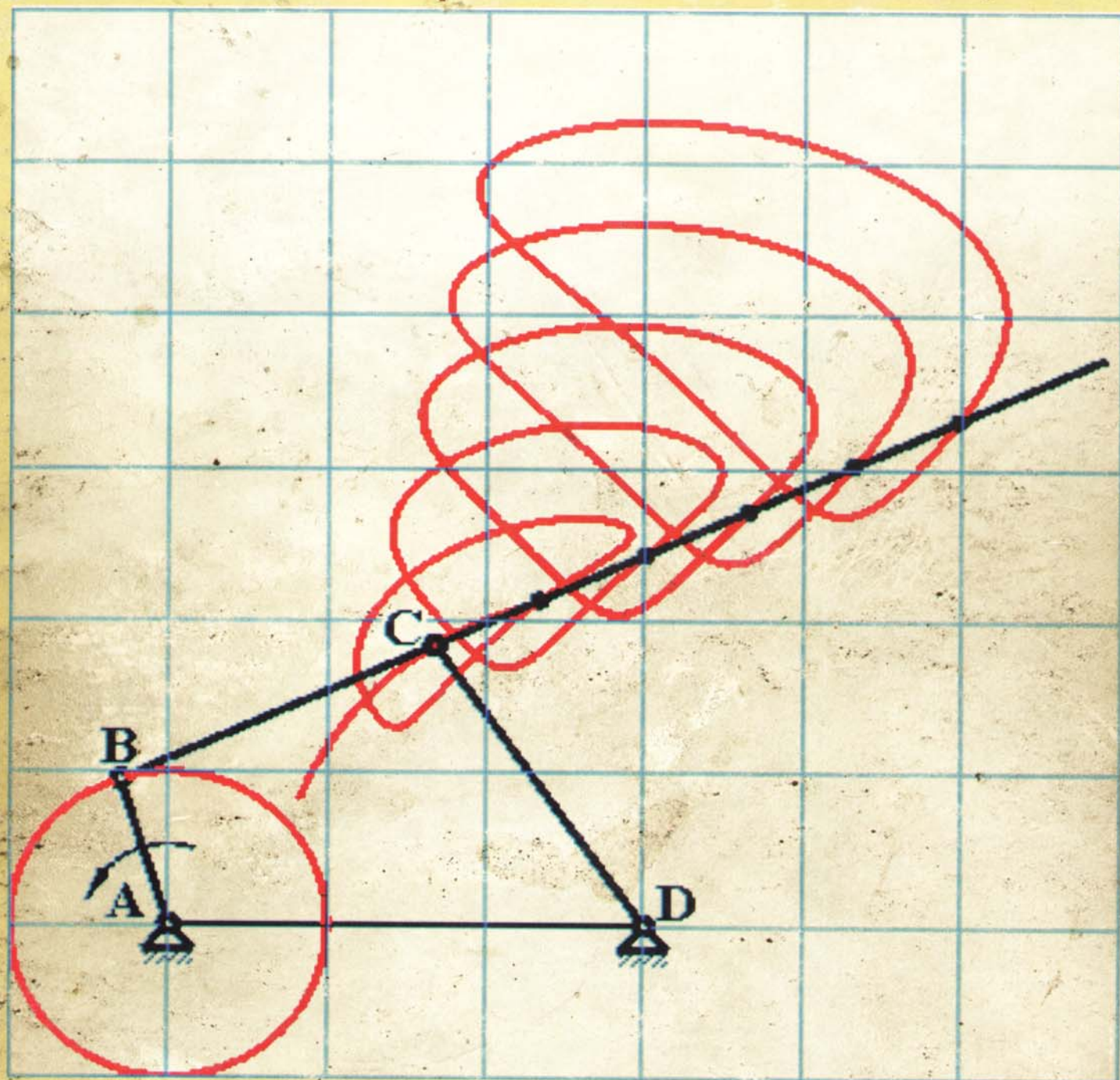


mecanisme

ȘI TEORIA MAȘINILOR



C. D. DUCA · FL. BUIUM · G. PÂRĂOARU

**CEZAR D. DUCA
FLORENTIN BUIUM
GABRIEL PÂRĂOARU**

**UNIVERSITATEA TEHNICĂ
"GH. ASACHI" IAȘI
FACULTATEA DE MECANICĂ**

MECANISME

m a n u a l

**IAȘI
2003**

PREFAȚĂ

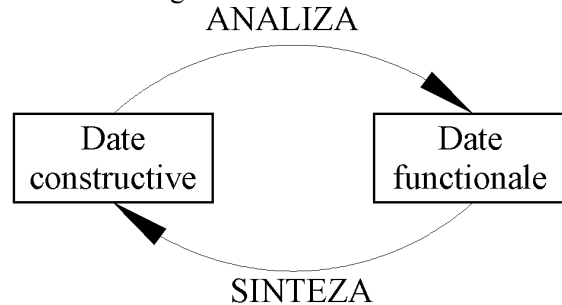
Lucrarea de față este, în intenția autorilor, un **manual** (“carte care cuprinde elementele fundamentale ale unei științe, folosită mai ales în școală” – Dicționarul Explicativ al Limbii Române (DEX), Editura Univers Enciclopedic, București 1996) și este destinată, în primul rând, pentru instruirea studenților care au în planul de învățământ disciplina de **Mecanisme**.

Dorim să subliniem că un manual se deosebește de cursul care reproduce prelegerile prezentate studenților, printr-o serie de caracteristici proprii. Astfel, manualul trebuie să fie mai complet, mai riguros și mai extins decât cursul oral, pentru a permite studenților interesați să-și completeze și să-și clarifice unele noțiuni sau demonstrații, beneficiind de un material grafic și un instrument matematic comprehensive.

În procesul de elaborare s-a pus un accent deosebit pe logica expunerii, pe definirea atentă a conceptelor, care precede întotdeauna utilizarea lor, pe organizarea și sistematizarea materialului prezentat. Manualul conține 5 capitole: 1. Structura mecanismelor, 2. Mecanisme cu cuple inferioare (cu bare), 3. Mecanisme cu came. 4. Mecanisme cu roți dințate, 5. Dinamica mecanismelor și a mașinilor. În Capitolul 1 se definesc noțiunile de bază ale disciplinei și se prezintă clasificarea mecanismelor după diverse criterii. O problemă deosebit de importantă, tratată în acest capitol, este determinarea gradului de mobilitate și a numărului de legături pasive. S-a încercat o rezolvare cât mai riguroasă a acestei probleme dificile, în limitele spațiului alocat. În acest sens, s-au introdus și s-au utilizat noțiunile de clasă constructivă și clasă funcțională, pentru cuplele cinematice. În capitolele 2, 3 și 4 sunt tratate, separat, cele trei categorii mari de mecanisme: cu bare, cu came și cu roți dințate, care au domenii de utilizare și metode de studiu specifice. Fiecare dintre aceste capitole cuprinde, în general, următoarea problematică: analiza cinematică, analiza cinetostatică și randamentul, analiza preciziei și sinteza. În raport cu structura altor manuale, am considerat oportun să tratăm analiza cinetostatică și randamentul la fiecare categorie de mecanisme, deoarece rezolvarea acestor probleme prezintă aspecte specifice legate de tipul mecanismului. Subliniem de asemenea, prezența unui subcapitol de analiza preciziei, asociat la fiecare categorie de mecanisme. Justificăm această opțiune prin importanța problemei preciziei în industria și tehnica moderne. Capitolul 5 cuprinde două probleme cu caracter general: analiza dinamică și echilibrarea forțelor de inerție.

Așa cum rezultă și din structura manualului, studiul mecanismelor presupune rezolvarea a două tipuri de probleme: de analiză și de sinteză. Definirea lor se face, în concepția noastră, în funcție de datele de intrare și de ieșire. Într-o problemă de analiză, datele de intrare au caracter constructiv, iar cele de ieșire au

caracter funcțional, pe când într-o problemă de sinteză, aceste categorii de date se inversează, așa cum se artă în figura următoare.



Metodele de analiză și de sinteză expuse în manual sunt, în general, cele consacrate în literatura de specialitate, dar intervin și unele aspecte, formale sau de fond, cu caracter original. Astfel, în Capitolul 2, se formulează condițiile în care problemele de analiză cinematică și cinetostatică (cu și fără frecare), au soluții reale în conexiune cu pozițiile critice și cu domeniile de autoblocare. În cadrul sintezei dimensionale a mecanismelor cu bare s-a definit domeniul sintezei elementare și s-au elaborat metode analitice de rezolvare. În Capitolul 3 se prezintă o interpretare originală a fenomenului de subțiere la came, legată de o modalitate inedită de calcul a razei de curbură. În același capitol se indică o metodă nouă de analiză a preciziei. În manual sunt date de asemenea, relații inedite pentru calculul randamentului mecanismelor cu came și al angrenajelor paralele.

O trăsătură esențială, pe care autorii au dorit să o imprime lucrării, este legată de finalizarea numerică a procedurilor și metodelor prezentate. În acest sens se dau indicații precise cu privire la rezolvarea sistemelor de ecuații care modelează problemele de analiză sau de sinteză tratate. Considerăm că această idee contribuie la dezvoltarea gândirii ingineresti și la apropierea de practica de proiectare. Având în vedere cele arătate, considerăm că manualul poate fi utilizat și de inginerii sau cercetătorii care se întâlnesc, în activitatea lor, cu probleme de mecanisme.

*

Autorii apreciază că atmosfera din Catedra de “Teoria Mecanismelor și Robotică” din Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași, a fost benefică pentru elaborarea acestui manual și mulțumesc, pe această cale, tuturor colegilor.

Dr. ing. Cezar DUCA

Dr. ing. Florentin BUIUM

Ing. Gabriel PĂRĂOARU

CUPRINS

Pag.		
1	Cap. 1	STRUCTURA MECANISMELOR
1	1.1.	Noțiuni fundamentale
1	1.1.1.	Elemente și cuple cinematice
7	1.1.2.	Lanțuri cinematice, mecanisme
11	1.2.	Determinarea gradului de mobilitate
11	1.2.1.	Stabilirea formulelor de calcul
15	1.2.2.	Familii de mecanisme, exemple
16	1.2.2.1.	Familia $f = 4$ ▪Mecanismele plane cu cuple de translație ▪Mecanismele cu șurub ▪ Mecanismele cu roți de fricțiune
19	1.2.2.2.	Familia $f = 3$ ▪Mecanismele plane (cu excepția celor care au numai cuple de translație) ▪Mecanismele sferice
23	1.2.2.3.	Familia $f = 0$
23	1.2.3.	Situații particulare privind determinarea gradului de mobilitate
24	1.2.3.1.	Mobilități locale
24	1.2.3.2.	Lanțuri cinematice pasive
26	1.3.	Clasificarea structurală a mecanismelor plane
26	1.3.1.	Înlocuirea cuplei superioare
28	1.3.2.	Noțiunea de grupă structurală ▪Grupele structurale cu $L = 0$ (Assur) ▪Grupele conducătoare (Duca, Simionescu) cu $L = 1$
31	1.3.3.	Formarea mecanismelor și descompunerea în grupe structurale
39	Cap. 2	MECANISME CU CUPLE INFERIOARE (CU BARE)
39	2.1.	Analiza cinematică
39	2.1.1.	Considerații generale
41	2.1.2.	Metoda intersecției locurilor geometrice ▪Grupa structurală RRR ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală RTR ▪Grupa structurală RTRR
51	2.1.3.	Metoda ecuațiilor vectoriale
51	2.1.3.1.	Prezentare generală▪Ecuatii de tipul I ▪Ecuatii de tipul II
53	2.1.3.2.	Analiza cinematică a grupelor structurale ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală $0 / 3 / 3$ cu cuple de rotație
65	2.1.4.	Metoda contururilor vectoriale
65	2.1.4.1.	Prezentare generală
67	2.1.4.2.	Mecanismul patrulater articulat plan

Pag.		
72	2.1.4.3.	Mecanismul manivelă – piston (bielă – manivelă) ▪Formule aproximative
74	2.1.4.4.	Mecanismul cu culisă de rotație
76	2.1.4.5.	Mecanismul cu culisă de translație
77	2.1.4.6.	Mecanismul cu cilindru oscilant
79	2.1.5.	Metoda transformărilor de coordonate (matriceală)
79	2.1.5.1.	Prezentare generală
81	2.1.5.2.	Analiza cinematică a unui mecanism de robot
83	2.1.6.	Metoda funcțiilor de transmitere
85	2.1.7.	Procedee indirecte de analiză cinematică
86	2.1.7.1.	Procedeeul schimbării cuplei conducătoare
88	2.1.7.2.	Procedeeul schimbării bazei
91	2.1.8.	Mecanismul cardanic
94	2.1.9.	Mecanismul patruleter articulată spațial ▪Problema pozițiilor ▪Problema vitezelor și a accelerațiilor
102	2.1.10.	Mecanismul manivelă – piston spațial ▪Problema pozițiilor ▪Problema vitezelor și a accelerațiilor
106	2.2.	Analiza cinetostatică
106	2.2.1.	Forțele în mecanisme
106	2.2.1.1.	Obiectul analizei cinetostatice
106	2.2.1.2.	Forțele aplicate
108	2.2.1.3.	Forțele de inerție ▪Reducerea forțelor de inerție ▪Metoda concentrării maselor ▪Concentrarea statică în două puncte ▪Concentrarea dinamică în două puncte ▪Concentrarea dinamică în trei puncte coliniare, dintre care unul este centrul de masă
111	2.2.1.4.	Forțele de legătură ▪Reacțiunile normale ▪Forțele de frecare
117	2.2.2.	Analiza cinetostatică fără frecare ▪Considerații generale
118	2.2.2.1.	Analiza cinetostatică a grupelor structurale ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală 0 / 3 / 3 cu cuple de rotație
131	2.2.2.2.	Mecanismul patruleter articulată plan
133	2.2.3.	Analiza cinetostatică în prezența frecării
133	2.2.3.1.	Considerații generale
138	2.2.3.2.	Modelul matematic ▪Grupa RRT ▪Metoda aproximațiilor succesive
140	2.2.3.3.	Fenomenul de autoblocare ▪Explicarea producerii fenomenului de autoblocare ▪Analiza comportării grupelor structurale
148	2.2.4.	Randamentul mecanic
153	2.2.5.	Mecanismul cu șurub

Pag.		
159	2.3.	Analiza preciziei
159	2.3.1.	Introducere. Abateri elementare
161	2.3.2.	Metoda deterministă ▪Influența jocurilor
164	2.3.3.	Metoda probabilistică
166	2.4.	Sinteza dimensională
166	2.4.1.	Considerații generale
168	2.4.2.	Sinteza elementară
168	2.4.2.1.	Problematica sintezei elementare ▪Problema rotabilității ▪Sinteza pentru asigurarea calității transducerii forțelor ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale elementului condus ▪Sinteza după coeficientul de productivitate
170	2.4.2.2.	Mecanismul patruleter articulat plan ▪Problema rotabilității ▪Sinteza după unghiul de presiune ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale balansierului ▪Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate ▪Sinteza elementară combinată
186	2.4.2.3.	Mecanismul manivelă – piston ▪Problema rotabilității ▪Sinteza după unghiul de presiune ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale patinei ▪Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate ▪Sinteza elementară combinată
191	2.4.2.4.	Mecanismul cu culisă de rotație ▪Problema rotabilității ▪Sinteza în funcție de calitatea transducerii forțelor ▪Sinteza elementară combinată
192	2.4.2.5.	Mecanismul cu cilindru oscilant
195	2.4.3.	Sinteza mecanismelor pentru generarea curbelor
195	2.4.3.1.	Aplicație la mecanismul patruleter articulat plan ▪Teorema Roberts – Cebășev
198	2.4.3.2.	Mecanisme generatoare de traiectorii rectilinii și circulare
201	2.4.4.	Sinteza mecanismelor pentru ghidarea elementelor
204	2.4.5.	Sinteza mecanismelor generatoare de funcții
206	2.4.6.	Sinteza mecanismelor cu mișcare intermitentă (cu opriri)
206	2.4.6.1.	Mecanisme cu mișcare intermitentă în același sens ▪Mecanisme cu clichet ▪Mecanisme cu cruce de Malta
209	2.4.6.2.	Mecanisme cu mișcare intermitentă însoțită de schimbarea sensului
212	2.4.7.	Sinteza mecanismelor pentru reproducerea curbelor asemenea (pantografe)
214	Cap. 3	MECANISME CU CAME
214	3.1.	Clasificare, transformări

Pag.		
214	3.1.1.	Clasificare
216	3.1.2.	Transformări
216	3.1.2.1.	Transformarea prin schimbarea bazei (procedeul inversării mișcărilor)
217	3.1.2.2.	Transformarea prin eliminarea rolei
218	3.1.2.3.	Transformarea mecanismelor spațiale în mecanisme plane
219	3.1.2.4.	Transformarea mecanismelor cu came în mecanisme cu cuple inferioare
220	3.2.	Analiza cinematică
223	3.3.	Legile de mișcare
223	3.3.1.	Ciclul de funcționare
224	3.3.2.	Adoptarea legii de mișcare ▪Criteriul funcțional ▪Criteriul dinamic ▪Criteriul tehnologic
226	3.3.3.	Legi de mișcare uzuale
226	3.3.3.1.	Legi de mișcare elementare ▪Legea de mișcare cu viteză constantă ▪Legea de mișcare cu accelerație constantă (mișcare uniform accelerată) ▪Legea de mișcare cu accelerație cosinusoidală ▪Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală
228	3.3.3.2.	Legi de mișcare polinomiale ▪Legea de mișcare polinomială 2-3 ($k=1$) ▪Legea de mișcare polinomială 3-4-5($k=2$) ▪Legea de mișcare polinomială 4-5-6-7($k=3$) ▪Legea de mișcare polinomială 3-4-5-6($k=2$)
231	3.3.3.3.	Legi de mișcare combinate ▪Legea de mișcare cu viteză trapezoidală ▪Legea de mișcare cu viteză trapezoidală modificată sinusoidal ▪Legea de mișcare cu accelerație trapezoidală
235	3.4.	Elemente de geometrie și cinematică
235	3.4.1.	Problematika generală ▪Caracterizarea constructivă a mecanismului ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilelor reale ▪Raza de curbură, subtăierea
241	3.4.2.	Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbură
245	3.4.3.	Mecanismul plan cu tchet de rotație și rolă ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbură

Pag.		
249	3.4.4.	Mecanismul plan cu tchet de translație și talpă ▪Caracterizarea constructivă ▪Cinematica cuplei superioare ▪Sinteza profilului ▪Raza de curbura
251	3.4.5.	Mecanismul spațial cu camă cilindrică și tchet de translație ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbura
254	3.5.	Analiza cinetostatică
254	3.5.1.	Forțele de legătură din cupla superioară
254	3.5.1.1.	Cupla superioară simplă
255	3.5.1.2.	Cupla superioară cu rolă
258	3.5.2.	Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă
258	3.5.2.1.	Analiza cinetostatică
261	3.5.2.2.	Randamentul, autoblocarea
264	3.5.3.	Mecanismul plan cu tchet de rotație și rolă
264	3.5.3.1.	Analiza cinetostatică
265	3.5.3.2.	Randamentul, autoblocarea
266	3.5.4.	Mecanismul plan cu tchet de translație și talpă
266	3.5.4.1.	Analiza cinetostatică
269	3.5.4.2.	Randamentul, autoblocarea
270	3.6.	Analiza preciziei
274	3.7.	Sinteza dimensională
274	3.7.1.	Formularea generală a problemei
278	3.7.2.	Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă
280	3.7.3.	Mecanismul plan cu tchet de rotație și rolă
283	3.7.4.	Mecanismul spațial cu camă cilindrică și tchet de translație
284	Cap. 4	MECANISME CU ROȚI DINȚATE
284	4.1.	Mecanisme elementare cu roți dințate (angrenaje)
284	4.1.1.	Suprafețele și liniile caracteristice ale roților dințate
288	4.1.2.	Clasificarea angrenajelor ▪Variația raportului de transmitere ▪Poziția relativă a axelor și forma suprafețelor de rostogolire ▪Angrenaje exterioare și interioare ▪Forma liniilor de divizare ale flancurilor ▪Modul de definire geometrică ▪Forma profilului frontal
294	4.1.3.	Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți drepi
294	4.1.3.1.	Raportul de transmitere. Legea fundamentală a angrenării
296	4.1.3.2.	Utilizarea evolventei cercului ca profil de dinte ▪Evolventa cercului. Definiție, ecuații, proprietăți ▪Verificarea legii fundamentale a angrenării în cazul profilelor evolventice

Pag.		
300	4.1.3.3.	Definirea geometrică a roții dințate cilindrice cu dinți drepti ▪Cremaliera de referință ▪Parametrii geometrice principali ai roții dințate cilindrice exterioare cu dinți drepti ▪Parametrii geometrice ai roții dințate pe un cerc oarecare
307	4.1.3.4.	Angrenajul paralel exterior ▪Parametrii geometrice ▪Angrenarea cu joc radial standardizat
310	4.1.3.5.	Angrenajul paralel interior
313	4.1.3.6.	Formarea și întreruperea contactului dintre dinți. Continuitatea angrenării
317	4.1.3.7.	Fenomenul de interferență
322	4.1.3.8.	Alunecarea relativă a profilelor
325	4.1.3.9.	Analiza cinetostatică. Randamentul
331	4.1.3.10.	Adoptarea coeficienților de deplasare
332	4.1.4.	Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți înclinați
332	4.1.4.1.	Definirea roții dințate cilindrice cu dinți înclinați ▪Cremaliera de referință cu dinți înclinați ▪Parametrii geometrice principali ai roții dințate cilindrice cu dinți înclinați
337	4.1.4.2.	Angrenajul paralel cu diți înclinați ▪Parametrii geometrice ai angrenajului ▪Aspecte specifice ale angrenajelor paralele cu dinți înclinați
341	4.1.5.	Angrenaje concurente
341	4.1.5.1.	Angrenajul analog
342	4.1.5.2.	Definirea roții dințate conice cu dinți drepti
344	4.1.5.3.	Angrenajul concurent format din roți conice cu dinți drepti
345	4.1.5.4.	Angrenaje concurente cu dinți înclinați și curbi
347	4.1.6.	Angrenaje melcate
350	4.1.7.	Angrenaje cilindrice cu axe încrucișate (elicoidale)
352	4.1.8.	Angrenaje hipoide
353	4.1.9.	Precizia angrenajelor
353	4.1.9.1.	Problema jocului dintre flancuri ▪Modificarea deplasărilor de profil ▪Majorarea distanței dintre axe
356	4.1.9.2.	Bazele geometrice ale măsurării danturii ▪Coarda de divizare și coarda constantă ▪Cota peste dinți ▪Cota peste role
360	4.2.	Mecanisme complexe cu roți dințate
360	4.2.1.	Mecanisme complexe cu axe fixe
360	4.2.1.1.	Analiza cinematică
362	4.2.1.2.	Randamentul, transmiterea momentelor
363	4.2.2.	Mecanisme planetare

Pag.		
363	4.2.2.1.	Structura mecanismelor planetare
366	4.2.2.2.	Analiza cinematică
369	4.2.2.3.	Transmiterea momentelor, randamentul
372	4.2.2.4.	Diferențialul de automobil
376	Cap. 5	DINAMICA MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR
376	5.1.	Analiza dinamică
376	5.1.1.	Modele dinamice
378	5.1.2.	Fazele funcționării mașinii
380	5.1.3.	Ecuțiile mișcării mașinii
383	5.1.4.	Rezolvarea ecuațiilor de mișcare
383	5.1.4.1.	Cazul $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\omega)$, $J_{red} = ct.$
387	5.1.4.2.	Cazul $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\varphi)$
388	5.1.4.3.	Cazul $M_{red}^m(\varphi)$, $M_{red}^r(\varphi)$
391	5.1.5.	Uniformizarea mișcării mașinii
394	5.1.6.	Comportarea energetică a mașinii
395	5.2.	Echilibrarea forțelor de inerție
396	5.2.1.	Echilibrarea rotoarelor
396	5.2.1.1.	Condițiile de echilibrare
398	5.2.1.2.	Reducerea forțelor de inerție în două plane. Echilibrarea experimentală
402	5.2.2.	Echilibrarea mecanismelor
402	5.2.2.1.	Condițiile de echilibrare
405	5.2.2.2.	Echilibrarea statică. Metoda punctelor principale <ul style="list-style-type: none"> ▪Determinarea centrului de masă al mecanismului ▪Echilibrarea statică a mecanismului patralater articulat ▪Echilibrarea statică a mecanismului manivelă – piston
411	5.2.2.3.	Metoda analizei armonice
415	5.2.2.4.	Noțiuni privind echilibrarea motoarelor policilindrice <ul style="list-style-type: none"> ▪Motorul cu doi cilindri ▪Motorul cu trei cilindri ▪Motorul cu patru cilindri
421		ANEXE
421	Anexa 1	Noțiuni de geometrie analitică și diferențială
421	1.1.	Transformări de coordonate ▪Transformări între două sisteme carteziane plane ▪Transformări dintr-un sistem cartezian într-un sistem polar
422	1.2.	Tangenta și normala la o curbă
423	1.3.	Raza de curbură, convexitatea, concavitatea
425	1.4.	Unghiul de poziție al unui vector

Pag.		
426	Anexa 2	Noțiuni de analiză matematică
426	2.1.	Derivatele funcțiilor inverse
426	2.2.	Derivatele funcțiilor implicite
426	2.3.	Derivatele funcțiilor date parametric
427	Anexa 3	Mișcarea relativă dintre două corpuri (roți dințate) care execută mișcări absolute de rotație în jurul a două axe fixe
428	3.1.	Axa instantanee a mișcării relative
429	3.2.	Axoidale mișcării relative
430	Anexa 4	Demonstrația relației $a_x \geq a$
433		BIBLIOGRAFIE

Capitolul 1

STRUCTURA MECANISMELOR

1.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

1.1.1. Elemente și cuple cinematice

Prin **element cinematic** se înțelege un corp solid constituit dintr-o piesă mecanică sau din mai multe piese îmbinate rigid între ele. Elementele cinematice se consideră rigide în majoritatea problemelor studiate în manualul de față. În unele cazuri (analiza cinetoelastodinamică) se renunță la această ipoteză, admitând deformațiile elastice. Sistemele care conțin elemente flexibile - curele, cabluri - nu fac obiectul lucrării.

Cupla cinematică este **legătura mobilă** dintre două elemente cinematice, formată prin **contactul direct** între suprafețele lor.

Numărul de parametri independenți, care determină complet poziția relativă a unui element în raport cu celălalt, reprezintă **gradul de mobilitate** al cuplei - m ($1 \leq m \leq 5$). Gradul de mobilitate arată, de asemenea, numărul de mișcări elementare posibile. Acestea sunt proiecțiile, diferite de zero, ale vitezei de translație și ale vitezei unghiulare în mișcarea relativă, pe axele unui sistem de coordonate solidar cu unul dintre elemente.

Numărul de mișcări elementare care nu se pot executa (**restricții** sau **legături**) se numește **grad de restrictivitate** - k ($1 \leq k \leq 5$). Gradul de restrictivitate poate fi interpretat ca fiind egal cu numărul de condiții (ecuații independente) care intervin între parametrii de poziție sau de viteză ai celor două elemente. Între gradul de mobilitate și gradul de restrictivitate există relația evidentă

$$m + k = 6. \quad (1.1)$$

Conform axiomei eliberării de legături, restricțiile cinematice se înlocuiesc printr-un sistem de reacțiuni ideale (normale la suprafețele în contact). Mai precis, vitezele de translație se înlocuiesc prin forțe de reacțiune, iar vitezele unghiulare prin momente de reacțiune. Se observă că numărul de

componente ale taylorului de reacțiune este egal cu gradul de restrictivitate, iar sistemul vitezelor și cel al reacțiilor sunt complementare.

Cuplele cinematice se clasifică după mai multe criterii. Astfel, ele se împart în cinci clase - **clasa** fiind egală cu gradul de restrictivitate.

După modul de realizare a contactului există cuple **inferioare** sau **congruente**, când contactul are loc după o suprafață, și cuple **superioare** sau **necongruente**, când contactul este punctual sau liniar.

În funcție de mișcarea relativă dintre elemente există cuple **plane**, când această mișcare este plan - paralelă, și **spațiale**, când mișcarea relativă este spațială.

Orice cuplă cinematică se poate construi în două variante: **închisă** sau **deschisă**. Cuplele cinematice sunt închise, atunci când legăturile împiedică deplasările în ambele sensuri fiind caracterizate printr-un contact **bilateral**, și deschise, atunci când deplasările sunt împiedicate numai într-un sens datorită unui contact **unilateral**. În cazul cuplelor deschise, permanența contactului se asigură prin acțiunea unor forțe care, în general, sunt de natură elastică, generate de arcuri.

În Tab.1.1 se prezintă cuplele cinematice uzuale, indicându-se forma suprafețelor în contact, reprezentarea constructivă și cea schematică, tabelul cu mișcările elementare și reacțiunile, precum și clasificarea după criteriile arătate.

În general, legăturile unei cuple cinematice sunt determinate de forma suprafețelor în contact (legături geometrice). Cuplele 1 - 12 din Tab.1.1 sunt de acest fel. În aplicațiile tehnice se întâlnesc, uneori, și cuple cu mișcare relativă de rostogolire, caracterizate prin legături cinematice. Pentru a defini mișcarea de rostogolire să considerăm o cuplă superioară cu contact punctual, formată între elementele 1 și 2 (Fig.1.1). În punctul de contact P se confundă punctele P₁ aparținând elementului 1 și P₂ aparținând elementului 2. Între vitezele lor se poate scrie relația

$$\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_1} + \vec{v}_{P_{21}} \quad (1.2)$$

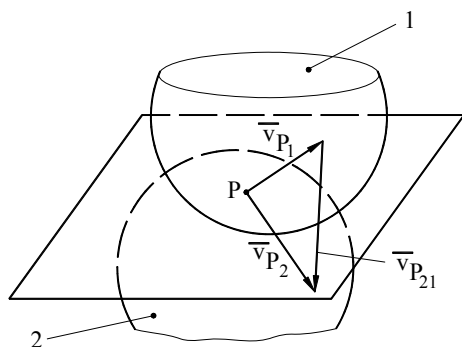


Fig. 1.1

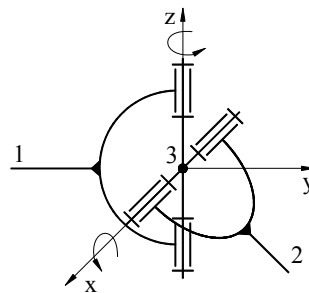


Fig. 1.2

Vectorul $\bar{v}_{P_2,1}$ este paralel cu planul tangent la cele două suprafețe în contact și se numește viteză relativă de alunecare. Dacă $\bar{v}_{P_2} = \bar{v}_{P_1}$ și, deci, $\bar{v}_{P_2,1} = 0$, mișcarea relativă este de rostogolire pură. Când unul dintre punctele P_1, P_2 este punct de contact permanent mișcarea este de alunecare pură. Dacă $\bar{v}_{P_2,1} \neq 0$, iar punctul de contact se deplasează pe ambele suprafețe, mișcarea relativă este combinată – rostogolire cu alunecare. În cazul cuplelor inferioare mișcarea relativă este de alunecare pură. Cupla din poziția 13 – Tab.1.1 - admite numai o mișcare de rostogolire pură între suprafețele cilindrice. Mișcarea de alunecare este împiedicată datorită forțelor de frecare cauzate, la rândul lor, de proprietățile de aderență ale suprafețelor.

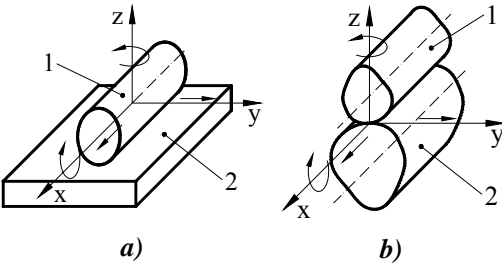
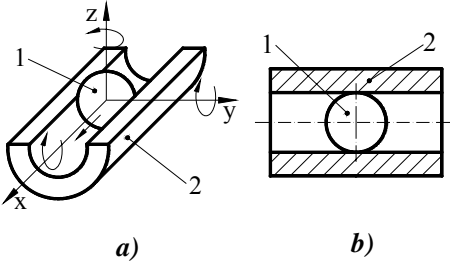
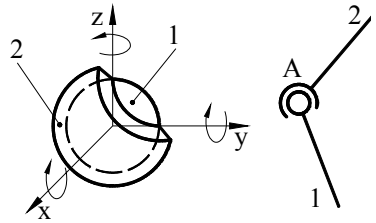
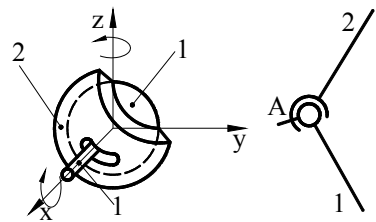
Uneori, cuplele cinematice, care presupun contactul direct între elemente, se înlocuiesc prin subansamble cu elemente intermediare numite **policuple cinematice**. Astfel, în locul cuplelor de rotație, cu mișcare relativă de alunecare, se folosesc rulmenți având avantajul utilizării frecării de rostogolire. În același mod, cuplele de translație și cele elicoidale se pot înlocui prin ghidaje cu role și șuruburi cu bile.

Un alt exemplu de policuplă este articulația Hooke (Fig.1.2) care permite două mișcări de rotație între elementele 1 și 2 ca și cupla sferică cu deget pe care o poate înlocui. Precizăm că policuplele au aceleași proprietăți cinematice (mișcări relative) și statice (reacțiuni) ca și cuplele pe care le înlocuiesc.

Tabelul 1.1

1. Două suprafețe în contact punctual			
	R	T	- clasa 1 (m=5, k=1)
x	ω_x	v_x	- superioară
y	ω_y	v_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- deschisă

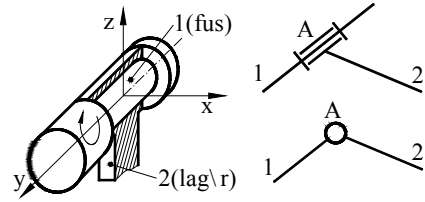
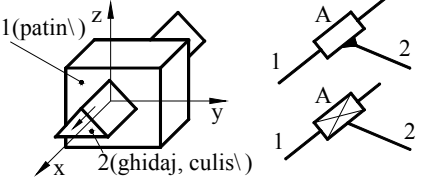
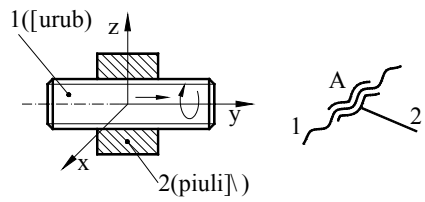
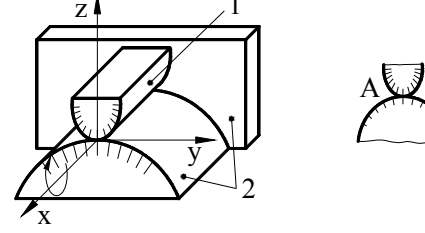
Tabelul 1.1 (continuare)

<p>2. Cilindru* - plan. Doi cilindri* în contact după o generatoare</p>  <p style="text-align: center;">a) b)</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>v_x</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>v_y</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	x	ω_x	v_x	y	M_{ry}	v_y	z	ω_z	R_z	<p>- clasa 2 (m =4, k =2)</p> <p>- superioară</p> <p>- spațială</p> <p>- deschisă</p>
	R	T													
x	ω_x	v_x													
y	M_{ry}	v_y													
z	ω_z	R_z													
<p>* - cilindru oarecare</p>															
<p>3. Sferă - cavitate cilindrică</p>  <p style="text-align: center;">a) b)</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>v_x</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>ω_y</td> <td>R_y</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	x	ω_x	v_x	y	ω_y	R_y	z	ω_z	R_z	<p>- clasa 2 (m =4, k =2)</p> <p>- superioară</p> <p>- spațială</p> <p>a)- deschisă b)- închisă</p>
	R	T													
x	ω_x	v_x													
y	ω_y	R_y													
z	ω_z	R_z													
<p>4. Sferă - cavitate sferică (Cuplă sferică)</p>  <p style="text-align: center;">a) b)</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>R_x</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>ω_y</td> <td>R_y</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	x	ω_x	R_x	y	ω_y	R_y	z	ω_z	R_z	<p>- clasa 3 (m =3, k =3)</p> <p>- inferioară</p> <p>- spațială</p> <p>- închisă</p>
	R	T													
x	ω_x	R_x													
y	ω_y	R_y													
z	ω_z	R_z													
<p>5. Sferă - cavitate sferică + cilindru - plan (Cuplă sferică cu deget)</p>  <p style="text-align: center;">a) b)</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>R_x</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>R_y</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> </tr> </tbody> </table>		R	T	x	ω_x	R_x	y	M_{ry}	R_y	z	ω_z	R_z	<p>- clasa 4 (m =2, k =4)</p> <p>- inferioară – superioară</p> <p>- spațială</p> <p>- închisă</p>
	R	T													
x	ω_x	R_x													
y	M_{ry}	R_y													
z	ω_z	R_z													

Tabelul 1.1 (continuare)

6. Plan - plan																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>M_{rx}</td> <td>v_x</td> <td>- clasa 3 (m=3, k=3)</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>v_y</td> <td>- inferioară</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> <td>- plană</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>- deschisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	M_{rx}	v_x	- clasa 3 (m=3, k=3)	y	M_{ry}	v_y	- inferioară	z	ω_z	R_z	- plană				- deschisă
	R	T																			
x	M_{rx}	v_x	- clasa 3 (m=3, k=3)																		
y	M_{ry}	v_y	- inferioară																		
z	ω_z	R_z	- plană																		
			- deschisă																		
7. Cilindru* - cavitate cilindrică (Cuplă cilindrică)																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>v_x</td> <td>- clasa 4 (m=2, k=4)</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>R_y</td> <td>- inferioară</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{tz}</td> <td>R_z</td> <td>- spațială</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>- închisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	ω_x	v_x	- clasa 4 (m=2, k=4)	y	M_{ry}	R_y	- inferioară	z	M_{tz}	R_z	- spațială				- închisă
	R	T																			
x	ω_x	v_x	- clasa 4 (m=2, k=4)																		
y	M_{ry}	R_y	- inferioară																		
z	M_{tz}	R_z	- spațială																		
			- închisă																		
* - cilindru circular																					
8. Cilindru* - cilindru* + plan - plan																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>R_x</td> <td>- clasa 4 (m=2, k=4)</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>v_y</td> <td>- superioară- inferioară</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{tz}</td> <td>R_z</td> <td>- plană</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>- deschisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	ω_x	R_x	- clasa 4 (m=2, k=4)	y	M_{ry}	v_y	- superioară- inferioară	z	M_{tz}	R_z	- plană				- deschisă
	R	T																			
x	ω_x	R_x	- clasa 4 (m=2, k=4)																		
y	M_{ry}	v_y	- superioară- inferioară																		
z	M_{tz}	R_z	- plană																		
			- deschisă																		
* - cilindru oarecare																					
9. Con* - con* + sferă - cavitate sferică																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>R_x</td> <td>- clasa 4 (m=2, k=4)</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>R_y</td> <td>- superioară- inferioară</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>ω_z</td> <td>R_z</td> <td>- spațială</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>- deschisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	ω_x	R_x	- clasa 4 (m=2, k=4)	y	M_{ry}	R_y	- superioară- inferioară	z	ω_z	R_z	- spațială				- deschisă
	R	T																			
x	ω_x	R_x	- clasa 4 (m=2, k=4)																		
y	M_{ry}	R_y	- superioară- inferioară																		
z	ω_z	R_z	- spațială																		
			- deschisă																		
* - con oarecare																					

Tabelul 1.1 (continuare)

<p>10. Cilindru* - cavitate cilindrică + plan - plan (Cuplă de rotație)</p> 		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>M_{rx}</td> <td>R_x</td> <td>- inferioră</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>ω_y</td> <td>R_y</td> <td>- plană</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{rz}</td> <td>R_z</td> <td>- închisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	M_{rx}	R_x	- inferioră	y	ω_y	R_y	- plană	z	M_{rz}	R_z	- închisă
	R	T																
x	M_{rx}	R_x	- inferioră															
y	ω_y	R_y	- plană															
z	M_{rz}	R_z	- închisă															
<p>* - cilindru circular</p>																		
<p>11. Prismă - cavitate prismatică (Cuplă de translație)</p> 		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>M_{rx}</td> <td>v_x</td> <td>- inferioră</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>R_y</td> <td>- plană</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{rz}</td> <td>R_z</td> <td>- închisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	M_{rx}	v_x	- inferioră	y	M_{ry}	R_y	- plană	z	M_{rz}	R_z	- închisă
	R	T																
x	M_{rx}	v_x	- inferioră															
y	M_{ry}	R_y	- plană															
z	M_{rz}	R_z	- închisă															
<p>12. Elicoid - cavitate elicoidală (Cuplă elicoidală)</p> 		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>M_{rx}</td> <td>R_x</td> <td>- inferioră</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>ω_y^*</td> <td>v_y^*</td> <td>- spațială</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{rz}</td> <td>R_z</td> <td>- închisă</td> </tr> </tbody> </table> <p>* $v_y = f(\omega_y)$</p>		R	T		x	M_{rx}	R_x	- inferioră	y	ω_y^*	v_y^*	- spațială	z	M_{rz}	R_z	- închisă
	R	T																
x	M_{rx}	R_x	- inferioră															
y	ω_y^*	v_y^*	- spațială															
z	M_{rz}	R_z	- închisă															
<p>13. Cilindru* - cilindru* + plan - plan</p> 		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>R</th> <th>T</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>ω_x</td> <td>R_x</td> <td>- superioară - inferioră</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>M_{ry}</td> <td>R_y</td> <td>- plană</td> </tr> <tr> <td>z</td> <td>M_{rz}</td> <td>R_z</td> <td>- deschisă</td> </tr> </tbody> </table>		R	T		x	ω_x	R_x	- superioară - inferioră	y	M_{ry}	R_y	- plană	z	M_{rz}	R_z	- deschisă
	R	T																
x	ω_x	R_x	- superioară - inferioră															
y	M_{ry}	R_y	- plană															
z	M_{rz}	R_z	- deschisă															
<p>* - Cilindru oarecare</p> <p>Observație: Cilindrul 1 se rostogolește pe suprafața cilindrului 2.</p>																		

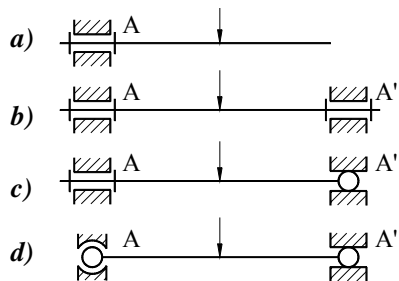


Fig. 1.3

Uneori legătura mecanică dintre două elemente se realizează prin dublarea (sau suplimentarea) unor cuple, rezultând mai multe zone de contact. Acest procedeu urmărește mărirea rigidității și a rezistenței construcției. Situația este ilustrată în exemplul din Fig.1.3. Soluția din Fig.1.3.a este deficitară sub aspectul solicitării elementului 1, situat în consolă. Prin adăugarea unei noi cuple de rotație (Fig.1.3.b) acest neajuns este înlăturat, dar intervine o altă situație nedorită. Cele două cuple introduc un număr de legături reale $k_r = k_A + k_{A'} = 5 + 5 = 10$. Deoarece mobilitatea relativă este $m = 1$ (o mișcare de rotație) înseamnă că numărul de legături necesare este $k_{nec} = 6 - m = 5$. Diferența $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 10 - 5 = 5$ reprezintă numărul de legături pasive locale (din cuple). Existența lor pretinde o execuție foarte precisă a suprafețelor pentru că, altfel, intervin pretensionări și deformări la operația de montare. Acestea conduc la o funcționare necorespunzătoare și reduc durabilitatea. Situația se poate îmbunătăți prin reducerea numărului de legături pasive. Astfel, dacă se adoptă soluția din Fig.1.3.c, unde $k_r = k_A + k_{A'} = 5 + 2 = 7$, rezultă $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 7 - 5 = 2$. În fine, pentru cazul din Fig.1.3.d, $k_r = k_A + k_{A'} = 3 + 2 = 5$, iar $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 5 - 5 = 0$ și, deci, nu intervin legături pasive. Trebuie menționat că prezența legăturilor pasive nu influențează comportarea cinematică, astfel că, în calculele structurale, toate variantele din Fig.1.3 sunt interpretate ca o singură cuplă de rotație.

1.1.2. Lanțuri cinematice, mecanisme

Prin **lanț cinematic** se înțelege un ansamblu (o înșiruire) de elemente legate prin cuple cinematice. Numărul de cuple în care intervine un element atunci când face parte dintr-un lanț cinematic se numește **rang** (r).

Lanțurile cinematice pot fi **deschise** atunci când conțin și elemente de rang $r = 1$ (Fig.1.4.a și Fig.1.4.b) sau **închise**, când toate elementele au rangul $r \geq 2$ (Fig.1.4.c).

Lanțurile sunt **simple**, dacă toate elementele au rangul $r \leq 2$ (Fig.1.4.a și Fig.1.4.c) sau **complexe**, când conțin și elemente cu rangul $r > 2$ (Fig.1.4.b).

Numărul de parametri care determină poziția unui lanț cinematic, în raport cu un sistem de referință situat în afara sa, se numește **grad de libertate** (L).

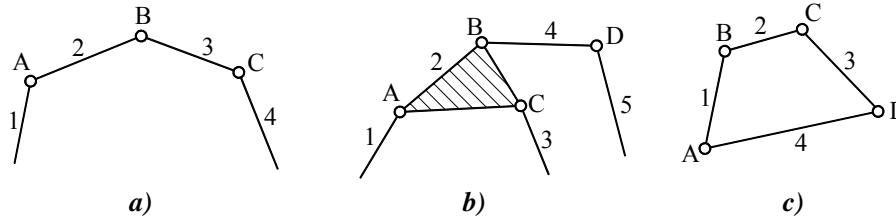


Fig. 1.4

Mecanismul este un lanț cinematic care are următoarele proprietăți:

- 1) Conține un element de referință, considerat fix, numit **bază** sau **batu**, în raport cu care se concepe mișcarea celorlalte elemente;
- 2) Are un număr de **cuple conducătoare**, stabilit astfel încât mișcarea tuturor elementelor să fie determinată.

Mecanismele provin, în general, din lanțuri cinematice închise. Fac excepție mecanismele roboților industriali care sunt formate, de regulă, din lanțuri cinematice deschise.

Cuplele conducătoare (de intrare) se caracterizează prin faptul că mișcarea relativă dintre elemente este dată, impusă, de existența unor sisteme de acționare. De obicei cuplele conducătoare sunt monomobile (clasa 5), iar parametrii care determină poziția relativă dintre elemente sunt **parametrii independenți (coordonatele generalizate)** ai mecanismului. Numărul de parametri independenți care determină univoc poziția mecanismului, în raport cu elementul de referință, se numește **grad de mobilitate** (M). Se înțelege că pentru a obține o mișcare determinată pentru toate elementele mobile, numărul de cuple conducătoare (monomobile) trebuie să fie egal cu gradul de mobilitate.

În Fig.1.5 sunt reprezentate schematic două mecanisme care provin din lanțuri cinematice închise.

Mecanismul patrulater articulată plan (Fig.1.5.a) are ca bază elementul 4 și o cuplă conducătoare notată cu A. Parametrul independent al cuplei conducătoare este unghiul φ_1 . Considerente geometrice elementare arată că poziția elementelor 1, 2 și 3 este determinată de valoarea unghiului φ_1 . Deci mișcarea mecanismului este, astfel, determinată. Cuplele conducătoare de rotație, asociate cu motoare rotative (electrice sau termice), se adoptă astfel ca unul dintre elemente să fie baza. În această situație elementul mobil al cuplei conducătoare se numește **element conducător**. Astfel, cupla conducătoare A este formată din elementul conducător 1 și elementul fix 4.

Mecanismul cu cilindru oscilant (Fig.1.5.b) are ca bază elementul 4 și o cuplă conducătoare de translație - B, formată dintr-un cilindru 1 și un piston 2 (motor hidraulic). Parametrul independent al cuplei conducătoare, constituită, aici, din două elemente mobile, este distanța $l_{12} = AC$. Se observă că poziția

mecanismului depinde numai de mărimea parametrului l_{12} , rezultând o mișcare determinată.

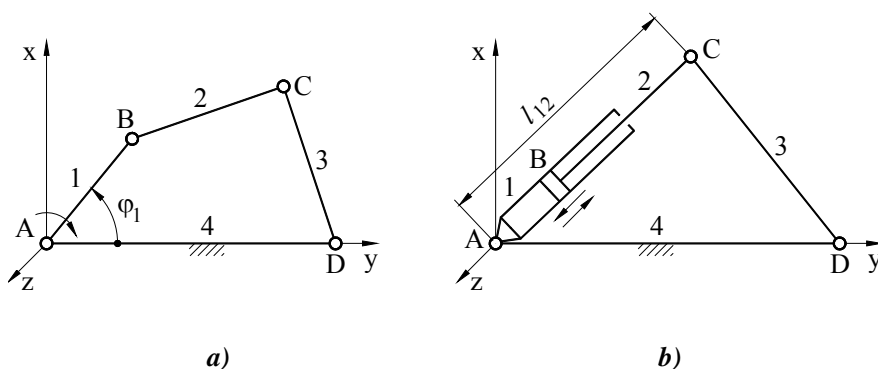


Fig. 1.5

Mecanismele sunt sisteme complexe și se clasifică după multiple criterii. Un criteriu foarte important, cu consecințe deosebite pentru analiza comportării cinematice și statice, este **dimensiunea spațiului cinematic activ asociat mecanismului** (s). Determinarea acestui parametru apelează la noțiuni de algebră liniară sau de teoria șuruburilor cinematice [6]. O abordare mai simplă, dar mai puțin riguroasă, asimilează acest spațiu ca fiind definit de mișcările elementare ale elementelor mobile raportate la un sistem de referință fix, solidar cu batiul. Dimensiunea spațiului (s) este egală cu numărul de mișcări elementare luate o singură dată. Diferența $f = 6 - s$ constituie numărul de mișcări elementare care nu sunt executate de nici un element (legături comune) și se numește **familia** mecanismului (Dobrovolski). Există 5 familii de mecanisme: 0, 1, 2, 3 și 4. Caracterul mișcării elementelor și, deci, familia mecanismului sunt determinate de felul cuplelor cinematice și de amplasarea suprafețelor acestora în raport cu fiecare element. Astfel, mecanismul din Fig.1.5.a are patru cuple de rotație cu axele paralele. Această particularitate geometrică determină caracterul plan al mecanismului. Elementele mobile (1, 2 și 3) se deplasează paralel cu planul Axy, perpendicular pe axele cuplelor. În felul acesta dimensiunea spațiului cinematic activ asociat este $s = 3(v_x, v_y, \omega_z)$, iar familia este $f = 6 - s = 3$, legăturile comune fiind ω_x, ω_y, v_z .

O clasificare legată de tipul cuplelor și de forma elementelor care intervin în construcția mecanismelor este următoarea:

1. Mecanisme cu bare (cu cuple inferioare) (Fig.1.5.a, 1.5.b)
2. Mecanisme cu came (Fig.1.6)
3. Mecanisme cu roți dințate (Fig.1.7)
4. Mecanisme cu șurub (Fig.1.8)
5. Mecanisme combinate (Fig.1.9)

Mecanismele cu bare conțin numai cuple inferioare - de rotație, de translație, cilindrice, sferice, etc. Mecanismele cu came și cele cu roți dințate conțin atât cuple inferioare (de rotație și de translație) cât și, cel puțin, o cuplă superioară, iar mecanismele cu șurub au, cel puțin, o cuplă elicoidală (șurub - piuliță). Mecanismele combinate sunt o asociere a două dintre celelalte categorii. Astfel, în Fig.1.9 este reprezentat un mecanism combinat cu bare și roți dințate. Această clasificare este importantă pentru că domeniile de utilizare și metodele de studiu sunt specifice pentru fiecare dintre categoriile de mecanisme menționate.

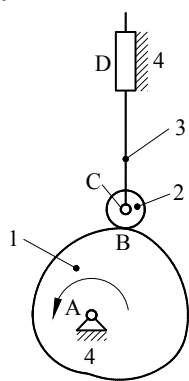


Fig. 1.6

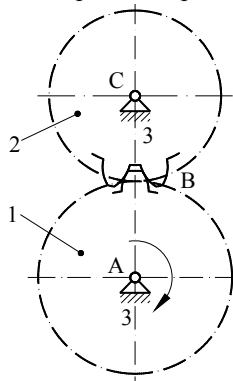


Fig. 1.7

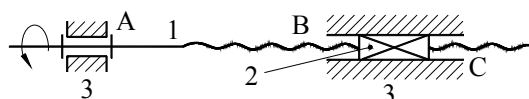


Fig. 1.8

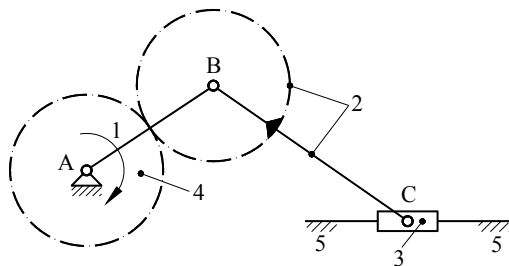


Fig. 1.9

În funcție de caracterul mișcării elementelor mecanismele pot fi **plane**, atunci când toate elementele mobile se deplasează paralel cu un plan fix, sau **spațiale** când nu este îndeplinită această condiție. Această diferențiere este utilă deoarece studiul mecanismelor spațiale implică dificultăți mai mari și procedee de rezolvare mai complexe decât cel al mecanismelor plane.

1.2. DETERMINAREA GRADULUI DE MOBILITATE

1.2.1. Stabilirea formulelor de calcul

Se consideră un lanț cinematic având următoarele caracteristici structurale: n - numărul de elemente, c_k ($k=1...5$) - numărul cuplelor de clasă k . Gradul de libertate (L) se determină ca diferența dintre numărul de parametri (necunoscute) și numărul de ecuații care intervin în problema pozițiilor. Având în vedere că un element cinematic liber are 6 parametri de poziție, iar o cuplă de clasă k generează un număr de k ecuații, se ajunge la relația

$$L = 6n - \sum_1^5 k \cdot c_k . \quad (1.3)$$

Dacă lanțul cinematic se transformă într-un mecanism, prin adoptarea unui element de referință fix, numărul de elemente mobile este $(n-1)$, iar formula de calcul a gradului de mobilitate este următoarea

$$M = 6 \cdot (n - 1) - \sum_1^5 k \cdot c_k . \quad (1.4)$$

Formulele (1.3) și (1.4) sunt valabile dacă ecuațiile sunt independente. În realitate numărul de ecuații independente poate fi mai mic decât cel luat în calcul datorită existenței unor legături pasive globale (pe contur). Dacă numărul acestora se notează k_{pg} , formula (1.4) se modifică astfel

$$M = 6 \cdot (n - 1) - \left(\sum_1^5 k \cdot c_k - k_{pg} \right) . \quad (1.5)$$

Pentru a înțelege modul în care intervin legăturile pasive globale să considerăm, pentru exemplificare, mecanismul din Fig.1.10.a. Acesta este un mecanism patrulater spațial de familie $f=0$ deoarece nu are legături comune - elementul 2 are o mișcare generală spațială cu componente de rotație și de translație după cele trei axe de coordonate. Gradul de mobilitate se calculează cu formula (1.3) în care $n=4$, $c_5=2(A, D)$, $c_4=1(C)$, $c_3=1(B)$. Rezultă $M=1$, deci se poate adopta o cuplă conducătoare - de exemplu A. În Fig.1.10.b este reprezentat un mecanism identic structural cu cel din Fig.1.10.a, dar care are unele particularități geometrice. Astfel, axele cuplelor C și D, invariabile în raport cu elementul 3, se adoptă paralele, iar axele cuplelor A și D invariabile în elementul 4, se iau tot paralele. Gradul de mobilitate se calculează în același fel și rezultă, evident, tot $M=1$. Se observă, însă, că mecanismul este plan, de familie $f=3$, deoarece toate elementele se deplasează paralel cu planul xOy , iar mișcările din cuplele B și C sunt rotații simple paralele cu axa Oz. Ca urmare, aceste cuple se pot înlocui (ambele sau numai una) prin cuple de rotație fără a modifica starea cinematică a mecanismului. Se obțin, în felul acesta,

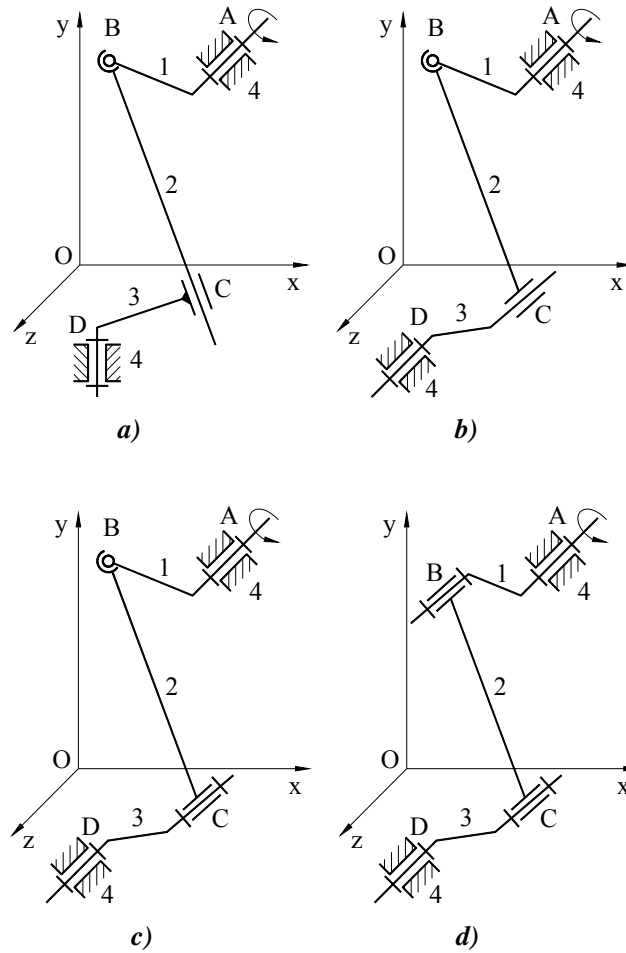


Fig. 1.10

mecanismele din Fig.1.10.c și d. Cele trei mecanisme (Fig.1.10.b, c, d) au mișcări (absolute și relative) identice, dar structură diferită. Astfel, dacă ne raportăm la mecanismul din Fig.1.10.b, cupla cilindrică C ($k=4$) a fost înlocuită printr-o cuplă de rotație ($k=5$) obținând mecanismul din Fig.1.10.c. În felul acesta s-a introdus o legătură pasivă: $k_{pg} = 5 - 4 = 1$. Pentru a calcula gradul de mobilitate se aplică formula (1.5) în care $n=4$, $c_5=3$, $c_3=1$ și $k_{pg}=1$. Rezultă $M=1$. Mecanismul din Fig.1.10.d care este un patruleter articulată plan, s-a obținut înlocuind atât cupla cilindrică C ($k=4$) cât și cea sferică B ($k=3$) cu două cuple de rotație ($k=5$). Prin aceasta s-au introdus o serie de legături pasive

în număr de $k_{pg} = 2 \cdot 5 - 4 - 3 = 3$. Mecanismul are $n = 4$, $c_5 = 4$, $k_{pg} = 3$, iar gradul de mobilitate, calculat cu formula (1.5) este $M = 1$.

Din cele arătate rezultă că pentru a determina gradul de mobilitate cu formula (1.5) trebuie să se cunoască numărul de legături pasive globale - k_{pg} . Această cerință crează dificultăți în aplicarea practică a formulei. O altă cale de abordare a problemei face apel la clasificarea mecanismelor în familii.

După cum s-a arătat, un mecanism (lanț cinematic) de familia f se deplasează într-un spațiu cu $s = 6 - f$ dimensiuni. În acest spațiu poziția unui element liber este determinată de $(6 - f)$ parametri, iar o cuplă de clasa k are $(6 - f) - m = (6 - f) - (6 - k) = k - f$ legături (ecuații). În aceste ipoteze expresiile de calcul pentru gradul de libertate L și pentru gradul de mobilitate M sunt

$$L = (6 - f) \cdot n - \sum_{k=f+1}^5 (k - f) \cdot c_k \quad (1.6)$$

$$M = (6 - f) \cdot (n - 1) - \sum_{k=f+1}^5 (k - f) \cdot c_k \quad (1.7)$$

În legătură cu aplicarea formulelor (1.6) și (1.7) trebuie făcute următoarele observații:

1) Determinarea clasei cuplelor se face în funcție de deplasările relative efective (funcționale) compatibile cu spațiul $s = 6 - f$, chiar atunci când construcția cuplelor permite o mobilitate mai mare. Vom denumi clasa unei cuple, determinată astfel, clasă funcțională. În aceste condiții, pentru fiecare cuplă, $m < s$ și $k > f$ așa cum se observă și din formulele (1.6) și (1.7).

2) În aceste formule nu apare numărul de legături pasive globale deoarece acestea nu intervin în spațiul cu $(6 - f)$ dimensiuni, în care se deplasează mecanismul. Să ne referim, pentru exemplificare, la mecanismele din Fig.1.10.b și d, la care spațiul cinematic activ este definit de parametrii (v_x, v_y, ω_z) , iar restricțiile comune sunt $(\omega_x, \omega_y, v_z)$. Prin înlocuirea cuplei cilindrice C (Fig.1.10.b) cu o cuplă de rotație C (Fig.1.10.d) s-a introdus restricția pasivă (v_z) , iar prin înlocuirea cuplei sferice B (Fig.1.10.b) cu o cuplă de rotație B (Fig.1.10.d) s-au introdus restricțiile pasive (ω_y, ω_z) . După cum se observă aceste restricții nu intervin în spațiul cinematic activ. Să calculăm gradul de mobilitate al mecanismelor din Fig.1.10 utilizând formula (1.7). Mecanismul din Fig.1.10.a este de familia $f = 0$. Dacă introducem această valoare în formula (1.7) se obține formula (1.3) pe care am utilizat-o și înainte pentru a determina gradul de mobilitate al mecanismului. Mecanismele din Fig.1.10.b, c, d sunt de familie $f = 3$, iar cuplele lor sunt, toate, de clasă funcțională $k = 5$ (cuple de rotație). Aplicând formula (1.7) cu parametrii structurali $f = 3$, $n = 4$, $c_5 = 5$ se obține, ca și înainte, $M = 1$.

Dacă gradul de mobilitate (M) se calculează cu formula (1.7), numărul de legături pasive globale (k_{pg}) se poate determina din formula (1.5)

$$k_{pg} = M - \left(6 \cdot (n - 1) - \sum_1^5 k \cdot c_k \right). \quad (1.8)$$

În formula (1.8) clasa cuplelor este cea reală (constructivă) stabilită numai pe baza geometriei suprafețelor. Valoarea maximă a parametrului k_{pg} se obține atunci când clasa reală coincide cu clasa funcțională pentru toate cuplele mecanismului și se poate calcula introducând în formula (1.8) expresia lui M (1.7)

$$k_{pgmax} = (6 - f) \cdot (n - 1) - \sum_{k=f+1}^5 (k-f) \cdot c_k - \left(6 \cdot (n-1) - \sum_{k=f+1}^5 k \cdot c_k \right). \quad (1.9)$$

De aici rezultă

$$k_{pgmax} = f \left(\sum_{k=f+1}^5 c_k - n + 1 \right) = f(c - n + 1), \quad (1.10)$$

în care c este numărul total de cuple, indiferent de clasă. În cazul mecanismelor închise monocontur $n = c$, astfel că $k_{pgmax} = f$. În cazul mecanismelor simple deschise $c = n - 1$, iar $k_{pgmax} = 0$. Prin urmare aceste mecanisme nu au legături pasive globale, iar gradul de mobilitate se poate calcula cu oricare dintre formulele (1.3) sau (1.7) obținând același rezultat.

Legăturile pasive globale prezintă aceleași neajunsuri ca și legăturile pasive locale - reclamă precizie de execuție ridicată pentru a evita pretensionările și deformațiile elementelor. Ca urmare, este recomandabil să fie eliminate total sau parțial, dar în corelație cu aspectele tehnologice și economice implicate de această operație. Reducerea legăturilor pasive se face prin micșorarea numărului de legături (restricții) la unele cuple ale mecanismului. Trebuie menționat că restricțiile eliminate trebuie să facă parte din legăturile comune ale mecanismului.

*

Gradul de mobilitate poate rezulta, din calcul, pozitiv, negativ sau zero. Fiecare dintre aceste cazuri are o interpretare cinematică și una statică. Interpretarea statică pleacă de la ideea că, în problema determinării reacțiunilor din cuplele cinematice, numărul de ecuații de echilibru este egal cu numărul de parametri cinematici ai elementelor libere, iar numărul de reacțiuni necunoscute este egal cu numărul de ecuații de legătură. Prin urmare, în analiza statică numerele de ecuații și de necunoscute se inversează în raport cu analiza cinematică. În felul acesta gradul de mobilitate rezultă ca diferența dintre numărul de ecuații statice și numărul de necunoscute (reacțiuni). În Tab.1.2 sunt

prezentate cele trei cazuri posibile privind valoarea gradului de mobilitate și interpretările lor.

Tabelul 1.2

M	Problema cinematică	Problema statică
M > 0	Sistem cinematic nedeterminat. Pentru evitarea nedeterminării se adoptă un număr de cuple conducătoare egal cu M prin care se impun valori pentru M parametri independenți. Menționăm că majoritatea mecanismelor au M = 1.	Sistem incompatibil. Pentru a-l transforma într-un sistem compatibil determinat se adoptă M cuple conducătoare care generează M parametri necunoscuți: forțele (momentele) de echilibrare.
M = 0	Sistem cinematic determinat. Poziție unică - construcție fixă.	Sistem static determinat
M < 0	Sistem cinematic incompatibil. Nu se poate monta cu parametri constructivi prestabiliți. Pentru a se putea monta este necesar ca M parametri constructivi să fie asimilați ca necunoscute, iar construcția rezultată este fixă.	Sistem static nedeterminat (dacă este construibil).

1.2.2. Familii de mecanisme, exemple

În cele ce urmează vom prezenta cele mai importante categorii de mecanisme, grupate pe familii. Pentru fiecare categorie vom analiza unul sau mai multe exemple de mecanisme urmărind determinarea gradului de mobilitate și a numărului de legături pasive locale și globale. Vom analiza, de asemenea, posibilitățile de reducere a numărului de legături pasive. Gradul de mobilitate se calculează cu formula (1.7) în care numerele de cuple c_k se stabilesc după clasa funcțională. Numărul de legături pasive globale se determină cu formula (1.8), în care numerele de cuple se stabilesc după clasa constructivă (reală). Pentru a face distincție între cele două situații, vom nota cu c'_k numerele de cuple determinate după clasa constructivă, astfel încât formula (1.8) devine

$$k_{pg} = M - \left(6 \cdot (n-1) - \sum_1^5 k \cdot c'_k \right). \quad (1.11)$$

Dificultatea principală care intervine în această analiză constă în stabilirea familiei mecanismului. Pentru majoritatea mecanismelor problema se rezolvă prin raportarea mișcărilor la un sistem de referință fix și evaluarea numărului de legături comune. Acest procedeu prezintă unele limite privind

aplicabilitatea sa. O abordare riguroasă reclamă utilizarea unor algoritmi care implică noțiuni de teoria spațiilor vectoriale sau de teoria șuruburilor^(*). Cum această dezvoltare depășește cadrul lucrării de față, în astfel de cazuri vom indica familia fără a face justificarea încadrării respective.

1.2.2.1. Familia $f=4$

Formula de calcul a gradului de mobilitate se obține prin particularizarea formulei (1.7)

$$M=2(n-1)-c_5, \quad (1.12)$$

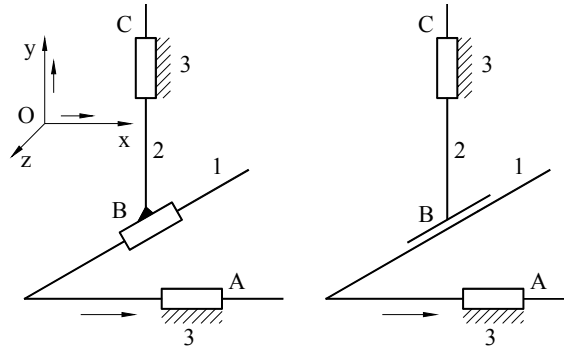
iar numărul maxim de legături pasive globale, pentru un mecanism monocontur, este $k_{pgmax} = f = 4$. În această familie se încadrează mai multe categorii de mecanisme, cu largi aplicații, pe care le vom menționa în continuare.

■ Mecanismele plane cu cuple de translație

În această grupă intră mecanismele care au numai cuple de translație amplasate cu axele în plane paralele. Este evident că elementele mobile pot executa numai mișcări de translație paralele cu un plan fix (de exemplu planul xOy). În aceste condiții dimensiunea spațiului cinematic activ este $s=2(v_x, v_y)$, iar familia $f=4(\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_z)$. În Fig.1.11 este reprezentat cel mai simplu mecanism de acest fel numit mecanism cu pană, în patru variante constructive. Toate variantele au $n=3$, $c_5=3$ și $M=1$. Varianta 1.11.a are toate cuplele de translație ($k=5$) pe când celelalte variante conțin și cuple cu mobilități mai mari, dar clasa funcțională este pentru toate cuplele $k=5$ (mișcarea relativă de translație). Mecanismul din Fig.1.11.a are un număr de legături pasive globale $k_{pg} = k_{pgmax} = 4$. Pentru a reduce valoarea parametrului k_{pg} , se majorează mobilitatea unor cuple, obținându-se mecanismele din Fig.1.11.b, c și d. Astfel, în cazul mecanismului din Fig.1.11.b, cupla de translație B se înlocuiește cu o cuplă plan - plan (poz. 6, Tab.1.1) de clasă constructivă $k=3$. Introducând în formula (1.11) $M=1$, $n=3$, $c'_5=2(A, C)$ și $c'_3=1(B)$ se obține: $k_{pg}=2$. În varianta din Fig.1.11.c, cupla B este de clasă $k=1$ (poz. 1, Tab.1.1). Aplicând, din nou, formula (1.8) cu $M=1$, $n=3$, $c'_5=2(A, C)$ și $c'_1=1(B)$ se obține: $k_{pg}=0$. În sfârșit, varianta din Fig.1.11.d are toate cuplele cilindrice (poz. 7 – Tab.1.1) de clasă $k=4$. În acest caz $M=1$, $n=3$, $c'_4=3$ și $k_{pg}=1$.

(*) *Teorie matematică legată de reducerea sistemelor de vectori alunecători. A nu se confunda cu elementul - având aceeași denumire - al cuplei elicoidale.*

$$s = 2(v_x, v_y), f = 4(\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_z), n = 3, c_5 = 3, M = 1$$



a)

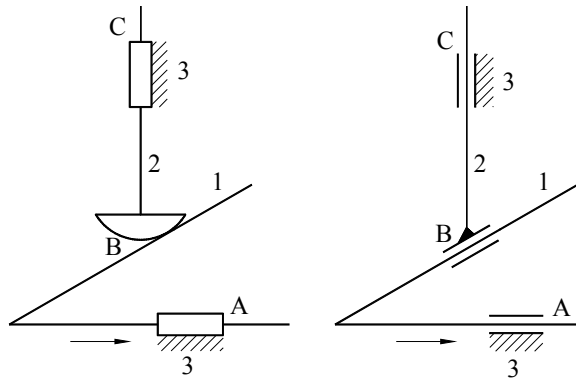
$$c'_5 = c_5 = 3$$

$$k_{pg} = k_{pgmax} = 4$$

b)

$$c'_5 = 2(A, C), c'_3 = 1(B)$$

$$k_{pg} = 2$$



c)

$$c'_5 = 2(A, C), c'_1 = 1(B)$$

$$k_{pg} = 0$$

d)

$$c'_4 = 3(A, B, C)$$

$$k_{pg} = 1$$

Fig. 1.11

■ Mecanismele cu șurub

Aceste mecanisme conțin cuple de rotație și elicoidale cu axele suprapuse și cuple de translație cu axele paralele (sau suprapuse) cu primele. Mișcările posibile sunt rotația și translația în raport cu o axă (Ox). Deci $s = 2(\omega_x, v_x)$ și $f = 4(\omega_y, v_y, \omega_z, v_z)$. În Fig.1.12 este reprezentat un mecanism

cu șurub în două variante, care au $n=3$, $c_5=3$ și $M=1$. În varianta din Fig.1.12.a clasa funcțională coincide cu cea constructivă, astfel că $k_{pg}=k_{pgmax}=4$. Această variantă are cupla de translație C - dublată ceea ce conduce la apariția unor legături pasive locale. Numărul acestora k_{pl} este egal cu diferența dintre clasa reală a cuplelor C și C': $k_{rc}=k_C + K_{C'}=5+5=10$ și clasa necesară: $k_{necC}=6-m_C=6-1=5$. Rezultă $k_{pl}=k_{rc}-k_{necC}=10-5=5$. În varianta din Fig.1.12.b cupla de rotație A este înlocuită cu o cuplă sferică. Având $M=1$, $n=3$, $c'_5=2(B, C)$ și $c'_3=1(A)$ rezultă din $k_{pg}=2$. Cuplele de translație C și C' se înlocuiesc cu cuple cilindrice ($k=4$). În felul acesta $k_{rc}=k_C + K_{C'}=4+4=8$, iar $k_{pl}=k_{rc}-k_{necC}=8-5=3$.

$$s=2(\omega_x, v_x), f=4(\omega_y, v_y, \omega_z, v_z), n=3, c_5=3, M=1$$

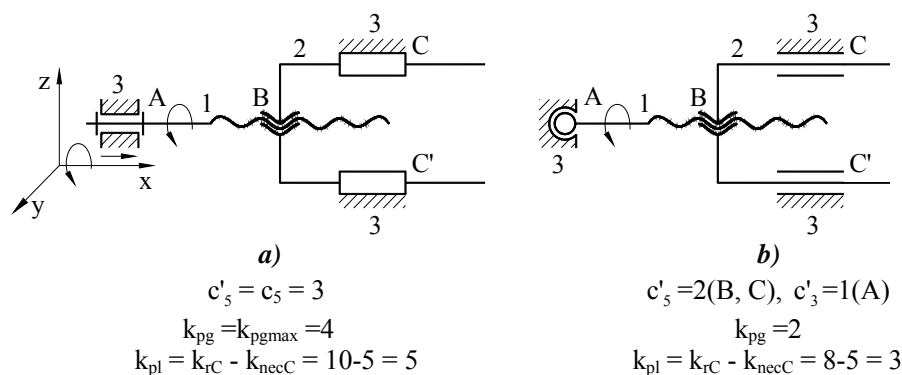


Fig. 1.12

■ Mecanismele cu roți de fricțiune

Aceste mecanisme conțin roți de fricțiune cilindrice sau conice între care se formează cuple de rostogolire de clasa $k=5$ (poz. 13, Tab.1.1). În Fig.1.13 este reprezentat un mecanism cu roți de fricțiune în două variante constructive având $n=3$, $c_5=5$, $M=1$. În varianta din Fig.1.13.a cupla B este constructiv de clasă $k=3$, astfel că $c'_5=2(A, C)$, $c'_3=1(B)$ și $k_{pg}=2$. În varianta din Fig.1.13.b, cupla B este de clasa $k=2$, ceea ce conduce la $c'_5=2(A, C)$, $c'_2=1(B)$, $k_{pg}=1$. Trebuie menționat că în structura acestor mecanisme cupla de rostogolire dintre roți nu se construiește niciodată în varianta constructivă arătată în Tab.1.1 la poz.13, ci numai în variantele din Fig.1.13.a și b având clasa constructivă mai mică decât cea funcțională. În felul acesta numărul de legături pasive globale este mai mic decât valoarea maximă $k_{pg} < k_{pgmax}=4$.

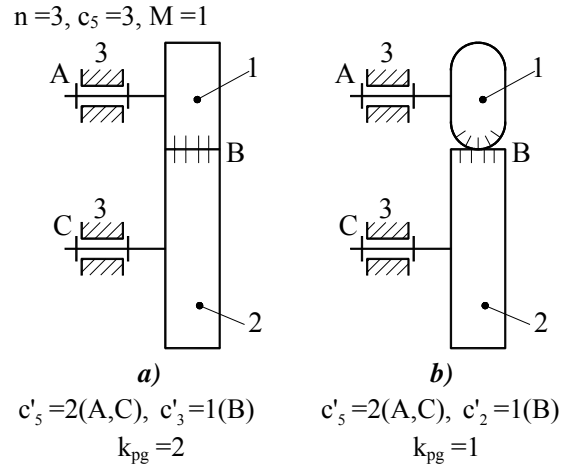


Fig. 1.13

1.2.2.2. Familia $f=3$

Gradul de mobilitate se calculează cu formula

$$M=3(n-1) - 2c_5 - c_4, \quad (1.13)$$

iar numărul maxim de legături pasive globale, la mecanismele cu un singur contur, este $k_{pgmax} = f = 3$.

■ Mecanismele plane (cu excepția celor care au numai cuple de translație)

Elementele acestor mecanisme se deplasează paralel cu un plan fix (xOy) astfel că $s=3(v_x, v_y, \omega_z)$ și $f=3(\omega_x, \omega_y, v_z)$. Pentru a obține această proprietate cinematică trebuie să conțină numai cuple plane de clasele $k=4$ și $k=5$. Aceste condiții sunt îndeplinite de următoarele cuple:

- clasa $k=5$ $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ cuple de rotație} \\ - \text{ cuple de translație} \end{array} \right.$
- clasa $k=4$ - cuple de la poziția 8 – Tab.1.1

Pe lângă aceasta, amplasarea cuplurilor trebuie să se facă astfel încât axele mișcărilor de rotație să fie paralele, iar axele mișcărilor de translație să fie conținute în plane perpendiculare pe axele de rotație.

În Fig.1.14 este reprezentat mecanismul patrulater articulat plan în trei variante constructive care au $n=4$, $c_5=4$, $M=1$. În varianta 1.14.a toate cuplele au clasa constructivă egală cu cea funcțională ($k=5$) și, deci, $k_{pg} = k_{pgmax} = 3$. În varianta din Fig.1.14.b cupla B este sferică ($k=3$) iar C - sferică cu deget ($k=4$). În aceste condiții $c'_5=2$ (A, D), $c'_4=1$ (C), $c'_3=1$ (B), iar $k_{pg} = 0$. În varianta din Fig.1.14.c, cupla B este sferică ($k=3$), iar C este cilindrică ($k=4$). Rezultă aceleași caracteristici ca și la varianta precedentă.

În Fig.1.15 este reprezentat mecanismul manivelă - piston plan care are $n=4$, $c_5=4$, $M=1$. În varianta din Fig.1.15.a toate cuplele au clasa constructivă egală cu cea funcțională ($k=5$) și $k_{pg} = k_{pgmax} = 3$. Mecanismul se întâlnește în aplicațiile din construcția motoarelor și pompelor sub forma din Fig.1.13.b, unde cupla de translație este înlocuită printr-o cuplă cilindrică piston - cilindru. În acest caz $c'_5=3$ (A, B, C), $c'_4=1$ (D), iar $k_{pg} = 2$. O situație asemănătoare intervine la mecanismul cu cilindru oscilant (Fig.1.16) unde cupla B este funcțional de translație ($k=5$), iar constructiv - cilindrică ($k=4$).

În Fig.1.17 este reprezentat un mecanism cu camă care are $n=3$, $c_5=2$, $c_4=1$ (poz. 8, Tab.1.1) și $M=1$. În varianta din Fig.1.17.a cupla B are clasa constructivă $k=2$ (poz. 2, Tab.1.1) rezultând $c'_5=2$, $c'_4=1$, $k_{pg} = 1$, iar în varianta din Fig.1.17.b, cupla B este de clasă constructivă $k=1$, obținându-se $c'_5=2$, $c'_1=1$, $k_{pg} = 0$.

În Fig.1.18 este reprezentat un mecanism cu roți dințate cu axele de rotație paralele care are aceleași caracteristici structurale cu mecanismul cu camă din Fig.1.17.a.

$$s = 3(\omega_z, v_x, v_y), f = 3(\omega_x, \omega_y, v_z), n = 4, c_5 = 4, M = 1$$

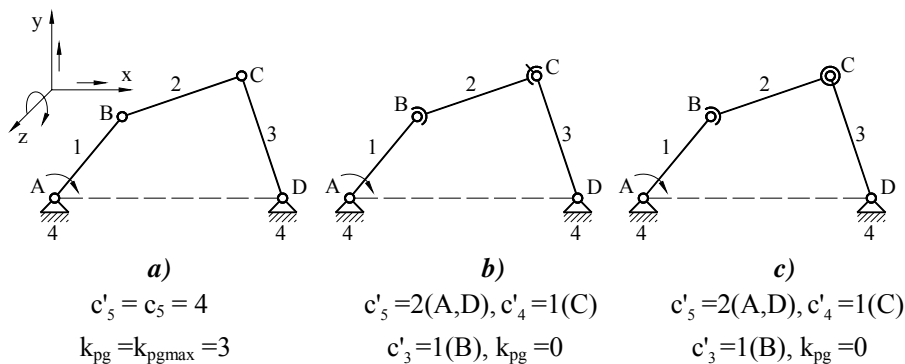


Fig. 1.14

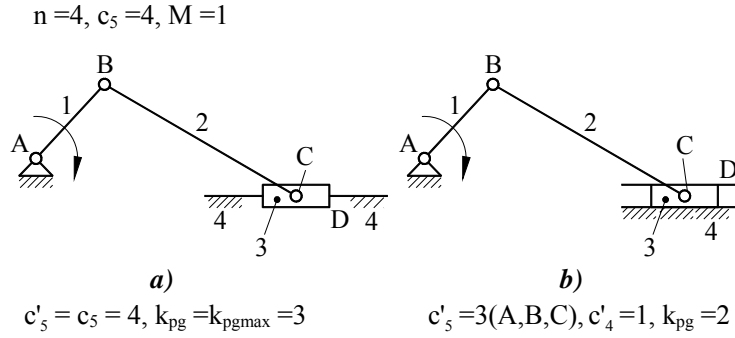


Fig. 1.15

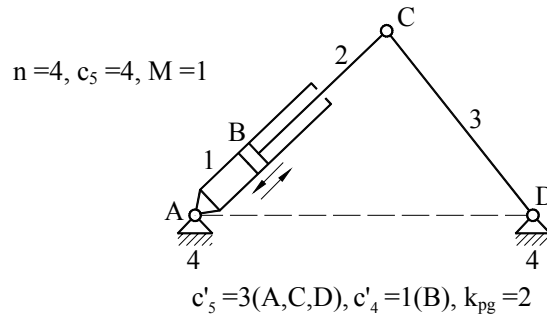
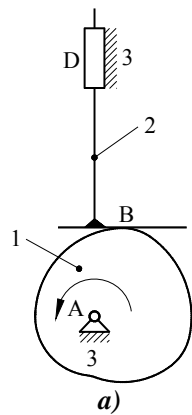
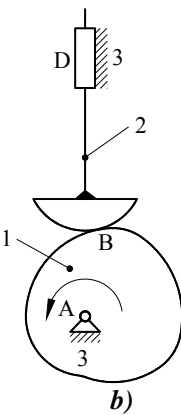


Fig. 1.16

$n=3, c_5=2(A, C), c_4=1(B), M=1$



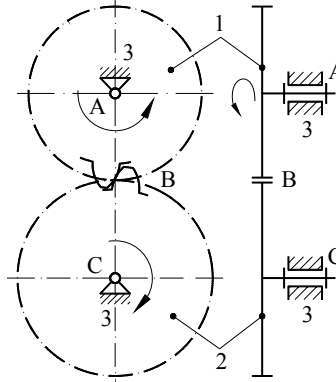
$c'_5 = 2(A, C), c'_2 = 1(B)$
 $k_{pg} = 1$



$c'_5 = 2(A, C), c'_1 = 1(B)$
 $k_{pg} = 0$

Fig. 1.17

$n=3, c_5=2(A, C), c_4=1(B), M=1$



$c'_5 = 2(A, C), c'_2 = 1(B)$
 $k_{pg} = 1$

Fig. 1.18

■ **Mecanismele sferice**

Aceste mecanisme se caracterizează prin faptul că toate elementele mobile au un punct fix comun. Deci, traiectoriile punctelor se înscriu pe sfere concentrice. Pentru a forma mecanisme sferice se folosesc numai cuple de rotație și de clasa $k=4$ (poz. 9, Tab.1.1) așezate în așa fel ca axele de rotație să fie concurente. În aceste condiții elementele pot executa numai mișcările de rotație în raport cu cele trei axe: $s=3 (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $f=3 (v_x, v_y, v_z)$.

Cel mai cunoscut mecanism sferic este mecanismul cardanic (Fig.1.19) care, de fapt, este un patrulater articulată sferic (axele celor patru cuple de rotație sunt concurente), care are $n=4$, $c_5=4$, și $M=1$. În varianta din Fig.1.19.a toate cuplele au clasa constructivă și cea funcțională identice. Prin urmare, $k_{pg} = k_{pgmax} = 3$. Mecanismul are cuplele de rotație ($k=5$) B și C dublate astfel că există $k_{pl}=10$ legături pasive locale. Mecanismul din Fig.1.19.b are cuplele B, C și D - cilindrice ($k=4$), astfel că $c'_5=1$, $c'_4=3$, $k_{pg} = 0$. Numărul legăturilor pasive locale $k_{pl} = 2(k_r - k_{nec}) = 2(8-4) = 8$.

În categoria mecanismelor sferice intră, de asemenea, mecanismele cu roți dințate cu axe concurente (Fig.1.20). Caracteristicile lor structurale sunt similare cu cele ale mecanismelor cu roți dințate cu axe paralele (Fig.1.18).

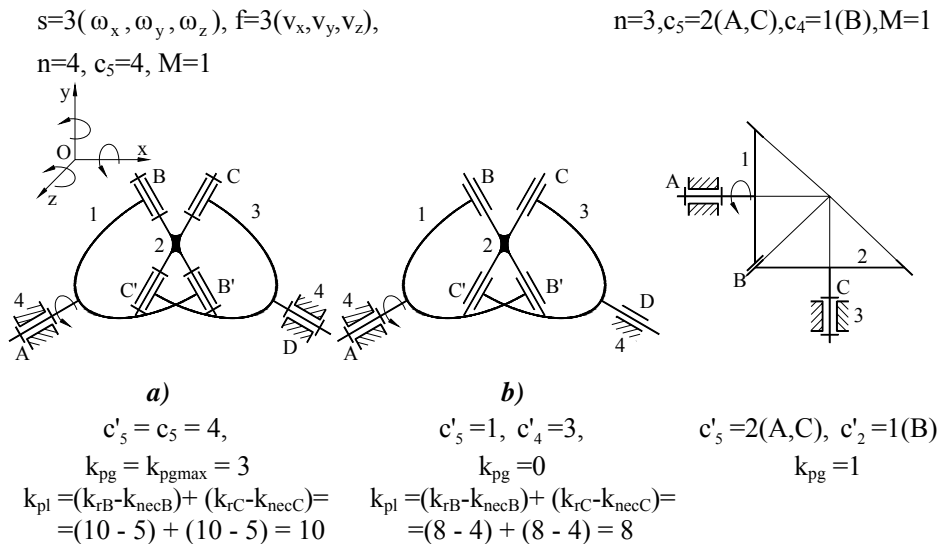


Fig. 1.19

Fig. 1.20

1.2.2.3. Familia $f = 0$

Pentru determinarea gradului de mobilitate se folosește formula

$$M = 6(n-1) - 5c_5 - 4c_4 - 3c_3 - 2c_2 - c_1 \quad (1.14)$$

Aceste mecanisme nu prezintă legături pasive globale ($k_{pgmax} = f = 0$).

În Fig.1.21 este reprezentat mecanismul patrulater articulat spațial care are $n=4$, $c_5=2(A, D)$, $c_4=1(B)$, $c_3=1(C)$ și $M=1$.

În Fig.1.22 este reprezentat un mecanism de robot care provine dintr-un lanț cinematic deschis. Mecanismele de acest fel conțin numai cuple de clasa $k=5$, iar $c_5 = n-1$. Introducând această condiție în formula (1.14) rezultă $M = c_5 = n-1$. Prin urmare, pentru a obține o mișcare determinată toate cuplele trebuie să fie conducătoare. În cazul nostru $n=6$, deci $M = n-1 = c_5 = 5$.

$$s = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z), f = 0$$

$$n=4, c_5=2(A, D), c_4=1(B), c_3=1(C), M=1 \quad n=6, c_5=5, M = n - 1 = c_5 = 5$$

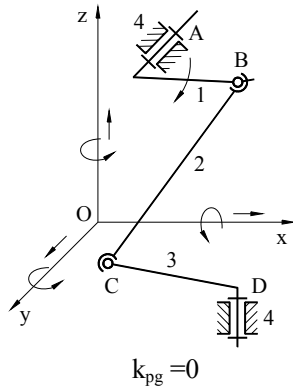


Fig. 1.21

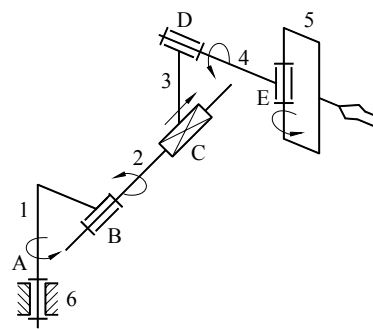


Fig. 1.22

1.2.3. Situații particulare privind determinarea gradului de mobilitate

În unele cazuri calculul gradului de mobilitate conduce la rezultate eronate sau contradictorii. Ele apar datorită unor particularități constructiv - geometrice ale mecanismelor în cauză și pot fi grupate în două categorii pe care le vom prezenta în continuare.

1.2.3.1. Mobilități locale

Pentru înțelegerea fenomenului vom analiza două mecanisme reprezentative unde apare acesta. În Fig.1.23 este reprezentat un mecanism patrulater articulată spațial de tip RSSR de familia $f=0$ și care are $n=4$, $c_5=2(A, D)$, $c_3=2(B, C)$. Calculând gradul de mobilitate cu formula (1.14) rezultă $M=2$. Cu toate acestea se adoptă o singură cuplă conducătoare, de exemplu cupla A. În această ipoteză intervine o mobilitate locală arbitrară (necontrolată) - rotația bielei 2 în jurul centrelor cuplelor sferice B și C. Această mișcare este reflectată de valoarea gradului de mobilitate, dar poate rămâne arbitrară pentru că nu influențează mișcarea elementului 3 care interesează în mod obișnuit.

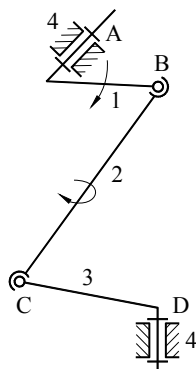


Fig. 1.23

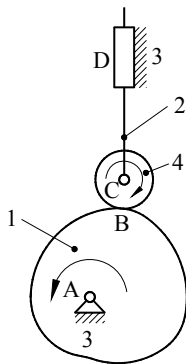


Fig. 1.24

O situație asemănătoare intervine la mecanismele cu camă când legătura dintre camă și tchet se face printr-o rolă articulată. Mecanismul cu camă din Fig.1.24 este plan și are $n=4$, $c_5=3(A, C, D)$, $c_4=1(B)$. Aplicând formula (1.13) rezultă $M=2$, însă mecanismul are un singur element conducător - cama 1. Și aici intervine o mobilitate locală - rotația arbitrară a rolei care nu influențează, însă, deplasarea tchetului - esențială pentru funcționarea mecanismului.

1.2.3.2. Lanțuri cinematice pasive

Un mecanism complex poate fi format dintr-un mecanism simplu la care se adaugă un lanț cinematic. Dacă parametrii structurali ai lanțului inițial (presupunând $f=3$) sunt: n_1 , c_{51} , c_{41} și $M_1 = 3(n_1-1) - 2c_{51} - c_{41}$ iar cei ai lanțului cinematic sunt n_2 , c_{52} , c_{42} și $L_2 = 3n_2 - 2c_{52} - c_{42}$, atunci parametrii structurali ai mecanismului obținut rezultă astfel $n = n_1 + n_2$, $c_5 = c_{51} + c_{52}$, $c_4 = c_{41} + c_{42}$, iar $M = 3(n-1) - 2c_5 - c_4 = M_1 + L_2$. Dacă $L_2 < 0$ se obține $M < M_1$. Aceasta înseamnă că lanțul cinematic introduce condiții suplimentare care îngrădesc mișcarea mecanismului inițial, reducând gradul de mobilitate. Uneori, datorită unor particularități constructive, condițiile suplimentare nu sunt independente în raport cu cele ale mecanismului inițial. În această ipoteză $M = M_1$ deși, din calcul, rezultă $M < M_1$. Lanțul cinematic adăugat este, atunci, **pasiv**. Un exemplu, în acest sens, este prezentat în Fig.1.25 unde se arată modul de formare a unui mecanism complex dintr-un patrulater ($M_1 = 1$) și un lanț

cinematic cu $L_2 = -1$. Mecanismul obținut are $M = M_1 + L_2 = 0$, deci trebuie să fie o construcție rigidă. Această situație se înregistrează întradevăr în cazul mecanismului din Fig.1.25.a. În cazul din Fig.1.25.b, când elementele formează niște paralelograme, se obține un mecanism cu $M = 1$ datorită faptului că lanțul cinematic adăugat este pasiv. Acest lucru se poate înțelege dacă analizăm, în ambele situații, rolul acestui lanț cinematic.

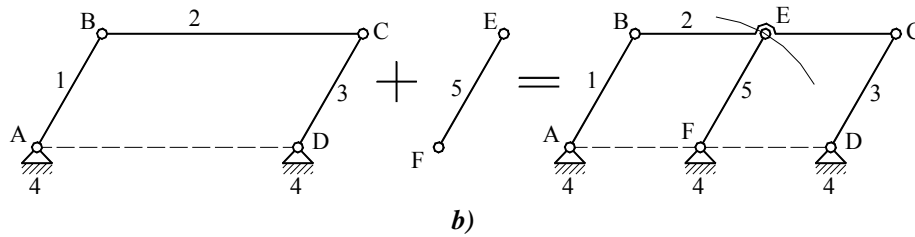
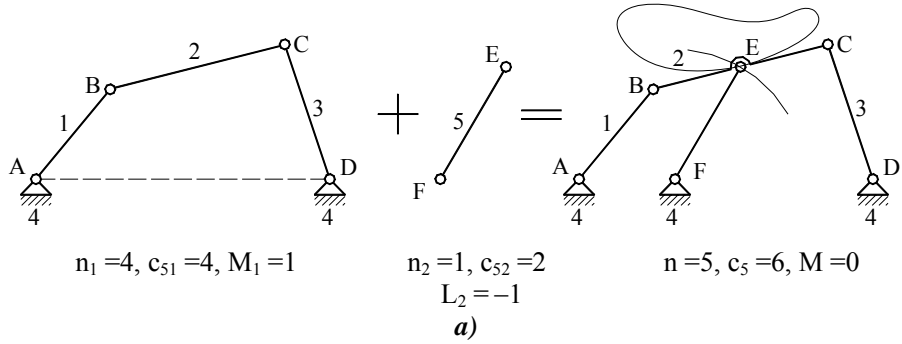


Fig. 1.25

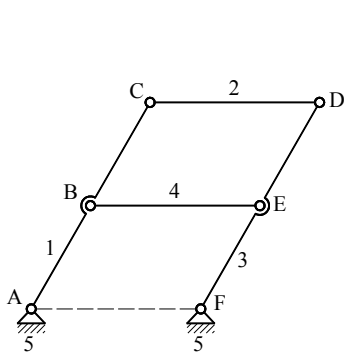


Fig. 1.26

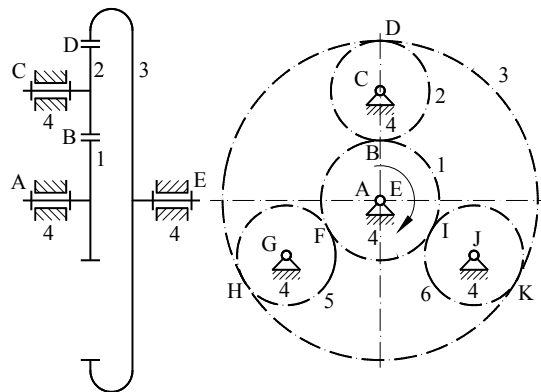


Fig. 1.27

Să presupunem că desfacem articulația E la mecanismul din Fig.1.25.a. În această ipoteză, punctul E aparținând bielei patrulaterului ABCD descrie o curbă de bielă, iar dacă aparține barei EF descrie un cerc cu centrul în F. Legând elementele 2 și 5 prin articulația E, acest punct este obligat să ocupe o poziție fixă la intersecția dintre curba de bielă și cerc și, deci, sistemul devine rigid. În cazul mecanismului din Fig.1.25.b, datorită faptului că patrulaterul ABCD este paralelogram, curba de bielă este tot un cerc care se suprapune peste cel descris de punctul E când aparține barei EF. Rezultă că mișcarea mecanismului inițial nu este influențată de adăugarea lanțului cinematic, iar gradul de mobilitate rămâne $M = M_1 = 1$. O situație similară se înregistrează la mecanismul din Fig.1.26 format tot din paralelograme, care are gradul de mobilitate $M = 1$ deși din calcul rezultă $M = 0$.

Un alt exemplu, din aceeași categorie, este dat în Fig.1.27 unde este reprezentat un mecanism plan cu roți dințate. Gradul de mobilitate calculat este $M = -1$ ($n = 6$, $c_5 = 5(A, E, C, G, J)$, $c_4 = 6(B, D, F, H, I, K)$), însă cel real este $M = 1$. Situația se explică prin faptul că mișcarea de rotație se transmite de la roata 1 la roata 3 pe trei căi cu aportul unor roți intermediare identice 2, 5 și 6. Este evident că, cinematic, este suficientă o singură roată intermediară, obținând, în felul acesta, un mecanism cu gradul de mobilitate $M = 1$, $n = 4(1, 2, 3, 4)$, $c_3 = 3(A, C, E)$, $c_4 = 2(B, D)$. Celelalte două roți cu cuplele aferente formează lanțuri cinematice pasive care nu modifică starea cinematică a mecanismului inițial.

1.3. CLASIFICAREA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR PLANE

1.3.1. Înlocuirea cuplei superioare

Așa cum am arătat, mecanismele plane se încadrează în familia $f = 3$ (cu excepția celor formate numai din cuple de translație care au $f = 4$) și conțin cuple de rotație, de translație (ambele de clasa 5 și inferioare) și cuple de clasa 4 obținute prin contactul a doi cilindri după o generatoare și din contactul a două plane. În aplicațiile tehnice se renunță întotdeauna la contactul plan - plan din motive care țin de simplificarea constructivă și de reducerea legăturilor pasive. În felul acesta rezultă o cuplă pur superioară dar care, în calculele structurale, își păstrează clasa $k = 4$. Cuplele superioare se pot transforma în lanțuri cinematice care conțin numai cuple inferioare. Această transformare trebuie să îndeplinească două condiții:

- 1) Condiția structurală: menținerea gradului de mobilitate al mecanismului;

2) Condiția cinematică: păstrarea nemodificată a mișcărilor elementelor.

Condiția structurală conduce la determinarea parametrilor structurali ai lanțului cinematic înlocuitor. Să considerăm un mecanism având caracteristicile: n , c_5 , c_4 , și M . Să presupunem că o cuplă de clasa 4 se înlocuiește cu un lanț cinematic având n_s - numărul de elemente și c_{5s} - numărul cuplelor inferioare (clasa 5). Pe baza condiției structurale se poate scrie

$$M = 3(n-1) - 2c_5 - c_4 = 3(n+n_s-1) - 2(c_5+c_{5s}) - (c_4-1), \quad (1.15)$$

de unde rezultă

$$3n_s - 2c_{5s} + 1 = 0. \quad (1.16)$$

Soluțiile întregi și pozitive ale ecuației (1.16) ne arată structura lanțului cinematic înlocuitor. Din punct de vedere practic interesează soluția cu cele mai mici valori pentru necunoscute: $n_s = 1$, $c_{5s} = 2$. Din condiția cinematică rezultă parametrii constructivi (geometrici) ai lanțului înlocuitor. Să considerăm o cuplă formată din elementele 1 și 2 (Fig.1.28). Dacă avem în vedere o deplasare înfinit mică, mișcarea relativă dintre elemente nu se modifică dacă se înlocuiesc curbele (C_1) și (C_2) cu două cercuri având razele de curbură ale curbelor (C_1) și (C_2) în punctul A. Considerând acum cupla superioară definită cu ajutorul cercurilor, rezultă că distanța BC dintre centrele lor rămâne constantă în timpul mișcării. Această proprietate trebuie să existe și după transformare. Pentru aceasta elementul unic ($n_s = 1$) al lanțului cinematic înlocuitor trebuie să se lege de elementele 1 și 2 prin două cuple de rotație ($c_{5s} = 2$) situate în centrele de curbură B și C (Fig.1.28.a, 1.28.b). Astfel, lungimea elementului 3 este egală cu suma razelor de curbură: $l_{BC} = \rho_1 + \rho_2$. Din cele arătate rezultă că transformarea cuplei superioare are un caracter instantaneu, deoarece odată cu schimbarea poziției mecanismului punctul de contact se deplasează și, deci, se modifică razele de curbură. Mecanismul care se obține după înlocuirea cuplei superioare are dimensiuni invariabile numai când curbele (C_1) și (C_2) au curburi constante: sunt cercuri, drepte ($\rho = \infty$) sau degenerază în puncte ($\rho = 0$).

Când una dintre curbe este o dreaptă, centrul de curbură este aruncat la înfinit, iar cupla de rotație se transformă în cuplă de translație având ca axă dreapta respectivă.

În Tab.1.3 se prezintă transformarea cuplei superioare pentru toate cazurile reprezentative.

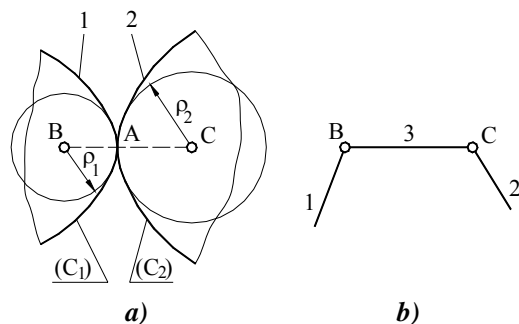
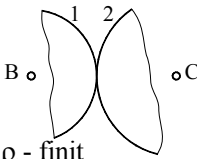
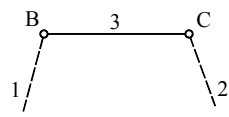
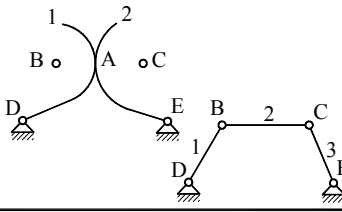
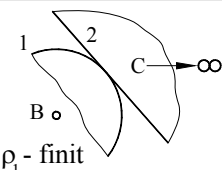
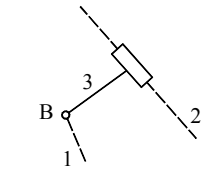
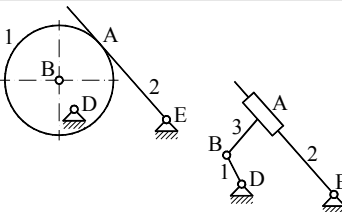
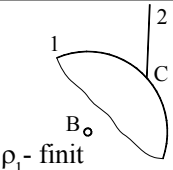
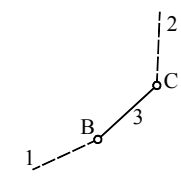
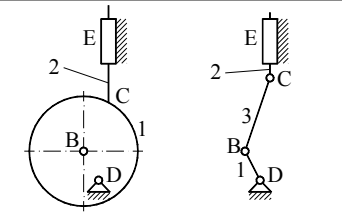
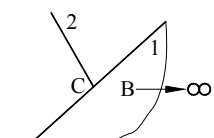
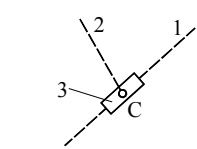
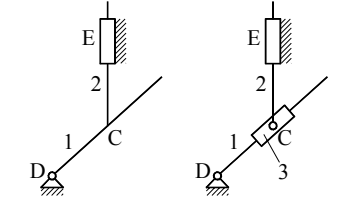


Fig. 1.28

Tabelul 1.3

Cupla superioar\	Lanțul cinematic înlocuitor	Exemplu
 <p>ρ_1 - finit ρ_2 - finit</p>		
 <p>ρ_1 - finit ρ_2 - ∞</p>		
 <p>ρ_1 - finit ρ_2 - 0</p>		
 <p>ρ_1 - ∞ ρ_2 - 0</p>		

1.3.2. Noțiunea de grupă structurală

Grupa structurală este un lanț cinematic care face parte dintr-un mecanism și are următoarele proprietăți:

- 1) Are un număr de cuple conducătoare egal cu gradul de libertate;
- 2) Are un număr de cuple exterioare cu care se leagă în mecanism;
- 3) Nu se poate descompune în grupe structurale mai simple.

Grupele structurale cu $L = 0$ se numesc grupe Assur, iar cele cu $L > 0$ se numesc grupe conducătoare (Duca, Simionescu). Utilizarea noțiunii de grupă structurală este utilă, în special, pentru studiul mecanismelor cu cuple inferioare. De aceea în compunerea lor vom considera numai astfel de cuple. Ne propunem să stabilim schemele structurale ale grupelor uzuale. Pentru aceasta vom trata pe rând cazul grupelor cu $L = 0$ și $L = 1$.

■ **Grupele structurale cu $L = 0$ (Assur)**

Din condiția de definiție se obține

$$L = 3n - 2c_5 = 0. \quad (1.17)$$

Din această ecuație rezultă n și c_5 . Cele mai mici soluții întregi și pozitive sunt:

n	2	4	6	...
c_5	3	6	9	...

Fiecare soluție numerică conduce la una sau mai multe soluții structurale distincte. În Tab.1.4 se indică toate soluțiile structurale pentru primele două soluții numerice. De fapt, acestea sunt grupele cu $L = 0$ care au importanță practică.

Tabelul 1.4

L = 0	n = 2, $c_5 = 3$	n = 4, $c_5 = 6$																		
	 <table border="1"> <tr><td>L</td><td>cl.</td><td>ord.</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	L	cl.	ord.	0	2	2	 <table border="1"> <tr><td>L</td><td>cl.</td><td>ord.</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	L	cl.	ord.	0	3	3	 <table border="1"> <tr><td>L</td><td>cl.</td><td>ord.</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>	L	cl.	ord.	0	4
L	cl.	ord.																		
0	2	2																		
L	cl.	ord.																		
0	3	3																		
L	cl.	ord.																		
0	4	2																		
L = 1	n = 1, $c_5 = 1$	n = 3, $c_5 = 4$																		
	 <table border="1"> <tr><td>L</td><td>cl.</td><td>ord.</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	L	cl.	ord.	1	1	1	 <table border="1"> <tr><td>L</td><td>cl.</td><td>ord.</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>	L	cl.	ord.	1	2	2						
L	cl.	ord.																		
1	1	1																		
L	cl.	ord.																		
1	2	2																		

Grupele structurale se clasifică în **clase și ordine**. **Clasa** se stabilește astfel:

- Dacă grupa conține contururi închise deformabile clasa este egală cu numărul maxim de laturi ale acestora;
- Dacă grupa nu conține astfel de contururi, clasa este egală cu rangul maxim al elementelor.

Ordinul este egal cu numărul cuplelor exterioare.

În Tab.1.4 se precizează, la fiecare grupă, clasa și ordinul. În cadrul schemelor din Tab.1.4 s-au folosit, pentru simplificare, numai cuple de rotație. Este evident că fiecare grupă poate avea atât cuple de rotație cât și de translație. Prin combinarea lor se obțin, pentru fiecare soluție structurală, un număr de variante, numite **aspecte**. În cazul grupeii 0/2/2 (L / clasa / ordinul) există 5 aspecte numerotate convențional așa cum se indică în Tab.1.5. În acest tabel sunt arătate și formele degenerare ale grupelor, caracterizate prin unele dimensiuni egale cu zero. Aceste forme au importanță practică pentru că sunt favorabile din punct de vedere al solicitărilor elementelor.

Tabelul 1.5

Aspect 1 (RRR)	Aspect 2 (RRT)	Aspect 3 (RTR)	Aspect 4 (TRT)	Aspect 5 (RTT)

■ **Grupele conducătoare (Duca, Simionescu) cu L = 1**

Condiția

$$L = 3n - 2c_5 = 1 \quad (1.18)$$

conduce la următoarele soluții numerice:

n	1	3	5	...
c ₅	1	4	7	...

Soluțiile structurale pentru primele două soluții numerice sunt arătate în Tab.1.4 împreună cu clasificarea lor. Grupa 1/1/1 are o singură cuplă care este conducătoare și exterioară. În majoritatea cazurilor această cuplă este de rotație,

fiind asociată cu un motor rotativ. Grupa 1/2/2 are o cuplă conducătoare (B) formată între două elemente mobile (1 și 2). În această situație se utilizează un motor hidraulic liniar format dintr-un cilindru și un piston.

1.3.3. Formarea mecanismelor și descompunerea în grupe structurale

Am arătat că grupa structurală trebuie interpretată ca un lanț cinematic component al unui mecanism. Operația de asamblare a grupelor structurale

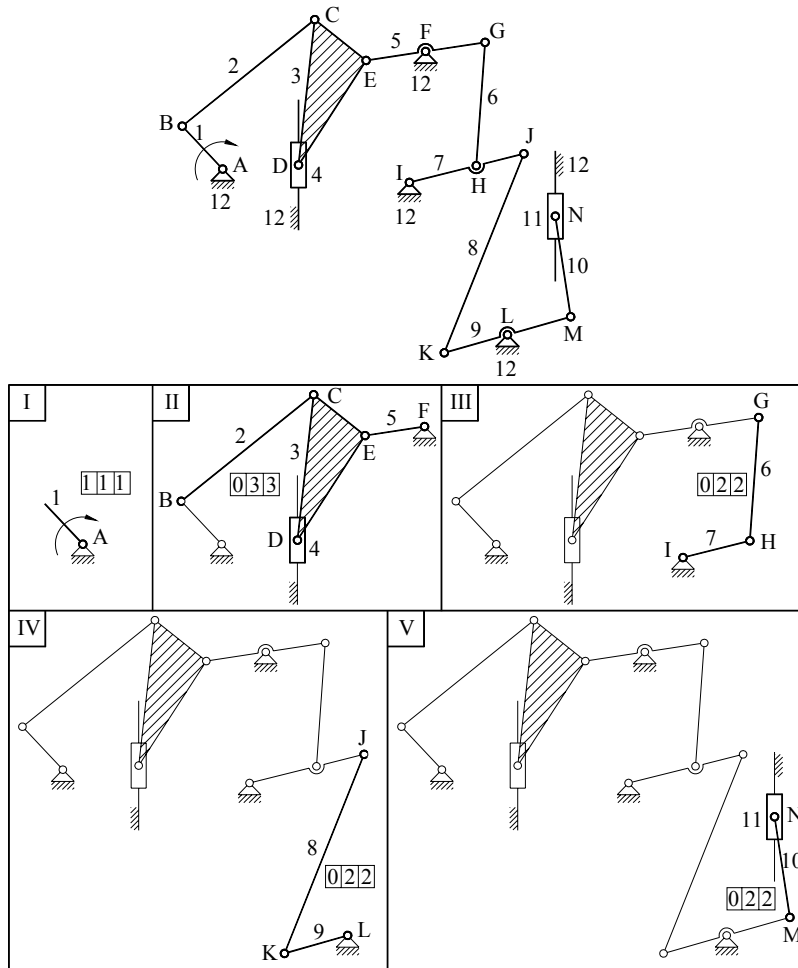


Fig. 1.29

pentru construirea mecanismelor se realizează pe baza următorului **principiu de formare**:

Orice mecanism se poate forma prin legarea succesivă de grupe structurale, pornind de la elementul fix.

Înțelegerea principiului de formare comportă câteva precizări suplimentare. Așa cum se arată în enunț, în faza inițială a procesului de formare se consideră elementul fix (baza). Apoi se leagă, în mod succesiv, grupe structurale prin intermediul cuplelor exterioare. După anexarea unei noi grupe se obține un nou mecanism, din ce în ce mai complex. Legarea unei grupe trebuie să se facă prin toate cuplele exterioare, la mecanismul format în etapa precedentă. Deci, după legarea în mecanism, grupa nu trebuie să rămână cu cuple libere. Gradul de mobilitate al mecanismului obținut este egal cu suma gradelor de libertate ale grupelor componente. Trebuie remarcat că modul de formare al unui mecanism este unic. Deci, nu este posibil de a obține același mecanism folosind grupe structurale diferite sau succesiuni diferite de legare a

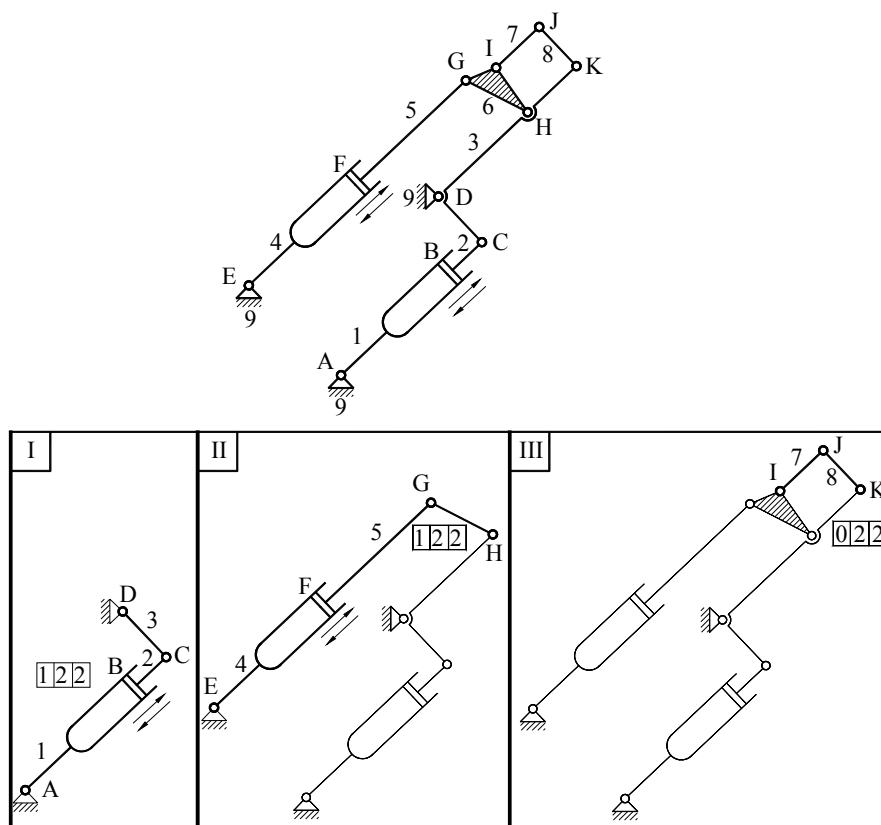


Fig. 1.30

acestora. Pentru exemplificare, în Fig.1.29 se prezintă formarea unui mecanism din industria textilă, iar în Fig.1.30 este arătată formarea unui mecanism de încărcător frontal.

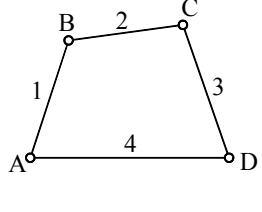
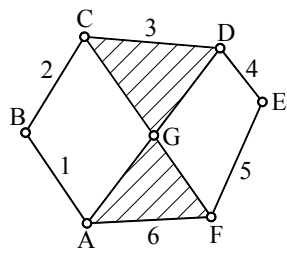
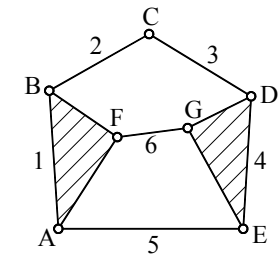
Operația inversă formării este **descompunerea** în grupe structurale. Prin această operație se pun în evidență grupele componente reconstituind procesul de formare. Mecanismului i se atribuie o clasă, egală cu clasa maximă întâlnită la grupele componente.

Vom studia, în continuare, structura mecanismelor plane, cu gradul de mobilitate $M = 1$, din punct de vedere al grupelor componente. Lanțurile cinematice închise din care se pot forma mecanisme trebuie să verifice ecuația

$$M = 3(n-1) - 2c_5 = 1.$$

Soluțiile acestei ecuații, care interesează practic, sunt $n = 4, c_5 = 4$ și $n = 6, c_5 = 7$. Prima soluție numerică are un singur corespondent structural, iar din soluția a doua rezultă două lanțuri cinematice numite: **Watt** și **Stephenson** (Tab.1.6).

Tabelul 1.6

$n = 4, c_5 = 4$	$n = 6, c_5 = 7$	
 <p>Patrulater</p>	 <p>Watt</p>	 <p>Stephenson</p>

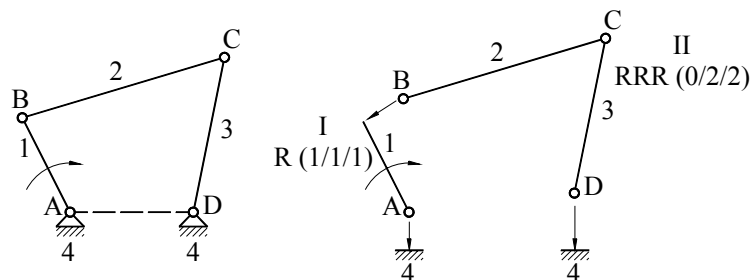
Lanțurile cinematice închise sunt formate din unul sau mai multe **contururi** care sunt **lanțuri cinematice simple închise**. Astfel, lanțul cinematic patrulater (Tab.1.6) are, evident, un singur contur iar lanțurile Watt și Stephenson au câte trei contururi. Contururile lanțului Watt sunt: ABCGA, DEFGD și ABCDEFA, iar cele ale lanțului Stephenson sunt: AFGEA, BCDGFB și ABCDEA. Dintre cele trei contururi, oricare două se consideră **independente** deoarece cel de-al treilea contur conține numai elemente și cuple întâlnite la celelalte două contururi. Numărul de contururi independente N , se poate calcula cu formula:

$$N = c_5 - n + 1,$$

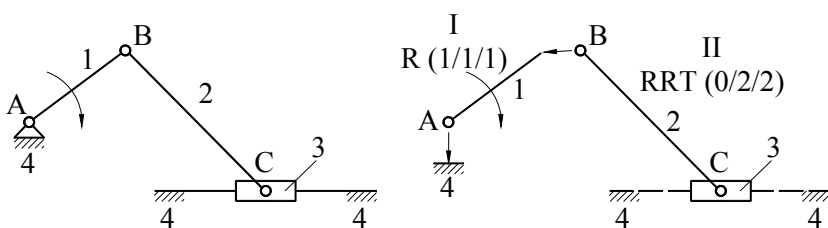
care este verificată pentru lanțurile cinematice din Tab.1.6.

Dacă precizăm elementul de referință și cupla conducătoare, din fiecare lanț cinematic se pot obține mai multe mecanisme, iar dacă se combină cuplele de rotație cu cele de translație numărul de mecanisme obținut este foarte mare.

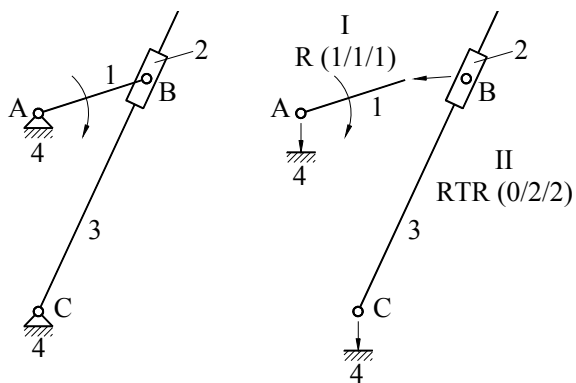
În Fig.1.31 se prezintă mecanismele cu patru elemente care au cea mai largă utilizare în construcția de mașini și se precizează grupele structurale componente.



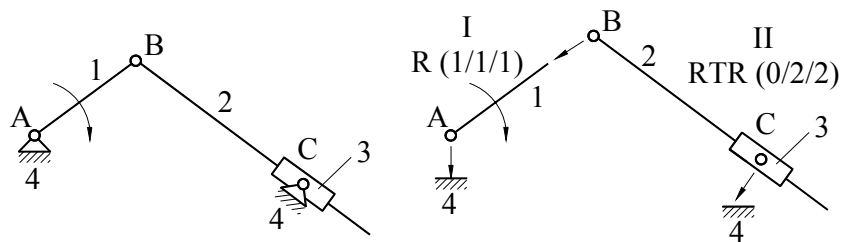
a) mecanismul patrulater articulată



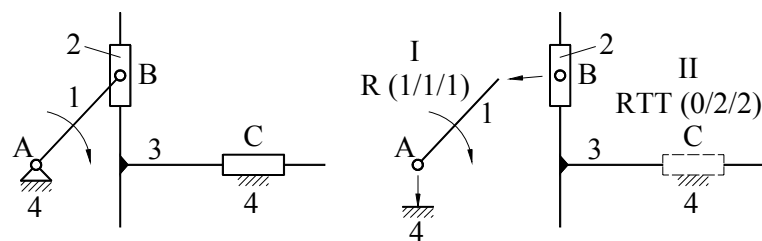
b) mecanismul manivelă – piston (bielă – manivelă)



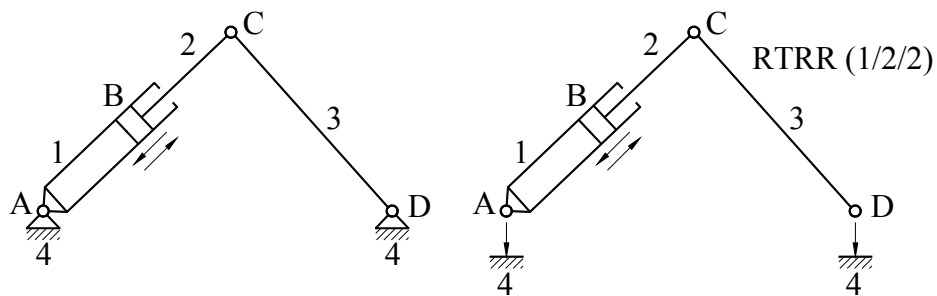
c) mecanismul cu culisă de rotație
(variante cu elementul 2 – patină și elementul 3 – culisă)



*d) mecanismul cu culisă de rotație
(variante cu elementul 2 – culisă și elementul 3 – patină)*



e) mecanismul cu culisă de translație



f) mecanismul cu cilindru oscilant

Fig. 1.31

În Tab.1.7 se prezintă mecanismele articulate care derivă din lanțul Watt (în număr de patru), iar în Tab.1.8 – mecanismele articulate care provin din lanțul Stephenson (în număr de cinci), indicându-se compoziția lor grupală.

Tabelul 1.7

1) Baza: 1, Cupla conducătoare: A	
2) Baza: 1, Cupla conducătoare: G	
3) Baza: 2, Cupla conducătoare: A	
4) Baza: 2, Cupla conducătoare: B	

Tabelul 1.8

1) Baza: 1, Cupla conducătoare: A	
2) Baza: 2, Cupla conducătoare: A	
3) Baza: 2, Cupla conducătoare: B	
4) Baza: 3, Cupla conducătoare: B	
5) Baza: 3, Cupla conducătoare: C	

Cunoașterea structurii mecanismelor, din punct de vedere al grupelor componente, este importantă pentru analiza cinematică și cinetostatică. Grupele structurale sunt sisteme determinate cinematic și static. Ca urmare, ele pot fi studiate independent de restul mecanismului, iar pentru fiecare grupă se poate stabili un procedeu de analiză specific. În aceste condiții analiza unui mecanism se desfășoară în două etape:

- 1) Descompunerea în grupe structurale;
- 2) Aplicarea pentru fiecare grupă a procedurii specific, prestabilit.

Acest mod de abordare a problemei prezintă avantaje deosebite deoarece numărul de grupe uzuale, deci de procedee de calcul necesare, este redus, iar numărul de mecanisme care se pot forma cu ajutorul lor este foarte mare. De asemenea, metoda se pretează foarte bine la aplicarea calculului automatizat.

Capitolul 2

MECANISME CU CUPLE INFERIOARE (CU BARE)

2.1. ANALIZA CINEMATICĂ

2.1.1. Considerații generale

Analiza cinematică urmărește determinarea stării cinematice a mecanismului și implică rezolvarea a trei probleme: a pozițiilor, a vitezelor și a accelerațiilor. Datele de intrare sunt constituite din parametrii constructivi ai mecanismului și din parametrii care determină poziția și mișcarea din cuplele conducătoare. De regulă, viteza unghiulară a elementului conducător, în cazul cuplei conducătoare de rotație, se consideră constantă, iar valoarea ei este o caracteristică tehnică a motorului. Datele de ieșire sunt parametrii care determină complet poziția, distribuția de viteze și distribuția de accelerații pentru fiecare element. Cele trei probleme se rezolvă, obligatoriu, în ordinea menționată pentru că își livrează date în această succesiune. Pentru a descrie funcționarea mecanismului în intervalul unui ciclu cinematic se pot trasa traiectoriile unor puncte și diverse diagrame care arată variația unor parametri de poziție și cinematici în funcție de parametrul poziției relative dintre elementele cuplei conducătoare – variabila independentă a mecanismului.

Abordarea analizei cinematice se poate face în două moduri: global sau pe grupe structurale. Prima modalitate este recomandabilă în cazul mecanismelor simple, monocontur. Cea de-a doua prezintă avantaje importante în cazul mecanismelor complexe. Grupa structurală este un lanț cinematic determinat, astfel încât poate fi analizată separat, cu finalizarea numerică a calculelor. Pentru fiecare grupă se poate elabora un procedeu specific de analiză caracterizat printr-un algoritm și un program de calcul. Având la dispoziție programele specifice grupelor uzuale, analiza cinematică a unui mecanism se reduce la asamblarea acestora în funcție de structura mecanismului. În felul acesta, folosind un număr redus de procedee prestabilite, se poate face analiza

unui număr mare de mecanisme. Astfel, numărul de mecanisme plane cu $M = 1$ și $n \leq 6$, care conțin grupe structurale 1/1/1 de tip R și 0/2/2 de aspectele RRR, RRT și RTR, este de 94. Prin urmare, cu patru procedee, dintre care unul banal (R), se pot analiza 94 de mecanisme care acoperă, în bună parte, aria mecanismelor plane uzuale. Trebuie precizat că analiza unei grupe presupune cunoașterea stării cinematice a elementelor la care aceasta se atașează. Rezultă că ordinea în care se face analiza cinematică a grupelor componente trebuie să coincidă cu ordinea de formare a mecanismului.

În funcție de modul de rezolvare a modelului matematic, metodele de analiză cinematică sunt analitice, grafice sau grafo-analitice. Metodele analitice, cu soluție directă sau obținută prin procedee numerice, sunt cele mai utilizate datorită avantajelor pe care le prezintă: precizie și rapiditate, în condițiile aplicării calculului automat. Metodele grafice și grafo-analitice își găsesc, totuși, utilitatea. Ele se constituie, uneori, ca modele inițiale care se dezvoltă prin transpunere analitică. Totodată aceste metode pot furniza soluții inițiale în cadrul procedeeelor numerice sau se folosesc pentru a verifica dacă soluțiile numerice sunt corecte. În afară de aceasta, metodele grafice pot fi aplicate direct pe calculator în contextul utilizării programelor utilitare cu caracter grafic (de exemplu AutoCAD).

Problema pozițiilor este, în general, neliniară astfel că admite mai multe soluții pentru aceleași date de intrare. Fiecare soluție este în corespondență cu o poziție a grupe structurale (sau a mecanismului), care, la rândul ei, este determinată prin operația de montare. Identificarea soluției (poziției) care trebuie luată în considerare într-o problemă de analiză cinematică, se face, de obicei, pe baza schemei cinematice a mecanismului. Dirijarea calculului spre soluția dorită depinde de procedeul de rezolvare. În cazul rezolvărilor analitice directe, soluțiile se diferențiază fie prin semnele care intervin în fața unor radicali, fie prin cele două valori, cuprinse în intervalul $[0, 2\pi]$, al unor funcții trigonometrice inverse. În cazul utilizării unor metode numerice, soluția spre care converge procedeul depinde de soluția inițială aproximativă, care trebuie să fie cât mai apropiată de cea urmărită. Pentru a verifica dacă soluția obținută este cea corectă, este util să se facă o reprezentare a schemei cinematice cu datele numerice furnizate de calculator.

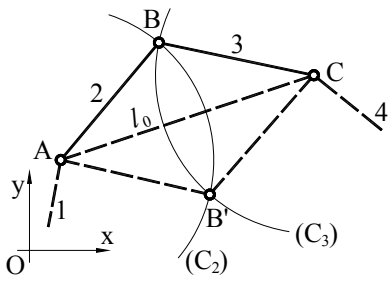
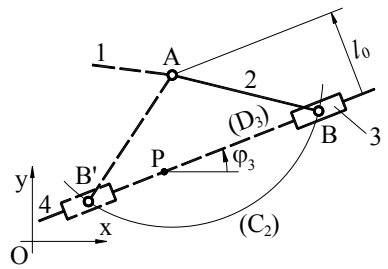
Există numeroase metode de analiză cinematică, fundamentate pe diverse domenii din matematică. În cele ce urmează vom prezenta cele mai importante metode, arătând categoriile de mecanisme pentru care se recomandă fiecare. Vom trata, separat, mecanismele spațiale cu cea mai largă întrebuintare practică.

2.1.2. Metoda intersecției locurilor geometrice

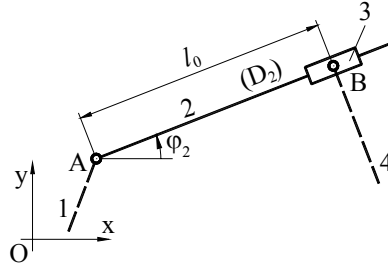
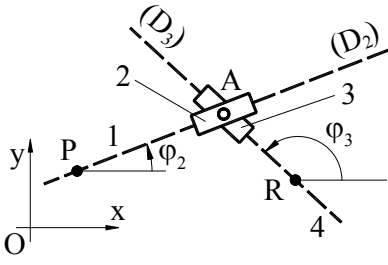
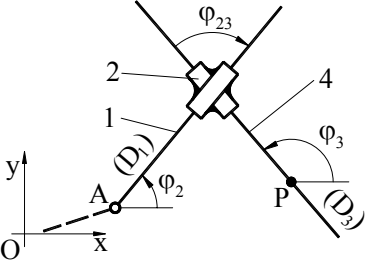
Această metodă servește numai pentru determinarea pozițiilor și are atât caracter grafic, cât și analitic. În Tab.2.1 se prezintă procedeele de analiză a pozițiilor pentru grupele structurale uzuale luând în considerare cele două modele. De fapt, procedeul analitic este o transpunere a procedeeului grafic folosind, ca instrument matematic, elemente de geometrie analitică. În Tab.2.1 se indică, de asemenea, parametrii de intrare clasificați astfel: 1) parametrii constructivi; 2) parametrii de poziție transmiși prin cuplele exterioare de la elementele la care se atașează grupa; 3) parametrul poziției relative din cupla conducătoare. În același tabel se formulează condițiile pentru care problema are soluții reale, exprimate sub forma unor inegalități. Când aceste condiții sunt îndeplinite la limită se obțin **pozițiile critice** sau **moarte** ale grupei. În general pozițiile critice trebuie evitate deoarece pot conduce la blocarea mecanismului din care face parte grupa structurală. Interpretări mai detaliate în legătură cu comportarea mecanismelor în pozițiile critice se prezintă în subcapitolul 2.4.2. Pentru grupele 0/2/2 s-au luat în considerare numai formele reduse (degenerate) deoarece acestea sunt utilizate exclusiv în construcția mecanismelor, iar procedeele de analiză sunt mai simple decât în cazul formelor generale.

Metodele analitice, indicate în Tab.2.1, pentru grupele RRR, RRT și RTRR sunt constituite din sisteme de ecuații algebrice neliniare care reclamă, în general, rezolvări prin metode numerice. Pentru aceleași grupe se pot elabora și modele cu rezolvare analitică directă, care prezintă avantajul unei dirijări precise a procesului de calcul spre soluția (poziția) dorită. Aceste procedee sunt prezentate în continuarea Tab.2.1. Pentru fiecare grupă se consideră un sistem de coordonate absolut, solidar cu baza mecanismului și câte un sistem solidar cu fiecare element. Se adoptă, de asemenea, un sistem ajutător (notat cu indicele 0 (zero)) definit în raport cu poziția cuplelor exterioare. În final se urmărește determinarea poziției fiecărui element, concretizată prin coordonatele originii și unghiul de poziție ale sistemului legat de acesta, în raport cu sistemul absolut.

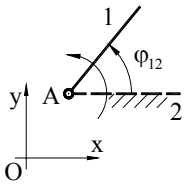
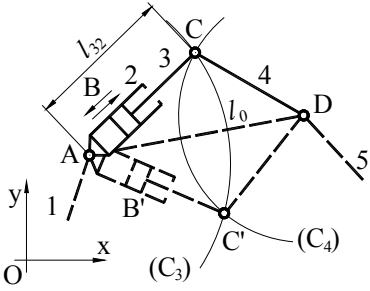
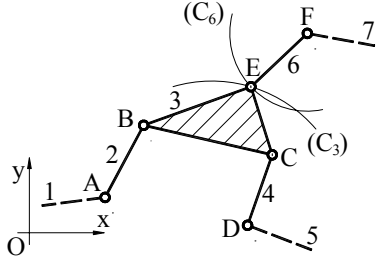
Tabelul 2.1

<p>Schema grupei și rezolvarea grafică</p>	1.	Parametrii de intrare
	2.	Modelul grafic
	3.	Modelul analitic
	4.	Condițiile de existență ale soluțiilor reale
	5.	Configurațiile critice
<p>RRR (0 / 2 / 2 asp. 1)</p>  <p>$l_0 = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2}$</p>	1.	<p>1) $l_2 = AB, l_3 = BC$</p> <p>2) $A(x_A, y_A), C(x_C, y_C)$</p>
2.	Se intersectează cercul (C_2) cu centrul în A, de rază l_2 , cu cercul (C_3) cu centrul în C, de rază l_3 . Rezultă punctul B (B').	
3.	<p>$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2 \quad (C_2)$</p> <p>$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = l_3^2 \quad (C_3)$</p> <p>$\Rightarrow B(x_B, y_B)$</p>	
4.	$ l_2 - l_3 \leq l_0 \leq l_2 + l_3$	
5.	$l_0 = l_2 - l_3 $ sau $l_0 = l_2 + l_3$ A, B, C – coliniare	
<p>RRT (0 / 2 / 2 asp. 2)</p>  <p>$l_0 = \frac{ (y_A - y_P) - (x_A - x_P) \cdot \text{tg} \varphi_3 }{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_3}}$</p>	1.	<p>1) $l_2 = AB$</p> <p>2) $A(x_A, y_A), D_3(P(x_P, y_P), \varphi_3)$</p>
2.	Se intersectează cercul (C_2) cu centrul în A, de rază l_2 cu dreapta (D_3) – axa cuplei de translație. Rezultă punctul B (B').	
3.	<p>$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2 \quad (C_2)$</p> <p>$\frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \text{tg} \varphi_3 \quad (D_3)$</p> <p>$\Rightarrow B(x_B, y_B)$</p>	
4.	$l_2 \geq l_0 $	
5.	$l_2 = l_0 $ AB perpendiculară pe dreapta (D_3)	

Tabelul 2.1 (continuare)

<p>RTR (0 / 2 / 2 asp. 3)</p>  <p>$l_0 = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) - 2) $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 2. Se unesc punctele A și B. Rezultă axa de translație a cuplei de translație (D_2). 3. $\text{tg } \varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \varphi_2$ 4. $l_0 \geq 0$ 5. $l_0 = 0, A \equiv B$
<p>TRT (0 / 2 / 2 asp. 4)</p> 	<ol style="list-style-type: none"> 1) - 2) $(D_2)(P(x_P, y_P), \varphi_2), (D_3)(R(x_R, y_R), \varphi_3)$ 2. Se intersectează dreptele (D_2) și (D_3) – axele cuplelor de translație. Rezultă punctul A. 3. $\frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \text{tg } \varphi_2 \quad (D_2)$ $\frac{y_A - y_R}{x_A - x_R} = \text{tg } \varphi_3 \quad (D_3)$ $\Rightarrow A(x_A, y_A)$ 4. $\varphi_2 \neq \varphi_3$ 5. $(D_2) \equiv (D_3)$
<p>RTT (0 / 2 / 2 asp. 5)</p> 	<ol style="list-style-type: none"> 1) φ_{23} 2) $A(x_A, y_A), (D_3)(P(x_P, y_P), \varphi_3)$ 2. Se trasează axa de translație (D_1) prin A și înclinată cu unghiul φ_{23} față de axa de translație (D_3). 3. $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_{23}$ 4. $\varphi_{23} \neq 0$ 5. $(D_2) \equiv (D_3)$

Tabelul 2.1 (continuare)

<p>R (1 / 1 / 1)</p> 	<p>1. 1) – 2) A (x_A, y_A) 3) φ₁₂</p> <p>Observație: Parametrii de intrare determină direct poziția elementului 1. Nu există condiții pentru soluție reală și nici poziții critice.</p>
<p>RTRR (1 / 2 / 2)</p>  <p>$l_0 = \sqrt{(y_D - y_A)^2 + (x_D - x_A)^2}$</p>	<p>1. 1) l₄ = CD 2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D) 3) l₃₂ = AC</p> <p>2. Se intersectează cercul (C₃) cu centrul în A, de rază l₃₂ cu cercul (C₄) cu centrul în D, de rază l₄. Rezultă punctul C (C').</p> <p>3. $(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = l_{32}^2$ (C₃) $(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_4^2$ (C₄) ⇒ C (x_C, y_C)</p> <p>4. $l_{32} - l_4 \leq l_0 \leq l_{32} + l_4$</p> <p>5. l₀ = l₃₂ - l₄ sau l₀ = l₃₂ + l₄ A, C, D - coliniare</p>
<p>0 / 3 / 3 cu cuple de rotație</p> 	<p>1. 1) l₂ = AB, l₄ = CD, l₆ = EF, l₃₁ = BC, l₃₂ = BE, l₃₃ = CE 2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D), F (x_F, y_F)</p> <p>2. Se intersectează cercul (C₆) cu centrul în F, de rază l₆, cu curba (C₃) descrisă de punctul E, aparținând elementului 3, în mișcarea mecanismului patrulater ABCD, cu articulațiile A și D fixe. Rezultă punctul E.</p>
<p>3.</p>	<p>$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l_2^2$ $(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = l_{31}^2$ $(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_4^2$ $(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2 = l_{32}^2$ $(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = l_6^2$ $(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = l_{33}^2$ ⇒ B (x_B, y_B), C (x_C, y_C), E (x_E, y_E)</p>
<p>4.</p>	<p>-</p>
<p>5.</p>	<p>AB, CD, EF concurente sau AB, CD, EF paralele.</p>

Tabelul 2.1 (continuare)

<p>0 / 4 / 2 cu cuple de rotație</p>	<p>1. 1) $l_{21} = AB, l_{22} = AF, l_{23} = BF,$ $l_3 = BC, l_5 = EF,$ $l_{41} = CD, l_{42} = DE, l_{43} = CE,$ 2) A $(x_A, y_A), D (x_D, y_D)$</p> <p>2. Se intersectează cercul (C_4) cu centrul în D, de rază l_{42} cu curba (C_{45}) descrisă de punctul E, aparținând elementelor 4 și 5, în mișcarea mecanismului patrulater ABCD, cu articulațiile A și D fixe, amplificat cu grupa CEF. Rezultă punctul E.</p>
<p>3.</p> $\begin{aligned} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 &= l_{21}^2 & (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 &= l_5^2 \\ (x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2 &= l_{22}^2 & (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 &= l_{41}^2 \\ (x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2 &= l_{23}^2 & (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 &= l_{42}^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 &= l_3^2 & (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 &= l_{43}^2 \end{aligned}$ <p>$\Rightarrow B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), E(x_E, y_E), F(x_F, y_F),$</p>	
<p>4. -</p>	
<p>5. AD, BC, EF concurente sau AD, BC, EF paralele</p>	

■ Grupa structurală RRR (Fig.2.1)

Parametrii de intrare:

1) $l_2 = AB, l_3 = BC$

2) A $(x_A, y_A), C(x_C, y_C)$

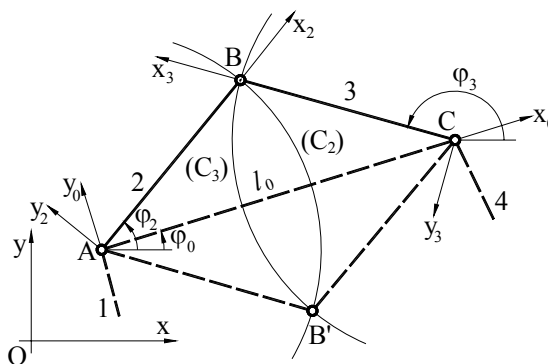


Fig. 2.1

Se calculează parametrii φ_0 și $l_0 = AC$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \quad (*) \quad , \quad l_0 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

Se scriu ecuațiile cercurilor (C_2) și (C_3) în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= l_2^2 \\ (x_0 - l_0)^2 + y_0^2 &= l_3^2 \end{aligned}$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului $B(B')$ în sistemul Ax_0y_0

$$\begin{aligned} x_{0B} &= \frac{l_2^2 - l_3^2 + l_0^2}{2 \cdot l_0} \\ y_{0B} &= \pm \sqrt{l_2^2 - x_{0B}^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Printr-o transformare de coordonate, din sistemul Ax_0y_0 în sistemul Oxy , se obțin coordonatele absolute ale punctului $B(B')$

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + x_{0B} \cos \varphi_0 - y_{0B} \sin \varphi_0 \\ y_B &= y_A + x_{0B} \sin \varphi_0 + y_{0B} \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

Se calculează unghiurile φ_2 și φ_3 :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

Parametrii de ieșire:

A (x_A, y_A), **φ_2** ; **C** (x_C, y_C), **φ_3**

Obsevații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele din formula (2.1). Semnul (+) conduce la poziția ABC , iar semnul (-) la $AB'C$.

2) Pentru a obține soluții reale, deci aplicabile practic, parametrii de intrare trebuie să respecte următoarele condiții, care rezultă atât din procedeul grafic, cât și din analiza expresiei (2.1),

$$|l_2 - l_3| \leq l_0 \leq l_2 + l_3. \quad (2.2)$$

3) Când condițiile (2.2) sunt îndeplinite la limită, cu semnul egal,

$$\begin{cases} |l_2 - l_3| = l_0 \\ l_2 + l_3 = l_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

(*) Determinarea unghiurilor de poziție prin intermediul funcției arctg , care intervine de multe ori în acest capitol, se face ținând seama de indicațiile date în ANEXA 1.4.

se obțin două configurații critice în care punctele A, B și C sunt coliniare. Prin configurație se înțelege poziția unui element în raport cu celălalt.

▪ **Grupa structurală RRT (Fig.2.2)**

Parametrii de intrare:

1) $l_2 = AB, l_3 = 0$

2) $A(x_A, y_A), (D_3)(P(x_P, y_P), \varphi_3)$

Se determină poziția punctului Q situat la intersecția dreptei (D_3) cu perpendiculara dusă pe aceasta prin A

$$x_Q = \frac{m(y_A - y_P) + m^2 x_P + x_A}{1 + m^2}$$

$$y_Q = \frac{m(x_A - x_P) + m^2 y_A + y_P}{1 + m^2}$$

în care $m = \operatorname{tg}\varphi_3$.

Se calculează $|l_0| = AQ$ și φ_0

$$|l_0| = \sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2}; \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A}$$

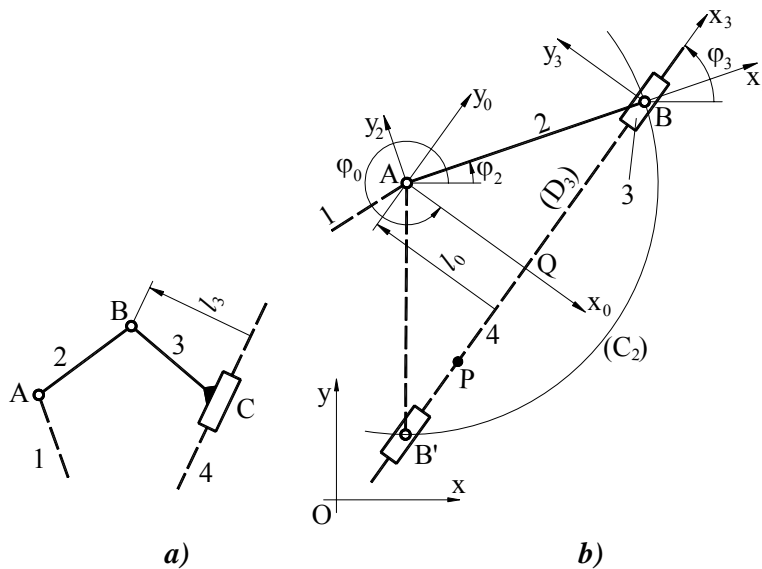


Fig. 2.2

Se scriu ecuațiile cercului (C_2) și a dreptei (D_3) în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$x_0^2 + y_0^2 = l_2^2$$

$$x_0 = |l_0|$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului $B(B')$ în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$x_{0B} = |l_0|$$

$$y_{0B} = \pm \sqrt{l_2^2 - l_0^2} \quad (2.4)$$

Printr-o transformare de coordonate din sistemul Ax_0y_0 în sistemul Oxy , se obține poziția punctului $B(B')$

$$x_B = x_A + x_{0B} \cos \varphi_0 - y_{0B} \sin \varphi_0$$

$$y_B = y_A + x_{0B} \sin \varphi_0 + y_{0B} \cos \varphi_0$$

Unghiul φ_2 se determină din relația:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Parametrii de ieșire:

A (x_A, y_A), φ_2 ; **B** (x_B, y_B), φ_3

Observații

1) Problema are două soluții care conduc la pozițiile AB – semnul (+) în formula (2.4) și AB' – semnul (-).

2) Condiția pentru obținerea unei soluții reale rezultă din expresia (2.4) și este

$$l_2 \geq |l_0|. \quad (2.5)$$

3) Configurația critică, corespunzătoare egalității din (2.5)

$$l_2 = |l_0|, \quad (2.6)$$

se înregistrează când dreapta AB este perpendiculară pe axa de translație (D_3).

■ **Grupa structurală RTR (Fig.2.3)**

Parametrii de intrare:

1) $l_2 = 0, l_3 = 0$

2) **A** (x_A, y_A), **C** (x_C, y_C)

Se determină unghiul $\varphi_2 = \varphi_3$ și distanța $l_0 = AC$

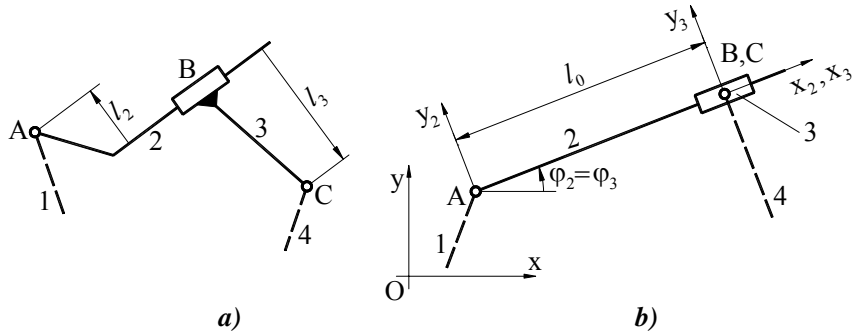


Fig. 2.3

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}, \quad l_0 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

Parametrii de ieșire:

A (x_A, y_A), φ_2 ; **C** (x_C, y_C), φ_3

Observații

1) Problema are o singură soluție, întotdeauna reală, indiferent de poziția punctelor A și C. Distanța l_0 poate lua orice valoare, evident, pozitivă

$$l_0 \geq 0. \quad (2.7)$$

2) Configurația critică se obține când

$$l_0 = 0, \quad (2.8)$$

deci atunci când punctele A și C coincid.

■ **Grupa structurală RTRR** (Fig.2.4)

Parametrii de intrare:

1) $l_4 = DC$

2) **A** (x_A, y_A), **D** (x_D, y_D)

3) $l_{32} = AC$

Procedeeul este asemănător cu cel de la grupa structurală RRR, așa încât vom indica relațiile de calcul fără explicații suplimentare.

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}, \quad l_0 = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

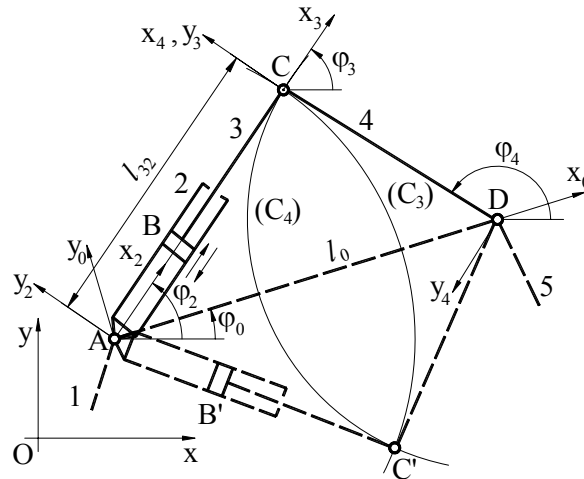


Fig. 2.4

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = l_{32}^2 \\ (x_0 - l_0)^2 + y_0^2 = l_4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{0C} = \frac{l_{32}^2 - l_4^2 + l_0^2}{2 \cdot l_0} \\ y_{0C} = \pm \sqrt{l_{32}^2 - x_{0C}^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} x_C = x_A + x_{0C} \cos \varphi_0 - y_{0C} \sin \varphi_0 \\ y_C = y_A + x_{0C} \sin \varphi_0 + y_{0C} \cos \varphi_0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}, \quad \operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Parametrii de ieșire:

A (x_A, y_A), φ_2 ; **C** (x_C, y_C), φ_3 ; **D** (x_D, y_D), φ_4

Observații

1) Problema are două soluții determinate de semnele din formula (2.9).
Semnul (+) corespunde cu poziția ABCD, iar (-) cu poziția AB'C'D'.

2) Condițiile pentru soluțiile reale, rezultate din analiza expresiei (2.9), sunt

$$|l_{32} - l_4| \leq l_0 \leq l_{32} + l_4. \quad (2.10)$$

3) Configurațiile critice sunt caracterizate de egalitățile

$$\begin{cases} |l_{32} - l_4| = l_0 \\ l_{32} + l_4 = l_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

și se obțin când punctele A, C și D sunt coliniare.

2.1.3. Metoda ecuațiilor vectoriale

2.1.3.1. Prezentare generală

Această metodă este folosită pentru determinarea vitezelor și a accelerațiilor, în special, în cazul mecanismelor plane. Ea se asociază, de obicei, cu metoda intersecțiilor locurilor geometrice, pentru a efectua complet analiza cinematică. Metoda presupune folosirea unor ecuații vectoriale care exprimă relația dintre vitezele sau accelerațiile unei perechi de puncte aparținând mecanismului. Aceste ecuații, grupate în sisteme, se rezolvă grafic sau analitic. Ecuațiile utilizate sunt de două tipuri, funcție de relația dintre cele două puncte.

▪ Ecuațiile de tip I

Ecuațiile de acest tip intervin când cele două puncte aparțin aceluiași element, cum sunt punctele A și B care aparțin elementului 1 (Fig.2.5). Ecuația de viteze este

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (2.12)$$

în care

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB}; \bar{v}_{BA} \begin{cases} |v_{BA}| = |\omega_1| \cdot l_{AB} \\ \perp AB \\ \text{se rotește } \overline{AB} \text{ cu } 90^\circ \text{ în} \\ \text{sensul } \omega_1 \end{cases}$$

Expresia analitică a vectorului \bar{v}_{BA} este

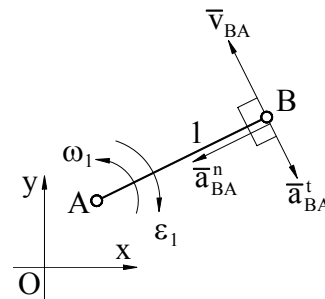


Fig. 2.5

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-\omega_1(y_B - y_A)) + \vec{j} \cdot \omega_1(x_B - x_A)$$

iar proiecțiile ecuației (2.12) pe axele sistemului de coordonate sunt

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \omega_1(y_B - y_A)$$

$$v_{By} = v_{Ay} + \omega_1(x_B - x_A).$$

Ecuația de **acclerații** are forma

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \quad (2.13)$$

în care

$$\vec{a}_{BA}^n = -\omega_1^2 \overline{AB}; \vec{a}_{BA}^t \begin{cases} |\vec{a}_{BA}^n| = \omega_1^2 l_{AB} \\ // \overline{AB} \\ B \rightarrow A \end{cases}$$

$$\vec{a}_{BA}^t = \vec{\varepsilon}_1 \times \overline{AB}; \vec{a}_{BA}^t \begin{cases} |\vec{a}_{BA}^t| = |\varepsilon_1| \cdot l_{AB} \\ \perp \overline{AB} \\ \text{se rotește } \overline{AB} \text{ cu } 90^\circ \text{ în sensul } \varepsilon_1 \end{cases}$$

Expresiile analitice ale vectorilor \vec{a}_{BA}^n și \vec{a}_{BA}^t sunt

$$\vec{a}_{BA}^n = -\omega_1^2 \cdot \overline{AB} = \vec{i}(-\omega_1^2(x_B - x_A)) + \vec{j}(-\omega_1^2(y_B - y_A))$$

$$\vec{a}_{BA}^t = \vec{\varepsilon}_1 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-\varepsilon_1(y_B - y_A)) + \vec{j}\varepsilon_1(x_B - x_A)$$

iar proiecțiile ecuației (2.13) pe axele de coordonate sunt

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \omega_1^2(x_B - x_A) - \varepsilon_1(y_B - y_A)$$

$$a_{By} = a_{Ay} - \omega_1^2(y_B - y_A) + \varepsilon_1(x_B - x_A)$$

■ Ecuațiile de tipul II

Aceste ecuații se utilizează când cele două puncte coincid ca poziție, dar aparțin unor elemente diferite, legate prin cuplă de translație, cum sunt $A \in 1$ și $B \in 2$ (Fig.2.6).

Ecuația de **viteze** este

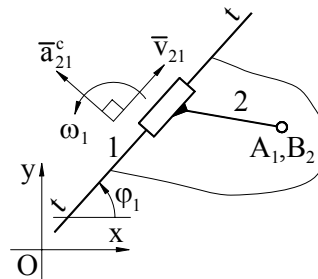


Fig. 2.6

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{21}, \quad (2.14)$$

în care $\bar{v}_{21} // tt$ este viteza relativă în mișcarea de translație a elementului 2 în raport cu elementul 1. Proiecțiile ecuației (2.14) pe axele de coordonate sunt

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{21} \cdot \cos \varphi_1$$

$$v_{By} = v_{Ay} + v_{21} \cdot \sin \varphi_1.$$

Ecuația de **acclerații** are forma

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{21}^c + \bar{a}_{21}^r, \quad (2.15)$$

în care accelerația relativă $\bar{a}_{21}^r // tt$, iar accelerația Coriolis (\bar{a}_{21}^c) are caracteristicile

$$\bar{a}_{21}^c = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{21}; \bar{a}_{21}^c \left\{ \begin{array}{l} |\bar{a}_{21}^c| = 2|\omega_1| \cdot |v_{21}| \\ \perp tt \\ \text{se rotește } \bar{v}_{21} \text{ cu } 90^\circ \text{ în sensul } \omega_1 \end{array} \right.$$

$$\bar{a}_{21}^c = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{21} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \bar{\omega}_1 \\ v_{21x} & v_{21y} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (-2\omega_1 v_{21y}) + \bar{j} \cdot (2\omega_1 v_{21x}).$$

Proiecțiile ecuației (2.15) pe axele de coordonate sunt

$$a_{Bx} = a_{Ax} - 2\omega_1 v_{21y} + a_{21}^r \cos \varphi_1$$

$$a_{By} = a_{Ay} + 2\omega_1 v_{21x} + a_{21}^r \sin \varphi_1.$$

Trebuie menționat că existența cuplei de translație între elementele 1 și 2 împiedică rotația relativă dintre aceste elemente, astfel că,

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 \text{ și } \omega_1 = \omega_2$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 \text{ și } \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

2.1.3.2. Analiza cinematică a grupelor structurale

Aplicarea metodei, în vederea determinării vitezelor și a accelerațiilor în cazul grupelor structurale uzuale, este arătată în Tab.2.2, în care se indică ecuațiile vectoriale utilizate. Pentru a demonstra modul de rezolvare a ecuațiilor vectoriale, pe cale grafică și pe cale analitică, se prezintă, în detaliu, procedeele de analiză ale grupelor structurale 0/2/2, RRT și 0/3/3 cu cuple de rotație.

Tabelul 2.2

Schema grupei structurale	Parametrii de intrare	Sistemele de ecuații vectoriale	Parametrii de ieșire
1	2	3	4
<p>RRR (0/2/2, aspect 1)</p>	\bar{v}_A, \bar{v}_C	(I) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ (I) $\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}$	Elem. 2: \bar{v}_A, \bar{v}_B Elem. 3: \bar{v}_B, \bar{v}_C
\bar{a}_A, \bar{a}_C	(I) $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$ (I) $\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t$	Elem. 2: \bar{a}_A, \bar{a}_B Elem. 3: \bar{a}_B, \bar{a}_C	
<p>RRT (0/2/2, aspect 2)</p> <p>M ∈ 4</p>	$\bar{v}_A, \bar{v}_M, \omega_4$	(I) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ (II) $\bar{v}_B = \bar{v}_M + \bar{v}_{34}$	Elem. 2: \bar{v}_A, \bar{v}_B Elem. 3: $\bar{v}_B, \omega_3 = \omega_4$
$\bar{a}_A, \bar{a}_M, \varepsilon_4$	(I) $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$ (II) $\bar{a}_B = \bar{a}_M + \bar{a}_{34}^c + \bar{a}_{34}^t$	Elem. 2: \bar{a}_A, \bar{a}_B Elem. 3: $\bar{a}_B, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$	
<p>RTR (0/2/2, aspect 3)</p> <p>M ∈ 3, N ∈ 2</p>	\bar{v}_A, \bar{v}_C	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (I) $\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$ (II) $\bar{v}_N = \bar{v}_C + \bar{v}_{23}$ (I) $\bar{v}_N = \bar{v}_A + \bar{v}_{NA}$	Elem. 2: \bar{v}_A, \bar{v}_N Elem. 3: \bar{v}_C, \bar{v}_M
\bar{a}_A, \bar{a}_C	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{32}^c + \bar{a}_{32}^t$ (I) $\bar{a}_M = \bar{a}_C + \bar{a}_{MC}^n + \bar{a}_{MC}^t$ (II) $\bar{a}_N = \bar{a}_C + \bar{a}_{23}^c + \bar{a}_{23}^t$ (I) $\bar{a}_N = \bar{a}_A + \bar{a}_{NA}^n + \bar{a}_{NA}^t$	Elem. 2: \bar{a}_A, \bar{a}_N Elem. 3: \bar{a}_C, \bar{a}_M	

Tabelul 2.2 (continuare)

1	2	3	4
<p>TRT (0/2/2, aspect 4)</p> <p>M ∈ 1, N ∈ 4</p>	$\bar{v}_M, \bar{v}_N,$ ω_1, ω_4	(II) $\bar{v}_B = \bar{v}_M + \bar{v}_{21}$ (II) $\bar{v}_B = \bar{v}_N + \bar{v}_{34}$	Elem.2: $\bar{v}_B, \omega_2 = \omega_1$ Elem.3: $\bar{v}_B, \omega_3 = \omega_4$
	$\bar{a}_M, \bar{a}_N,$ $\varepsilon_1, \varepsilon_4$	(II) $\bar{a}_B = \bar{a}_M + \bar{a}_{21}^c + \bar{a}_{21}^r$ (II) $\bar{a}_B = \bar{a}_N + \bar{a}_{34}^c + \bar{a}_{34}^r$	Elem.2: $\bar{a}_B, \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ Elem.3: $\bar{a}_B, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
<p>RTT (0/2/2, aspect 5)</p> <p>M ∈ 3, N ∈ 4</p>	\bar{v}_A, ω_4	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (II) $\bar{v}_M = \bar{v}_N + \bar{v}_{34}$	Elem.2: $\bar{v}_A,$ $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ Elem.3: $\bar{v}_M, \omega_3 = \omega_4$
	\bar{a}_A, ε_4	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{32}^c + \bar{a}_{32}^r$ (II) $\bar{a}_M = \bar{a}_N + \bar{a}_{34}^c + \bar{a}_{34}^r$	Elem.2: $\bar{a}_A,$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$ Elem.3: $\bar{a}_M, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
<p>R (1/1/1)</p>	\bar{v}_A, ω_1 \bar{a}_A, ε_1	Parametrii de intrare determină direct distribuția de viteze și de accelerații ale elementului 1.	Elem. 1: \bar{v}_A, ω_1 Elem. 1: \bar{a}_A, ε_1
<p>RTRR (1/2/2)</p> <p>M ∈ 3, N ∈ 2</p>	$\bar{v}_A, \bar{v}_D, \bar{v}_{32}$	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (I) $\bar{v}_C = \bar{v}_M + \bar{v}_{CM}$ (I) $\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{CD}$ (II) $\bar{v}_N = \bar{v}_C + \bar{v}_{23}$	Elem.2: \bar{v}_A, \bar{v}_N Elem.3: \bar{v}_M, \bar{v}_C Elem.4: \bar{v}_D, \bar{v}_C
	$\bar{a}_A, \bar{a}_D, \bar{a}_{32}^r$	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{32}^c + \bar{a}_{32}^r$ (I) $\bar{a}_C = \bar{a}_M + \bar{a}_{CM}^n + \bar{a}_{CM}^t$ (I) $\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^t$ (II) $\bar{a}_N = \bar{a}_C + \bar{a}_{23}^c + \bar{a}_{23}^r$	Elem. 2: \bar{a}_A, \bar{a}_N Elem. 3: \bar{a}_M, \bar{a}_C Elem. 4: \bar{a}_D, \bar{a}_C

▪ **Grupa structurală RRT (Fig.2.7)**

Se definește un punct M care coincide cu B, dar aparține elementului 4.

Parametrii de intrare:

$$\underline{\bar{v}}_A (v_{Ax}, v_{Ay}), \underline{\bar{v}}_M (v_{Mx}, v_{My}), \omega_4$$

$$\underline{\bar{a}}_A (a_{Ax}, a_{Ay}), \underline{\bar{a}}_M (a_{Mx}, a_{My}), \epsilon_4$$

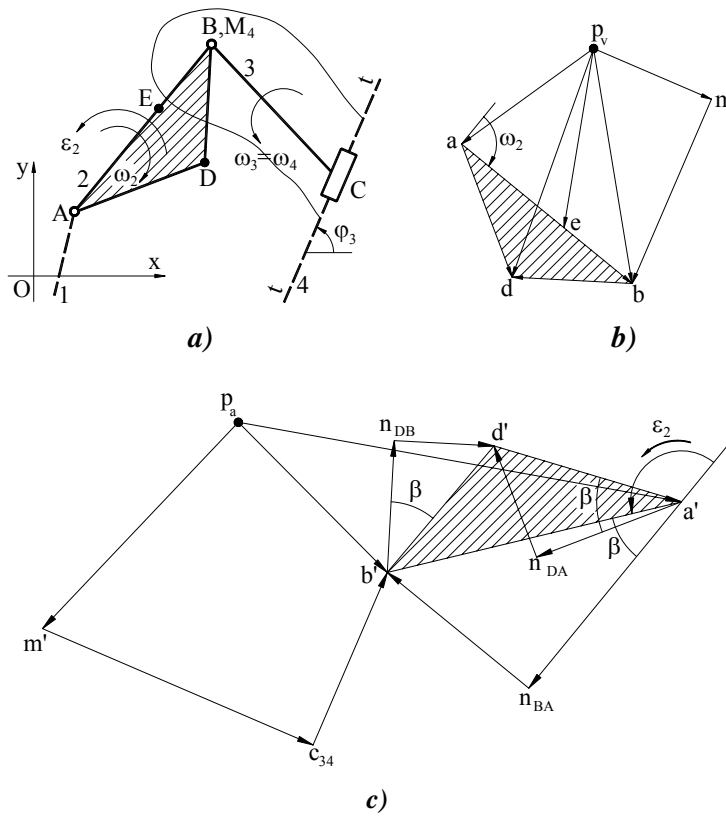


Fig. 2.7

Pentru **analiza vitezelor** se scriu următoarele ecuații

$$\begin{cases} \text{(I)} \underline{\bar{v}}_B = \underline{\bar{v}}_A + \underline{\bar{v}}_{BA} \\ \text{(II)} \underline{\bar{v}}_B = \underline{\bar{v}}_M + \underline{\bar{v}}_{34} \end{cases} \quad (2.16)$$

Se aplică, pentru început, **varianta grafică** de rezolvare. În sistemul (2.16) vectorul \bar{v}_B este necunoscut, vectorii \bar{v}_A și \bar{v}_M se cunosc, iar pentru vectorii $\bar{v}_{BA} \perp AB$ și $\bar{v}_{34} // tt$ se cunosc direcțiile. Aceasta este structura generală, în ce privește vectorii cunoscuți și necunoscuți, pentru sistemele de ecuații vectoriale utilizate în cadrul metodei. Ca urmare și modul de rezolvare este unic. Se adoptă un punct p_v – numit polul vitezelor (Fig.2.7.b) în care se aplică \bar{v}_A ($\overline{p_v a}$), iar prin punctul a se trasează suportul vectorului $\bar{v}_{BA} \perp AB$. Această dreaptă este locul geometric al punctului b – extremitatea vectorului \bar{v}_B ($\overline{p_v b}$). În mod analog, se aplică în p_v vectorul \bar{v}_M ($\overline{p_v m}$), iar prin punctul m se trasează suportul vectorului $\bar{v}_{34} // tt$ care constituie, de asemenea, locul geometric al punctului b . Evident, poziția lui b se găsește la intersecția celor două drepte, iar $\overline{p_v b}$ reprezintă \bar{v}_B . Din aceeași construcție rezultă și vitezele relative \bar{v}_{BA} (\overline{ab}) și \bar{v}_{34} (\overline{mb}). Cunoscând \bar{v}_B , distribuția de viteze, pentru cele două elemente, este determinată. Astfel, în cazul elementului 2 se cunosc \bar{v}_A și \bar{v}_B , iar în cazul elementului 3, \bar{v}_B și $\omega_3 = \omega_4$. Dacă dorim să calculăm viteza unui punct oarecare $D \in 2$, se scriu ecuațiile

$$(I) \bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA}$$

$$(I) \bar{v}_D = \bar{v}_B + \bar{v}_{DB}$$

în care \bar{v}_A și \bar{v}_B se cunosc, iar $\bar{v}_{DA} \perp AD$ și $\bar{v}_{DB} \perp BD$. Rezolvarea se face la fel ca în cazul sistemului (2.16) rezultând \bar{v}_D ($\overline{p_v d}$), \bar{v}_{DA} (\overline{ad}) și \bar{v}_{DB} (\overline{bd}). Pentru a determina viteza unghiulară ω_2 se aplică formula

$$|\omega_2| = \frac{|v_{BA}|}{l_{AB}},$$

iar sensul se stabilește după regula dată la ecuațiile de tipul I - sensul vitezei unghiulare ω_2 este același cu sensul în care se rotește \overline{AB} pentru a se suprapune peste \bar{v}_{BA} (\overline{ba}).

Construcția grafică, numită poligonul vitezelor (Fig.2.7.b) presupune aplicarea vitezelor absolute în polul vitezelor p_v . Această proprietate implică existența unei teoreme numită **teorema similitudinii cinematice pentru viteze**.

Se consideră trei puncte care aparțin unui element. Triunghiul format de extremitățile vitezelor absolute este asemenea și rotit cu 90^0 în sensul vitezei unghiulare, în raport cu triunghiul format din cele trei puncte.

Pentru demonstrarea teoremei să considerăm punctele A, B și D. Triunghiul abd este, într-adevăr, asemenea și rotit cu 90^0 în sensul vitezei

unghiulare față de triunghiul ABD, pentru că laturile sale **ab**, **ad**, și **bd** reprezintă vitezele relative \bar{v}_{BA} , \bar{v}_{DA} și \bar{v}_{DB} .

Teorema permite determinarea vitezei unui punct când se cunosc vitezele altor două puncte ale aceluiași element. Ea este foarte utilă în cazul în care punctele sunt coliniare. Se consideră, în acest sens, punctul E coliniar cu A și B. Putem scrie sistemul

$$(I) \bar{v}_E = \bar{v}_A + \bar{v}_{EA}$$

$$(I) \bar{v}_E = \bar{v}_B + \bar{v}_{EB},$$

care nu se poate rezolva grafic pentru că suportul vitezei $\bar{v}_{EA} \perp AB$ se suprapune peste suportul vitezei $\bar{v}_{EB} \perp AB$, rezultând o nedeterminare. Aplicând teorema similitudinii ($\Delta aeb \sim \Delta ABE$) rezultă că punctul **e** trebuie să fie coliniar cu **a** și **b**, iar poziția lui se obține din proporționalitatea laturilor

$$\frac{ae}{AE} = \frac{ab}{AB} \Rightarrow ae = AE \frac{ab}{AB}.$$

Pentru **rezolvarea analitică**, sistemul (2.16) se proiectează pe axele sistemului de coordonate fix, după modelul indicat la cele două tipuri de ecuații

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \omega_2 (y_B - y_A)$$

$$v_{By} = v_{Ay} + \omega_2 (x_B - x_A)$$

$$v_{Bx} = v_{Mx} + v_{34} \cdot \cos \varphi_3$$

$$v_{By} = v_{My} + v_{34} \cdot \sin \varphi_3.$$

În felul acesta se obține un sistem liniar în necunoscutele v_{Bx} , v_{By} , ω_2 , v_{34} , care se poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (y_B - y_A) & 0 \\ 0 & 1 & -(x_B - x_A) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ \omega_2 \\ v_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Mx} \\ v_{My} \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

și care se poate rezolva fie prin metoda directă (regula lui Cramer), fie printr-un procedeu numeric.

Observație

Sistemul (2.17) este compatibil, determinat dacă determinantul său

$$D = (x_B - x_A) \cos \varphi_3 + (y_B - y_A) \sin \varphi_3$$

este $D \neq 0$. Dacă $D = 0$, rezultă relația

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_3}$$

care arată că dreapta AB este perpendiculară pe axa de translație tt. Aceasta este tocmai configurația critică a grupei structurale. În concluzie, când grupa se găsește în configurația critică, problema vitezelor admite o singularitate (incompatibilitate sau nedeterminare). Această concluzie este valabilă pentru toate grupele structurale.

Pentru **analiza accelerațiilor** se scriu următoarele ecuații vectoriale

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{\underline{a}}_B &= \underline{\underline{a}}_A + \underline{\underline{a}}_{BA}^n + \underline{\underline{a}}_{BA}^t \\ \text{(II)} \quad \underline{\underline{a}}_B &= \underline{\underline{a}}_M + \underline{\underline{a}}_{34}^c + \underline{\underline{a}}_{34}^r \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vectorii $\underline{\underline{a}}_A$ și $\underline{\underline{a}}_M$ se cunosc inițial, vectorii $\underline{\underline{a}}_{BA}^n$ și $\underline{\underline{a}}_{34}^c$ se pot determina

$$\underline{\underline{a}}_{BA}^n \begin{cases} |\underline{\underline{a}}_{BA}^n| = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \\ // AB \\ B \rightarrow A \end{cases} ; \quad \underline{\underline{a}}_{34}^c \begin{cases} |\underline{\underline{a}}_{34}^c| = 2|\omega_3| \cdot |v_{34}| \\ \perp tt \\ \text{se rotește } \underline{\underline{v}}_{34} \text{ cu } 90^\circ \text{ în sensul } \omega_3 \end{cases}$$

iar pentru vectorii $\underline{\underline{a}}_{BA}^t \perp AB$ și $\underline{\underline{a}}_{34}^r // tt$ se cunosc direcțiile.

Rezolvarea grafică este similară cu cea utilizată la viteze. Se adoptă un punct numit polul accelerațiilor - \mathbf{p}_a (Fig.2.7.c) în care se aplică $\underline{\underline{a}}_A$ ($\overline{p_a a'}$). În extremitatea acestui vector se aplică $\underline{\underline{a}}_{BA}^n$ ($\overline{a'n_{BA}}$), iar prin extremitatea sa se trasează suportul vectorului $\underline{\underline{a}}_{BA}^t \perp AB$. Acesta este locul geometric al punctului \mathbf{b}' - extremitatea vectorului $\underline{\underline{a}}_B$ ($\overline{p_a b'}$). Se procedează analog cu vectorii din ecuația a doua: se reprezintă succesiv $\underline{\underline{a}}_M$ ($\overline{p_a m'}$), $\underline{\underline{a}}_{34}^c$ ($\overline{m'c_{34}}$) și suportul vectorului $\underline{\underline{a}}_{34}^r // tt$ care este locul geometric al punctului \mathbf{b}' . Desigur, \mathbf{b}' se găsește la intersecția celor două drepte suport, iar $\overline{p_a b'}$ reprezintă $\underline{\underline{a}}_B$. În poligonul accelerațiilor apar, de asemenea, $\underline{\underline{a}}_{BA}^t$ ($\overline{n_{BA} b'}$) și $\underline{\underline{a}}_{34}^r$ ($\overline{c_{34} b'}$). În aceste condiții distribuția de accelerații este determinată: pentru elementul 2 se cunosc $\underline{\underline{a}}_A$ și $\underline{\underline{a}}_B$, iar pentru elementul 3: $\underline{\underline{a}}_B$ și $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.

Pentru a determina accelerația unui punct oarecare $D \in 2$, se scriu ecuațiile

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{\underline{a}}_D &= \underline{\underline{a}}_A + \underline{\underline{a}}_{DA}^n + \underline{\underline{a}}_{DA}^t \\ \text{(I)} \quad \underline{\underline{a}}_D &= \underline{\underline{a}}_B + \underline{\underline{a}}_{DB}^n + \underline{\underline{a}}_{DB}^t \end{aligned}$$

în care $\underline{\underline{a}}_A$ și $\underline{\underline{a}}_B$ se cunosc, $\underline{\underline{a}}_{DA}^n$ și $\underline{\underline{a}}_{DB}^n$ se pot determina

$$\bar{a}_{DA}^n \left\{ \begin{array}{l} |a_{DA}^n| = \omega_2^2 \cdot l_{AD} \\ // AD \\ D \rightarrow A \end{array} \right. ; \quad \bar{a}_{DB}^n \left\{ \begin{array}{l} |a_{DB}^n| = \omega_2^2 \cdot l_{BD} \\ // BD \\ D \rightarrow B \end{array} \right.$$

iar $\bar{a}_{DA}^t \perp AD$ și $\bar{a}_{DB}^t \perp BD$.

Aplicând procedeul de rezolvare descris în cazul sistemului (2.18) se determină \bar{a}_D ($\overline{p_a d'}$). Modulul accelerației unghiulare ε_2 se calculează cu formula

$$|\varepsilon_2| = \frac{|a_{BA}^t|}{l_{AB}},$$

iar sensul se determină după regula dată la ecuațiile de tipul I, ca fiind același cu sensul în care se rotește \overline{AB} pentru a se suprapune peste \bar{a}_{BA}^t .

Faptul că accelerațiile absolute se aplică într-un punct (p_a) determină existența **teoremei similitudinii cinematice pentru accelerații**.

Se consideră trei puncte care aparțin unui element. Triunghiul format de extremitățile accelerațiilor absolute este asemenea cu triunghiul format de cele trei puncte și este rotit față de acesta cu unghiul $(\pi - \beta)$ în sensul accelerației unghiulare. Unghiul β are valoarea dată de relația

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Pentru a demonstra teorema se consideră punctele A, B și D. Din poligonul accelerațiilor se observă că laturile triunghiului $\mathbf{a'b'd'}$ sunt rotite față de cele ale triunghiului \mathbf{ABD} cu același unghi $(\pi - \beta)$ în sensul lui ε_2 .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|a_{BA}^t|}{|a_{BA}^n|} = \frac{|a_{DA}^t|}{|a_{DA}^n|} = \frac{|a_{DB}^t|}{|a_{DB}^n|} = \frac{|\varepsilon_2|}{\omega_2^2}.$$

Ca urmare, cele două triunghiuri $\mathbf{a'b'd'}$ și \mathbf{ABD} sunt asemenea. Teorema similitudinii pentru accelerații se utilizează pentru determinarea directă (fără a scrie ecuații vectoriale) a accelerației unui punct când se cunosc accelerațiile altor două puncte aparținând aceluiași element. Ca și la viteze, aplicarea teoremei este deosebit de utilă când punctele sunt coliniare și când folosirea ecuațiilor vectoriale conduce la o nedeterminare.

Rezolvarea analitică a sistemului (2.18) se face prin proiectarea sa pe axele de coordonate după modelul arătat la cele două tipuri de ecuații

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_{Ax} - \omega_2^2(x_B - x_A) - \varepsilon_2(y_B - y_A) \\ a_{By} &= a_{Ay} - \omega_2^2(y_B - y_A) + \varepsilon_2(x_B - x_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_{Mx} - 2\omega_3 v_{34} \sin \varphi_3 + a_{34}^r \cos \varphi_3 \\ a_{By} &= a_{My} + 2\omega_3 v_{34} \cos \varphi_3 + a_{34}^r \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Acest sistem linear, în necunoscutele a_{Bx} , a_{By} , ε_2 , a_{34}^r , se poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (y_B - y_A) & 0 \\ 0 & 1 & -(x_B - x_A) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ \varepsilon_2 \\ a_{34}^r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{Ax} - \omega_2^2 (x_B - x_A) \\ a_{Ay} - \omega_2^2 (y_B - y_A) \\ a_{Mx} - 2\omega_3 v_{34} \sin \varphi_3 \\ a_{My} + 2\omega_3 v_{34} \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

Deoarece sistemul (2.19) are același determinant cu sistemul (2.17), observația legată de condiția de compatibilitate și determinare menționată la viteze rămâne valabilă și în acest caz.

■ Grupa structurală 0/3/3 cu cuple de rotație (Fig.2.8)

Parametrii de intrare:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A (v_{Ax}, v_{Ay}), \bar{v}_C (v_{Cx}, v_{Cy}), \bar{v}_E (v_{Ex}, v_{Ey}) \\ \bar{a}_A (a_{Ax}, a_{Ay}), \bar{a}_C (a_{Cx}, a_{Cy}), \bar{a}_E (a_{Ex}, a_{Ey}) \end{aligned}$$

Analiza grupei 0/3/3 reclamă utilizarea **metodei punctelor singulare**. Punctele singulare aparțin elementului central 3 (Fig.2.8.a) și se găsesc la intersecția dreptelor AB, CD și EF. În procesul de analiză este necesar numai unul dintre aceste puncte. Să considerăm, în acest sens, punctul S situat la intersecția dreptelor AB și CD.

Pentru **analiza vitezelor** se scriu ecuațiile de tipul I

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \bar{v}_S &= \bar{v}_B + \bar{v}_{SB} \\ \text{(I)} \quad \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \\ \text{(I)} \quad \bar{v}_S &= \bar{v}_D + \bar{v}_{SD} \\ \text{(I)} \quad \bar{v}_D &= \bar{v}_C + \bar{v}_{DC} \end{aligned}$$

din care, prin înlocuiri, se obține sistemul

$$\begin{cases} \bar{v}_S = \bar{v}_A + \bar{v}_{SB} + \bar{v}_{BA} \\ \bar{v}_S = \bar{v}_C + \bar{v}_{SD} + \bar{v}_{DC} \end{cases} \quad (2.20)$$

Se fac notațiile

$$\underline{v}_{SB} + \underline{v}_{BA} = \underline{v}_{SA}$$

$$\underline{v}_{SD} + \underline{v}_{DC} = \underline{v}_{SC}$$

care permit scrierea sistemului (2.20) sub forma

$$\begin{cases} \underline{v}_S = \underline{v}_A + \underline{v}_{SA} \\ \underline{v}_S = \underline{v}_C + \underline{v}_{SC} \end{cases} \quad (2.21)$$

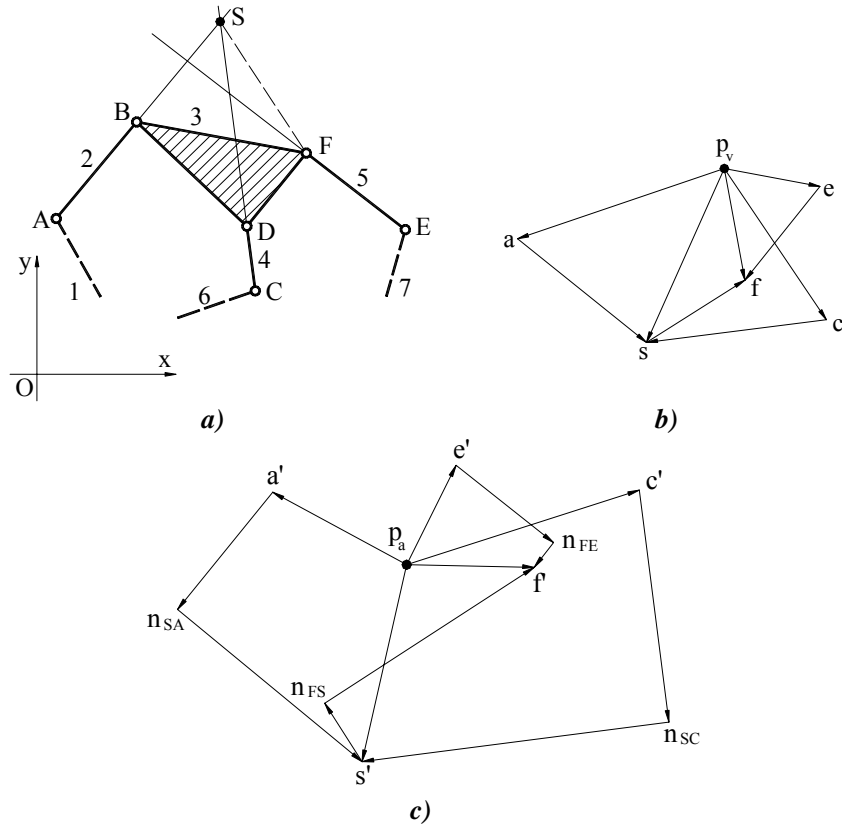


Fig. 2.8

Rezolvarea grafică a sistemului (2.21), în scopul determinării vitezei \underline{v}_S , se face după modelul arătat la sistemul (2.16) pentru că \underline{v}_A și \underline{v}_C sunt cunoscute, iar $\underline{v}_{SA} \perp AB$ ($\underline{v}_{SB} \perp AB$, $\underline{v}_{BA} \perp AB$) și $\underline{v}_{SC} \perp CD$ ($\underline{v}_{SD} \perp CD$, $\underline{v}_{DC} \perp CD$). După determinarea vitezei \underline{v}_S se determină \underline{v}_F folosind sistemul

$$\begin{cases} \bar{v}_F = \bar{v}_S + \bar{v}_{FS} \\ \bar{v}_F = \bar{v}_E + \bar{v}_{FE} \end{cases}$$

Apoi, se pot calcula, cu ajutorul unor sisteme similare \bar{v}_D (în funcție de \bar{v}_F și \bar{v}_C) și \bar{v}_B (în funcție de \bar{v}_F și \bar{v}_A).

Pentru **rezolvarea analitică** se consideră ecuația

$$\bar{v}_S = \bar{v}_B + \bar{v}_{SB}$$

și proiecțiile ei pe axele de coordonate

$$v_{Sx} = v_{Bx} - \omega_3 (y_S - y_B)$$

$$v_{Sy} = v_{By} + \omega_3 (x_S - x_B)$$

Între aceste ecuații se poate elimina ω_3 rezultând

$$\frac{v_{Sx} - v_{Bx}}{v_{Sy} - v_{By}} = - \frac{y_S - y_B}{x_S - x_B}$$

În mod similar, din ecuația

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

rezultă

$$\frac{v_{Bx} - v_{Ax}}{v_{By} - v_{Ay}} = - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Deoarece punctele A, B și S sunt coliniare există proporția

$$\frac{y_S - y_B}{x_S - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

care conduce la relațiile

$$\frac{v_{Sx} - v_{Bx}}{v_{Sy} - v_{By}} = \frac{v_{Bx} - v_{Ax}}{v_{By} - v_{Ay}} = \frac{v_{Sx} - v_{Ax}}{v_{Sy} - v_{Ay}}$$

și, în final, la ecuația

$$\frac{v_{Sx} - v_{Ax}}{v_{Sy} - v_{Ay}} = - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (2.22)$$

Considerând punctele C, D și S se deduce, în același fel, ecuația

$$\frac{v_{Sx} - v_{Cx}}{v_{Sy} - v_{Cy}} = - \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \quad (2.23)$$

Ecuațiile (2.22) și (2.23) formează un sistem liniar

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_C & y_D - y_C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{Ax}(x_B - x_A) + v_{Ay}(y_B - y_A) \\ v_{Cx}(x_B - x_C) + v_{Cy}(y_B - y_C) \end{vmatrix}$$

din care se calculează v_{Sx} și v_{Sy} . Traseul de calcul care se parcurge, în continuare, este similar cu cel arătat la procedeul grafic.

Problema accelerațiilor reclamă folosirea ecuațiilor de tipul I:

$$(I) \bar{a}_S = \bar{a}_B + \bar{a}_{SB}^n + \bar{a}_{SB}^t \quad (2.24)$$

$$(I) \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$$

$$(I) \bar{a}_S = \bar{a}_D + \bar{a}_{SD}^n + \bar{a}_{SD}^t \quad (2.25)$$

$$(I) \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^t$$

Prin înlocuiri se obține sistemul

$$\bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{SB}^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{SB}^t \quad (2.26)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{SD}^n + \bar{a}_{DC}^t + \bar{a}_{SD}^t$$

Se fac notațiile

$$\bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{SB}^n = \bar{a}_{SA}^n$$

$$\bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{SB}^t = \bar{a}_{SA}^t$$

$$\bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{SD}^n = \bar{a}_{SC}^n$$

$$\bar{a}_{DC}^t + \bar{a}_{SD}^t = \bar{a}_{SC}^t$$

În felul acesta sistemul (2.26) se poate scrie

$$\bar{a}_S = \underline{\bar{a}}_A + \underline{\bar{a}}_{SA}^n + \underline{\bar{a}}_{SA}^t \quad (2.27)$$

$$\bar{a}_B = \underline{\bar{a}}_C + \underline{\bar{a}}_{SC}^n + \underline{\bar{a}}_{SC}^t$$

Acest sistem se **rezolvă grafic** după modelul sistemului (2.18) deoarece \bar{a}_A și \bar{a}_C se cunosc inițial, \bar{a}_{SA}^n și \bar{a}_{SC}^n se pot calcula pe baza componentelor lor

$$\bar{a}_{BA}^n \begin{cases} |a_{BA}^n| = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \\ // AB \\ B \rightarrow A \end{cases} ; \quad \bar{a}_{SB}^n \begin{cases} |a_{SB}^n| = \omega_3^2 \cdot l_{BS} \\ // BS \\ S \rightarrow B \end{cases}$$

$$\bar{a}_{DC}^n \begin{cases} |a_{DC}^n| = \omega_4^2 \cdot l_{CD} \\ // CD \\ D \rightarrow C \end{cases} ; \quad \bar{a}_{SD}^n \begin{cases} |a_{SD}^n| = \omega_3^2 \cdot l_{DS} \\ // DS \\ S \rightarrow D \end{cases}$$

iar $\bar{a}_{SA}^t \perp AB$ ($\bar{a}_{BA}^t \perp AB$, $\bar{a}_{SB}^t \perp AB$) și $\bar{a}_{SC}^t \perp CD$ ($\bar{a}_{DC}^t \perp CD$, $\bar{a}_{SD}^t \perp CD$). În continuare se determină \bar{a}_F (în funcție de \bar{a}_S și \bar{a}_E), \bar{a}_D (în funcție de \bar{a}_F și \bar{a}_C) și \bar{a}_B (în funcție de \bar{a}_F și \bar{a}_A).

În cadrul **procedurii analitice** ecuațiile (2.24) și (2.25) se prelucrează asemănător cu ecuațiile de viteze, rezultând, în final, sistemul liniar

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_C & y_D - y_C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{Ax} - \omega_3^2(x_S - x_B) - \omega_2^2(x_B - x_A))(x_B - x_A) + \\ + (a_{Ay} - \omega_3^2(y_S - y_B) - \omega_2^2(y_B - y_A))(y_B - y_A) \\ (a_{Cx} - \omega_3^2(x_S - x_D) - \omega_4^2(x_D - x_C))(x_D - x_C) + \\ + (a_{Cy} - \omega_3^2(y_S - y_D) - \omega_4^2(y_D - y_C))(y_D - y_C) \end{vmatrix},$$

din care se calculează \bar{a}_S (a_{Sx}, a_{Sy}).

2.1.4. Metoda conturilor vectoriale

2.1.4.1. Prezentare generală

Metoda are caracter analitic și poate fi utilizată pentru analiza cinematică a mecanismelor plane și spațiale formate din lanțuri cinemactice închise. Aplicarea metodei presupune adoptarea unui set de contururi independente asociate mecanismului. Pentru fiecare contur se formează un circuit închis de vectori atașați elementelor și se scrie o ecuație de închidere care exprimă faptul că suma vectorilor este egală cu zero. Un vector oarecare din contur \bar{l}_k (Fig.2.9.a) se poate exprima astfel:

$$\bar{l}_k = \bar{u}_k(\varphi_k) \cdot l_k$$

în care l_k este o lungime, iar $\bar{u}_k(\varphi_k)$ este un versor determinat de unghiul φ_k , măsurat în sens

direct (trigonometric) în raport cu semiaxa pozitivă Ox a unui sistem de coordonate fix (solidar cu baza). Prin urmare, fiecare vector al conturului conține doi parametri scalari, l_k și φ_k care pot fi constanți sau variabili. Ecuațiile de închidere se proiectează pe axele de coordonate, rezultând un sistem de ecuații scalare care are ca necunoscute parametrii de poziție ai mecanismului. În cazul mecanismelor de clasa a 2-a ecuațiile de închidere se

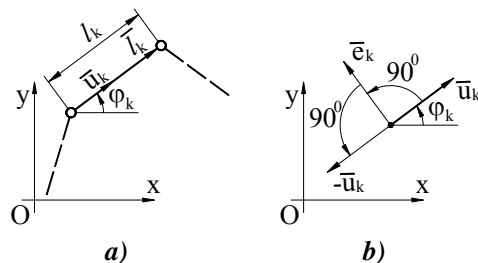


Fig.2.9

pot rezolva separat, într-o ordine stabilită rațional și admit, în general, soluții analitice (directe). Mecanismele de clase mai mari reclamă gruparea ecuațiilor de închidere, iar rezolvarea se poate face numai prin metode numerice. Pentru exemplificare, să considerăm mecanismul din Fig.2.10.a (care provine dintr-un lanț cinematic Stephenson) cu circuitele vectoriale indicate în Fig.2.10.b. Ecuațiile de închidere sunt

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_6 l_6 = 0$$

$$\bar{u}'_1 l_1 + \bar{u}'_2 l'_2 + \bar{u}_4 l_4 + \bar{u}_5 l_5 + \bar{u}'_6 l'_6 = 0$$

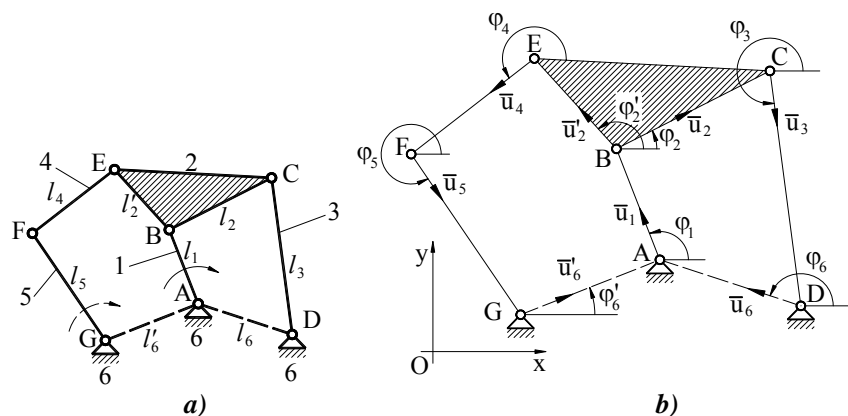


Fig. 2.10

Dacă se adoptă cupla A - conducătoare, mecanismul este de clasa a 2-a (descompunerea în grupe structurale este arătată în Tab.1.8). În această ipoteză prima ecuație de închidere are două necunoscute: φ_2 și φ_3 deoarece l_1, l_2, l_3, l_6 , și φ_6 sunt constante constructive, iar φ_1 este parametrul cuplei conducătoare, considerat cunoscut. Prin urmare această ecuație de închidere se poate rezolva separat fiind echivalentă cu două ecuații scalare. În ecuația a doua intervin necunoscutele φ'_2, φ_4 și φ_5 deoarece $l_1, l'_2, l_4, l_5, l'_6$ și φ'_6 sunt constante constructive, iar φ_1 se cunoaște. Dar, după rezolvarea primei ecuații, putem calcula $\varphi'_2 = \varphi_2 + \sphericalangle CBE$, astfel că rămân numai două necunoscute și problema este determinată. În cazul în care cupla conducătoare este G, mecanismul este de clasa a 3-a (Tab.1.8), iar cele patru necunoscute $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ și φ_4 se pot determina numai prin rezolvarea sistemului format din ambele ecuații.

Pentru determinarea vitezelor și a accelerațiilor se derivează ecuațiile de închidere în raport cu parametrul cuplei conducătoare φ_1 . Vom analiza modul în care se face derivarea unui versor oarecare \bar{u}_k .

$$\bar{u}_k = \bar{i} \cos \varphi_k + \bar{j} \sin \varphi_k$$

$$\frac{d\bar{u}_k}{d\varphi_1} = (-\bar{i} \sin \varphi_k + \bar{j} \cos \varphi_k) \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = (\bar{i} \cos(\varphi_k + 90^\circ) + \bar{j} \sin(\varphi_k + 90^\circ)) \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}$$

Expresia din paranteză reprezintă un versor rotit cu 90° în sens direct față de \bar{u}_k , pe care îl notăm \bar{e}_k (Fig.2.9.b), astfel încât putem scrie

$$\frac{d\bar{u}_k}{d\varphi_1} = \bar{e}_k \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \quad (2.28)$$

În mod analog, derivarea lui \bar{e}_k în raport cu φ_1 se face după formula

$$\frac{d\bar{e}_k}{d\varphi_1} = -\bar{u}_k \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \quad (2.29)$$

deoarece prin rotirea lui \bar{e}_k cu 90° în sens direct se obține $-\bar{u}_k$ (Fig.2.9.b).

Funcțiile de forma $\varphi_k(\varphi_1)$, conținute implicit în ecuațiile de închidere și exprimate explicit după rezolvarea acestora se numesc **funcții de transmitere de ordinul zero**. Derivatele lor în raport cu φ_1 , $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}(\varphi_1)$ se numesc **funcții de**

transmitere de ordinul unu, iar derivatele de ordin doi $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2}(\varphi_1)$ - **funcții de transmitere de ordinul doi**.

În cele ce urmează se aplică această metodă pentru a efectua analiza cinematică a mecanismelor plane uzuale cu 4 elemente, caracterizate printr-un singur contur vectorial. La fiecare mecanism se precizează parametrii de intrare clasificați astfel: 1) parametrii constructivi; 2) parametrii mișcării relative din cupla conducătoare.

2.1.4.2. Mecanismul patrulater articulat plan (Fig.2.11)

Parametrii de intrare:

1) l_1, l_2, l_3, l_4

2) $\varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$

Ecuția de închidere a conturului vectorial (Fig.2.11.b) este

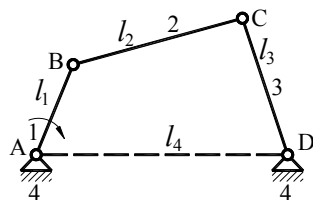
$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \quad (2.30)$$

Problema pozițiilor constă în determinarea unghiurilor φ_2 și φ_3 care intervin în ecuația de închidere, ca singure necunoscute, prin intermediul

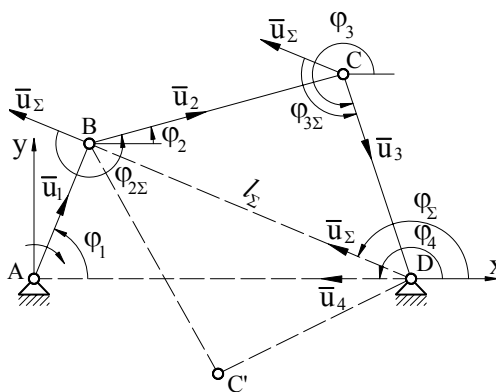
versorilor $\bar{u}_2(\varphi_2)$ și $\bar{u}_3(\varphi_3)$. Se observă că vectorii $\bar{u}_1 l_1$ și $\bar{u}_4 l_4$ sunt complet cunoscuți, iar suma lor se notează $\bar{u}_\Sigma l_\Sigma$,

$$\bar{u}_\Sigma l_\Sigma = \bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_4 l_4$$

	$\varphi_{2\Sigma} \in$	$\varphi_{3\Sigma} \in$
ABCD	$[\pi, 2\pi]$	$[0, \pi]$
ABC'D	$[0, \pi]$	$[\pi, 2\pi]$



a)



b)

Fig. 2.11

Proiectând această relație pe axele de coordonate și având în vedere că $\varphi_4 = \pi$, se obține

$$l_\Sigma \cos \varphi_\Sigma = l_1 \cos \varphi_1 - l_4$$

$$l_\Sigma \sin \varphi_\Sigma = l_1 \sin \varphi_1$$

De aici rezultă

$$\varphi_\Sigma = \arctg \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1 - l_4}$$

$$l_\Sigma = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \varphi_1}$$

Ecuția de închidere se poate scrie, acum, sub forma

$$\bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_\Sigma l_\Sigma = 0$$

Se separă termenul $\bar{u}_3 l_3$ și se ridică ecuația la pătrat

$$(-\bar{u}_3 l_3)^2 = (\bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_\Sigma l_\Sigma)^2$$

$$l_3^2 = l_2^2 + l_\Sigma^2 + 2l_2 l_\Sigma \cos \varphi_{2\Sigma}$$

De aici rezultă unghiul $\varphi_{2\Sigma}$ format între versorii \bar{u}_2 și \bar{u}_Σ

$$\varphi_{2\Sigma} = \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_2^2 - l_\Sigma^2}{2l_2l_\Sigma}\right)$$

Cele două soluții posibile pentru $\varphi_{2\Sigma} \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu cele două poziții ale mecanismului ABCD și ABC'D, așa cum se indică în tabelul din Fig.2.11. Cunoscând $\varphi_{2\Sigma}$, se calculează

$$\varphi_2 = \varphi_\Sigma + \varphi_{2\Sigma}.$$

Procedând în mod analog, prin separarea termenului \bar{u}_2l_2 , se obține

$$\varphi_{3\Sigma} = \arccos\left(\frac{l_2^2 - l_3^2 - l_\Sigma^2}{2l_3l_\Sigma}\right)$$

și

$$\varphi_3 = \varphi_\Sigma + \varphi_{3\Sigma}.$$

Soluțiile pentru $\varphi_{3\Sigma} \in [0, 2\pi]$ sunt, de asemenea, în corespondență cu pozițiile mecanismului, așa cum se arată în tabelul din Fig.2.11.

În cadrul **problemei vitezelor** ne propunem să determinăm vitezele unghiulare ω_2 și ω_3 care se pot exprima astfel

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \omega_1$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \omega_1$$

Deoarece ω_1 se cunoaște, pentru a determina ω_2 și ω_3 trebuie să determinăm funcțiile de transmitere de ordinul unu $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ și $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$. În acest scop se derivează ecuația de închidere (2.30) în raport cu parametrul φ_1

$$\bar{e}_1l_1 + \bar{e}_2l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \bar{e}_3l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = 0 \quad / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_2 \quad (2.31)$$

Ecuația (2.31) se înmulțește scalar cu \bar{u}_3 , obținând

$$l_1 \cos(\varphi_1 + 90^\circ - \varphi_3) + l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cos(\varphi_2 + 90^\circ - \varphi_3) = 0$$

din care rezultă

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

Prin înmulțirea scalară a ecuației (2.31) cu \bar{u}_2 se obține

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Problema accelerațiilor are ca obiectiv determinarea accelerațiilor unghiulare ε_2 și ε_3 care se exprimă astfel

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

În aceste expresii intervin funcțiile de transmitere de ordinul doi $\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}$

și $\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$ care trebuie determinate. Ceilalți parametri sunt cunoscuți inițial

$(\omega_1, \varepsilon_1)$ sau au fost determinați $\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}, \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)$. În mod obișnuit $\varepsilon_1 = 0$ deoarece

rotația elementului conducător se consideră uniformă. Pentru determinarea funcțiilor de transmitere de ordinul doi se derivează ecuația (2.31) în raport cu φ_1 ,

$$-\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_2 l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 + \bar{e}_2 l_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} - \bar{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_2 \quad (2.32)$$

și se înmulțește scalar cu \bar{u}_3 , obținând

$$\begin{aligned} & -l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \\ & + l_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \cos(\varphi_2 + 90^\circ - \varphi_3) - l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

Prin înmulțire cu \bar{u}_2 se obține

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Având la dispoziție parametri calculați putem determina poziția, viteza și accelerația pentru orice punct al mecanismului. Să considerăm, în acest sens, un punct P aparținând bielei 2 (Fig.2.12). Poziția punctului P, în raport cu elementul 2, este dată prin parametrii $\alpha_p = \sphericalangle CBP$ și $l_p = BP$. Vectorul de

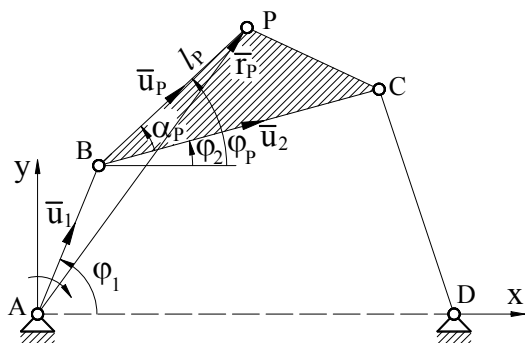


Fig. 2.12

poziție al punctului P se poate scrie

$$\bar{r}_p = \bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_p l_p, \quad (2.33)$$

în care $\bar{u}_p(\varphi_p)$ este versorul direcției \overline{BP} . Unghiul φ_p are expresia evidentă

$$\varphi_p = \varphi_2 + \alpha_p$$

Proiectând \bar{r}_p (2.33), pe axele de coordonate, se obține poziția punctului P

$$x_p = l_1 \cos \varphi_1 + l_p \cos(\varphi_2 + \alpha_p)$$

$$y_p = l_1 \sin \varphi_1 + l_p \sin(\varphi_2 + \alpha_p)$$

Derivând \bar{r}_p în raport cu timpul se obține viteza punctului P

$$\bar{v}_p = \frac{d\bar{r}_p}{dt} = \frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1} \cdot \omega_1.$$

Funcția de transmitere $\frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1}$ se calculează prin derivarea expresiei (2.33) în raport cu φ_1

$$\frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1} = \bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_p l_p \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}. \quad (2.34)$$

Accelerația punctului P are expresia

$$\bar{a}_p = \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_p}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1.$$

Funcția de transmitere de ordinul doi $\frac{d^2\bar{r}_p}{d\varphi_1^2}$ se obține derivând expresia (2.34) în raport cu φ_1

$$\frac{d^2\bar{r}_p}{d\varphi_1^2} = -\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_p l_p \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 + \bar{e}_p l_p \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}. \quad (2.35)$$

2.1.4.3. Mecanismul manivelă - piston (bielă - manivelă)
(Fig.2.13)

Parametrii de intrare:

- 1) l_1, l_2, l_4
- 2) $\varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$

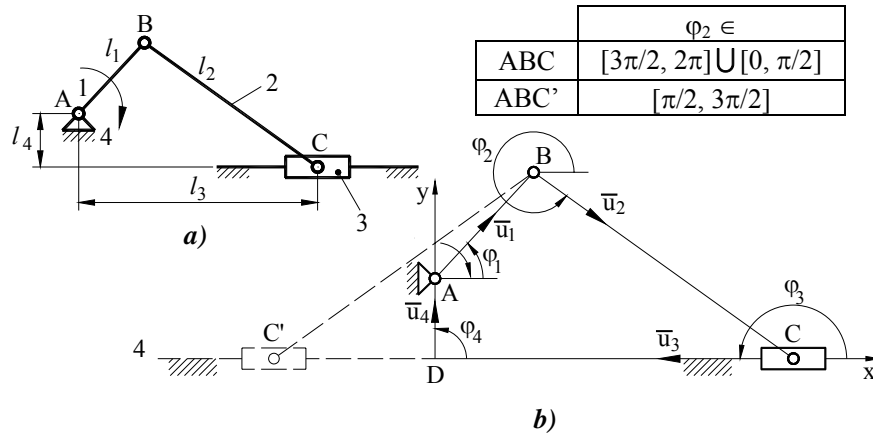


Fig. 2.13

Ecuția de închidere

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \quad (2.30)$$

conține **parametrii de poziție** necunoscuți φ_2 și l_3 . Pentru determinarea lor, se proiectează ecuația de închidere pe axele de coordonate având în vedere că $\varphi_3 = \pi$ și $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$ (dacă punctul A se găsește sub axa de translație $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 &= 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Din ecuația a doua rezultă φ_2

$$\varphi_2 = \arcsin \left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_4}{l_2} \right).$$

Cunoscând φ_2 , se determină l_3 din prima ecuație

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Cele două soluții posibile pentru $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu pozițiile ABC și ABC' ale mecanismului conform cu tabelul din Fig.2.13.

În **problema vitezelor** se urmărește determinarea vitezei unghiulare ω_2 și a vitezei punctului C (v_C) care au expresiile

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

$$v_C = \frac{dl_3}{dt} = \frac{dl_3}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

Funcțiile de transmitere $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ și $\frac{dl_3}{d\varphi_1}$ se determină prin derivarea ecuației de închidere (2.30) în raport cu φ_1

$$\bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_2 l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \bar{u}_3 \frac{dl_3}{d\varphi_1} = 0 / \cdot \bar{e}_3 / \cdot \bar{u}_2 \quad (2.37)$$

Ecuția se înmulțește scalar, succesiv cu \bar{e}_3 și \bar{u}_2 , rezultând

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}$$

$$\frac{dl_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2}$$

În **problema accelerațiilor** se determină ε_2 și a_C

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$a_C = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dl_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

Se derivează ecuația (2.37) în raport cu φ_1

$$-\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_2 l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 + \bar{e}_2 l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} + \bar{u}_3 \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \bar{e}_3 / \cdot \bar{u}_2 \quad (2.38)$$

și se înmulțește scalar, succesiv cu \bar{e}_3 și \bar{u}_2 , obținând funcțiile de transmitere de ordinul doi

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}; \quad \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2}{\cos \varphi_2}$$

▪ **Formule aproximative**

În cazul acestui mecanism se folosesc, uneori, formule aproximative, dar comode, pentru calculul deplasării pistonului. Eliminând unghiul φ_2 între ecuațiile (2.36) se ajunge la următoarea expresie pentru x_C

$$x_C = l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{l_4 + l_1 \sin \varphi_1}{l_2} \right)^2}$$

Notând $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ și $k = \frac{l_4}{l_1}$, formula devine

$$x_C = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \lambda^2 (k + \sin \varphi_1)^2}$$

Radicalul din această expresie se dezvoltă în serie de puteri

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \lambda^2 (k + \sin \varphi_1)^2} &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (k + \sin \varphi_1)^2 - \frac{1}{8} \lambda^4 (k + \sin \varphi_1)^4 - \\ &\quad - \frac{1}{16} \lambda^6 (k + \sin \varphi_1)^6 - \dots \end{aligned}$$

Seria este convergentă dacă $\lambda^2 (k + \sin \varphi_1)^2 < 1$; condiție satisfăcută pentru valorile practice ale lui λ și k . O aproximare suficient de bună se obține dacă se păstrează numai primii doi termeni ai seriei. În acest caz, expresia lui x_C devine

$$x_C = l_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda k^2 - \lambda k \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \varphi_1 \right).$$

Prin derivări succesive, în raport cu timpul, se obțin viteza și accelerația punctului C

$$v_C = -l_1 \left(\sin \varphi_1 + \lambda k \cos \varphi_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_1 \right) \cdot \omega_1$$

$$a_C = -l_1 \left(\cos \varphi_1 - \lambda k \sin \varphi_1 + \lambda \cos 2\varphi_1 \right) \cdot \omega_1^2$$

2.1.4.4. Mecanismul cu culisă de rotație (Fig. 2.14)

Parametrii de intrare:

1) l_1, l_4

2) $\varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$

Ecuția de închidere a conturului vectorial este

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \quad (2.39)$$

și are **parametrii de poziție** necunoscuți φ_3 și l_3 grupați într-un singur termen, care se separă astfel

$$\bar{u}_3 l_3 = -\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_4 l_4.$$

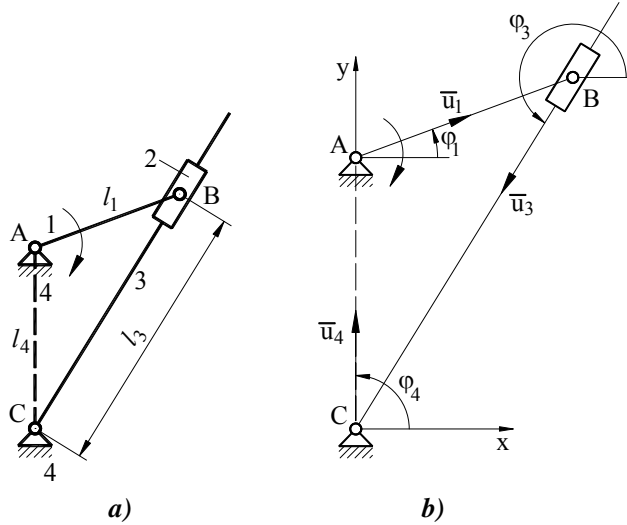


Fig. 2.14

De aici rezultă, prin proiectare pe axele de coordonate,

$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{-(l_1 \sin \varphi_1 + l_4)}{-l_1 \cos \varphi_1}\right)$$

$$l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 + 2l_1 l_4 \sin \varphi_1}.$$

În **problema vitezelor** interesează ω_3 care are expresia

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \omega_1.$$

Pentru a determina $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ se derivează ecuația de închidere (2.39) în raport cu parametrul φ_1

$$\bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \bar{u}_3 \frac{dl_3}{d\varphi_1} = 0 / \cdot \bar{e}_3 / \cdot \bar{u}_3 \quad (2.40)$$

Înmulțind scalar, succesiv cu \bar{e}_3 și \bar{u}_3 se obțin funcțiile de transmitere de ordinul unu,

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_3}$$

$$\frac{dl_3}{d\varphi_1} = l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3).$$

Accelerația unghiulară ε_3 are expresia

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1.$$

Se derivează ecuația (2.40) în raport cu φ_1

$$-\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 + 2\bar{e}_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \frac{dl_3}{d\varphi_1} + \bar{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} + \bar{u}_3 \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \bar{e}_3 \quad (2.41)$$

și se înmulțește scalar cu \bar{e}_3 . Rezultă

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - 2 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \frac{dl_3}{d\varphi_1}}{l_3}.$$

2.1.4.5. Mecanismul cu culisă de translație (Fig. 2.15)

Parametrii de intrare:

- 1) l_1
- 2) $\varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$

Ecuția de închidere

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 = 0 \quad (2.42)$$

conține necunoscutele l_2 și l_3 . Dintre acestea, interesează, în primul rând, l_3 care este **parametrul de poziție** al elementului 3. Proiectând ecuația de

închidere pe axa Ox și ținând seama că $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ și $\varphi_3 = \pi$ se obține

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1.$$

Derivând, succesiv, în raport cu timpul se determină viteza și accelerația culisei de translație 3

$$v_3 = \frac{dl_3}{dt} = -\omega_1 l_1 \sin \varphi_1$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = -\omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 - \varepsilon_1 l_1 \sin \varphi_1.$$

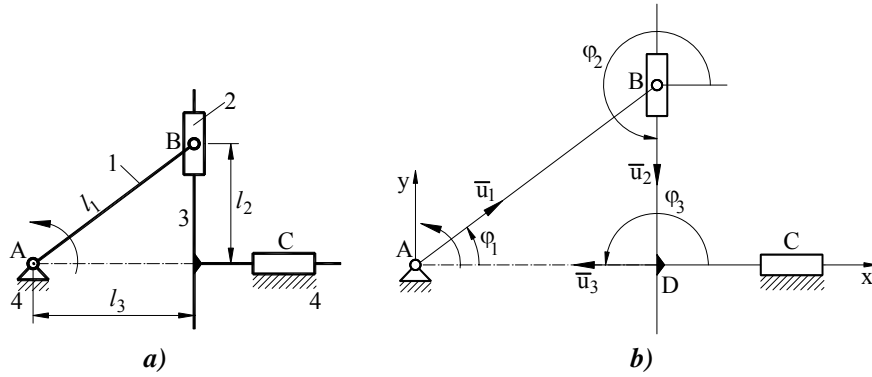


Fig. 2.15

2.1.4.6. Mecanismul cu cilindru oscilant (Fig. 2.16)

Parametrii de intrare:

1) l_3, l_4

2) l_{21}, v_{21}, a_{21}^r

Ecuția de închidere

$$\bar{u}_1 l_{21} + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \quad (2.43)$$

conține **parametrii de poziție** necunoscuți φ_1 și φ_3 . Unghiul φ_1 se determină separând termenul $\bar{u}_3 l_3$ și ridicând la pătrat ambele părți ale ecuației

$$\begin{aligned} (-\bar{u}_3 l_3)^2 &= (\bar{u}_1 l_{21} + \bar{u}_4 l_4)^2 \\ l_3^2 &= l_{21}^2 + l_4^2 + 2l_{21}l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) = l_{21}^2 + l_4^2 - 2l_{21}l_4 \cos \varphi_1 \\ \varphi_1 &= \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l_{21}l_4}\right) \end{aligned}$$

În mod asemănător se determină φ_3 , prin separarea termenului $\bar{u}_1 l_{21}$

$$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 - l_{21}^2}{2l_3 l_4}\right)$$

Soluțiile pentru $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ și $\varphi_3 \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu cele două poziții ABCD și AB'C'D ale mecanismului așa cum se arată în tabelul din Fig.2.16.

În **problema vitezelor** se determină ω_1 și ω_3 care au expresiile

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot \frac{dl_{21}}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot v_{21}$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \cdot v_{21}$$

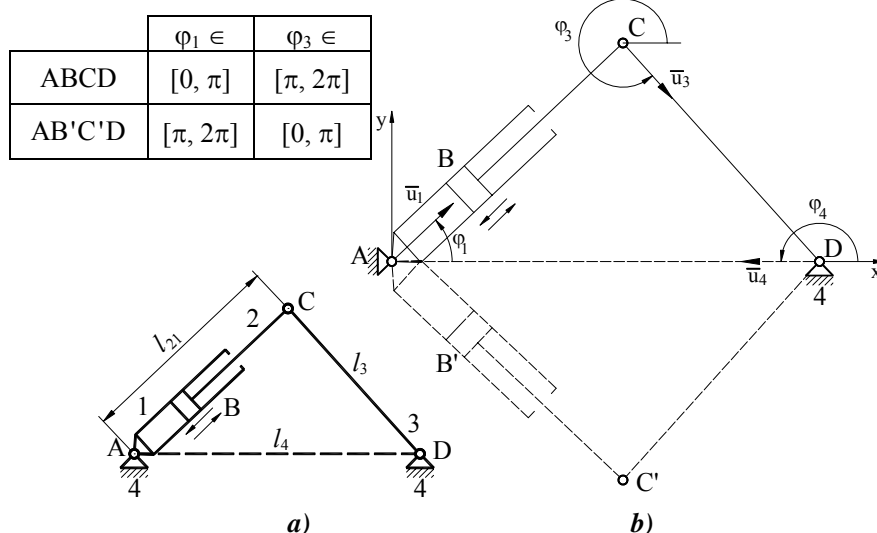


Fig. 2.16

Pentru a determina funcțiile de transmitere de ordinul unu $\frac{d\varphi_1}{dl_{21}}$ și $\frac{d\varphi_3}{dl_{21}}$, se derivează ecuația de închidere (2.43) în raport cu parametrul cuplei conducătoare l_{21}

$$\bar{e}_1 l_{21} \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} + \bar{u}_1 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} = 0 / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_1 \quad (2.44)$$

Înmulțind scalar, succesiv, cu \bar{u}_3 și \bar{u}_1 se obține

$$\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} = \frac{1}{l_{21} \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_3)}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dl_{21}} = \frac{1}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}$$

Problema accelerațiilor urmărește determinarea parametrilor ε_1 și ε_3 care se exprimă astfel

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} \cdot v_{21}^2 + \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot a_{21}^r$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} \cdot v_{21}^2 + \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \cdot a_{21}^r$$

Pentru calculul funcțiilor de transmitere de ordinul doi se derivează ecuația (2.44) în raport cu l_{21}

$$-\bar{u}_1 l_{21} \left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \right)^2 + 2\bar{e}_1 \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} + \bar{e}_1 l_{21} \frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} - \bar{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \right)^2 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} = 0 / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_1 \quad (2.45)$$

și se înmulțește scalar, succesiv, cu \bar{u}_3 și \bar{u}_1

$$\frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} = - \frac{l_{21} \left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \right)^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2 \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \right)^2}{l_{21} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} = - \frac{l_{21} \left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \right)^2 + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \right)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}$$

2.1.5. Metoda transformărilor de coordonate (matriceală)

2.1.5.1. Prezentare generală

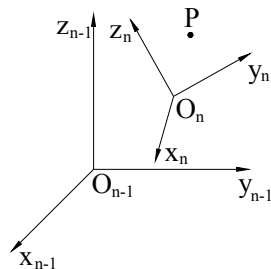


Fig. 2.17

Metoda, caracterizată printr-un model matematic cu exprimare matriceală, are un grad mare de generalitate și poate fi aplicată atât pentru mecanismele plane, cât și pentru cele spațiale; pentru mecanismele simple și pentru cele complexe. În același timp, utilizarea metodei este însoțită de un formalism relativ complicat și implică dificultăți de rezolvare a ecuațiilor matriceale, care reclamă metode

numerice specifice. În aceste condiții, metoda transformărilor de coordonate se recomandă, cu precădere, acolo unde metodele mai simple nu dau satisfacție. Un domeniu specific pentru această metodă este cel al mecanismelor spațiale formate din lanțuri cinematice deschise utilizate în structura manipulatorilor și roboților.

Transformarea coordonatelor unui punct P dintr-un sistem n în alt sistem $n-1$ (Fig.2.17) este descrisă de relațiile

$$\begin{aligned}x_{n-1} &= x_o + x_n \cos(x_{n-1}, x_n) + y_n \cos(x_{n-1}, y_n) + z_n \cos(x_{n-1}, z_n) \\y_{n-1} &= y_o + x_n \cos(y_{n-1}, x_n) + y_n \cos(y_{n-1}, y_n) + z_n \cos(y_{n-1}, z_n) \\z_{n-1} &= z_o + x_n \cos(z_{n-1}, x_n) + y_n \cos(z_{n-1}, y_n) + z_n \cos(z_{n-1}, z_n)\end{aligned}$$

în care $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ sunt coordonatele punctului P în raport cu sistemul $n-1$, x_n, y_n, z_n - coordonatele aceluiași punct în sistemul n , iar x_o, y_o, z_o - coordonatele originii O_n în raport cu sistemul $n-1$. Dacă la aceste ecuații se adaugă relația formală $t_{n-1} = t_n = 1$, transformarea de coordonate se poate scrie sub formă matriceală în felul următor

$$\mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n \quad (2.46)$$

în care matricele $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n$ și $\mathbf{A}_{n,n-1}$ sunt

$$\mathbf{P}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{vmatrix}; \mathbf{P}_n = \begin{vmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{vmatrix}; \mathbf{A}_{n,n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_o & \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) \\ y_o & \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) \\ z_o & \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) \end{vmatrix}$$

Matricea de transformare $\mathbf{A}_{n,n-1}$ conține 6 parametri independenți, având în vedere că între cosinusurile directe există 6 relații de legătură.

Să considerăm un lanț cinematic simplu deschis și să atașăm elementelor sale un șir de sisteme de coordonate: 1, 2, ..., n. În acest caz se poate scrie un șir de relații de transformare de forma (2.46)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{P}_3 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{P}_{n-1} &= \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n.\end{aligned}$$

Prin înlocuiri succesive se ajunge la ecuația

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n. \quad (2.47)$$

Deoarece transformarea din sistemul n în sistemul 1 este definită prin relația

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{n1} \cdot \mathbf{P}_n,$$

rezultă

$$\mathbf{A}_{n1} = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{n,n-1}.$$

În cazul unui lanț cinematic închis, când elementul 1 este identic cu elementul n, se scrie

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{1,n-1} \cdot \mathbf{P}_1 .$$

Transformarea unui sistem în el însuși se face prin intermediul matricei unitate

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_1$$

unde \mathbf{E} (matricea unitate) are forma

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

În aceste condiții rezultă relația

$$\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{1,n-1} = \mathbf{E} \quad (2.48)$$

care reprezintă ecuația matriceală de închidere a conturului.

În cazul mecanismelor formate din lanțuri cinematice închise, ecuațiile matriceale scrise separat, pentru fiecare contur, reprezintă modelul matematic pentru rezolvarea **problemei pozițiilor**. Matricele de transformare care intervin în ecuații conțin atât parametri constructivi cunoscuți, cât și parametri care indică pozițiile relative dintre elemente și care sunt necunoscutele problemei. Amplasarea convenabilă a sistemelor de coordonate este foarte importantă pentru simplificarea rezolvărilor. În cazul mecanismelor care au cuple caracterizate prin axe geometrice (de rotație, de translație, cilindrice) se recomandă formalismul Denavit - Hartenberg [8, 18] care are reguli precise de poziționare a sistemelor, iar matricele de transformare conțin numai 4 parametri independenți. Ecuațiile de închidere sunt neliniare în raport cu necunoscutele unghiulare, iar rezolvarea lor se face numai prin metode numerice. Pentru determinarea **vitezelor** și **a accelerațiilor** se derivează ecuațiile de închidere în raport cu parametrul cuplei conducătoare rezultând ecuații matriceale în care necunoscutele sunt funcții de transmitere.

2.1.5.2. Analiza cinematică a unui mecanism de robot

Mecanismele roboților industriali sunt formate, de regulă, din lanțuri cinematice spațiale deschise care conțin numai cuple de rotație și de translație ($k=5$). Așa cum am arătat (par. 1.2.2.3) mecanismele de acest fel au $M = c_5$, deci toate cuplele sunt conducătoare. Roboții deplasează un punct (element) caracteristic după un program prestabilit într-un spațiu de lucru determinat. Analiza cinematică a mecanismelor pentru roboți este de două tipuri:

1) **Analiza cinematică directă**, care constă în determinarea mișcării (poziției) punctului (elementului) caracteristic în funcție de pozițiile (mișcărilor) relative, cunoscute, din cuplele conducătoare;

2) **Analiza cinematică inversă**, atunci când se impune poziția (mișcarea) punctului (elementului) caracteristic și se determină legile de mișcare pentru fiecare motor.

Să considerăm, pentru exemplificare, mecanismul unui robot (Fig.2.18) având trei elemente mobile și trei cuple - două de rotație (A, B) și una de translație (C). Gradul de mobilitate este, evident, $M = 3$. Punctul caracteristic aparține elementului final 4. Pentru a efectua analiza cinematică, se asociază

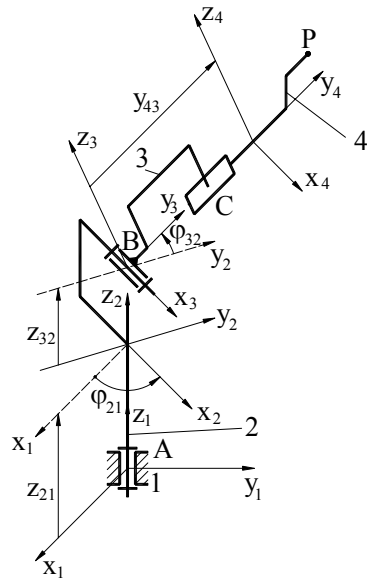


Fig. 2.18

fiecărui element câte un sistem de axe de coordonate ca în Fig.2.18. Matricele de transformare pentru perechile de elemente alăturate au următoarele expresii, rezultate prin particularizarea matricei $A_{n,n-1}$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ z_{21} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} \\ z_{32} & 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix};$$

$$A_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{p3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a efectua analiza cinematică directă se folosește ecuația (2.47) cu $n = 4$

$$P_1 = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{43} \cdot P_4$$

în care P_1 și P_4 sunt matricele de poziție ale punctului P în raport cu sistemele 1 și 4

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{p1} \\ y_{p1} \\ z_{p1} \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{p4} \\ y_{p4} \\ z_{p4} \end{pmatrix}.$$

Matricea \mathbf{P}_4 și matricele de transformare sunt cunoscute, astfel încât determinarea matricei \mathbf{P}_1 se face cu ușurință, printr-o simplă înmulțire de matrice. În matricele de transformare intervin parametrii z_{21}, z_{32} - constante constructive și $\varphi_{21}, \varphi_{32}, y_{43}$ - variabilele cuplelor A, B și C.

Analiza cinematică inversă utilizează aceeași relație matriceală (2.47). În acest caz se cunosc matricele \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_4 , iar necunoscutele sunt variabilele cuplelor $\varphi_{21}, \varphi_{32}, y_{43}$. Rezolvarea reclamă utilizarea unei metode numerice. Analiza cinematică inversă este necesară pentru elaborarea programului de comandă a robotului prin care se stabilesc legile de mișcare pentru fiecare cuplă cinematică.

2.1.6. Metoda funcțiilor de transmitere

Noțiunea de funcție de transmitere se întâlnește și în prezentările anterioare dar, din motivele unei expunerii sistematice, vom relua definirea acestor funcții. Să considerăm un mecanism cu $M=1$. Prin rezolvarea **problemei pozițiilor** se stabilește o corespondență între diverși parametri de poziție ai elementelor și variabila independentă a cuplei conducătoare, φ_1 . Astfel, vectorul de poziție al unui punct oarecare P, $\bar{\mathbf{r}}_p(x_p, y_p)$ sau unghiul de poziție al unui element oarecare k, φ_k se pot scrie

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_p &= \bar{\mathbf{r}}_p(\varphi_1) \\ x_p &= x_p(\varphi_1) \\ y_p &= y_p(\varphi_1) \\ \varphi_k &= \varphi_k(\varphi_1).\end{aligned}\tag{2.49}$$

Funcțiile $\bar{\mathbf{r}}_p(\varphi_1), x_p(\varphi_1), y_p(\varphi_1), \varphi_k(\varphi_1)$ se numesc **funcții de transmitere de ordinul zero**. Aceste funcții se pot defini și sub formă implicită

$$F(\varphi_1, \varphi_k) = 0.\tag{2.50}$$

Vitezele $\bar{\mathbf{v}}_p(v_{px}, v_{py}), \omega_k$ și **acceleerațiile** $\bar{\mathbf{a}}_p(a_{px}, a_{py}), \varepsilon_k$ rezultă prin derivarea parametrilor de poziție în raport cu timpul, prin intermediul parametrului φ_1

$$\begin{aligned}\bar{v}_p &= \frac{d\bar{r}_p}{dt} = \frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \\ v_{px} &= \frac{dx_p}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \\ v_{py} &= \frac{dy_p}{d\varphi_1} \cdot \omega_1\end{aligned}\tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \\ \bar{a}_p &= \frac{d^2\bar{r}_p}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 \\ a_{px} &= \frac{d^2x_p}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dx_p}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 \\ a_{py} &= \frac{d^2y_p}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dy_p}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 \\ \varepsilon_k &= \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1\end{aligned}\tag{2.52}$$

Derivatele de ordinul unu ale funcțiilor de transmitere de ordin zero, în raport cu φ_1 : $\frac{d\bar{r}_p}{d\varphi_1}$, $\frac{dx_p}{d\varphi_1}$, $\frac{dy_p}{d\varphi_1}$, $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}$ se numesc **funcții de transmitere de**

ordinul unu, iar derivatele de ordinul doi: $\frac{d^2\bar{r}_p}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2x_p}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2y_p}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2}$ se

numesc **funcții de transmitere de ordinul doi**. Din formulele (2.51) și (2.52) se observă că vitezele și accelerațiile sunt egale cu funcțiile de transmitere dacă $\omega_1 = 1$ și $\varepsilon_1 = 0$. Dacă funcțiile de transmitere de ordinul zero sunt implicate (2.50), funcțiile de transmitere de ordinul unu și doi se calculează astfel

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}}{\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}}\tag{2.53}$$

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_1^2} \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_1 \partial\varphi_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial\varphi_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi_k^2} \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\right)^3}\tag{2.54}$$

Trebuie menționat că în structura funcțiilor de transmitere (indiferent de ordin) intervin parametrii constructivi ai mecanismului și o singură variabilă - parametrul cuplei conducătoare φ_1 .

Din cele arătate rezultă că pentru calculul vitezelor și al accelerațiilor (2.51, 2.52) este necesar să se determine funcțiile de transmitere de ordinul unu și doi prin derivarea funcțiilor de transmitere de ordinul zero. Această operație se poate efectua pe cale analitică numai atunci când funcțiile de transmitere de ordinul zero se cunosc sub formă analitică și sunt relativ simple. Însă, în majoritatea cazurilor, chiar la mecanismele cele mai simple (mecanismul patruleter articulată plan (par. 2.1.4.2), mecanismul manivelă - piston (par. 2.1.4.3), funcțiile de transmitere de ordinul zero reprezintă rezultatul unui procedeu de calcul format din mai mulți pași, având uneori caracter iterativ. În această situație funcțiile de transmitere de ordinul zero, fie se exprimă prin relații extrem de complicate, fie nu se pot exprima sub formă analitică. Utilizarea calculului automat permite, însă, determinarea acestor funcții prin valori discrete cu o densitate remarcabilă a punctelor. În aceste condiții, determinarea funcțiilor de transmitere de ordinul unu și doi se poate efectua prin derivare numerică, folosind programe utilitare specializate (MATHCAD, MATLAB, etc.). Funcțiile obținute se exprimă, de asemenea, prin valori discrete, calculabile pentru orice valoare a variabilei φ_1 . Metoda este un instrument util de calcul al vitezelor și al accelerațiilor și se poate asocia cu orice metodă de determinare a pozițiilor. Funcțiile de transmitere de ordinul zero se pot determina chiar prin măsurători pe desen, pe mecanismul real sau pe un model al acestuia.

Menționăm că înaintea perioadei moderne de dezvoltare a tehnicii de calcul s-a practicat derivarea grafică, având dezavantajul unui nivel de precizie foarte scăzut, în special la a doua derivare. În varianta menționată metoda operează cu graficele celor trei funcții și este cunoscută sub denumirea **metoda diagramei cinematice**.

2.1.7. Procedee indirecte de analiză cinematică

Din metodele prezentate anterior (par. 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4) rezultă că operația de analiză cinematică este cu atât mai complexă cu cât mecanismul este de clasă mai mare (clasa mecanismului este egală cu clasa maximă a grupelor componente). Astfel, mecanismele de clasa a 2-a se pretează la rezolvări analitice directe, pe când mecanismele care conțin grupe 0/3/3 sau 0/4/2 reclamă procedee mai complicate cu rezolvare numerică iterativă. Pe de altă parte, structura mecanismelor care provin din același lanț cinematic închis, depinde, din punct de vedere al grupelor componente, de alegerea bazei și a cuplei conducătoare. Prin urmare, odată cu schimbarea bazei și a cuplei conducătoare,

se poate ajunge la o simplificare a analizei cinematice, dacă, prin aceasta, se reduce clasa mecanismului. În general se urmărește obținerea unor mecanisme de clasa a 2-a. Pentru a exploata această idee este necesar să se stabilească legătura dintre starea cinematică a mecanismului obținut prin aceste transformări și cea a mecanismului inițial.

2.1.7.1. Procedeeul schimbării cuplei conducătoare

Pentru concretizarea problemei se consideră mecanismul din Fig.2.19.a, care provine dintr-un lanț cinematic Stephenson, având $M=1$. Cupla conducătoare este A (elementul conducător 1), iar parametrul independent este unghiul $\varphi_1 = \varphi_{16}$. Să presupunem că ne interesează starea cinematică a elementului condus 5. Prin rezolvarea problemei pozițiilor trebuie să se determine funcția de transmitere de ordinul zero

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1)$$

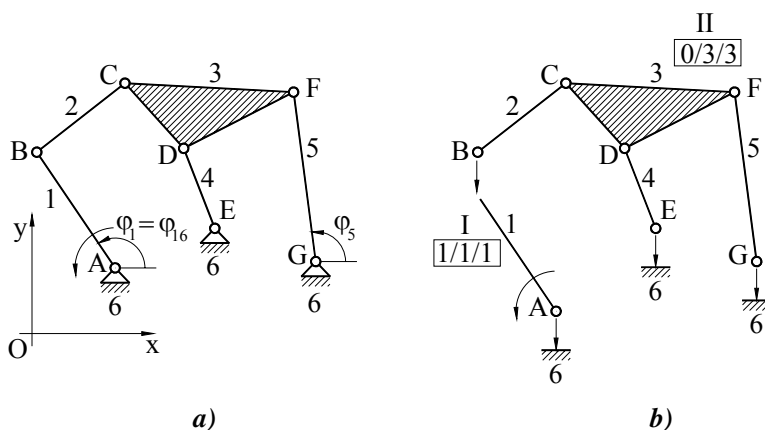


Fig. 2.19

Așa cum rezultă din Fig.2.19.b, mecanismul conține o grupă 0/3/3 care complică mult rezolvarea pozițiilor. Dacă schimbăm cupla conducătoare A cu E (Fig.2.20), mecanismul devine de clasa a 2-a. În această ipoteză parametrul independent este unghiul $\varphi_4 = \varphi_{46}$. Aplicând, pentru mecanismul transformat, o metodă cunoscută (de exemplu metoda intersecțiilor locurilor geometrice (par. 2.1.2) se determină funcțiile de transmitere

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1(\varphi_4) \\ \varphi_5 &= \varphi_5(\varphi_4). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Din funcția $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$ se poate determina funcția inversă $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_1)$ prin rezolvarea ecuației

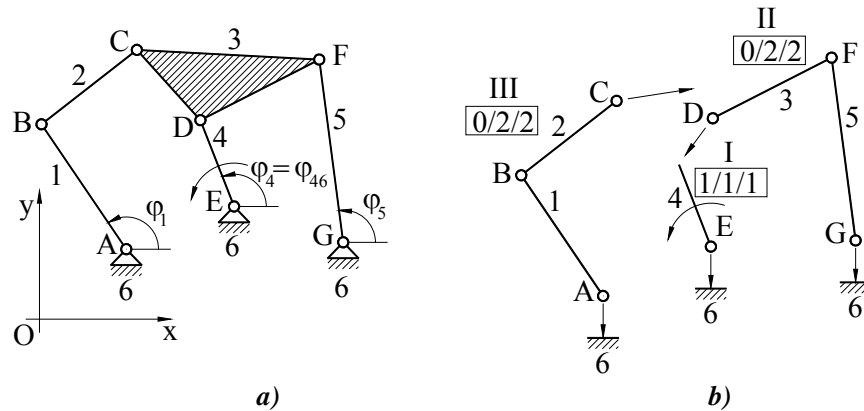


Fig. 2.20

$$\varphi_1 - \varphi_1(\varphi_4) = 0$$

cu necunoscuta φ_4 . Trebuie să avem în vedere că funcția $\varphi_1(\varphi_4)$ nu este cunoscută analitic (ca o formulă), ci este rezultatul unui proces, prin care, pentru orice valoare a lui φ_4 se obține o valoare pentru φ_1 . De aceea, rezolvarea ecuației se face numeric, dar fără dificultăți, utilizând programe utilitare de matematică (MATHCAD, MATLAB, etc.). Având la dispoziție funcția $\varphi_4(\varphi_1)$ se obține, cu ușurință, funcția $\varphi_5(\varphi_1)$ înlocuind pe $\varphi_4(\varphi_1)$ în relația (2.55)

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_4(\varphi_1)) \quad (2.56)$$

Pentru analiza vitezelor și a accelerațiilor, care implică determinarea funcțiilor de transmitere de ordinul unu și doi, se poate proceda în două moduri:

1) Se aplică metoda funcțiilor de transmitere derivând numeric funcția $\varphi_5(\varphi_1)$. În felul acesta se obțin $\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1}$ și $\frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_1^2}$ care permit calculul vitezei ω_5 (2.51) și accelerației unghiulare ε_5 (2.52).

2) Se determină funcțiile de transmitere specifice mecanismului transformat $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}, \frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_4^2}, \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4}, \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2}$ aplicând o metodă cunoscută, iar apoi funcțiile de transmitere ale mecanismului inițial se calculează astfel

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} &= \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} \cdot \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} \\ \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_1^2} &= \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2} \left(\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} \right)^2 + \frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2} \cdot \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} \end{aligned} \quad (2.57)$$

În final, derivatele $\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1}$ și $\frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2}$ care apar în aceste relații, se determină având în vedere că funcția $\varphi_4(\varphi_1)$ este inversa funcției $\varphi_1(\varphi_4)$,

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = \frac{1}{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}}$$

$$\frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2} = -\frac{\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_4^2}}{\left(\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}\right)^3} \quad (2.58)$$

2.1.7.2. Procedeeul schimbării bazei

Să considerăm mecanismul din Fig.2.21.a care provine dintr-un lanț cinematic Stephenson ($M = 1$) și conține o grupă structurală 0/4/2 (Fig.2.21.b). Dacă încercăm să simplificăm analiza cinematică prin schimbarea cuplei

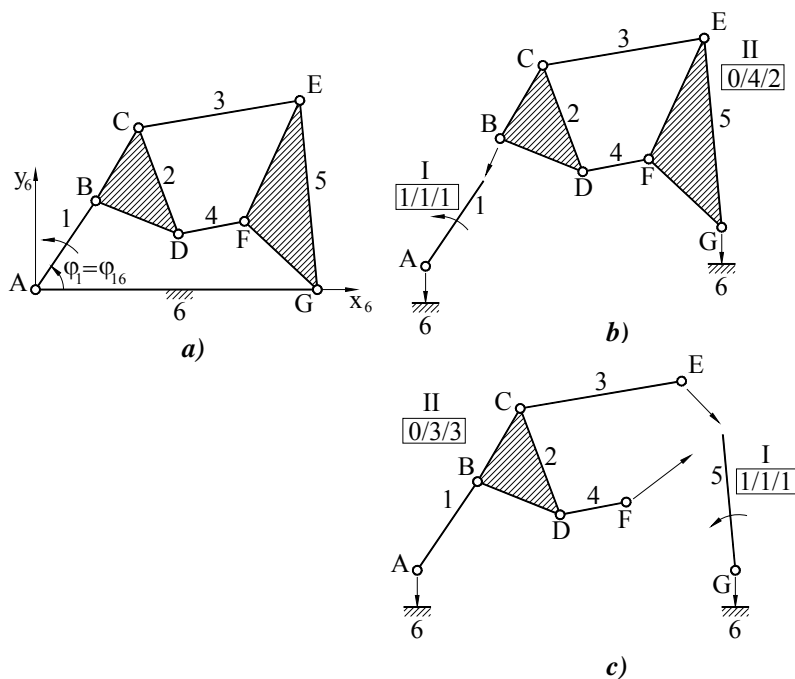


Fig. 2.21

conducătoare A cu G (Fig.2.21.c), mecanismul obținut astfel conține o grupă 0/3/3 care implică dificultăți similare cu 0/4/2. Pentru a obține un mecanism de clasa a 2-a, trebuie să schimbăm atât baza cât și cupla conducătoare, așa cum se observă în Fig.2.22. În mecanismul inițial (Fig.2.21.a) deplasările elementelor se raportează la sistemul Ax_6y_6 solitar cu baza 6, iar parametrul independent este unghiul $\varphi_1 = \varphi_{16}$. În mecanismul transformat (Fig.2.22.a) sistemul de referință este Cx_3y_3 solidar cu baza 3, iar parametrul independent este unghiul φ_{23} din cupla C.

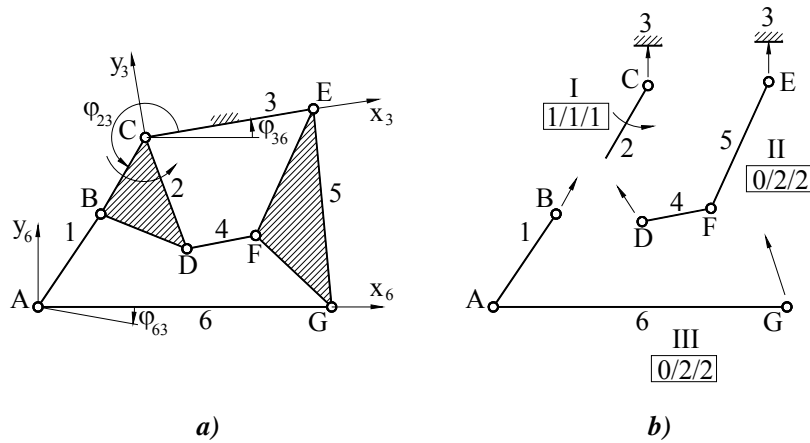


Fig. 2.22

Din analiza pozițiilor, aplicată mecanismului transformat, rezultă funcția de transmitere de ordinul zero $\varphi_{16} = \varphi_{13}(\varphi_{23}) - \varphi_{63}(\varphi_{23}) = \varphi_1(\varphi_{23})$. Folosind un procedeu numeric, bazat pe rezolvarea ecuației

$$\varphi_1 - \varphi_1(\varphi_{23}) = 0$$

în necunoscuta φ_{23} , rezultă funcția inversă

$$\varphi_{23} = \varphi_{23}(\varphi_1) \quad (2.59)$$

Ne propunem să determinăm, în continuare, poziția sistemului Cx_3y_3 în raport cu sistemul Ax_6y_6 . Din analiza mecanismului transformat se determină $\varphi_{63} = \varphi_{63}(\varphi_{23})$, $x_A = x_A(\varphi_{23})$, $y_A = y_A(\varphi_{23})$. Prin înlocuirea variabilei φ_{23} cu φ_1 conform relației (2.59) se obține

$$\begin{aligned} \varphi_{36} &= -\varphi_{63}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = \varphi_{36}(\varphi_1) \\ x_{3A} &= x_{3A}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = x_{3A}(\varphi_1) \\ y_{3A} &= y_{3A}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = y_{3A}(\varphi_1) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Se aplică transformarea de coordonate, pentru punctul C, din sistemul Ax_6y_6 în sistemul Cx_3y_3

$$x_{3C} = x_{3A} + x_{6C} \cos \varphi_{63} - y_{6C} \sin \varphi_{63}$$

$$y_{3C} = y_{3A} + x_{6C} \sin \varphi_{63} + y_{6C} \cos \varphi_{63}$$

Având în vedere că $x_{3C} = 0$, $y_{3C} = 0$ și $\varphi_{36} = -\varphi_{63}$, din acest sistem se determină x_{6C} și y_{6C}

$$x_{6C}(\varphi_1) = -x_{3A} \cos \varphi_{36} + y_{3A} \sin \varphi_{36} \quad (2.61)$$

$$y_{6C}(\varphi_1) = -x_{3A} \sin \varphi_{36} - y_{3A} \cos \varphi_{36}$$

Cu aceste date se determină, acum, poziția unui punct oarecare P, aparținând unui element al mecanismului, operând o transformare de coordonate din sistemul Cx_3y_3 în sistemul Ax_6y_6

$$x_P(\varphi_1) = x_{6P} = x_{6C} + x_{3P} \cos \varphi_{36} - y_{3P} \sin \varphi_{36} \quad (2.62)$$

$$y_P(\varphi_1) = y_{6P} = y_{6C} + x_{3P} \sin \varphi_{36} + y_{3P} \cos \varphi_{36}$$

Coordonatele x_P și y_P depind, într-adevăr, de φ_1 pentru că x_{6C} , y_{6C} și φ_{36} sunt funcții de φ_1 (2.60, 2.61), iar x_{3P} și y_{3P} rezultă din analiza mecanismului transformat în funcție de φ_{23} care, la rândul său, depinde de φ_1 (2.59),

$$x_{3P} = x_{3P}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = x_{3P}(\varphi_1) \quad (2.63)$$

$$y_{3P} = y_{3P}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = y_{3P}(\varphi_1)$$

Dacă interesează poziția unghiulară a unui element oarecare k , se scrie

$$\varphi_k(\varphi_1) = \varphi_{k6} = \varphi_{k3}(\varphi_{23}(\varphi_1)) + \varphi_{36}(\varphi_1) \quad (2.64)$$

După rezolvarea problemei pozițiilor, dezvoltarea calculelor, pentru determinarea vitezelor și a accelerațiilor, se poate efectua, ca și la procedeul precedent, pe două căi. Una dintre căi constă în aplicarea metodei funcțiilor de transmitere plecând de la funcțiile de transmitere de ordinul zero date de relațiile (2.62, 2.64). Cea de-a doua cale presupune derivarea analitică a funcțiilor $x_P(\varphi_1)$, $y_P(\varphi_1)$ și $\varphi_k(\varphi_1)$ pentru a obține vitezele $v_{Px}(\varphi_1)$, $v_{Py}(\varphi_1)$ și $\omega_k(\varphi_1)$ și accelerațiile $a_{Px}(\varphi_1)$, $a_{Py}(\varphi_1)$ și $\varepsilon_k(\varphi_1)$. În expresiile rezultate intervin funcțiile de transmitere ale mecanismului transformat $\frac{dx_{3P}}{d\varphi_{23}}$, $\frac{dy_{3P}}{d\varphi_{23}}$, $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_{23}}$, $\frac{d^2x_{3P}}{d\varphi_{23}^2}$, $\frac{d^2y_{3P}}{d\varphi_{23}^2}$, $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_{23}^2}$, precum și funcțiile $\frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_1}$ și $\frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_1^2}$. Acestea se calculează cu formulele de derivare ale funcțiilor inverse

$$\frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_{16}} = \frac{1}{\frac{d\varphi_{16}}{d\varphi_{23}}}; \quad \frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_{16}^2} = \frac{-\frac{d^2\varphi_{16}}{d\varphi_{23}^2}}{\left(\frac{d\varphi_{16}}{d\varphi_{23}}\right)^3} \quad (2.65)$$

2.1.8. Mecanismul cardanic

Mecanismul cardanic (Fig.2.23) este un patrulater articulat sferic (par. 1.2.2.2) având următoarele unghiuri între axele de rotație $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle AOD = \pi - \beta$, în care β este unghiul ascuțit dintre axele de

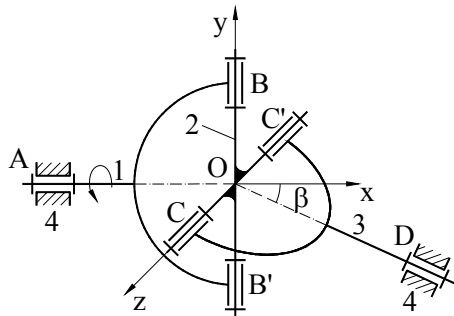


Fig. 2.23

rotație ale elementelor 1 și 3. Mecanismul, purtând și denumirea de cuplaj cardanic, servește la transmiterea mișcării de rotație între două elemente cu axe concurente (1 și 3).

Pentru a efectua **analiza pozițiilor** se consideră un sistem de coordonate fix cu planul Oxy amplasat în planul axelor de rotație A și D (Fig.2.23). În Fig.2.24.a este reprezentată proiecția mecanismului pe planul Oxy, în care apar urmele planelor P_B și P_C perpendiculare pe axele de rotație. În Fig.2.24.b este reprezentată proiecția pe

planul Oyz, în care apar urmele planelor P_B și P_C perpendiculare pe axele de rotație. În Fig.2.24.c este reprezentată proiecția pe planul Oxz, în care apar urmele planelor P_B și P_C perpendiculare pe axele de rotație.

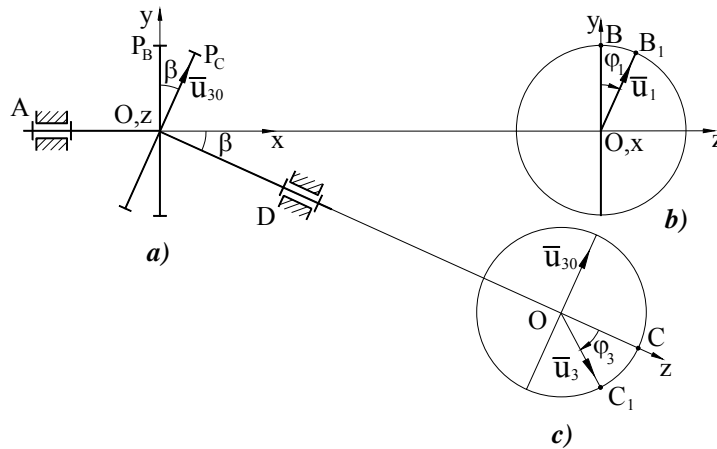


Fig. 2.24

planul P_B în care se rotește brațul OB , iar în Fig.2.24.c proiecția pe planul P_C în care se rotește brațul OC . Considerând că poziția inițială a mecanismului este cea redată în Fig.2.23 (cu OB după axa Oy și OC după axa Oz), să presupunem că elementul 1 se rotește cu unghiul φ_1 , brațul OB ajungând în poziția OB_1 (Fig.2.24.b). În același timp, elementul 3 se rotește cu unghiul φ_3 , brațul OC ajungând în poziția OC_1 (Fig.2.24.c). Considerăm versorii \bar{u}_1 și \bar{u}_3 asociați direcțiilor OB_1 și OC_1 , precum și versorul \bar{u}_{30} asociat dreptei de intersecție dintre planul Oxy și P_C .

Se exprimă versorii \bar{u}_1 și \bar{u}_3 în funcție de versorii axelor de coordonate și de \bar{u}_{30} .

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \bar{j} \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1 \\ \bar{u}_3 &= -\bar{u}_{30} \sin \varphi_3 + \bar{k} \cos \varphi_3\end{aligned}$$

Versorul \bar{u}_{30} are expresia

$$\bar{u}_{30} = \bar{i} \sin \beta + \bar{j} \cos \beta,$$

astfel că versorul \bar{u}_3 devine

$$\bar{u}_3 = -\bar{i} \sin \beta \sin \varphi_3 - \bar{j} \cos \beta \sin \varphi_3 + \bar{k} \cos \varphi_3.$$

Se scrie condiția de perpendicularitate dintre brațele crucii cardanice $OB_1(\bar{u}_1)$ și $OC_1(\bar{u}_3)$

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = -\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \cos \beta + \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 = 0,$$

de unde rezultă funcția de transmitere de ordinul zero sub formă implicită

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_3 \cos \beta \quad (2.66)$$

sau explicită

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \beta} \right) \quad (2.67)$$

Pentru a determina viteza unghiulară

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

și accelerația unghiulară

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

se calculează funcțiile de transmitere de ordinul unu și doi prin derivarea funcției $\varphi_3(\varphi_1)$ (2.67).

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{\cos\beta}{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta} \quad (2.68)$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = \frac{\sin(2\varphi_1) \cdot \cos\beta \cdot (\cos^2\beta - 1)}{(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta)^2} \quad (2.69)$$

Pentru a caracteriza transmiterea mișcării de la elementul 1 la elementul 3 se folosește și noțiunea de raport de transmitere i_{13} , definit ca raportul dintre viteza unghiulară a elementului conducător 1 și viteza unghiulară a elementului condus 3.

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{1}{\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}} = \frac{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta}{\cos\beta} \quad (2.70)$$

Funcția $i_{13}(\varphi_1)$ este periodică și are valorile extreme $\cos\beta$ și $\frac{1}{\cos\beta}$, așa cum rezultă din graficul reprezentat în Fig.2.25. Faptul că raportul de transmitere este variabil în raport cu φ_1 constituie un neajuns al acestui mecanism în legătură cu utilizarea sa cu rol de cuplaj. Dacă se leagă în serie

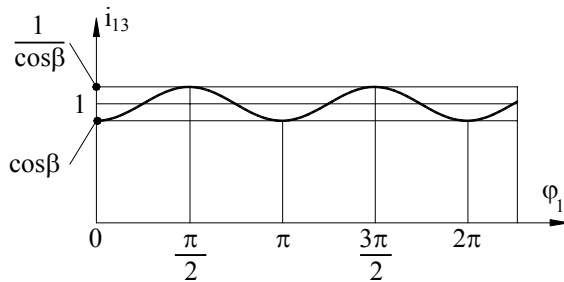


Fig. 2.25

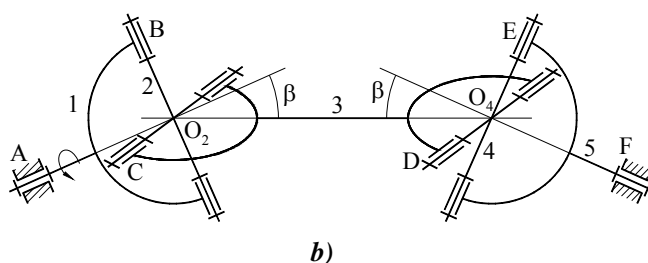
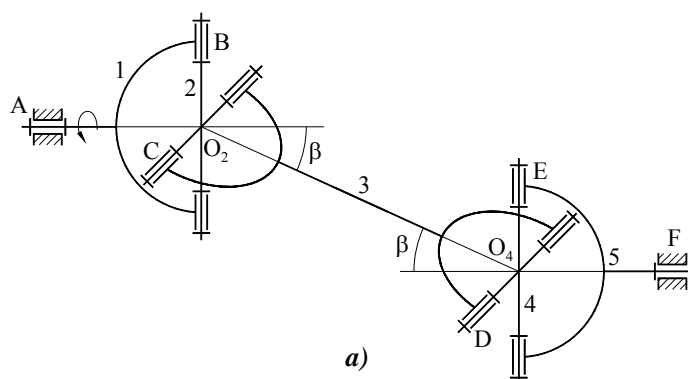
două mecanisme cardanice se obține, în anumite condiții, un mecanism homocinetic - cu raport de transmitere constant, egal cu unitatea. În Fig.2.26 sunt reprezentate două mecanisme bicardanice care se bucură de această proprietate. Condițiile de homocinetism, respectate de mecanismele din Fig.2.26 sunt:

- 1) Unghiurile dintre axele de rotație fixe (similare cu β) trebuie să fie egale la ambele mecanisme componente;
 - 2) Elementul intermediar 3 trebuie să aibă articulațiile C și D paralele.
- Scriind funcțiile de transmitere (2.66) pentru fiecare mecanism component, se obține

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_3 \cdot \cos\beta$$

$$\operatorname{tg}\varphi_5 = \operatorname{tg}\varphi_3 \cdot \cos\beta$$

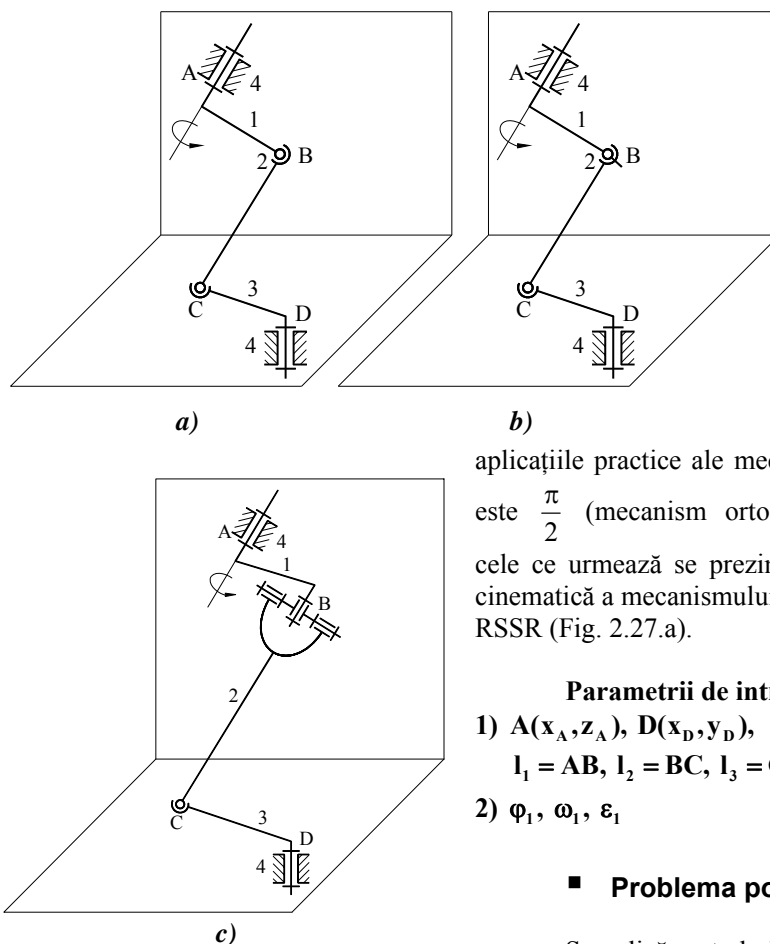
de unde rezultă $\varphi_1 = \varphi_5$, $\omega_1 = \omega_5$ și $i_{15} = 1$. Se remarcă faptul că elementul 3 nu are nevoie de o articulație cu elementul fix, deoarece axa de rotație O_2O_4 are direcția fixă pentru că punctele O_2 și O_4 sunt imobile.



b)
Fig. 2.26

2.1.9. Mecanismul patrulater articulat spațial

Acest mecanism este de familia $f = 0$ și se poate construi în mai multe variante în funcție de tipul cuplelor bielei: cu două cuple sferice (Fig.2.27.a), cu o cuplă sferică și o cuplă sferică cu deget (Fig.2.27.b) și cu o cuplă sferică și o articulație Hooke formată din două cuple de rotație cu axe perpendiculare (Fig. 2.27.c). Așa cum am arătat (par. 1.2.3.1) prima variantă are un grad de mobilitate local concretizat prin rotația nedeterminată a bielei în jurul axei care unește cuplele sferice. Toate variantele realizează, însă, aceeași mișcare pentru elementul 3 care este, de regulă, elementul de execuție al mecanismului. Unghiul dintre axele de rotație A și D poate avea orice valoare, însă în



c)

Fig. 2.27

aplicațiile practice ale mecanismului este $\frac{\pi}{2}$ (mecanism ortogonal). În cele ce urmează se prezintă analiza cinematică a mecanismului ortogonal RSSR (Fig. 2.27.a).

Parametrii de intrare:

- 1) $A(x_A, z_A), D(x_D, y_D),$
 $l_1 = AB, l_2 = BC, l_3 = CD$
- 2) $\varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$

■ **Problema pozițiilor**

Se aplică metoda intersecției locurilor geometrice utilizând reprezentarea mecanismului prin proiecțiile pe două plane H (Oxy) și V (Oyz) - Fig.2.28. Elementele 1 și 3 se rotesc în aceste plane, iar biela 2 este reprezentată prin proiecțiile sale B_nC și BC_v . Pentru a pune în evidență lungimea reală a bielei se rabate triunghiul BB_nC peste planul V. În acest scop se intersectează cercul cu centrul în B_n , de rază B_nC cu linia de pământ (Oy) obținând punctul C_o . Segmentul BC_o reprezintă lungimea reală a bielei.

Rezolvarea grafică a problemei pozițiilor este redată în Fig.2.29.a. Cunoscând poziția punctului A și unghiul φ_1 se reprezintă elementul

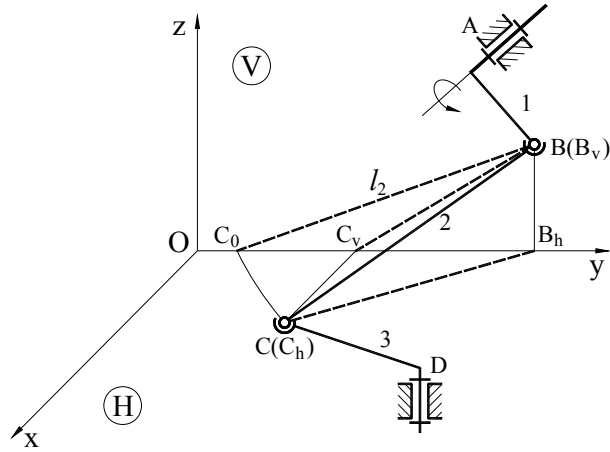


Fig. 2.28

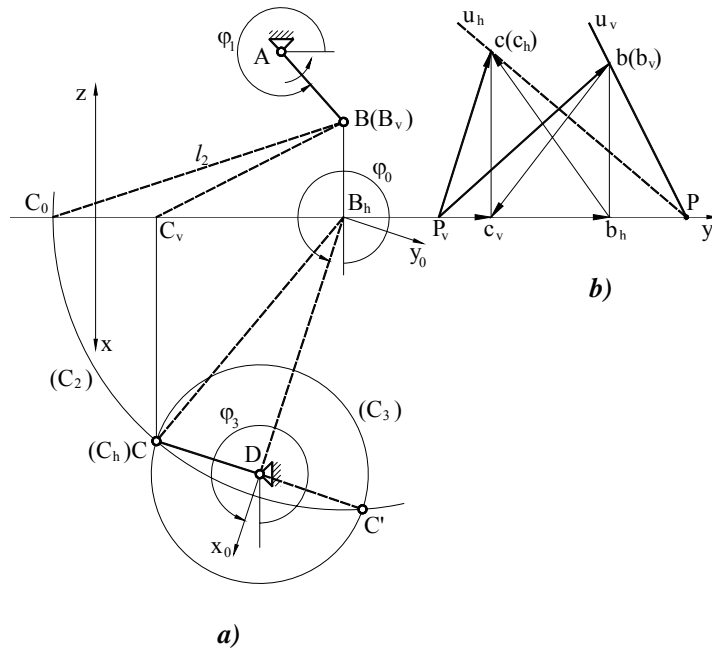


Fig. 2.29

conducător AB. Se intersectează, apoi, cercul cu centrul în B, de rază l_2 , cu linia de pământ obținând punctul C_0 . Se poziționează, în planul orizontal, punctul D. În continuare, se intersectează cercul (C_2) cu centrul în B_h , de rază $B_h C_0$ cu

cercul (C_3) cu centrul în D, de rază l_3 . Se obțin punctele de intersecție C și C' care reprezintă cele două soluții ale problemei și care conduc la pozițiile ABCD și ABC'D. Adoptând una dintre soluții (de exemplu ABCD) se reprezintă elementul 3 (DC) și biela BC prin proiecțiile sale.

Rezolvarea analitică presupune adoptarea unui sistem de axe de coordonate suplimentar $B_h x_0 y_0$ poziționat ca în Fig.2.29.a. Se determină coordonatele punctului B

$$y_B = y_A + l_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$z_B = z_A + l_1 \cdot \sin \varphi_1$$

Se calculează proiecția orizontală a bielei $l_{2h}=B_h C$, distanța $l_0=B_h D$ și unghiul φ_0 format de axa $B_h x_0$ cu axa Ox

$$l_{2h} = B_h C = B_h C_0 = \sqrt{l_2^2 - z_B^2}$$

$$l_0 = B_h D = \sqrt{x_D^2 + (y_B - y_D)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_D - y_B}{x_D}$$

Se scriu ecuațiile cercurilor (C_2) și (C_3) - definite la procedeu grafic, în raport cu sistemul $B_h x_0 y_0$

$$x_0^2 + y_0^2 = l_{2h}^2$$

$$(x_0 - l_0)^2 + y_0^2 = l_3^2$$

Soluțiile acestui sistem reprezintă coordonatele punctului C (C') în raport cu sistemul $B_h x_0 y_0$

$$x_{0C} = \frac{l_{2h}^2 - l_3^2 + l_0^2}{2l_0}$$

$$y_{0C} = \pm \sqrt{l_{2h}^2 - x_{0C}^2} \quad (2.71)$$

În final, se calculează poziția punctului C în raport cu sistemul absolut, aplicând transformarea de coordonate din sistemul $B_h x_0 y_0$ în sistemul Oxy,

$$x_C = x_{0C} \cos \varphi_0 - y_{0C} \sin \varphi_0$$

$$y_C = y_B + x_{0C} \sin \varphi_0 + y_{0C} \cos \varphi_0$$

și unghiul φ_3

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Observații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele care intervin în relația (2.71). Semnul (+) este în corespondență cu poziția ABC'D, iar (-) cu poziția ABCD.

2) Condițiile de existență a unei soluții reale sunt

$$|l_3 - l_{2h}| \leq l_0 \leq l_3 + l_{2h} \quad (2.72)$$

3) Pozițiile critice corespund egalităților din relațiile (2.72)

$$\begin{aligned} |l_3 - l_{2h}| &= l_0 \\ l_3 + l_{2h} &= l_0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

și se înregistrează când punctele B_h, C, D sunt coliniare. Cu alte cuvinte, în pozițiile critice proiecția bielei pe planul elementului condus este coliniară cu acest element.

■ Problema vitezelor și a accelerațiilor

Determinarea vitezelor și a accelerațiilor se rezolvă prin metoda ecuațiilor vectoriale adaptată pentru mecanismele spațiale. Ca și la mecanismele plane există un procedeu grafic și unul analitic.

Ecuațiile vectoriale de viteze sunt

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_D + \vec{v}_{CD} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Pentru **rezolvarea grafică** se precizează caracteristicile cunoscute ale vectorilor din acest sistem

$\vec{v}_C \in H$ și reprezintă necunoscuta problemei

$$\vec{v}_B \left\{ \begin{array}{l} |\vec{v}_B| = |\omega_1| \cdot l_1 \\ \perp AB \text{ în planul } V \\ \text{se rotește } \overline{AB} \text{ cu } 90^\circ \text{ în sensul } \omega_1 \end{array} \right.$$

$\vec{v}_{CB} \perp BC$, $\vec{v}_D = 0$, $\vec{v}_{CD} \perp DC$ în planul H.

Cu aceste date se construiește un poligon de viteze spațial reprezentat prin proiecțiile sale (Fig.2.29.b).

În polul vitezelor \mathbf{p}_v , situat pe linia de pământ, se aplică vectorul $\vec{v}_B(\overline{p_v b}) \perp AB$, conținut în planul vertical, având proiecția orizontală $\overline{p_v b_h}$. Prin punctul \mathbf{b} se duce un plan perpendicular pe bielă, care conține viteza \vec{v}_{CB} . Urma verticală U_v se trasează prin $b(b_v)$ perpendiculară pe proiecția verticală a bielei (BC_v). Această urmă intersectează linia de pământ în punctul P. Prin acest punct se trasează urma orizontală a planului U_h - perpendiculară pe proiecția orizontală a bielei ($B_h C$). Prin \mathbf{p}_v se trasează suportul vitezei \vec{v}_C având direcția

perpendiculară pe DC. Această dreaptă intersectează urma U_h în $\mathbf{c}(\mathbf{c}_h)$. Vectorul $\overline{p_v c}$ reprezintă $\overline{v_c}$ și se află în planul orizontal, proiecția verticală fiind $\overline{p_v c_v}$. Viteza relativă $\overline{v_{CB}}$ este amplasată în spațiu și are proiecțiile $\overline{b_h c}$ și $\overline{bc_v}$. Cunoscând $\overline{v_c}$ se determină ω_3 ca mărime

$$|\omega_3| = \frac{|\overline{v_c}|}{l_3},$$

iar sensul este același cu sensul în care se rotește \overline{DC} pentru a se suprapune peste $\overline{v_c}(\overline{p_v c})$.

Pentru **rezolvarea analitică** se reia sistemul (2.74) din care rezultă

$$\overline{v_D} + \overline{v_{CD}} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}} \quad (2.75)$$

Vitezele care intervin în această ecuație se exprimă în funcție de proiecțiile lor pe axele sistemului Oxyz.

$$\overline{v_D} = 0$$

$$\overline{v_{CD}} = \overline{\omega_3} \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ x_C - x_D & y_C - y_D & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i} \omega_3 (y_C - y_D) + \bar{j} \omega_3 (x_C - x_D)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_B} = \overline{v_{BA}} = \overline{\omega_1} \times \overline{AB} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix} = \\ &= -\bar{j} \omega_1 (z_B - z_A) + \bar{k} \omega_1 (y_B - y_A) \end{aligned}$$

Pentru a deduce expresia analitică a vitezei $\overline{v_{CB}}$, viteza unghiulară $\overline{\omega_2}$ se consideră formată din două componente $\overline{\omega_{2t}} \perp BC$ și $\overline{\omega_{2n}} // BC$. În această ipoteză se scrie:

$$\overline{v_{CB}} = \overline{\omega_2} \times \overline{BC} = (\overline{\omega_{2t}} + \overline{\omega_{2n}}) \times \overline{BC} = \overline{\omega_{2t}} \times \overline{BC} + \overline{\omega_{2n}} \times \overline{BC}.$$

Deoarece $\overline{\omega_{2n}} // BC$, $\overline{\omega_{2n}} \times \overline{BC} = 0$, $\overline{v_{CB}}$ se exprimă astfel

$$\begin{aligned} \overline{v_{CB}} = \overline{\omega_{2t}} \times \overline{BC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{2tx} & \omega_{2ty} & \omega_{2tz} \\ x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_{2ty}(-z_B) - \omega_{2tz}(y_C - y_B)) - \\ & -\bar{j}(\omega_{2tx}(-z_B) - \omega_{2tz} \cdot x_C) + \bar{k}(\omega_{2tx}(y_C - y_B) - \omega_{2ty} \cdot x_C) \end{aligned}$$

Aceste expresii se introduc în ecuația (2.75) care se proiectează pe axele sistemului de coordonate rezultând trei ecuații scalare. La acestea se adaugă condiția de perpendicularitate dintre $\overline{\omega}_{2t}$ și \overline{BC} ,

$$\overline{\omega}_{2t} \cdot \overline{BC} = \omega_{2tx} \cdot x_C + \omega_{2ty} (y_C - y_B) - \omega_{2tz} \cdot z_B = 0$$

În felul acesta se obține un sistem liniar format din 4 ecuații cu necunoscutele $\omega_3, \omega_{2tx}, \omega_{2ty}, \omega_{2tz}$,

$$\begin{vmatrix} y_C - y_D & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -(x_C - x_D) & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_3 \\ \omega_{2tx} \\ \omega_{2ty} \\ \omega_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_1 (z_B - z_A) \\ -\omega_1 (y_B - y_A) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se observă că $\overline{\omega}_{2t}$ se poate determina, pe când $\overline{\omega}_{2n}$ este nedeterminat, reflectând mobilitatea locală a elementului 2 care are caracter arbitrar.

Parametrul care interesează, în primul rând, este ω_3 , dar și celelalte necunoscute trebuie calculate pentru că intervin în problema accelerațiilor.

În cadrul **problemei accelerațiilor**, pe care o vom trata numai **analitic**, se deduce sub o formă convenabilă, ecuația vectorială care exprimă relația dintre \overline{a}_C și \overline{a}_B . Pentru aceasta, se derivează în raport cu timpul prima ecuație (2.74) scrisă sub forma

$$\overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}$$

și se obține

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{\omega}_{2t} \times (\overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}) + \dot{\overline{\omega}}_{2t} \times \overline{BC} \quad (2.76)$$

Dublul produs vectorial se dezvoltă astfel

$$\overline{\omega}_{2t} \times (\overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}) = \overline{\omega}_{2t} (\overline{\omega}_{2t} \cdot \overline{BC}) - \overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} = -\overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC}$$

Pentru simplificare, se face notația $\dot{\overline{\omega}}_{2t} = \overline{e}_2$ și se descompune acest vector în două componente $\overline{e}_{2t} \perp BC$ și $\overline{e}_{2n} // BC$. În aceste condiții se poate scrie

$$\dot{\overline{\omega}}_{2t} \times \overline{BC} = \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} = (\overline{e}_{2t} + \overline{e}_{2n}) \times \overline{BC} = \overline{e}_{2t} \times \overline{BC}.$$

Introducând aceste rezultate în ecuația (2.76) și adăugând ecuația care exprimă relația dintre \overline{a}_C și \overline{a}_D se obține sistemul

$$\begin{cases} \overline{a}_C = \overline{a}_B - \overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} \\ \overline{a}_C = \overline{a}_D + \overline{a}_{CD}^n + \overline{a}_{CD}^t \end{cases}$$

din care rezultă ecuația unică

$$\bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^t = \bar{a}_B - \bar{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} + \bar{e}_{2t} \times \overline{BC} \quad (2.77)$$

Termenii care intervin în această ecuație au expresiile

$$\bar{a}_D = 0$$

$$\bar{a}_{CD}^n = -\bar{\omega}_3^2 \cdot \overline{DC} = -\bar{i} \omega_3^2 (x_C - x_D) - \bar{j} \omega_3^2 (y_C - y_D)$$

$$\bar{a}_{CD}^t = \bar{e}_3 \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ x_C - x_D & y_C - y_D & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i} \varepsilon_3 (y_C - y_D) + \bar{j} \varepsilon_3 (x_C - x_D)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA}^n = -\bar{\omega}_1^2 \cdot \overline{AB} = -\bar{j} \omega_1^2 (y_B - y_A) - \bar{k} \omega_1^2 (z_B - z_A)$$

$$\bar{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} = \bar{i} \omega_{2t}^2 x_C + \bar{j} \omega_{2t}^2 (y_C - y_B) - \bar{k} \omega_{2t}^2 z_B$$

$$\omega_{2t} = \sqrt{\omega_{2tx}^2 + \omega_{2ty}^2 + \omega_{2tz}^2}$$

$$\bar{e}_{2t} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2tx} & e_{2ty} & e_{2tz} \\ x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} = \bar{i}(e_{2ty}(-z_B) - e_{2tz}(y_C - y_B)) - \bar{j}(e_{2tx}(-z_B) - e_{2tz} \cdot x_C) + \bar{k}(e_{2tx}(y_C - y_B) - e_{2ty} \cdot x_C)$$

Aceste expresii se introduc în ecuația (2.77) care se proiectează pe axele de coordonate. Se adaugă condiția de perpendicularitate dintre \bar{e}_{2t} și \overline{BC} ,

$$\bar{e}_{2t} \cdot \overline{BC} = e_{2tx} \cdot x_C + e_{2ty}(y_C - y_B) - e_{2tz} \cdot z_B = 0$$

și se obține un sistem liniar format din 4 ecuații cu necunoscutele $\varepsilon_3, e_{2tx}, e_{2ty}, e_{2tz}$, care se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} y_C - y_D & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -(x_C - x_D) & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_3 \\ e_{2tx} \\ e_{2ty} \\ e_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega_3^2 (x_C - x_D) + \omega_{2t}^2 x_C \\ A \\ \omega_1^2 (z_B - z_A) - \omega_{2t}^2 z_B \\ 0 \end{vmatrix}$$

în care $A = -\omega_3^2 (y_C - y_D) + \omega_1^2 (y_B - y_A) + \omega_{2t}^2 (y_C - y_B)$.

Prin rezolvarea sistemului se determină accelerația unghiulară a elementului condus ε_3 .

2.1.10. Mecanismul manivelă - piston spațial

Mecanismul manivelă - piston spațial (Fig.2.30) se aseamănă cu patrulaterul articulat spațial deosebindu-se de acesta prin faptul că elementul condus 3 este legat de bază printr-o cuplă de translație. Operația de analiză cinematică este similară cu cea de la mecanismul patrulater, astfel încât nu sunt necesare explicații detaliate.

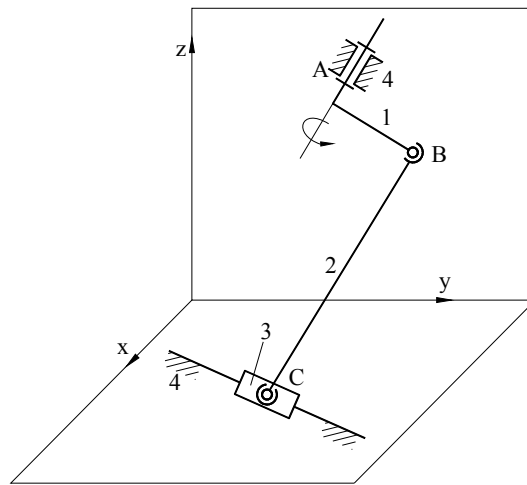


Fig. 2.30

Parametrii de intrare:

1) $A(y_A, z_A)$, $(D_3)(P(x_P, y_P), \varphi_3)$, $l_1 = AB$, $l_2 = BC$

2) φ_1 , ω_1 , ε_1

■ Problema pozițiilor

Rezolvarea grafică este arătată în Fig.2.31.a. Se reprezintă segmentul AB (cunoscând A, φ_1 și l_1) și dreapta (D_3) (cunoscând P și φ_3). Se trasează, apoi, un cerc cu centrul în B, de rază l_2 care intersectează linia de pământ în C_0 . Punctul C(C') se găsește la intersecția cercurilor (C_2) cu centrul în B_h , de rază $B_h C_0$ cu dreapta (D_3) .

Pentru **rezolvarea analitică** se adoptă un sistem de coordonate suplimentar $B_h x_0 y_0$ cu axa Bx_0 perpendiculară pe (D_3) în punctul D. Pozițiile punctelor B și D se calculează astfel

$$y_B = y_A + l_1 \cos \varphi_1$$

$$z_B = z_A + l_1 \sin \varphi_1$$

$$x_D = \frac{m(y_B - y_P) + m^2 x_P}{1 + m^2}$$

$$y_D = \frac{-m x_P + m^2 y_B + y_P}{1 + m^2}$$

în care $m = \operatorname{tg} \varphi_3$.

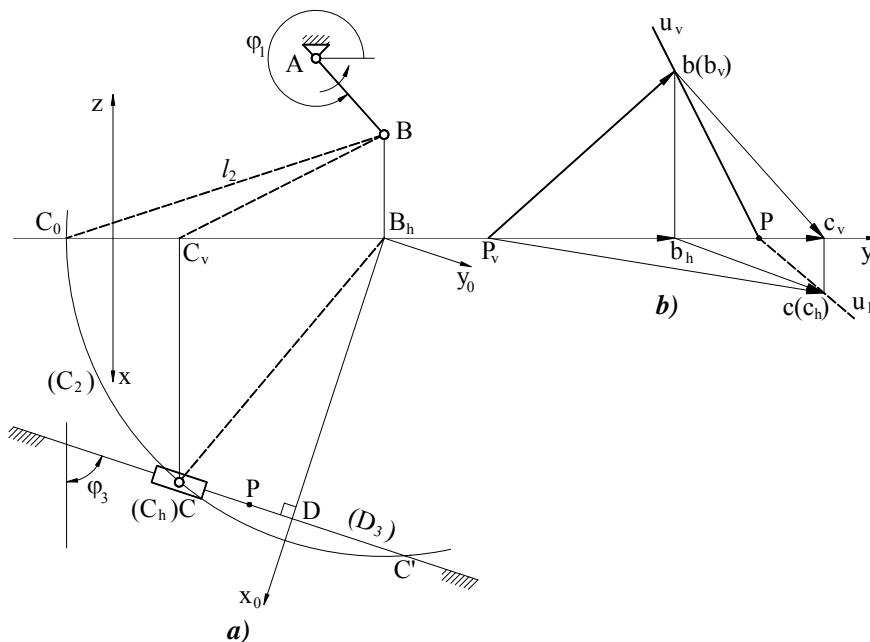


Fig. 2.31

În continuare se calculează $l_{2h} = B_h C$, $l_0 = B_h D$ și φ_0 cu formulele utilizate la mecanismul patrulater spațial,

$$l_{2h} = B_h C = B_h C_0 = \sqrt{l_2^2 - z_B^2}$$

$$l_0 = B_h D = \sqrt{x_D^2 + (y_B - y_D)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_D - y_B}{x_D}$$

Se scriu ecuațiile cercului (C_2) și a dreptei (D_3) în raport cu sistemul $B_h x_0 y_0$

$$x_0^2 + y_0^2 = l_{2h}^2$$

$$x_0 = l_0$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului $C(C')$ în raport cu reperul $B_h x_0 y_0$

$$x_{0C} = l_0$$

$$y_{0C} = \pm \sqrt{l_{2h}^2 - l_0^2} \quad (2.78)$$

Poziția punctului C în raport cu sistemul absolut rezultă printr-o transformare de coordonate:

$$x_C = x_{0C} \cos \varphi_0 - y_{0C} \sin \varphi_0$$

$$y_C = y_B + x_{0C} \sin \varphi_0 + y_{0C} \cos \varphi_0$$

Observații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele din formula (2.78). Semnul (+) este în corespondență cu poziția ABC' , iar semnul (-) cu ABC .

2) Condiția de existență a unei soluții reale, dedusă din (2.78) este

$$l_{2h} \geq l_0. \quad (2.79)$$

3) Poziția critică a mecanismului, determinată de relația

$$l_{2h} = l_0 \quad (2.80)$$

se înregistrează când proiecția orizontală a bielei este perpendiculară pe axa de translație (D_3).

■ Problema vitezelor și a accelerațiilor

În ecuația de viteze

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} \quad (2.81)$$

vectorii \bar{v}_B și \bar{v}_{CB} au aceleași caracteristici ca și la mecanismul patruleter, iar $\bar{v}_C // (D_3)$, astfel încât în **poligonul de viteze**, care se construiește în același mod, $\overline{p_v c}$ se trasează paralel cu (D_3).

Pentru **tratarea analitică** expresiile vitezelor \bar{v}_B și \bar{v}_{CB} sunt cele arătate la mecanismul patruleter, iar \bar{v}_C este

$$\bar{v}_C = \bar{i} v_C \cos \varphi_3 + \bar{j} v_C \sin \varphi_3.$$

Proiecțiile ecuației (2.81) pe axele de coordonate, împreună cu condiția de perpendicularitate dintre $\overline{\omega}_{2t}$ și \overline{BC} , formează următorul sistem liniar cu necunoscutele $v_C, \omega_{2tx}, \omega_{2ty}, \omega_{2tz}$,

$$\begin{vmatrix} -\cos\varphi_3 & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -\sin\varphi_3 & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_C \\ \omega_{2tx} \\ \omega_{2ty} \\ \omega_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_1(z_B - z_A) \\ -\omega_1(y_B - y_A) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Parametrul care interesează, în primul rând, este desigur \overline{v}_C .

În ecuația de **accelerații**

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B - \overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} \quad (2.82)$$

termenii din membrul drept au aceleași expresii ca la mecanismul patrulater, iar \overline{a}_C este

$$\overline{a}_C = \overline{i} a_C \cos\varphi_3 + \overline{j} a_C \sin\varphi_3.$$

Se ajunge la sistemul liniar

$$\begin{vmatrix} -\cos\varphi_3 & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -\sin\varphi_3 & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_C \\ e_{2tx} \\ e_{2ty} \\ e_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{2t}^2 \cdot x_C \\ B \\ \omega_1^2(z_B - z_A) - \omega_{2t}^2 \cdot z_B \\ 0 \end{vmatrix}$$

în care $B = \omega_1^2(y_B - y_A) + \omega_{2t}^2(y_C - y_B)$. Prin rezolvare se determină a_C .

2.2. ANALIZA CINETOSTATICĂ

2.2.1. Forțele în mecanisme

2.2.1.1. Obiectul analizei cinetostatice

Analiza cinetostatică este operația prin care se determină forțele de legătură din cuplele cinematice utilizând **metoda cinetostatică**. Această metodă este o aplicație a **principiului lui d'Alembert** care se enunță astfel:

În orice moment al mișcării forțelor aplicate, forțele de inerție și forțele de legătură se află în echilibru.

Forțele aplicate și cele de inerție se consideră cunoscute, iar forțele de legătură reprezintă necunoscutele problemei. Ele se determină pe baza unui model matematic constituit din ecuații de echilibru similare cu cele din statică.

Forțele de inerție se calculează într-o fază premergătoare, pe baza distribuției de accelerații și în funcție de caracteristicile masice ale elementelor (masele, pozițiile centrelor de masă, momentele de inerție). Rezultă că, înainte de a aborda analiza cinetostatică, trebuie efectuată analiza cinematică pentru a determina parametrii de poziție, care intervin în ecuațiile de echilibru și accelerațiile, care intervin în calculul forțelor de inerție. Dacă forțele de inerție sunt mici în raport cu forțele aplicate ele pot fi neglijate, iar operația de determinare a forțelor de legătură se numește, în acest caz, **analiză statică**.

Forțele de legătură se grupează în două categorii: **reacțiuni normale (ideale)** și **forțe de frecare**. Forțele de frecare sunt mici în raport cu reacțiunile normale (sub 10%) și, dacă nu există pretenții de precizie deosebite, pot fi neglijate. Prin urmare, analiza cinetostatică se poate efectua **în prezența forțelor de frecare** sau în absența lor.

Trebuie menționat că rezultatele analizei cinetostatice sunt aproximative deoarece mișcarea nu este concepută ca o consecință a acțiunii forțelor aplicate, ci este determinată prin operația de analiză cinematică. La rândul său, analiza cinematică are ca punct de plecare mișcarea din cuplele conducătoare. Cu cât parametrii acestei mișcări sunt mai apropiați de cei reali, analiza cinetostatică reflectă mai precis comportarea dinamică a mecanismului. În calculele tehnice, nivelul de precizie oferit de analiza cinetostatică este, totuși, acceptabil. Menționăm că datele de ieșire ale analizei cinetostatice - forțele de legătură din cuplele cinematice, servesc în procesul de proiectare organologică intervenind în calculul de rezistență al elementelor.

2.2.1.2. Forțele aplicate

Forțele aplicate acționează asupra fiecărui element ca forțe exterioare și pot fi **motoare** sau **rezistente**. Forțele motoare dezvoltă un lucru mecanic

elementar pozitiv, iar unghiul dintre o forță motoare \vec{F} și viteza punctului de aplicație \vec{v} este ascuțit (Fig.2.32.a). În cazul forțelor rezistente, care dezvoltă un lucru mecanic elementar negativ, același unghi este obtuz (Fig.2.32.b). Cuplurile de forțe pot fi, de asemenea, motoare sau rezistente după cum momentul lor este de același sens, sau de sens opus în raport cu viteza unghiulară a elementului asupra căruia acționează.

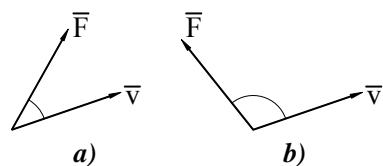


Fig. 2.32

Cele mai importante forțe aplicate sunt **forțele de acționare** și **forțele tehnologice**. Forțele de acționare lucrează în cuplurile conducătoare, sunt generate de motoarele asociate acestor cuple și au, evident, caracter motor. Forțele tehnologice acționează asupra elementelor conduse, de execuție, sunt

generate ca rezultat al operației tehnologice efectuate de mecanisme și au caracter rezistent. Ele se mai numesc **forțe de rezistență utilă**. În analiza cinetostatică forțele tehnologice se consideră cunscute, fiind determinate din studiul procesului tehnologic, iar forțele de acționare intervin ca necunoscute fiind denumite **forțe (momente) de echilibrare**. Denumirea se explică prin faptul că prezența acestor forțe, ca necunscute, realizează echilibrul cinetostatic. În absența lor problema devine incompatibilă deoarece numărul de ecuații este mai mare decât cel al necunscutelor (vezi Tab.1.2). Forțele (momentele) de echilibrare trebuie dezvoltate de motoarele de acționare, astfel încât valorile lor sunt importante pentru adoptarea acestor motoare. În unele cazuri, cum este cel al mecanismului manivelă-piston din construcția motoarelor termice, forța motoare, generată de presiunea gazelor, este cunoscută, iar momentul de rezistență utilă, devine moment de echilibrare și constituie necunoscuta problemei.

O altă categorie de forțe aplicate este reprezentată de **forțele de greutate** care acționează întotdeauna asupra mecanismelor care funcționează în câmpul gravitațional. Forța de greutate a unui element poate fi motoare, dacă centrul de masă coboară sau rezistentă - dacă se ridică. În orice caz, lucrul mecanic dezvoltat de forțele de greutate într-un ciclu cinematic este nul.

În categoria forțelor aplicate se includ și **forțele elastice** generate de arcuri. De obicei arcurile au rolul de a menține contactul dintre elementele cuplurilor deschise. Ele se pot monta între un element mobil și bază sau între două elemente mobile. Forțele elastice se determină în funcție de poziția relativă dintre cele două elemente, iar lucrul mecanic dezvoltat într-un ciclu cinematic este, de asemenea, nul. Uneori arcurile au rol de elemente de acționare (motoare). În acest caz forțele generate de ele se asimilează cu forțele de echilibrare.

Forțele de interacțiune cu mediul (aerodinamice, hidrodinamice) sunt, de asemenea, forțe aplicate și au caracter rezistent. Ele sunt luate în considerare

numai atunci când sunt destul de importante pentru a influența rezultatele analizei cinetostatice.

2.2.1.3. Forțele de inerție

■ Reducerea forțelor de inerție

Se consideră un element cinematic în mișcare generală plan paralelă și un sistem de axe de coordonate solidar cu elementul, având originea în centrul de masă G și axa Gz perpendiculară pe planul mișcării. Torsorul rezultat al forțelor de inerție, redus în punctul G are următoarele componente

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -m \cdot \bar{a}_G \\ \bar{M}_i &= \bar{i} \cdot (\varepsilon \cdot J_{xz} - \omega^2 \cdot J_{yz}) + \bar{j} \cdot (\varepsilon \cdot J_{yz} + \omega^2 \cdot J_{xz}) + \bar{k} \cdot (-\varepsilon \cdot J_z) \end{aligned} \quad (2.83)$$

în care \bar{F}_i este forța de inerție rezultantă, M_i - momentul rezultat al forțelor de inerție, m - masa elementului, J_z - momentul de inerție al elementului în raport cu axa Gz , J_{xz} , J_{yz} - momentele de inerție centrifugale, \bar{a}_G - accelerația centrului de masă, ω și ε - viteza și accelerația unghiulară ale elementului. Dacă axa Gz este axă principală de inerție, $J_{xz}=0$ și $J_{yz}=0$, iar formulele (2.83) devin

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -m \cdot \bar{a}_G \\ M_i &= -\varepsilon \cdot J_z \end{aligned} \quad (2.84)$$

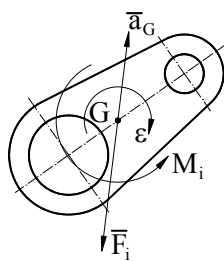


Fig. 2.33

Din (2.84) rezultă că forța de inerție \bar{F}_i are aceeași direcție cu accelerația centrului de masă \bar{a}_G și sens opus, iar momentul forțelor de inerție \bar{M}_i este orientat perpendicular pe planul mișcării și are sens opus accelerației unghiulare ε (Fig. 2.33).

Se remarcă faptul că torsorul (2.83) este spațial, pe când torsorul (2.84) reprezintă un sistem de forțe amplasate în planul mișcării Gxy . Această particularitate are consecințe favorabile în ce privește comportarea dinamică a mecanismului așa cum se

arată în par. 5.2.2.1. De aceea, se recomandă proiectarea elementelor astfel încât $J_{xz}=0$ și $J_{yz}=0$, iar în cele ce urmează, vom lua în considerare numai acest caz.

Forța de inerție $\bar{F}_i=0$ dacă $\bar{a}_G=0$, ceea ce se întâmplă în cazul mișcării de translație uniforme sau în cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe ce trece prin centrul de masă. Momentul forțelor de inerție $M_i=0$ dacă

$\varepsilon = 0$, ceea ce se întâmplă în cazul mișcării de translație sau în cazul mișcării de rotație uniforme.

■ Metoda concentrării maselor

În ecuațiile de echilibru cinetostatic intervin două categorii de forțe care depind de caracteristicile masice ale elementelor - forțele de greutate și forțele de inerție. Efectul acestor forțe se poate evidenția prin concentrarea masei elementului într-un număr finit de puncte. Fiecare masă concentrată m_k , generează o forță de greutate \bar{F}_{gk} și o forță de inerție \bar{F}_{ik}

$$\begin{aligned}\bar{F}_{gk} &= m_k \cdot \bar{g} \\ \bar{F}_{ik} &= -m_k \cdot \bar{a}_k\end{aligned}\quad (2.85)$$

în care \bar{g} este accelerația gravitațională, iar \bar{a}_k - accelerația punctului de concentrare. Sistemul forțelor de greutate și de inerție ale maselor concentrate trebuie să fie echivalent cu sistemul format din forța de greutate și torsorul forțelor de inerție redus în centrul de masă. Pentru aceasta, dacă ne limităm la cazul mișcării plan paralele, trebuie îndeplinite următoarele condiții

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_n = m \\ m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_n \bar{r}_n = m \bar{r}_G \\ m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = J_0 \end{cases}\quad (2.86)$$

În formulele (2.86), $\bar{r}_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, n$) reprezintă vectorii de poziție ai maselor concentrate m_k , în raport cu originea unui sistem de axe solidar cu elementul, $\bar{r}_G(x_G, y_G)$ - vectorul de poziție al centrului de masă și J_0 - momentul de inerție al elementului în raport cu axa Oz, perpendiculară pe planul mișcării. Ecuația a doua este echivalentă cu două ecuații scalare

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = m x_G \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n = m y_G \end{cases}\quad (2.87)$$

iar ecuația a treia se poate scrie

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + \dots + m_n(x_n^2 + y_n^2) = J_0\quad (2.88)$$

Primele două condiții (2.86) asigură echivalența forțelor de greutate și de inerție (nu și a momentelor forțelor de inerție). Dacă sunt respectate numai aceste condiții, concentrarea se numește **statică**. Dacă sunt respectate toate cele trei condiții echivalența este totală, iar concentrarea se numește **dinamică**. Concentrarea statică se folosește numai dacă $M_i = 0$ (mișcare de translație sau de rotație uniformă, când $\varepsilon = 0$) sau este neglijabil ($J_0 \cong 0$).

Parametrii care definesc concentrarea sunt valorile maselor și coordonatele punctelor de concentrare. Deci, pentru pentru fiecare punct trebuie cunoscuți trei parametri (m_k, x_k, y_k). În cazul concentrării dinamice există 4 ecuații scalare și $3n$ necunoscute, astfel că $3n - 4$ parametri pot fi aleși arbitrar. În cazul concentrării statice numărul de ecuații este 3, iar cel de necunoscute $3n$, așa încât $3n - 3$ parametri pot fi adoptați arbitrar. În continuare se vor analiza câteva cazuri particulare de concentrare.

■ Concentrarea statică în două puncte

Considerând $O \equiv G$, relațiile (2.86) și (2.87) devin

$$m_1 + m_2 = m$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

Din ultimele două ecuații rezultă

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

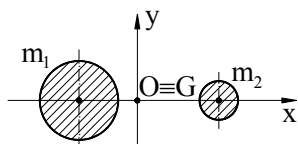


Fig. 2.34

ceea ce arată că punctele de concentrare sunt coliniare cu centrul de masă. În aceste condiții cele trei puncte pot fi considerate pe axa Ox (Fig.2.34), iar $y_1 = y_2 = 0$. Sistemul se reduce la primele două ecuații care conțin 4 parametri. Dacă x_1 și x_2 se adoptă, rezultă m_1 și m_2 ,

$$m_1 = m \frac{x_2}{x_2 - x_1}, m_2 = m \frac{x_1}{x_1 - x_2}.$$

Pentru a obține soluții pozitive (masa negativă nu are sens fizic) este necesar ca x_1 și x_2 să aibă semne diferite.

■ Concentrarea dinamică în două puncte

În ipoteza $O \equiv G$, condițiile de concentrare (2.86), (2.87) și (2.88) se scriu astfel

$$m_1 + m_2 = m$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) = J_G$$

Ca și în cazul precedent, punctele de concentrare și centrul de masă sunt coliniare și se pot adopta pe axa Ox ($y_1 = y_2 = 0$), iar sistemul de ecuații devine

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 &= J_G \end{aligned}$$

Dintre cei 4 parametri (x_1, x_2, m_1, m_2) se impune unul (de exemplu x_1), iar ceilalți trei rezultă

$$m_1 = \frac{J_G m}{m x_1^2 + J_G}, \quad m_2 = \frac{m^2 x_1^2}{m x_1^2 + J_G}, \quad x_2 = -\frac{J_G}{m x_1}$$

■ Concentrarea dinamică în trei puncte coliniare, dintre care unul este centrul de masă

Se consideră $O \equiv G$ și punctele de concentrare pe axa Ox (Fig.2.35). Sistemul de ecuații este

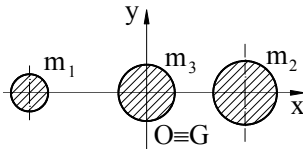


Fig. 2.35

$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = J_G$$

Având 3 ecuații și 5 necunoscute (x_1, x_2, m_1, m_2, m_3) trebuie adoptați doi parametri, de exemplu x_1 și x_2 . Rezultă cele trei mase

$$m_1 = \frac{J_G}{x_1(x_1 - x_2)}; \quad m_2 = \frac{J_G}{x_2(x_2 - x_1)}; \quad m_3 = m + \frac{J_G}{x_1 x_2}$$

Pentru a obține soluții pozitive trebuie îndeplinite condițiile

$$x_1 x_2 < 0 \quad \text{și} \quad m > \frac{J_G}{|x_1 x_2|}$$

2.2.1.4. Forțele de legătură

Forțele de legătură exprimă interacțiunea dinamică dintre elementele cuplelor cinematice, acționează prin intermediul suprafețelor în contact și se împart în două categorii: reacțiuni normale și forțe de frecare.

■ Reacțiunile normale

Așa cum am arătat (par. 1.1.1), reacțiunile normale înlocuiesc legăturile cinematice (restricțiile la deplasare). Tipul (forță de reacțiune sau moment de reacțiune) și direcția lor în raport cu geometria cuplei sunt indicate în Tab.1.1. În cazul mecanismelor plane (de care ne ocupăm în primul rând) se face ipoteza că încărcările (forțele aplicate) și forțele de inerție acționează într-un singur plan, paralel cu planul mișcării.

În aceste condiții, componentele tursorului de reacțiune care nu acționează în acest plan devin nule din condițiile de echilibru. Componentele diferite de zero pot fi asociate cu restricțiile raportate la mișcarea plan paralelă. Astfel, în cazul **cuplei de rotație** (Fig.2.36.a), tursorul de reacțiune se reduce, în centrul cuplei, la o reacțiune unică \bar{R}_{12} (primul indice arată elementul din partea căruia se exercită reacțiunea, iar al doilea - elementul asupra căruia se exercită), având componentele necunoscute R_{12x} și R_{12y} . În cazul **cuplei de translație** (Fig.2.36.b) tursorul de reacțiune se reduce într-un punct de pe axa de translație la o reacțiune perpendiculară pe această axă $\bar{R}_{12} \perp Ax$ și la un moment de reacțiune M_{r12} . Parametri scalari necunoscuți sunt R_{12y} ($R_{12x} = 0$) și M_{r12} . De obicei punctul de reducere se adoptă în centrul zonei de contact a cuplei (Fig.2.36.b), dar se poate adopta și într-un punct determinat astfel încât

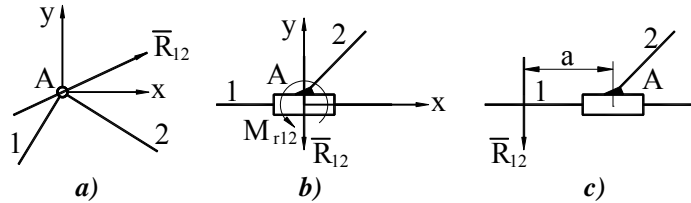


Fig. 2.36

tursorul să fie format dintr-o reacțiune unică (Fig.2.36.c). În acest caz distanța a , care determină poziția punctului de reducere față de centrul zonei de contact, este o necunoscută a problemei de analiză cinetostatică și este legată de parametrii $|R_{12}|$ și $|M_{r12}|$ prin relația

$$|M_{r12}| = |R_{12}| \cdot a \quad (2.89)$$

■ Forțele de frecare

Fenomenul frecării este deosebit de complex, fiind determinat de un număr foarte mare de factori mecanici, fizici și chimici. În contextul acestei

expuneri ne interesează numai una dintre manifestările frecării - forța de frecare de alunecare. Între mărimea forței de frecare \bar{F}_{f12} și cea a reacțiunii normale \bar{R}_{12} există relația

$$|F_{f12}| = \mu \cdot |R_{12}|$$

unde μ este coeficientul de frecare. Forța de frecare \bar{F}_{f12} are direcția și sensul vitezei relative de alunecare \bar{v}_{12} (se opune vitezei \bar{v}_{21}) - Fig.2.37.

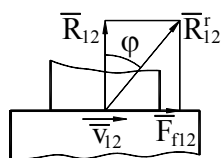


Fig. 2.37

Dacă se compune reacțiunea normală \bar{R}_{12} cu forța de frecare \bar{F}_{f12} se obține reacțiunea rezultantă \bar{R}_{12}^r . Unghiul φ dintre \bar{R}_{12} și \bar{R}_{12}^r se numește unghi de frecare, iar tangenta sa este egală cu coeficientul de frecare

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|F_{f12}|}{|R_{12}|} = \mu .$$

Valoarea coeficientului de frecare, esențială pentru calculul forțelor de frecare, depinde de regimul de frecare din cupla cinematică. În Tribologie (știința frecării) se consideră că există trei regimuri de frecare: uscată, limită și fluidă. **Frecarea uscată** se produce în absența lubrifiantului și, practic, nu se admite în cuplele cinematice datorită uzării foarte rapide a suprafețelor. **Regimul limită** apare când între suprafețe există un strat de fluid foarte subțire (molecular) de lubrifiant. **Frecarea fluidă** presupune existența unei pelicule de lubrifiant care separă complet suprafețele, iar alunecarea se produce între straturile de fluid. Se admite și o stare de frecare intermediară, numită **mixtă** în care pelicula de lubrifiant se reface și se întrerupe periodic. Valorile coeficientului de frecare sunt date, în mod orientativ, în Tab.2.3.

Tabelul 2.3

Regimul de frecare	Valoarea aproximativă a coeficientului de frecare
Frecare uscată	$\mu > 0,3$
Frecare limită	0,1 - 0,3
Frecare mixtă	0,005 - 0,1
Frecare fluidă	0,001 - 0,005

Din Tab.2.3 rezultă că, în cazul frecării fluide, coeficientul de frecare este foarte mic, iar forțele de frecare au valori neglijabile în raport cu reacțiunile normale. De aceea, în analiza cinetostatică, se iau în considerare, în primul rând, forțele de frecare din cuplele cu frecare limită sau mixtă.

În cazul **cuplei de rotație** forța de frecare \bar{F}_{f12} acționează în punctul de contact fus - lagăr care apare datorită jocului din cuplă. Direcția forței de frecare este orientată după tangenta comună la cele două cercuri, iar sensul este același

cu al vitezei relative \bar{v}_{12} (Fig.2.38.a). Din motive care țin de simplificarea analizei cinetostatice, reducerea forțelor de frecare se face în centrul fusului (Fig.2.38.b). În această ipoteză, pe lângă forța de frecare intervine și un moment de frecare M_{f12} având sensul vitezei unghiulare relative ω_{12} . Forța și momentul de frecare se calculează, în modul, cu relațiile

$$\begin{aligned} |F_{f12}| &= \mu_A \cdot |R_{12}| \\ |M_{f12}| &= \mu_A \cdot r_A \cdot |R_{12}| \end{aligned}$$

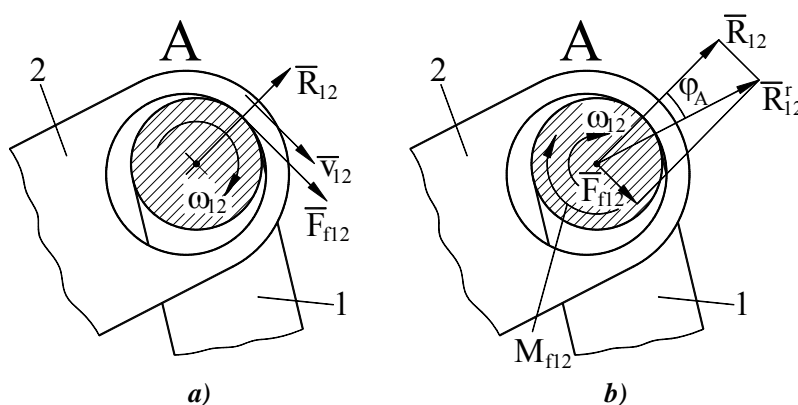


Fig. 2.38

în care μ_A este coeficientul de frecare din cupla A, iar r_A este raza fusului. Reacțiunea normală \bar{R}_{12} și forța de frecare \bar{F}_{f12} se compun obținându-se reacțiunea rezultantă \bar{R}_{12}^r . În felul acesta, torsorul rezultat al forțelor de legătură din cuplă se reduce, în centrul cuplei, la forța $\bar{R}_{12}^r (R_{12x}^r, R_{12y}^r)$ și la momentul M_{f12} care se exprimă în funcție de R_{12}^r ,

$$M_{f12} = s_{12} \cdot \mu_A \cdot r_A \cdot |R_{12}^r| \cos \varphi_A$$

Termenul s_{12} indică semnul (sensul) momentului și se determină astfel

$$s_{12} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } \tilde{\omega}_{12} \text{ este pozitiv} \\ -1, & \text{dacă } \tilde{\omega}_{12} \text{ este negativ} \end{cases}$$

Deoarece $\mu_A = \operatorname{tg} \varphi_A$, iar $|R_{12}^r| = \sqrt{(R_{12x}^r)^2 + (R_{12y}^r)^2}$ formula devine

$$M_{f12} = s_{12} \cdot r_A \sqrt{(R_{12x}^r)^2 + (R_{12y}^r)^2} \sin \varphi_A, \quad (2.90)$$

iar dacă φ_A este mic ($< 10^0$), $\sin \varphi_A \cong \operatorname{tg} \varphi_A = \mu_A$, se poate folosi și formula:

$$M_{f12} = s_{12} \cdot \mu_A \cdot r_A \sqrt{(R_{12x}^r)^2 + (R_{12y}^r)^2} \quad (2.91)$$

În cazul lagărelor cu rulmenți se aplică aceleași relații, cu observația că r_A este o rază de reducere convențională - în mod obișnuit raza cercului care trece prin centrele corpurilor de rulare.

Pentru a studia modul în care acționează forțele de frecare în **cupla de translație**, torsorul reacțiunilor normale (\bar{R}_{12} , M_{r12}) se înlocuiește prin două forțe, perpendiculare pe axa de translație și amplasate la extremitățile zonei de contact. Aceste forțe, determinate din ecuații de momente, de echivalență, scrise în raport cu punctele A' și A'' (Fig.2.39.a), au valorile:

$$R'_{12} = \frac{|R_{12}|}{2} + \frac{|M_{r12}|}{b}$$

$$R''_{12} = \frac{|R_{12}|}{2} - \frac{|M_{r12}|}{b}$$

în care b este lungimea zonei de contact a cuplei.

Pentru a calcula forța de frecare vom lua în considerare două cazuri

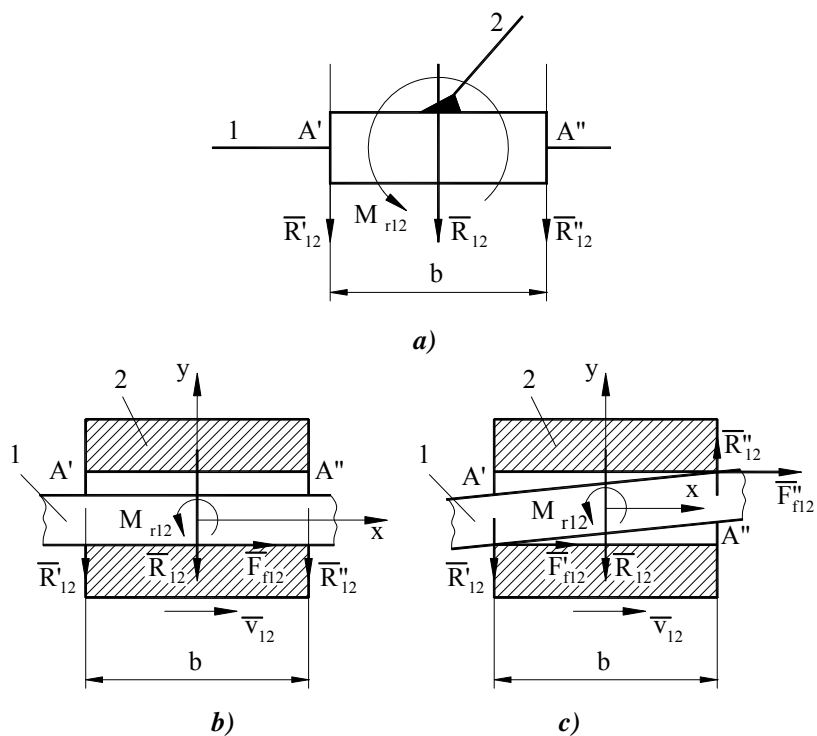


Fig. 2.39

$$\text{Cazul (1)} \quad \frac{|R_{12}|}{2} > \frac{|M_{r12}|}{b} \text{ sau } |R_{12}| > \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$$

Dacă M_{r12} se înlocuiește cu expresia (2.89) se obține condiția

$$a < \frac{b}{2}$$

care arată că acest caz se înregistrează când punctul de reducere al reacțiunii unice se află în interiorul zonei de contact.

Deoarece \bar{R}'_{12} și \bar{R}''_{12} au același sens, poziția relativă dintre cele două elemente, având în vedere jocul din cuplă, este cea din Fig.2.39.b, iar forța de frecare are mărimea

$$|F_{r12}| = \mu_{A1} \cdot |R_{12}| \quad (2.92)$$

în care μ_{A1} este coeficientul de frecare din cuplă, corespunzător acestui caz. Componentele forței de frecare, în raport cu un reper solidar cu un element al cuplei, având axa abscisei paralelă cu axa de translație sunt

$$\begin{aligned} F_{r12x} &= F_{r12} = s_{12} \cdot \mu_{A1} \cdot |R_{12}| \\ F_{r12y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

în care s_{12} indică semnul (sensul) forței de frecare și se determină astfel

$$s_{12} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } v_{12} \text{ este pozitiv (are sensul axei } x) \\ -1, & \text{dacă } v_{12} \text{ este negativ (are sens opus axei } x) \end{cases}$$

$$\text{Cazul (2)} \quad \frac{|R_{12}|}{2} < \frac{|M_{r12}|}{b}, |R_{12}| < \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}, a > \frac{b}{2}$$

Desigur, acest caz se înregistrează când punctul de reducere al rezultantei unice se află în afara zonei de contact.

Deoarece \bar{R}'_{12} și \bar{R}''_{12} au sensuri opuse, poziția relativă dintre elemente este cea din Fig.2.39.c, cu două puncte de contact la extremitățile patinei. În consecință apar două forțe de frecare

$$\begin{aligned} |F'_{r12}| &= \mu_{A2} |R'_{12}| = \mu_{A2} \left(\frac{|R_{12}|}{2} + \frac{|M_{r12}|}{b} \right) \\ |F''_{r12}| &= \mu_{A2} |R''_{12}| = \mu_{A2} \left(\frac{|M_{r12}|}{b} - \frac{|R_{12}|}{2} \right), \end{aligned}$$

iar forța de frecare rezultantă este

$$|F_{r12}| = |F'_{r12}| + |F''_{r12}| = \mu_{A2} \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b} \quad (2.94)$$

$$F_{f12} = F_{f12x} = s_{12} \cdot \mu_{A2} \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b} \quad (2.95)$$

$$F_{f12y} = 0.$$

În aceste relații μ_{A2} este coeficientul de frecare din cuplă corespunzător acestui caz, iar s_{12} are aceeași semnificație ca în cazul (1).

Comparând relația (2.94) cu (2.92) și având în vedere condițiile de definiție ale celor două cazuri rezultă că forța de frecare în cazul (2) este mai mare decât în cazul (1), în ipoteza că R_{12} are aceeași valoare. Trebuie remarcat că în sprijinul acestei afirmații intervine și faptul că $\mu_{A2} > \mu_{A1}$. Aceasta se explică prin aceea că în **cazul (2)** reacțiunile R'_{12} și R''_{12} sunt concentrate, presiunile de contact sunt mari, iar regimul de ungere - defavorabil. Se observă, de asemenea, că forța de frecare în **cazul (2)** depinde și de parametrul b (2.94). Cu cât această lungime este mai mică, forța de frecare este mai mare.

Aceste observații conduc la concluzia că este recomandabil să fie evitat **cazul (2)**. Această cerință se poate realiza printr-o proiectare rațională a mecanismului prin care să se obțină momente de reacțiune cât mai mici în cuplele de translație (vezi par. 2.2.3.1). Reamintim că, pentru a evita **cazul (2)**, punctul de aplicație al rezultantei unice trebuie să se afle în interiorul zonei de contact a cuplei.

2.2.2. Analiza cinetostatică fără frecare

■ Considerații generale

Așa cum am arătat, modelul matematic al analizei cinetostatice se constituie din ecuațiile de echilibru ale elementelor. În cazul mecanismelor plane ecuațiile de forțe sunt vectoriale, iar ecuațiile de momente pot fi exprimate scalar. Prin proiectarea ecuațiilor de forțe pe axele sistemului de coordonate solidar cu baza, toate ecuațiile devin scalare și au caracter liniar. Prin urmare, analiza cinetostatică fără frecare este o problemă liniară cu avantajele care decurg de aici în ce privește rezolvarea numerică. Problema poate fi tratată pe ansamblul mecanismului sau pe grupe structurale. Cea de-a doua modalitate prezintă avantajele semnalate și la analiza cinematică: cu ajutorul unui număr redus de procedee se poate analiza un număr mare de mecanisme. Pe lângă aceasta, abordarea pe grupe structurale reduce mult numărul de ecuații care trebuie rezolvate simultan, simplificând procedeul de rezolvare. Astfel, în cazul grupelor 0/2/2 numărul de ecuații care trebuie rezolvate simultan este de maximum patru. Trebuie precizat că în cinetostatică

ordinea în care se face analiza grupelor componente este inversă în raport cu ordinea de formare a mecanismului.

Rezolvarea ecuațiilor de echilibru se poate face grafo - analitic sau analitic. Procedeele grafo - analitic presupune rezolvarea analitică a ecuațiilor scalare, de momente și rezolvarea grafică (prin construcția unor poligoane) a ecuațiilor vectoriale, de forțe.

2.2.2.1. Analiza cinetostatică a grupelor structurale

Procedeele de analiză cinetostatică pentru grupele structurale uzuale sunt prezentate în Tab.2.4. În acest tabel sunt indicate sistemele de ecuații de echilibru scrise sub formele specifice celor două moduri de rezolvare.

Sunt reprezentate, de asemenea, poligoanele de forțe care reprezintă rezolvarea grafică a ecuațiilor de forțe. În cadrul acestor procedee, forțele cunoscute (aplicate și de inerție) care acționează asupra unui element k , se reduc, într-un punct de poziție cunoscută O_k , la un torsesor (\bar{F}_k, \bar{M}_k) . În aplicațiile concrete multe dintre aceste componente sunt nule sau neglijabile. Pentru a înlesni înțelegerea procedeele prezentate sintetic în Tab.2.4, se tratează, detaliat, în continuare, două grupe structurale. Se va efectua, de asemenea, analiza cinetostatică a mecanismului patrulater articulată plan utilizând, comparativ, abordarea globală și cea pe grupe structurale.

■ Grupa structurală RRT (Fig. 2.40)

Vom trata, la început, **procedeele grafo - analitic**.

Reacțiunea \bar{R}_{12} se consideră formată din două componente $\bar{R}_{12}^t \perp AB$ și $\bar{R}_{12}^n // AB$.

Se scrie ecuația de momente, pentru elementul 2, în raport cu punctul B,

$$\sum M_B(2) = 0; \quad M_B(\bar{R}_{12}^t) + M_B(\bar{F}_2) + M_2 = 0$$

Momentul $M_B(\bar{F}_2)$ care intervine în această ecuație se calculează astfel:

$$M_B(\bar{F}_2) = \pm |\bar{F}_2| \cdot h_2$$

unde h_2 este brațul momentului (Fig.2.40.a) care poate fi determinat grafic, prin măsurare pe desen. Semnul se determină în funcție de sensul momentului, observat pe desen, și convenția de semn adoptată.

Din ecuația de momente se calculează

$$M_B(\bar{R}_{12}^t) = -(M_B(\bar{F}_2) + M_2)$$

și apoi

$$|R_{12}^t| = \frac{|M_B(\bar{R}_{12}^t)|}{l_2}$$

Sensul reacțiunii \bar{R}_{12}^t se stabilește în funcție de semnul momentului $M_B(\bar{R}_{12}^t)$.

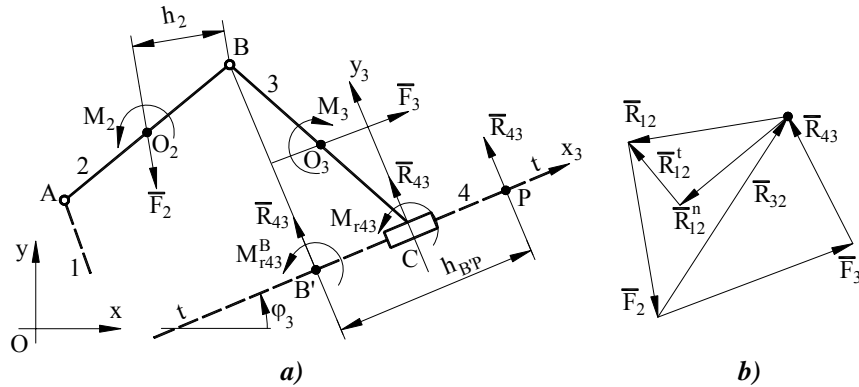


Fig. 2.40

Se scrie, apoi, ecuația vectorială de forțe pentru sistemul format din elementele 2 și 3,

$$\sum \bar{F}(2, 3) = 0; \quad \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0.$$

Ecuția se rezolvă grafic, prin construcția unui poligon de forțe. Se reprezintă, la început, forțele cunoscute \bar{R}_{12}^t , \bar{F}_2 și \bar{F}_3 înșiruite una după alta (Fig.2.40.b). Apoi, prin punctul inițial se trasează suportul reacțiunii $\bar{R}_{12}^n // AB$, iar prin punctul final suportul reacțiunii $\bar{R}_{43} \perp tt$. Cele două drepte se intersectează închizând poligonul. În felul acesta rezultă \bar{R}_{12}^n și \bar{R}_{43} , iar sensul lor se stabilește astfel ca întreg poligonul să fie parcurs în același sens. Prin compunere grafică se determină $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t$.

Se scrie ecuația de forțe pentru un element al grupei, de exemplu elementul 2,

$$\sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

Reacțiunea \bar{R}_{32} se determină grafic, prin construcția unui triunghi de vectori (Fig.2.40.b) conform cu ecuația de echilibru.

În final, se determină momentul de reacțiune din cupla de translație cu ajutorul unei ecuații de momente scrisă pentru elementul 3. De regulă, această ecuație se scrie în raport cu punctul B. Aceasta înseamnă că reducerea torsorului de reacțiune se face în B sau în B' - piciorul perpendicularei dusă prin B pe axa

tt. (Toate punctele de reducere situate pe suportul forței rezultante au același moment resultant).

$$\begin{aligned}\sum M_B(3) = 0; \quad M_B(\bar{F}_3) + M_3 + M_{r43}^B &= 0 \\ M_{r43}^B &= -(M_B(\bar{F}_3) + M_3)\end{aligned}$$

Dacă torsorul de reacțiune se reduce la o reacțiune unică, atunci poziția punctului de reducere P trebuie determinată. Se scrie relația de calcul a momentului la schimbarea polului din B' în P,

$$\begin{aligned}M_{r43}^P &= M_{r43}^B + M_P(\bar{R}_{43}) = 0 \\ M_P(\bar{R}_{43}) &= -M_{r43}^B\end{aligned}$$

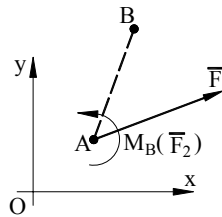
De aici rezultă $h_{B'P}$,

$$h_{B'P} = \frac{|M_P(\bar{R}_{43})|}{|R_{43}|},$$

iar sensul de măsurare se determină astfel încât momentul $M_P(\bar{R}_{43})$ să aibă sensul obținut din calcul.

Dacă punctul de reducere este centrul zonei de contact C, atunci $M_{r43} = M_{r43}^C$ se poate determina fie prin schimbarea polului, din B' în C sau din P în C, fie scriind o ecuație de momente pentru elementul 3 în raport cu C,

$$\begin{aligned}\sum M_C(3) = 0; \quad M_C(\bar{F}_3) + M_3 + M_C(\bar{R}_{23}) + M_{r43} &= 0 \\ M_{r43} &= -(M_C(\bar{F}_3) + M_3 + M_C(\bar{R}_{23})).\end{aligned}$$



Procedeeul analitic folosește aceleași ecuații de echilibru ca și procedeeul grafic, cu observația că ecuațiile de momente se scriu, mai întâi, sub formă vectorială și apoi se transpun scalar. Astfel, momentul unei forțe \bar{F} aplicată în A, în raport cu polul B (Fig.2.41) se scrie

$$\bar{M}_B(\bar{F}) = \overline{BA} \times \bar{F} = \bar{F} \times \overline{AB},$$

iar apoi se dezvoltă, obținând expresia scalară

Fig. 2.41

$$\bar{M}_B = \bar{F} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & 0 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}(F_x(y_B - y_A) - F_y(x_B - x_A))$$

$$M_B = M_{Bz} = F_x(y_B - y_A) - F_y(x_B - x_A)$$

În cazul grupeii RRT se scriu următoarele ecuații de echilibru:

$$\sum \bar{M}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} \times \overline{AB} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2B} + \bar{M}_2 = 0$$

$$\sum \bar{F}(2, 3) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{R}_{43} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

Ecuția de momente se transpune scalar, iar ecuațiile de forțe se proiectează pe axele de coordonate. Pentru a scrie proiecțiile reacțiunii $\bar{R}_{43} \perp tt$, se utilizează unghiul φ_3 format de axa de translație Cx_3 cu axa Ox . În felul acesta se obține următorul sistem liniar

$$\begin{vmatrix} y_B - y_A & -(x_B - x_A) & 0 \\ 1 & 0 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{43} \\ R_{12x} \\ R_{12y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(M_2 + F_{2x}(y_B - y_A)) \\ -F_{2y}(x_B - x_A) \\ -(F_{2x} + F_{3x}) \\ -(F_{2y} + F_{3y}) \end{vmatrix} \quad (2.96)$$

din care se calculează R_{43} , R_{12x} și R_{12y} .

Reacțiunea R_{32} rezultă din ecuația de forțe pentru elementul 2,

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} &= 0 \\ R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} &= 0 \\ R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} &= 0 \\ R_{32x} &= -(R_{12x} + F_{2x}) \\ R_{32y} &= -(R_{12y} + F_{2y}) \end{aligned}$$

Momentul M_{r43}^B rezultă din ecuația de momente pentru elementul 3 în raport cu B,

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_B(3) = 0; \quad \bar{F}_3 \times \overline{O_3B} + \bar{M}_3 + \bar{M}_{r43}^B &= 0 \\ M_{r43}^B &= -(F_{3x}(y_B - y_{O_3}) - F_{3y}(x_B - x_{O_3}) + M_3) \end{aligned}$$

Dacă reducerea se face în C, se scrie ecuația de momente în raport cu acest punct

$$\sum \bar{M}_C(3) = 0; \quad \bar{F}_3 \times \overline{O_3C} + \bar{M}_3 + \bar{R}_{23} \times \overline{BC} + \bar{M}_{r43} = 0$$

$$M_{r43} = -(F_{3x}(y_C - y_{O_3}) - F_{3y}(x_C - x_{O_3}) + M_3 + R_{23x}(y_C - y_B) - R_{23y}(x_C - x_B))$$

Observație

Determinantul sistemului (2.96) are aceeași expresie ca și determinantul sistemelor care intervin la analiza vitezelor și a accelerațiilor (2.17),

$$D = (x_B - x_A) \cos \varphi_3 + (y_B - y_A) \sin \varphi_3$$

Aceasta înseamnă că analiza cinetostatică fără frecare, ca și analiza cinematică, este o problemă compatibilă și determinată dacă se evită poziția critică

($AB \perp tt$) în care $D = 0$. Această observație este valabilă pentru toate grupele structurale.

■ **Grupa structurală 0/3/3 cu cuple de rotație**

În cadrul **procedului grafo - analitic** se folosesc punctele singulare întâlnite și la analiza cinematică. Să considerăm punctul S situat la intersecția dreptelor AB și CD (Fig.2.42). Reacțiunile din cuplele exterioare se consideră formate din două componente, astfel: \bar{R}_{12} ($\bar{R}_{12}^n // AB, \bar{R}_{12}^t \perp AB$), \bar{R}_{64} ($\bar{R}_{64}^n // CD, \bar{R}_{64}^t \perp CD$), \bar{R}_{75} ($\bar{R}_{75}^n // EF, \bar{R}_{75}^t \perp EF$). Se scriu următoarele ecuații de momente

$$\begin{aligned} \sum M_B(2) = 0; \quad M_B(\bar{R}_{12}^t) + M_B(\bar{F}_2) + M_2 = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{12}^t \\ \sum M_D(4) = 0; \quad M_D(\bar{R}_{64}^t) + M_D(\bar{F}_4) + M_4 = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{64}^t \\ \sum M_F(5) = 0; \quad M_F(\bar{R}_{75}^t) + M_F(\bar{F}_5) + M_5 = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{75}^t \end{aligned}$$

din care rezultă, după modelul de rezolvare de la grupa RRT, componentele tangențiale.

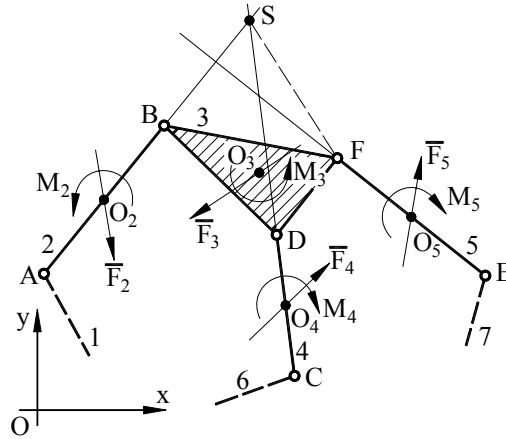


Fig. 2.42

Se scrie ecuația de momente pentru toată grupa în raport cu punctul S

$$\begin{aligned} \sum M_S(2, 3, 4, 5) = 0; \quad M_S(\bar{R}_{12}^t) + M_S(\bar{F}_2) + M_2 + \\ + M_S(\bar{R}_{64}^t) + M_S(\bar{F}_4) + M_4 + \\ + M_S(\bar{R}_{75}^t) + M_S(\bar{R}_{75}^n) + M_S(\bar{F}_5) + M_5 + \\ + M_S(\bar{F}_3) + M_3 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{75}^n \end{aligned}$$

Din această ecuație se obține singura forță necunoscută \bar{R}_{75}^n . În continuare, se scrie o serie de ecuații de forțe, care se rezolvă grafic și din care rezultă celelalte reacțiuni:

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}(5) = 0; \quad \bar{R}_{75} + \bar{F}_5 + \bar{R}_{35} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{35} \\ \sum \bar{F}(2, 3, 4, 5) = 0; \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{R}_{64}^n + \bar{R}_{64}^t + \\ + \bar{F}_4 + \bar{R}_{75} + \bar{F}_5 + \bar{F}_3 = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{64}^n \\ \sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{32} \\ \sum \bar{F}(4) = 0; \quad \bar{R}_{64} + \bar{F}_4 + \bar{R}_{34} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{34}\end{aligned}$$

Procedeeul analitic debutează cu scrierea următoarelor ecuații de echilibru

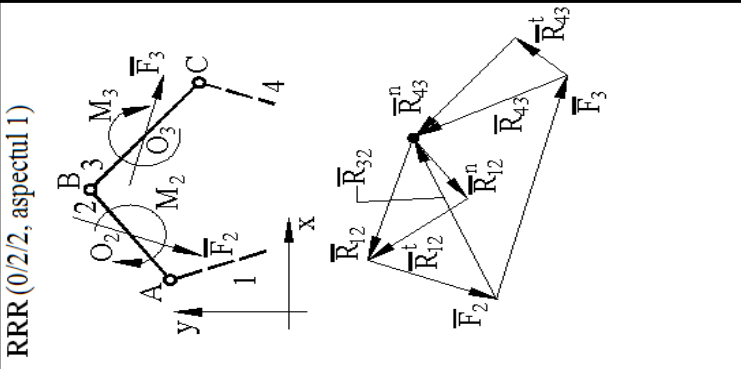
$$\begin{aligned}\sum \bar{M}_B(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} \times \overline{AB} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2B} + \bar{M}_2 = 0 \\ \sum \bar{M}_D(4) = 0; \quad \bar{R}_{64} \times \overline{CD} + \bar{F}_4 \times \overline{O_4D} + \bar{M}_4 = 0 \\ \sum \bar{M}_F(5) = 0; \quad \bar{R}_{75} \times \overline{EF} + \bar{F}_5 \times \overline{O_5F} + \bar{M}_5 = 0 \\ \sum \bar{M}_B(2, 3, 4, 5) = 0; \quad \bar{R}_{12} \times \overline{AB} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2B} + \bar{M}_2 + \\ + \bar{R}_{64} \times \overline{CD} + \bar{F}_4 \times \overline{O_4D} + \bar{M}_4 + \\ + \bar{R}_{75} \times \overline{EB} + \bar{F}_5 \times \overline{O_5B} + \bar{M}_5 + \\ + \bar{F}_3 \times \overline{O_3B} + \bar{M}_3 = 0 \\ \sum \bar{F}(2, 3, 4, 5) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{R}_{64} + \bar{R}_{75} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{F}_5 = 0\end{aligned}$$

Sistemul vectorial se transformă, după modelul cunoscut, în unul scalar format din 6 ecuații cu necunoscutele R_{12x} , R_{12y} , R_{64x} , R_{64y} , R_{75x} , R_{75y} .

Din ecuațiile de forțe scrise, separat, pentru elementele 2, 4 și 5 rezultă celelalte reacțiuni

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{32} (R_{32x}, R_{32y}) \\ \sum \bar{F}(4) = 0; \quad \bar{R}_{64} + \bar{F}_4 + \bar{R}_{34} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{34} (R_{34x}, R_{34y}) \\ \sum \bar{F}(5) = 0; \quad \bar{R}_{75} + \bar{F}_5 + \bar{R}_{35} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{35} (R_{35x}, R_{35y})\end{aligned}$$

Tabelul 2.4

<p>Schema grupeii. Poligonul de forțe</p>	<p>Metoda grafo - analitică</p>	<p>Metoda analitică</p>
<p>RRR (0/2/2, aspectul 1)</p> 	$\begin{aligned} & \bar{R}_{12}^n // AB & \bar{R}_{43}^n // BC \\ & \bar{R}_{12}^t \perp AB & \bar{R}_{43}^t \perp BC \\ & \Sigma M_B(2) = 0 & \\ & R_{12}^t J_{AB} + M_B(F_2) + M_2 = 0 \Rightarrow R_{12}^t & \\ & \Sigma M_B(3) = 0 & \\ & R_{43}^t J_{BC} + M_B(F_3) + M_3 = 0 \Rightarrow R_{43}^t & \\ & \Sigma \bar{F}(2, 3) = 0 & \\ & \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^t = 0 & \\ & \Downarrow & \\ & \bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{43}^n & \\ & \Sigma \bar{F}(2) = 0 & \\ & \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{32} & \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \Sigma M_B(2) = 0 & \\ & R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) + & \\ & F_2x(y_B - y_{O_2}) - F_2y(x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0 & \\ & \Sigma M_B(3) = 0 & \\ & R_{43x}(y_B - y_C) - R_{43y}(x_B - x_C) + & \\ & + F_3x(y_B - y_{O_3}) - F_3y(x_B - x_{O_3}) + M_3 = 0 & \\ & \Sigma F_x(2, 3) = 0 & \\ & R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0 & \\ & \Sigma F_y(2, 3) = 0 & \\ & R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0 & \\ & \Downarrow & \\ & R_{12x}, R_{12y}, R_{43x}, R_{43y} & \\ & \Sigma F_x(2) = 0 \quad R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 \Rightarrow R_{32x} & \\ & \Sigma F_y(2) = 0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 \Rightarrow R_{32y} & \end{aligned}$

Tabetul 2.4 (continuare)

<p>RRT (0/2/2, aspectul 2)</p>	$\begin{aligned} & \bar{R}_{12} \begin{cases} \bar{R}_{12}^n // AB \\ \bar{R}_{12}^t \perp AB \end{cases} \\ & \sum M_B(2) = 0 \\ & R_{12}^t J_{AB} + M_B(F_2) + M_2 = 0 \Rightarrow R_{12}^t \\ & \sum \bar{F}(2, 3) = 0 \\ & \bar{R}_{12} + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \bar{R}_{12}, \bar{R}_{43} \\ & \sum \bar{F}(2) = 0 \\ & \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{32} \\ & \sum M_B(3) = 0 \\ & M_{43}^B + M_B(F_3) + M_3 = 0 \Rightarrow M_{43}^B \end{aligned}$
$\left. \begin{aligned} & \sum M_B(2) = 0 \\ & R_{12x}(Y_B - Y_A) - R_{12y}(X_B - X_A) + \\ & F_{2x}(Y_B - Y_{O_3}) - F_{2y}(X_B - X_{O_3}) + M_2 = 0 \\ & \sum F_x(2, 3) = 0 \\ & R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} - R_{43} \sin \varphi_3 = 0 \\ & \sum F_y(2, 3) = 0 \\ & R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43} \cos \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right\}$	$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & R_{12x}, R_{12y}, R_{43} \\ & \sum F_x(2) = 0 \quad R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 \Rightarrow R_{32x} \\ & \sum F_y(2) = 0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 \Rightarrow R_{32y} \\ & \sum M_B(3) = 0 \\ & M_{43}^B + F_{3x}(Y_B - Y_{O_3}) - F_{3y}(X_B - X_{O_3}) + \\ & + M_3 = 0 \\ & \Downarrow \\ & M_{43}^B \end{aligned}$

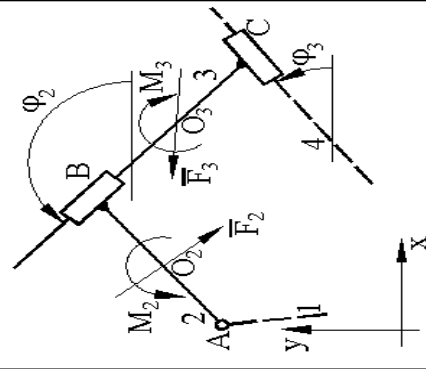
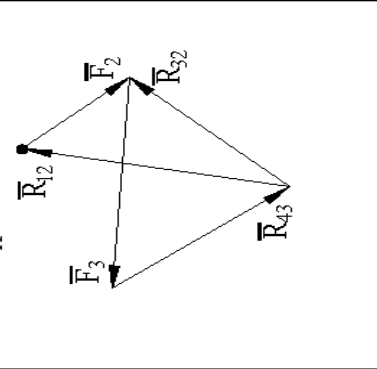
Tabelul 2.4 (continuare)

<p>RTR (0/2/2, aspectul 3)</p>	$\begin{aligned} & \bar{R}_{12}^n \perp \bar{R}_{12}^t // AC \\ & \bar{R}_{12} \perp AC \\ & \Sigma M_C(2, 3) = 0 \\ & R_{12AC}^t + M_C(F_2) + M_2 + \\ & + M_C(F_3) + M_3 = 0 \Rightarrow R_{12}^t \\ & \Sigma \bar{F}(2) = 0 \\ & \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{32} \\ & \Sigma \bar{F}(2, 3) = 0 \\ & \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{43} \\ & \Sigma M_A(2) = 0 \\ & R_{12}^A h_{32} + M_A(F_2) + M_2 = 0 \Rightarrow M_{12}^A \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \Sigma M_C(2, 3) = 0 \\ & R_{12x}(y_C - y_A) - R_{12y}(x_C - x_A) + \\ & + F_{2x}(y_C - y_{O_2}) - F_{2y}(x_C - x_{O_2}) + M_2 + \\ & + F_{3x}(y_C - y_{O_3}) - F_{3y}(x_C - x_{O_3}) + M_3 = 0 \\ & \Sigma F_x(2) = 0 \quad R_{12x} + F_{2x} - R_{32} \sin \varphi_3 = 0 \\ & \Sigma F_y(2) = 0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32} \cos \varphi_3 = 0 \\ & \Downarrow \\ & R_{12x}, R_{12y}, R_{32} \\ & \Sigma F_x(2, 3) = 0 \\ & R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0 \Rightarrow R_{43x} \\ & \Sigma F_y(2, 3) = 0 \\ & R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0 \Rightarrow R_{43y} \\ & \Sigma M_A(2) = 0 \\ & M_{12}^A + F_{2x}(y_A - y_{O_2}) - F_{2y}(x_A - x_{O_2}) + M_2 = 0 \\ & \Downarrow \\ & M_{12}^A \end{aligned}$
--------------------------------	---	--

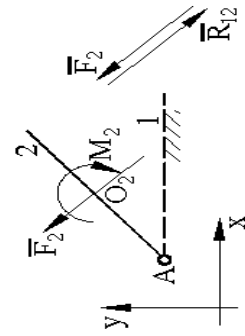
Tabelul 2.4 (continuare)

<p>TRT (0/2/2, aspectul 4)</p>	$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2, 3) = 0 \\ \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{12}, \bar{R}_{43} \\ \sum \bar{F}(2) = 0 \\ \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 &\Rightarrow \bar{R}_{32} \\ \sum M_B(2) = 0 \\ M_{12}^B + M_B(F_2) + M_2 = 0 &\Rightarrow M_{12}^B \\ \sum M_B(3) = 0 \\ M_{43}^B + M_B(F_3) + M_3 = 0 &\Rightarrow M_{43}^B \end{aligned}$	$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \sum F_x(2, 3) = 0 \\ -R_{12} \sin \varphi_2 + F_{2x} + F_{3x} - R_{43} \sin \varphi_3 = 0 \\ \sum F_y(2, 3) = 0 \\ R_{12} \cos \varphi_2 + F_{2y} + F_{3y} + R_{43} \cos \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right. \\ \Downarrow \\ R_{12}, R_{43} \\ \sum F_x(2) = 0 \quad R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 \Rightarrow R_{32x} \\ \sum F_y(2) = 0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 \Rightarrow R_{32y} \\ \sum M_B(2) = 0 \\ M_{12}^B + F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0 \\ \Downarrow \\ M_{12}^B \\ \sum M_B(3) = 0 \\ M_{43}^B + F_{3x}(y_B - y_{O_3}) - F_{3y}(x_B - x_{O_3}) + M_3 = 0 \\ \Downarrow \\ M_{43}^B \end{aligned}$
--------------------------------	---	---

Tabelul 2.4 (continuare)

<p>RTT (0/2/2, aspectul 5)</p>  	$\sum \bar{F}(3) = 0$ $\bar{R}_{23} + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_{23}, \bar{R}_{43}$ $\sum \bar{F}(2, 3) = 0$ $\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_{12}$ $\sum M_A(2) = 0$ $M_{32}^A + M_A(F_2) + M_2 = 0 \Rightarrow M_{32}^A$ $\sum M_A(2, 3) = 0$ $M_{43}^A + M_A(F_2) + M_2 + M_A(F_3) + M_3 = 0$ \Downarrow M_{43}^A	$\left. \begin{aligned} \sum F_x(3) &= 0 \\ -R_{23} \sin \varphi_2 + F_{3x} - R_{43} \sin \varphi_3 &= 0 \\ \sum F_y(3) &= 0 \\ R_{23} \cos \varphi_2 + F_{3y} + R_{43} \cos \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$ \Downarrow R_{23}, R_{43} $\sum F_x(2, 3) = 0; R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0 \Rightarrow R_{12x}$ $\sum F_y(2, 3) = 0; R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0 \Rightarrow R_{12y}$ $\sum M_A(2) = 0; M_{32}^A + F_{2x}(Y_A - Y_{O_2}) - F_{2y}(X_A - X_{O_2}) + M_2 = 0$ $\Rightarrow M_{32}^A$ $\sum M_A(2, 3) = 0$ $M_{43}^A + F_{2x}(Y_A - Y_{O_2}) - F_{2y}(X_A - X_{O_2}) + M_2 + F_{3x}(Y_A - Y_{O_3}) - F_{3y}(X_A - X_{O_3}) + M_3 = 0$ \Downarrow M_{43}^A
---	---	--

Tabelul 2.4 (continuare)

<p>R (1/1/1)</p> 	$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}}(2) &= 0 \\ \overline{R}_{12} + \overline{F}_2 &= 0 && \Rightarrow \overline{R}_{12} \\ \sum M_A(2) &= 0 \\ M_e + M_A(F_2) + M_2 &= 0 && \Rightarrow M_e \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sum F_x(2) &= 0 \\ R_{12x} + F_{2x} &= 0 && \Rightarrow R_{12x} \\ \sum F_y(2) &= 0 \\ R_{12y} + F_{2y} &= 0 && \Rightarrow R_{12y} \\ \sum M_A(2) &= 0 \\ M_e + F_{2x}(y_A - y_{O_2}) - F_{2y}(x_A - x_{O_2}) + M_2 &= 0 \\ &&& \Downarrow \\ &&& M_e \end{aligned}$
<p>RTRR (1/2/2)</p>	$\begin{aligned} \overline{R}_{12} &\begin{cases} \overline{R}_{12} \parallel AC \\ \overline{R}_{12} \perp AC \end{cases} && \overline{R}_{34} \begin{cases} \overline{R}_{34} \parallel DC \\ \overline{R}_{34} \perp DC \end{cases} \\ \sum M_C(2, 3) &= 0 \\ R_{12}^{\perp AC} + M_C(F_2) + M_2 + M_C(F_3) + M_3 &= 0 \\ &&& \Rightarrow R_{12}^{\perp} \\ \sum M_C(4) &= 0 \\ R_{34}^{\perp DC} + M_C(F_4) + M_4 &= 0 && \Rightarrow R_{34}^{\perp} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sum M_C(2, 3) &= 0 \\ R_{12x}(y_C - y_A) - R_{12y}(x_C - x_A) + \\ + F_{2x}(y_C - y_{O_2}) - F_{2y}(x_C - x_{O_2}) + M_2 + \\ + F_{3x}(y_C - y_{O_3}) - F_{3y}(x_C - x_{O_3}) + M_3 &= 0 \\ \sum M_C(4) &= 0 \\ R_{34x}(y_C - y_D) - R_{34y}(x_C - x_D) + \\ + F_{4x}(y_C - y_{O_4}) - F_{4y}(x_C - x_{O_4}) + M_4 &= 0 \end{aligned}$

Tabelul 2.4 (continuare)

	$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2, 3, 4) &= 0 \\ \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \bar{R}_{34}^n + \bar{R}_{34}^t &= 0 \\ \Downarrow \\ \bar{R}_{12}^n, \bar{R}_{34}^n & \\ \sum \bar{F}(2, 3) &= 0 \\ \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} &= 0 \Rightarrow \bar{R}_{43} \\ \sum \bar{F}(2) &= 0 \\ \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{32} + \bar{R}_{32} &= 0 \\ \Downarrow \\ \bar{F}_{32}, \bar{R}_{32} & \\ \sum M_A(2) &= 0 \\ M_{12}^A h_{12} + M_A(F_2) + M_2 &= 0 \Rightarrow M_{12}^A \end{aligned}$	$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \sum F_x(2, 3, 4) &= 0 \\ R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + R_{54x} &= 0 \\ \sum F_y(2, 3, 4) &= 0 \\ R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + R_{54y} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \Downarrow \\ R_{12x}, R_{12y}, R_{54x}, R_{54y} & \\ \left\{ \begin{aligned} \sum F_x(2, 3) &= 0; R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0 \Rightarrow R_{43x} \\ \sum F_y(2, 3) &= 0; R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0 \Rightarrow R_{43y} \\ \sum F_x(2) &= 0 \\ R_{12x} + F_{2x} + F_{32} \cos \varphi_2 - R_{32} \sin \varphi_2 &= 0 \\ \sum F_y(2) &= 0 \\ R_{12y} + F_{2y} + F_{32} \sin \varphi_2 + R_{32} \cos \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right. \\ \Downarrow \\ F_{32}, R_{32} & \\ \left\{ \begin{aligned} \sum M_A(2) &= 0; M_{12}^A + F_{2x}(Y_A - Y_{O_2}) - \\ &- F_{2y}(X_A - X_{O_2}) + M_2 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow M_{12}^A \end{aligned}$
--	---	---

2.2.2.2. Mecanismul patrulater articulat plan

Se aplică, pentru început, **modul global** de abordare a analizei cinetostatice, prin procedeul analitic. Se scrie, pentru fiecare element mobil (Fig.2.43), câte o ecuație de forțe și una de momente

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}(1) &= 0; \quad \bar{R}_{41} + \bar{F}_1 + \bar{R}_{21} = 0 \\ \sum \bar{F}(2) &= 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0 \\ \sum \bar{F}(3) &= 0; \quad \bar{R}_{43} + \bar{F}_3 + \bar{R}_{23} = 0 \\ \sum \bar{M}_A(1) &= 0; \quad \bar{R}_{21} \times \overline{BA} + \bar{F}_1 \times \overline{O_1A} + \bar{M}_1 + \bar{M}_e = 0 \\ \sum \bar{M}_B(2) &= 0; \quad \bar{R}_{32} \times \overline{CB} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2B} + \bar{M}_2 = 0 \\ \sum \bar{M}_D(3) &= 0; \quad \bar{R}_{23} \times \overline{CD} + \bar{F}_3 \times \overline{O_3D} + \bar{M}_3 = 0\end{aligned}$$

Sistemul vectorial se transformă într-un sistem scalar format din 9 ecuații care conțin toate necunoscutele problemei - reacțiunile din cele patru cuple și momentul de echilibrare. Sistemul scalar are forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ y_B - y_A & -(x_B - x_A) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y_C - y_B & -(x_C - x_B) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_D - y_C & -(x_D - x_C) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{12x} \\ R_{12y} \\ R_{23x} \\ R_{23y} \\ R_{34x} \\ R_{34y} \\ R_{14x} \\ R_{14y} \\ M_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ -F_{2x} \\ -F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ -F_{1x}(y_A - y_{O_1}) + F_{1y}(x_A - x_{O_1}) - M_1 \\ -F_{2x}(y_B - y_{O_2}) + F_{2y}(x_B - x_{O_2}) - M_2 \\ -F_{3x}(y_D - y_{O_3}) + F_{3y}(x_D - x_{O_3}) - M_3 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

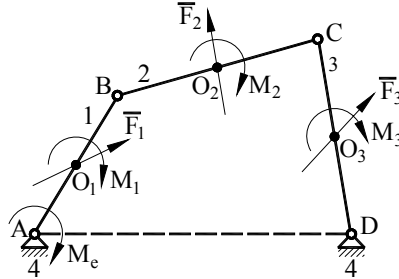


Fig. 2.43

Se efectuează, în continuare, analiza cinetostatică pentru același mecanism, utilizând **procedeele grupelor structurale** componente. Mecanismul conține o grupă 1/1/1, R (formată din elementul 1 și cupla A) și o grupă 0/2/2, RRR (elementele 2, 3 și cuplele B, C, D) care participă, în această ordine, la formarea sa. Așa cum am arătat, grupele se tratează în ordine inversă în raport cu ordinea de formare. Se aplică, prin urmare, procedeul indicat în Tab.2.4 pentru grupa RRR. Se scriu următoarele ecuații de echilibru

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2,3) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} &= 0 \\ \sum \bar{M}_C(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} \times \overline{BC} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2C} + \bar{M}_2 &= 0 \\ \sum \bar{M}_C(3) = 0; \quad \bar{R}_{43} \times \overline{DC} + \bar{F}_3 \times \overline{O_3C} + \bar{M}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Prin transformare scalară se ajunge la un sistem format din 4 ecuații,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ y_C - y_B & -(x_C - x_B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_C - y_D & -(x_C - x_D) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{12x} \\ R_{12y} \\ R_{43x} \\ R_{43y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_{2x} - F_{3x} \\ -F_{2y} - F_{3y} \\ -F_{2x}(y_C - y_{O_2}) + F_{2y}(y_C - y_{O_2}) - M_2 \\ -F_{3x}(y_C - y_{O_3}) + F_{3y}(y_C - y_{O_3}) - M_3 \end{vmatrix} \quad (2.98)$$

cea de a treia reacțiune (\bar{R}_{32}) rezultă imediat din ecuația

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} &= 0 \\ R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 &\Rightarrow R_{32x} \\ R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 &\Rightarrow R_{32y} \end{aligned}$$

Se trece, apoi, la grupa R, având în vedere că reacțiunea determinată $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ este cunoscută

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(1) = 0; \quad & \bar{R}_{41} + \bar{F}_1 + \bar{R}_{21} = 0 \\ & R_{41x} + F_{1x} + R_{21x} = 0 \Rightarrow R_{41x} \\ & R_{41y} + F_{1y} + R_{21y} = 0 \Rightarrow R_{41y} \\ \sum \bar{M}_A(1) = 0; \quad & \bar{R}_{21} \times \overline{BA} + \bar{F}_1 \times \overline{O_1A} + \bar{M}_1 + \bar{M}_e = 0 \\ & M_e = -(R_{21x}(y_A - y_B) - R_{21y}(x_A - x_B) + \\ & \quad + F_{1x}(y_A - y_{O_1}) - F_{1y}(x_A - x_{O_1}) + M_1) \end{aligned}$$

Comparând cele două procedee și, în special, sistemele de ecuații (2.97) și (2.98), se observă avantajul tratării pe grupe sub aspectul simplificării procesului de rezolvare numerică.

2.2.3. Analiza cinetostatică în prezența frecării

2.2.3.1. Considerații generale

Modelul matematic al analizei cinetostatice cu frecare este constituit din ecuații de echilibru în care, pe lângă celelalte forțe, figurează și forțele de frecare. Așa cum s-a arătat (par. 2.2.1.4), în cazul cuplelor de rotație reacțiunea normală și forța de frecare se consideră cumulate, astfel încât, torsorul forțelor de legătură, redus în centrul cuplei, este $(\bar{R}_{12}^r, \bar{M}_{r12})$. Momentul de frecare M_{f12} se calculează cu relația (2.90) care este neliniară în raport cu reacțiunile R_{12x}^r și R_{12y}^r . În consecință, analiza cinetostatică cu frecare este o problemă neliniară.

În cazul cuplelor de translație reacțiunea normală și forța de frecare se consideră separat, iar sistemul forțelor de legătură este $(\bar{R}_{12}, \bar{F}_{f12}, M_{r12})$. Forța de frecare \bar{F}_{f12} se determină cu formula (2.92) dacă $|R_{12}| > \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$ (**cazul**

(1)) sau cu formula (2.94) dacă $|R_{12}| < \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$ (**cazul (2)**) (b - lungimea

zonei de contact). Pentru a stabili cazul în care se află cupla, se efectuează analiza cinetostatică fără frecare și se determină valorile aproximative pentru $|R_{12}|$ și $|M_{r12}|$. După cum am arătat, cazul al doilea trebuie evitat, deoarece forțele de frecare sunt mai mari decât în primul caz. Vom arăta cum se poate realiza acest lucru printr-o proiectare rațională a schemei cinemateice și de încărcare a mecanismului.

Se consideră grupa structurală RRT (Fig.2.44.a). Referindu-ne la cupla de translație C, **cazul (1)** se înregistrează atunci când punctul de aplicație al reacțiunii unice \bar{R}_{43} se află în zona de contact a cuplei. Este ușor de demonstrat că această cerință se obține când sunt îndeplinite condițiile:

- Articulația interioară (B) trebuie să fie amplasată pe axa de translație și în interiorul zonei de contact, formând un element (3) cu dimensiuni reduse (Fig.2.44.b). Așa cum s-a precizat în par. 1.3.2 această formă a grupei structurale se numește redusă sau degenerată.

- Încărcarea elementului redus (3) trebuie să se facă printr-o forță unică, al cărui suport să treacă prin articulația interioară (B). Deoarece elementul redus are, în general, dimensiuni și masă mici, forțele de greutate și de inerție sunt neglijabile, astfel că respectarea acestei condiții depinde numai de sistemul forțelor aplicate.

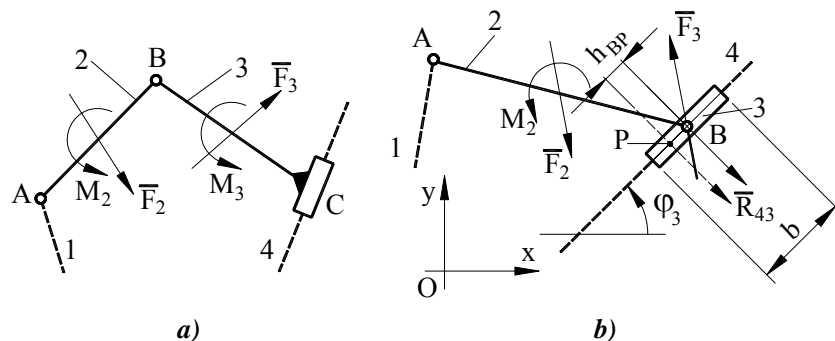


Fig. 2.44

Se scrie ecuația de momente pentru elementul 3 în raport cu C (centrul zonei de contact) în ipoteza că torsorul de reacțiune, din cupla de translație, se reduce la reacțiunea unică \bar{R}_{43} ,

$$\sum \bar{M}_C(3) = 0; \quad M_C(\bar{R}_{23}) + M_C(\bar{F}_3) + M_C(\bar{R}_{43}) + M_3 = 0$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile anterioare (Fig.2.44.b), $M_C(\bar{R}_{23}) = 0$, $M_C(\bar{F}_3) = 0$, $M_3 = 0$, ceea ce conduce la concluzia că și $M_C(\bar{R}_{43}) = 0$. Aceasta înseamnă că punctul de aplicație al reacțiunii \bar{R}_{43} se află în C, deci în interiorul zonei de contact. Cel mai reprezentativ mecanism, care conține grupa structurală RRT, este mecanismul manivelă - piston. În Fig.2.45 sunt reprezentate mai multe scheme cinematice și de încărcare ale acestui mecanism indicându-se care sunt corecte și care sunt greșite din punctul de vedere al respectării condițiilor formulate anterior.

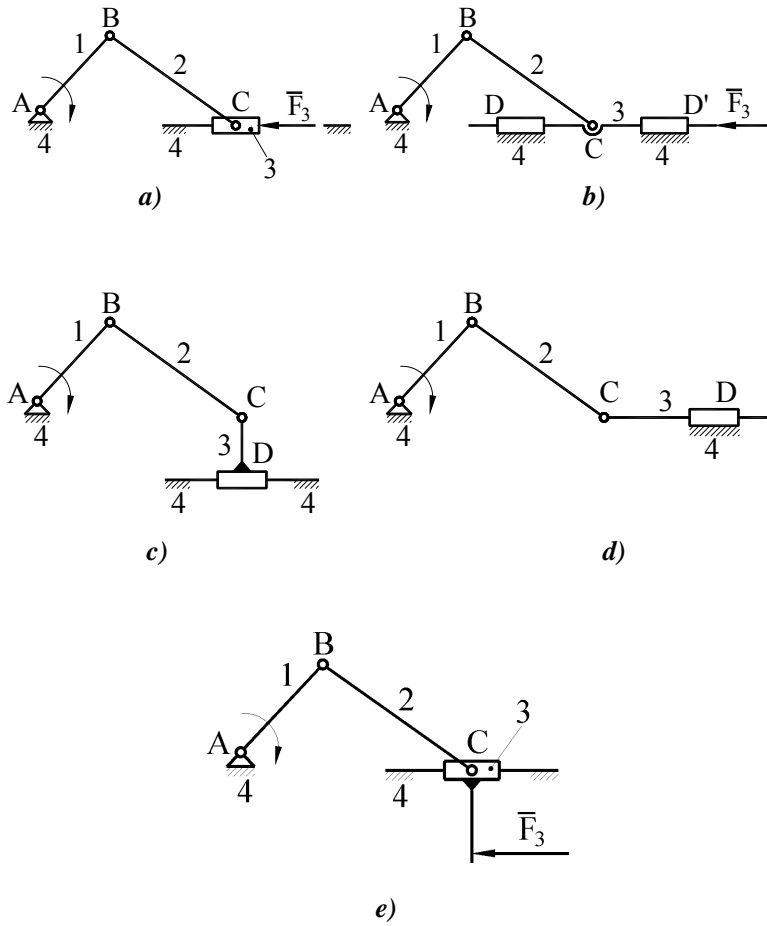


Fig. 2.45

- a), b)** scheme cinematice și încărcări corecte;
c) schemă cinematică greșită – articulația C nu se află pe axa de translație;
d) schemă cinematică greșită – articulația C nu se află în zona de contact a cuplei de translație;
e) încărcare greșită – forța F_3 nu trece prin C.

Se consideră, acum, grupa structurală RTR (Fig.2.46). Pentru a încadra cupla B în **cazul (1)** trebuie îndeplinite aceleași condiții, menționate la grupa RRT, cu observația că elementul redus poate fi oricare dinte cele două elemente ale grupe. Cel mai reprezentativ mecanism care conține grupa RTR este mecanismul cu culisă de rotație. În Fig.2.47 sunt analizate mai multe variante ale acestui mecanism și sunt indicate cele corecte și cele greșite.

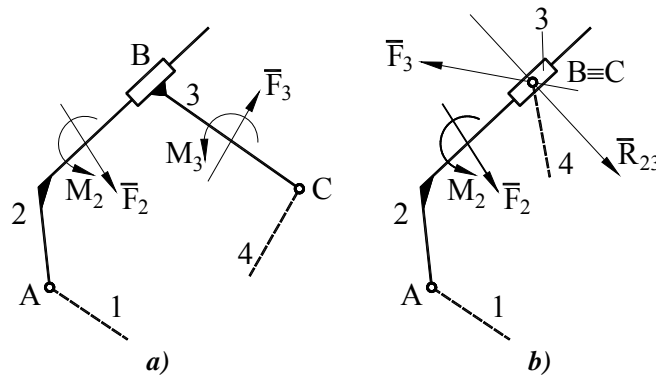


Fig. 2.46

În concluzia celor arătate considerăm că în toate mecanismele proiectate corect situația forțelor de legătură din cuplele de translație se încadrează în **cazul (1)** și, ca urmare, în ecuațiile de echilibru vom folosi numai formula (2.93).

Când coeficienții de frecare din cuplele de rotație sunt foarte mici (de ordinul 10^{-3}), ceea ce se înregistrează la articulațiile cu rulmenți, forțele de frecare din aceste cuple se pot neglija, luând în considerare numai frecarea din cuplele de translație. Procedând în felul acesta, operația de analiză cinetostatică este mult simplificată și are caracter liniar.

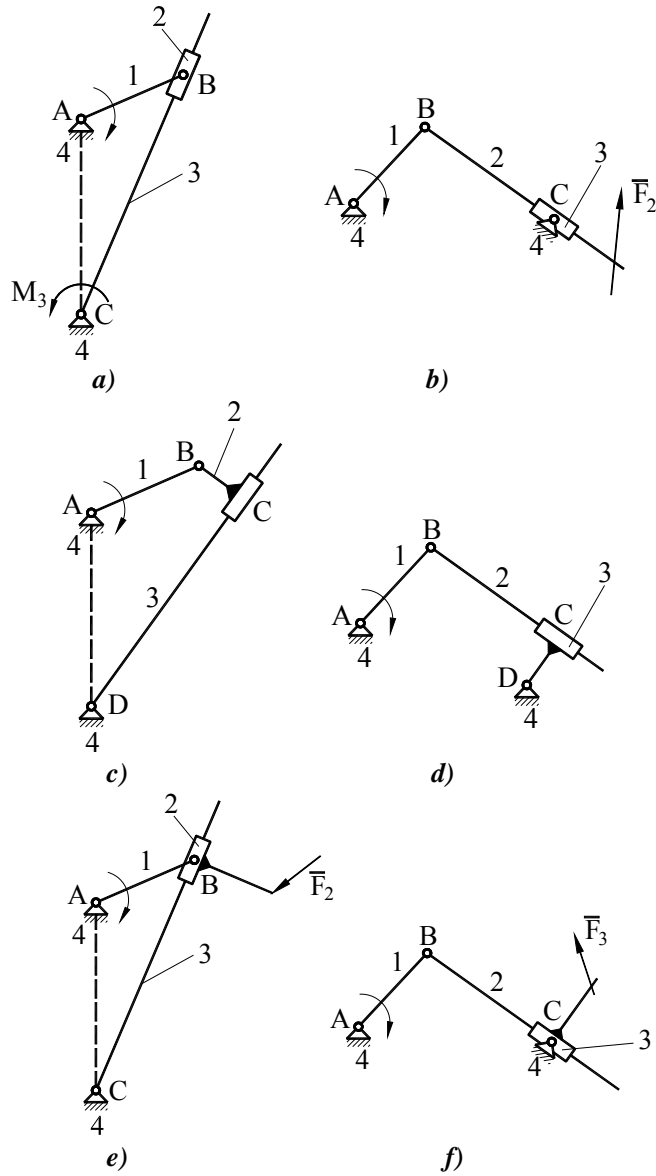


Fig. 2.47

- a), b) scheme cinematice și încărcări corecte;
 c), d) scheme cinematice greșite – nici una dintre articulații nu se află în zona de contact a cuplei de translație;
 e), f) încărcări greșite – este încărcat necorespunzător elementul redus.

2.2.3.2. Modelul matematic

■ Grupa RRT

Pentru a exemplifica modul de lucru și pentru a oferi o privire comparativă asupra celor două tipuri de analiză cinetostatică (cu și fără frecare), vom trata, din nou, grupa structurală 0/2/2, RRT. Ținând seama de recomandările din paragraful precedent, se ia în considerare forma redusă a grupei (Fig.2.44.b).

Se scriu următoarele ecuații de echilibru

$$\begin{aligned}\sum \bar{M}_B(2) &= 0 ; \quad \bar{R}_{12}^r \times \bar{AB} + \bar{M}_{f12} + \bar{M}_{f32} + \bar{F}_2 \times \bar{O_2B} + \bar{M}_2 = 0 \\ \sum \bar{F}(2) &= 0 ; \quad \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{32}^r + \bar{F}_2 = 0 \\ \sum \bar{F}(3) &= 0 ; \quad \bar{R}_{23}^r + \bar{R}_{43} + \bar{F}_{f43} + \bar{F}_3 = 0\end{aligned}$$

Prin transformarea ecuațiilor vectoriale în ecuații scalare, după modelul de la analiza cinetostatică fără frecare, se ajunge la următorul sistem

$$\begin{aligned}R_{12x}^r (y_B - y_A) - R_{12y}^r (x_B - x_A) + s_{12} r_A \sqrt{(R_{12x}^r)^2 + (R_{12y}^r)^2} \sin \varphi_A + \\ + s_{32} r_B \sqrt{(R_{32x}^r)^2 + (R_{32y}^r)^2} \sin \varphi_B + F_{2x} (y_B - y_{O_2}) - F_{2y} (x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0 \\ R_{12x}^r + R_{32x}^r + F_{2x} = 0 \\ R_{12y}^r + R_{32y}^r + F_{2y} = 0 \\ -R_{32x}^r - R_{43} \sin \varphi_3 + s_{43} \mu_C |R_{43}| \cos \varphi_3 + F_{3x} = 0 \\ -R_{32y}^r + R_{43} \cos \varphi_3 + s_{43} \mu_C |R_{43}| \sin \varphi_3 + F_{3y} = 0\end{aligned} \quad (2.99)$$

Sistemul (2.99) este neliniar, datorită ecuațiilor de momente, și se rezolvă printr-un procedeu numeric, rezultând necunoscutele $R_{12x}^r, R_{12y}^r, R_{32x}^r, R_{32y}^r, R_{43}$.

Momentul M_{f43} rezultă din ecuația de momente pentru elementul 3 în raport cu punctul B. Forțele \bar{R}_{23}, \bar{F}_3 și \bar{F}_{f43} trec prin B (Fig.2.44.b), deci momentele lor sunt nule, astfel încât, ecuația de momente are forma

$$\begin{aligned}M_{f43} + M_{f23} = 0 \\ M_{f43} = -M_{f23} = -s_{23} r_B |\bar{R}_{32}^r| \sin \varphi_B\end{aligned}$$

Poziția punctului P, de reducere a reacțiunii unice R_{43} , este determinată de distanța h_{BP} ,

$$h_{BP} = \frac{|M_{f43}|}{|R_{43}|} = \frac{|M_{f23}|}{|R_{43}|}.$$

Deoarece momentul M_{P23} este foarte mic, distanța h_{BP} rezultă, de asemenea, foarte mică astfel încât punctul P se găsește, foarte probabil, în zona de contact. Deci, cupla de translație se încadrează în **cazul (1)**, iar formula utilizată pentru forța de frecare (2.92) este cea corectă. Desigur, are importanță și lungimea patinei (b), deoarece cu cât aceasta este mai mare, probabilitatea ca punctul P să fie în zona de contact este mai mare. Având în vedere că forța de frecare din cupla de translație este invers proporțională cu lungimea b , este recomandabil și din acest punct de vedere, ca aceasta să aibă o valoare cât mai mare.

■ Metoda aproximațiilor succesive

Am arătat că pentru rezolvarea sistemelor de ecuații care intervin în analiza cinetostatică, în prezența frecării, se utilizează metode numerice iterative. O metodă tradițională, utilizată chiar înainte de dezvoltarea modernă a tehnicii de calcul, este metoda aproximațiilor succesive. Această metodă presupune parcurgerea mai multor trepte de aproximare conform schemei logice din Fig.2.48. În prima treaptă de aproximare ($I = 1$, blocul 1) forțele de frecare

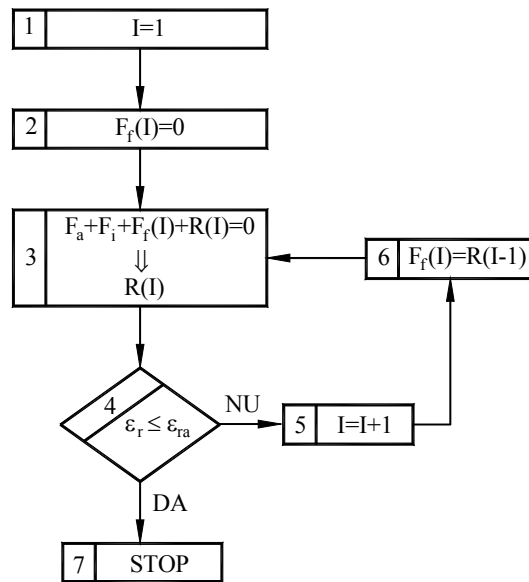


Fig. 2.48

se consideră egale cu zero (blocul 2) și se efectuează analiza cinetostatică fără frecare (blocul 3) rezultând reacțiunile normale. După fiecare treaptă, se testează abaterile relative (blocul 4) și se trece la treapta următoare (blocul 5) sau se oprește procesul (blocul 7). Desigur, după prima treaptă se trece la treapta a 2-a. Se calculează forțele de frecare în funcție de reacțiunile normale de la treapta precedentă (blocul 6) și se aplică, din nou, analiza cinetostatică (blocul 3) considerând forțele de frecare cu valori cunoscute. Abaterile relative se calculează cu formula:

$$\varepsilon = \frac{|R_{mn}(I) - R_{mn}(I-1)|}{R_{mn}},$$

în care R_{mn} este o reacțiune oarecare, iar I treapta de aproximare. Este important de observat că în analiza cinetostatică, aferentă fiecărei trepte de aproximare, necunoscutele sunt numai reacțiunile normale, forțele de frecare fiind considerate cunoscute. În felul acesta modelul matematic este liniar și nu se deosebește, formal, de cel folosit la cinetostatica fără frecare. Procedul converge cu atât mai rapid, cu cât raportul dintre mărimea forțelor de frecare și cea a reacțiunilor este mai mic. Uzual acest raport este mai mic decât $1/10$, ceea ce determină aplicarea a 2 - 3 trepte de aproximare în condițiile unei abateri relative admisibile de 0,05.

2.2.3.3. Fenomenul de autoblocare

■ Explicarea producerii fenomenului de autoblocare

Fenomenul de autoblocare se manifestă prin oprirea sau imposibilitatea pornirii mecanismului, în anumite poziții, oricât de mare ar fi momentul aplicat elementului conducător. Această situație se explică prin faptul că transmiterea forțelor în mecanism se face defectuos, astfel încât, pentru a învinge forțele de frecare, momentul de echilibrare trebuie tinde, teoretic, la infinit.

Pentru a studia modul în care se produce acest fenomen, să revenim la analiza cinetostatică a grupeii RRT (par. 2.2.3.2). Pentru simplificare, se neglijează frecarea în cuplele de rotație și se consideră numai forța de frecare din cupla de translație. În această ipoteză, sistemul de ecuații inițial este

$$\begin{cases} \sum \bar{M}_B(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} \times \overline{AB} + \bar{F}_2 \times \overline{O_2B} + \bar{M}_2 = 0 \\ \sum \bar{F}(2,3) = 0; \quad \bar{R}_{12}^x + \bar{R}_{43} + \bar{F}_{f43} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0 \\ \begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2) \\ R_{12x} - R_{43} \sin \varphi_3 + s_{43} \mu_C |R_{43}| \cos \varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43} \cos \varphi_3 + s_{43} \mu_C |R_{43}| \sin \varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \end{cases} \quad (2.100)$$

Deoarece necunoscuta R_{43} intervine și sub forma $|R_{43}|$, ultimele două ecuații se scriu în mod diferit, în funcție de semnul ipotetic al reacțiunii R_{43} .

Dacă $R_{43} > 0$, sistemul (2.100) devine

$$\begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2) \\ R_{12x} - R_{43} \sin \varphi_3 + s_{43} \mu_C R_{43} \cos \varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43} \cos \varphi_3 + s_{43} \mu_C R_{43} \sin \varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \quad (2.101)$$

Dacă $R_{43} < 0$, sistemul (2.100) devine

$$\begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2})) + M_2 \\ R_{12x} - R_{43} \sin \varphi_3 - s_{43} \mu_C R_{43} \cos \varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43} \cos \varphi_3 - s_{43} \mu_C R_{43} \sin \varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \quad (2.102)$$

Sistemele (2.101) și (2.102) liniare, în necunoscutele R_{12x} , R_{12y} , R_{43} se rezolvă și se reține soluția care corespunde cu ipoteza inițială referitoare la R_{43} . Să presupunem, pentru început, că sistemul (2.101) livrează soluția corectă. Determinantul acestui sistem, D_1 , este

$$D_1 = (y_B - y_A)(\sin \varphi_3 - s_{43} \mu_C \cos \varphi_3) + (x_B - x_A)(\cos \varphi_3 + s_{43} \mu_C \sin \varphi_3)$$

Dacă $D_1 \neq 0$, sistemul este compatibil determinat, iar dacă $D_1 = 0$, mecanismul se autoblochează deoarece reacțiunile R_{12x} , R_{12y} și R_{43} care constituie necunoscutele problemei, ca și forțele de frecare, tind la infinit. Punând condiția $D_1 = 0$ și având în vedere că $\mu_C = \operatorname{tg} \varphi_C$ rezultă

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_3 - s_{43} \varphi_C)} \quad (2.103)$$

Pentru cele două cazuri posibile, $s_{43} = +1$ și $s_{43} = -1$, formula (2.103) devine

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_C)} \quad (2.104)$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_3 + \varphi_C)} \quad (2.105)$$

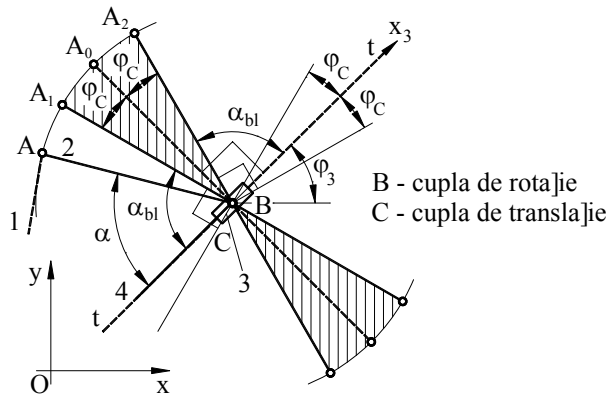


Fig. 2.49

Formulele (2.104) și (2.105) arată că grupa structurală se blochează în două configurații (configurația este poziția relativă a unui element al grupeii față de celălalt) - când dreapta AB este perpendiculară pe o dreaptă înclinată față de Bx_3 cu unghiul φ_C în cele două sensuri. Cele două configurații de

blocare A_1B și A_2B (Fig.2.49) sunt simetrice față de configurația critică A_0B , când AB este perpendiculară pe Bx_3 . La aceeași concluzie se ajunge dacă se ia în considerare ipoteza că sistemul (2.102) livrează soluția corectă.

Pentru a caracteriza o configurație oarecare se folosește un parametru care, pentru această grupă, este unghiul α format între elementul AB și axa de translație tt (Bx_3). Unghiul de configurație la care se produce blocarea se numește unghi de blocare, notat α_{bl} . În cazul nostru $\alpha_{bl} = \frac{\pi}{2} - \varphi_C$. Intervalul,

definit ca o vecinătate a configurației critice, care este limitat de configurațiile de blocare, este domeniul de blocare, în care funcționarea nu este posibilă. În interiorul domeniului de blocare, sistemul (2.100) nu are soluții. Pentru a evita domeniul de blocare, unghiul de configurație trebuie să îndeplinească condiția $\alpha < \alpha_{bl}$. Pentru a înțelege mai bine interpretarea fizică a modelului matematic, să studiem funcționarea unui mecanism manivelă - piston (Fig.2.50) care conține această grupă structurală. Am neglijat forțele de inerție și de greutate și am considerat o singură forță aplicată F_3 , cu caracter rezistent (se opune vitezei punctului C). În aceste condiții am determinat, folosind procedeul descris

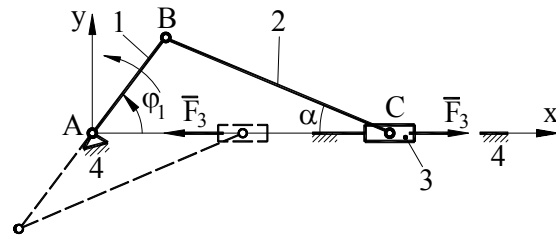


Fig. 2.50

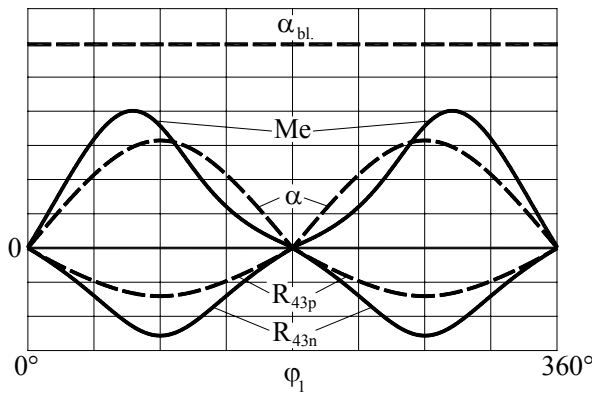


Fig. 2.51

anterior, reacțiunile $\bar{R}_{12}(R_{12x}, R_{12y})$, \bar{R}_{43} și momentul de echilibrare M_e pentru un șir de poziții succesive ale elementului conducător. Reacțiunea \bar{R}_{43} s-a determinat în cele două ipoteze precizate anterior. Astfel, considerând $R_{43} > 0$ s-a obținut valoarea R_{43p} , iar pentru $R_{43} < 0$, R_{43n} . Variația lor, în funcție de unghiul φ_1 , este redată în diagrama din Fig.2.51. Se observă că, atât R_{43p} , cât și R_{43n} sunt negative în intervalul ciclului cinematic $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. Aceasta înseamnă că ipoteza corectă este $R_{43} < 0$, iar $R_{43} = R_{43n}$. În această ipoteză s-au

determinat, apoi, celelalte reacțiuni și momentul de echilibrare. În aceeași diagramă sunt trasate curba de variație a unghiului de configurație $\alpha(\varphi_1)$ și a momentului de echilibrare $M_e(\varphi_1)$. Se observă că este îndeplinită condiția $\alpha < \alpha_{bl}$, astfel încât mecanismul nu înregistrează fenomenul de autoblocare. În diagrama din Fig.2.52 sunt trasate aceleași curbe în situația în care condiția $\alpha < \alpha_{bl}$ nu este îndeplinită pe întreg intervalul ciclului cinematic. Din această diagramă se observă că în punctele $\alpha = \alpha_{bl}$, reacțiunea $R_{43} = R_{43n}$ tinde la infinit și își schimbă semnul.

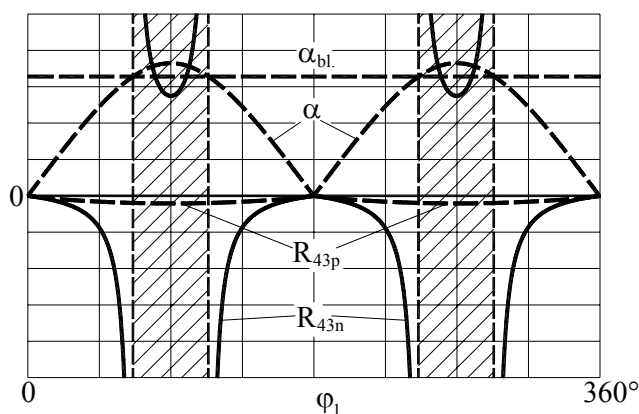


Fig. 2.52

De aceea, în zonele cu $\alpha < \alpha_{bl}$, $R_{43p} < 0$ și $R_{43n} > 0$ și, deci, nici una dintre ipotezele inițiale nu se confirmă. Aceasta înseamnă că sistemul de ecuații nu are soluții, în aceste intervale, iar funcționarea mecanismului nu este posibilă. Curba $M_e(\varphi_1)$ este trasată separat, în Fig.2.53. Ca și reacțiunea R_{43} , momentul de echilibrare tinde la infinit în punctele $\alpha = \alpha_{bl}$. În intervalele $\alpha < \alpha_{bl}$, această curbă nu este trasată deoarece mecanismul nu funcționează în aceste zone.

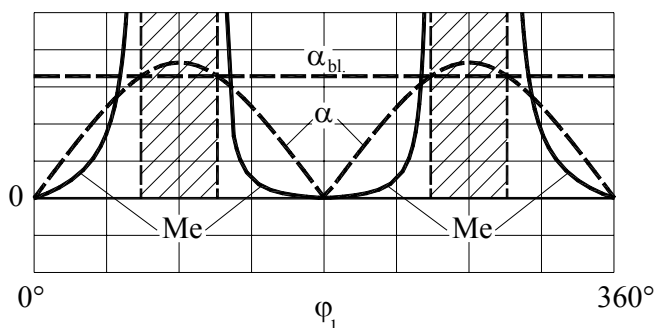


Fig. 2.53

Condiția $\alpha < \alpha_{bl}$, deși permite evitarea autoblocării nu asigură o funcționare corespunzătoare deoarece în apropierea configurațiilor de blocare, reacțiunile și forțele de frecare au valori foarte mari. Pentru a evita acest neajuns unghiul de configurație α trebuie să îndeplinească următoarea condiție:

$$\alpha \leq \alpha_a \quad (\alpha_a < \alpha_{bl}) \quad (2.106)$$

în care α_a este valoarea admisibilă a unghiului de configurație.

■ Analiza comportării grupelor structurale

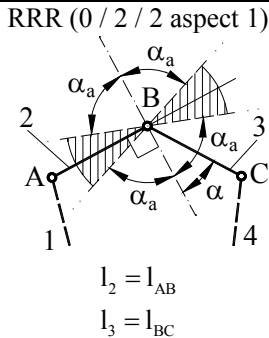
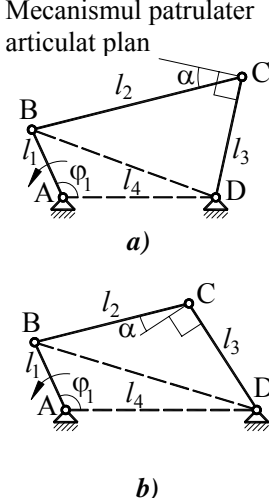
Observațiile legate de producerea fenomenului de autoblocare la grupa RRT sunt valabile, în general, pentru toate grupele structurale și se pot sintetiza astfel.

Autoblocarea unei grupe structurale se produce într-o vecinătate simetrică a configurațiilor critice, delimitată de două configurații de blocare. Valoarea parametrului de configurație, corespunzătoare configurațiilor de blocare, se determină în funcție de parametri geometrici și de frecare ai grupeii. Evitarea autoblocării și asigurarea unei funcționări favorabile din punct de vedere al transmiterii forțelor se realizează prin respectarea unor condiții limitative pentru parametrul de configurație.

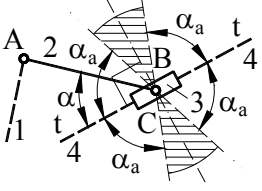
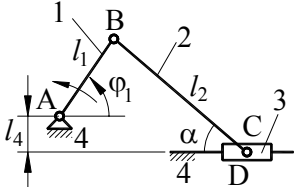
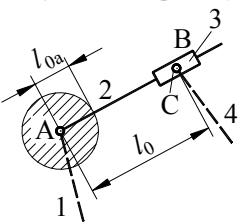
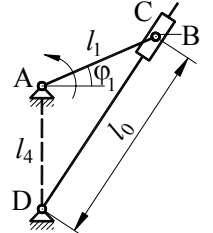
În Tab.2.5 se prezintă o analiză a grupelor structurale uzuale din punct de vedere al evitării autoblocării și al calității transmiterii forțelor. În acest tabel se definește parametrul de configurație și se precizează valoarea sa pentru configurația critică (rubrica 1.1). În cazul grupelor RRR, RRT și RTRR acesta este un unghi (α), adoptat în așa fel, încât să aibă valoarea $\frac{\pi}{2}$ atunci când configurația este critică. În cazul grupeii RTR parametrul de configurație este o lungime (l_0), deoarece cupla interioară este de translație, iar poziția relativă dintre elemente se determină numai în felul acesta. Se indică, de asemenea, expresiile de calcul pentru parametrul de configurație de blocare (rubrica 1.2) fără a demonstra aceste relații. În fine, se formulează condiția de evitare a autoblocării și cea de asigurare a calității transmiterii forțelor (rubrica 1.3). Cea de-a doua condiție este suficientă deoarece respectarea sa determină și respectarea primei condiții. Menționăm că în cazul grupeii conducătoare R (1/1/1) nu se poate produce fenomenul de autoblocare.

Cunoașterea comportării grupelor uzuale permite aprecierea comportării mecanismelor. Astfel, pentru evitarea autoblocării și pentru a asigura calitatea transmiterii forțelor, în cazul unui mecanism, toate grupele componente trebuie să respecte condițiile menționate. În Tab.2.5 se prezintă și analiza mecanismelor reprezentative pentru fiecare grupă structurală.

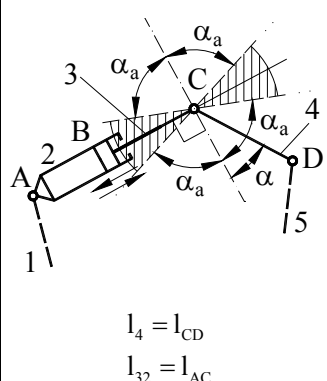
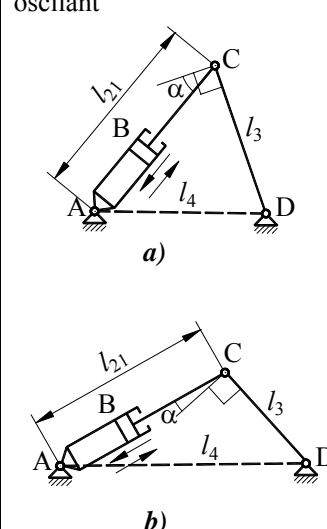
Tabelul 2.5

1	Schema grupeii structurale cu domeniul de blocare	1.1	Definiția parametrului de configurație
		1.2	Expresia unghiului de blocare Notății: $r_{fA} = \mu_A \cdot r_A$
		1.3	Condiția de evitare a autoblocării și de transmitere a forțelor
2	Mecanismul reprezentativ	2.1	Calculul parametrului de configurație curent la mecanismul reprezentativ
		2.2	Valoarea extremă a parametrului de configurație
		2.3	Valoarea recomandată pentru parametrul de configurație admisibil
1	 <p>RRR (0 / 2 / 2 aspect 1)</p> <p>$l_2 = l_{AB}$ $l_3 = l_{BC}$</p>	1.1	α - unghiul ascuțit format între un element (BC) și perpendiculara pe celălalt element (AB). $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{fA} + r_{fB}}{l_2}\right) + \arccos\left(\frac{r_{fB} + r_{fC}}{l_3}\right) - \frac{\pi}{2}$
		1.3	$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \leq \alpha_a$ ($\alpha_a < \alpha_{bl}$)
2	 <p>Mecanismul patrulater articulată plan</p> <p>a)</p> <p>b)</p>	2.1	α - unghiul de presiune $\alpha = \left \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BCD \right $ $\sphericalangle BCD = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_{BD}^2}{2l_2l_3}\right)$ $l_{BD} = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \varphi_1}$
		2.2	$\alpha_{max} = \max(\alpha_1, \alpha_2)$ $\alpha_1 = \left \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 + l_4)^2}{2l_2l_3} \right $ $\alpha_2 = \left \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 - l_4)^2}{2l_2l_3} \right $
		2.3	$\alpha_a = 45^\circ - 60^\circ$

Tabelul 2.5 (continuare)

1	<p>RRT (0 / 2 / 2 aspect 2)</p>  <p>$l_2 = l_{AB}$ B – cupla de rotație (2-3) C – cupla de translație</p>	1.1	<p>α - unghiul ascuțit format între elementul care are două cuple de rotație (AB) și axa de translație (tt).</p> $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{FA} + r_{FB}}{l_2}\right) - \varphi_C$
		1.3	<p>$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \leq \alpha_a$ ($\alpha_a < \alpha_{bl}$)</p>
2	<p>Mecanismul manivelă – piston</p> 	2.1	<p>α - unghi de presiune</p> $\alpha = \arcsin \frac{ l_1 \sin \varphi_1 + l_4 }{l_2}$
		2.2	$\alpha_{max} = \arcsin \frac{l_1 + l_4}{l_2}$
		2.3	$\alpha_a = 30^0 - 45^0$
1	<p>RTR (0 / 2 / 2 aspect 3)</p>  <p>B – cupla de translație C – cupla de rotație (3-4)</p>	1.1	$l_0 = l_{AC}$ - distanța dintre centrele articulațiilor
		1.2	$l_{0bl} = \frac{r_{FA} + r_{FC}}{\cos \varphi_B}$
		1.3	<p>$l_0 > l_{0bl}$ $l_0 \geq l_{0a}$ ($l_{0a} > l_{0bl}$)</p>
2	<p>Mecanismul cu culisă de rotație</p> 	2.1	$l_0 = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 + 2l_1l_4 \sin \varphi_1}$
		2.2	$l_{0min} = l_1 - l_4 $
		2.3	$l_{0a} = (0, 1 - 0, 2) \cdot l_1$

Tabelul 2.5 (continuare)

1	<p>RTRR (1 / 2 / 2)</p>  <p>$l_4 = l_{CD}$ $l_{32} = l_{AC}$</p>	1.1	<p>α - unghiul ascuțit format între perpendiculara pe AC și elementul CD sau între perpendiculara pe CD și dreapta AC.</p> $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{FA} + r_{FC}}{l_{32}}\right) + \arccos\left(\frac{r_{FC} + r_{FD}}{l_4}\right) - \frac{\pi}{2}$
		1.3	<p>$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \leq \alpha_a$ ($\alpha_a < \alpha_{bl}$)</p>
2	<p>Mecanismul cu cilindru oscilant</p>  <p>a)</p> <p>b)</p>	2.1	<p>α - unghiul de presiune</p> $\alpha = \left \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACD \right $ $\sphericalangle ACD = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_{21}l_3}\right)$
		2.2	<p>$\alpha_{max} = \max(\alpha_1, \alpha_2)$</p> $\alpha_1 = \left \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_{21\min}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_{21\min}l_3}\right) \right $ $\alpha_2 = \left \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_{21\max}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_{21\max}l_3}\right) \right $
		2.3	<p>$\alpha_a = 45^0 - 60^0$</p>

Astfel, se indică modul de calcul al parametrului de configurație curent (rubrica 2.1) și a valorii extreme pentru acest parametru (rubrica 2.2), importantă pentru verificarea celor două condiții. În cazul mecanismelor patruleter, manivală - piston și cu cilindru oscilant, unghiul de configurație are denumirea consacrată de **unghi de presiune**, care se va folosi în continuare. Se dau, de asemenea, recomandări privind valoarea unghiului de presiune admisibil și, în cazul mecanismului cu culisă de rotație, a distanței de configurație admisibilă. Aceste

valori sunt mult depărtate de valorile de blocare, așa încât calculul acestora din urmă nu are importanță prea mare.

Criteriul descris, prin care se apreciază comportarea mecanismului pe baza grupelor structurale componente, este foarte util în cazul mecanismelor complexe, formate din mai multe grupe structurale la care studiul global este greu și pretențios. Pentru exemplificare, în Fig.2.54 sunt reprezentate un mecanism din structura unei mașini de cusut (Fig.2.54.a) și un mecanism de încărcător frontal (Fig.2.54.b). Pentru ambele mecanisme sunt puse în evidență grupele componente și parametrii de configurație ai acestora care trebuie verificați cu ajutorul condițiilor 1.3 - Tab.2.5 în vederea asigurării unei funcționări corecte.

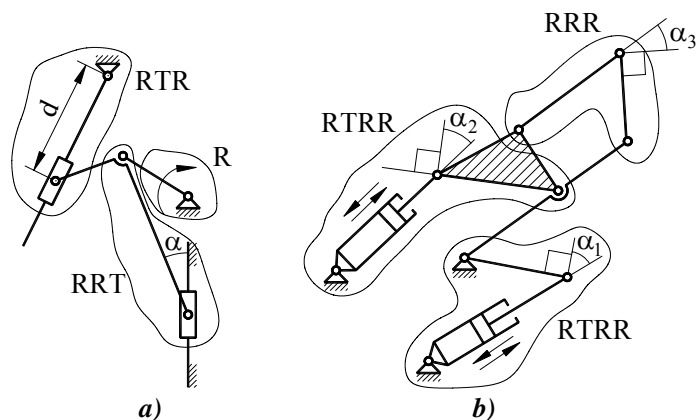


Fig. 2.54

2.2.4. Randamentul mecanic

Randamentul mecanic este un parametru care oglindește eficiența utilizării energiei mecanice în procesul de funcționare a mecanismelor. Randamentul poate avea caracter instantaneu sau global (pentru o perioadă de timp). Randamentul instantaneu, η se definește ca fiind raportul dintre puterea utilă, P_u și puterea motoare P_m , considerate în valoare absolută

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} \quad (2.107)$$

Puterea utilă este utilizată pentru efectuarea unei operații tehnologice la nivelul unui element condus, de execuție. Puterea motoare este primită de la motorul de acționare și se dezvoltă în cuplele conducătoare. Între puterea utilă și cea motoare există relația

$$P_m = P_u + P_f, \quad (2.108)$$

în care P_f este puterea pierdută prin frecare în cuplele cinematice. Având în vedere formula (2.108), randamentul se poate exprima și în felul următor

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_f} \quad (2.109)$$

$$\eta = \frac{P_m - P_f}{P_m} \quad (2.110)$$

Randamentul global se exprimă prin formule analoge, dar în funcție de lucrul mecanic util, L_u , motor, L_m și de frecare L_f .

$$\eta_g = \frac{L_u}{L_m} \quad (2.111)$$

$$\eta_g = \frac{L_u}{L_u + L_f} \quad (2.112)$$

$$\eta_g = \frac{L_m - L_f}{L_m} \quad (2.113)$$

$$L_m = L_u + L_f \quad (2.114)$$

Cunoscând relația dintre lucrul mecanic și putere

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dL}{d\varphi_1} \cdot \omega_1,$$

se determină lucrul mecanic de fiecare tip

$$L_u = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_u d\varphi_1 \quad (2.115)$$

$$L_m = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_m d\varphi_1 \quad (2.116)$$

$$L_f = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_f d\varphi_1 \quad (2.117)$$

Parametrul φ_1 este unghiul de poziție al elementului conducător (variabila independentă a mecanismului), iar φ_{11} și φ_{12} - valorile parametrului φ_1 care delimitează perioada pentru care se calculează lucrul mecanic.

În cazul acționării hidraulice, integrarea se face în funcție de variabila cuplei conducătoare cilindru - piston.

Dacă randamentul instantaneu este constant, randamentul global este, desigur, egal cu cel instantaneu.

Valoarea randamentului se înscrie în domeniul:

$$0 \leq \eta < 1.$$

Limita superioară nu poate fi atinsă, așa cum rezultă din formulele (2.109), (2.110), (2.112), (2.113), deoarece $P_f \neq 0$, $L_f \neq 0$. Randamentul este $\eta = 0$ atunci când $P_u = 0$, $L_u = 0$, adică atunci când mecanismul funcționează fără sarcină utilă, **în gol**. Menționăm că, din calcul, randamentul poate rezulta și negativ. În acest caz mecanismul se găsește într-o zonă de autoblocare. Rezultatul acesta se explică, având în vedere formulele (2.110) și (2.113), prin faptul că $P_f > P_m$ și $L_f > L_m$. Funcționarea este cu atât mai eficientă, din punct de vedere energetic, cu cât randamentul se apropie mai mult de unitate. Majorarea randamentului se poate face numai prin reducerea energiei pierdută prin frecare, deci prin reducerea forțelor de frecare. Acestea depind direct proporțional de coeficienții de frecare și de reacțiunile normale. Reducerea coeficienților de frecare se realizează prin proiectarea corespunzătoare a cuplurilor în relație cu lubrifierea și utilizarea frecării de rostogolire (rulmenți, ghidaje cu role, șuruburi cu bile). Diminuarea reacțiunilor normale este legată de proiectarea rațională a mecanismului pentru a funcționa cât mai departe de pozițiile critice, cu respectarea condițiilor 1.3 - Tab.2.5.

Calculul randamentului instantaneu este posibil dacă se cunosc două dintre puterile P_u , P_m și P_f , utilizând una din formulele (2.107), (2.109), (2.110).

Dacă elementul de execuție se notează cu n , puterea utilă se determină, după cum mișcarea este de rotație sau de translație, cu una dintre formulele:

$$P_u = -M_n \cdot \omega_n \quad (2.118)$$

$$P_u = -F_n \cdot v_n \quad (2.119)$$

în care M_n și F_n reprezintă momentul sau forța utilă (tehnologică), iar ω_n , v_n - viteza unghiulară sau de translație a elementului n (Fig. 2.55.a). Deoarece forțele utile au caracter rezistent, sensul lor este contrar vitezei, iar semnul (-) din formulele (2.118), (2.119) intervine pentru a obține puterea în valoare absolută, în condițiile în care M_n , ω_n , F_n și v_n sunt scalari cu semn.

Notând cu 1 elementul conducător de rotație (Fig.2.56.a), puterea motoare este:

$$P_m = M_1 \cdot \omega_1 \quad (2.120)$$

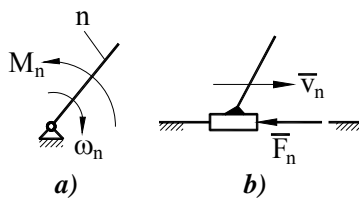


Fig. 2.55

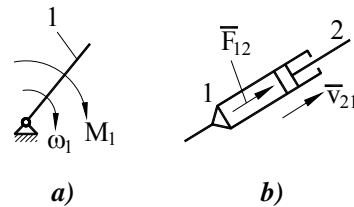


Fig. 2.56

În cazul acționării hidraulice, prin cupla conducătoare cilindru (1) - piston (2) (Fig.2.56.b), puterea motoare se calculează cu formula:

$$P_m = F_{12} \cdot v_{21} = F_{21} \cdot v_{12} \quad (2.121)$$

În formulele (2.120) și (2.121) M_1 este momentul motor, având același sens cu viteza unghiulară ω_1 , iar $F_{12}(F_{21})$ este forța motoare având sensul vitezei relative $v_{21}(v_{12})$.

Puterea pierdută prin frecare în cupla de rotație (Fig. 2.57.a) este

$$P_{fA} = -M_{f12} \cdot \omega_{21} = M_{f12} \cdot \omega_{12} \quad (2.122)$$

iar în cupla de translație (Fig. 2.57.b) este

$$P_{fA} = -F_{f12} \cdot v_{21} = F_{f12} \cdot v_{12} \quad (2.122)$$

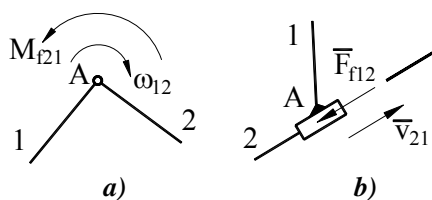


Fig. 2.57

Desigur, puterea pierdută prin frecare în întregul mecanism se obține prin însumarea puterilor de frecare ale tuturor cuplelor.

Forțele de rezistență utilă (M_n, F_n) sunt, în general, cunoscute (par. 2.2.1.1). Forțele motoare de acționare (M_1, F_1) se determină asimilându-se cu forțele de echilibru.

Pentru calculul lor se efectuează analiza cinetostatică cu frecare, din care rezultă, evident, și forțele de frecare din toate cuplele mecanismului.

Dintre cele trei posibilități de calcul al randamentului (2.107), (2.109), (2.110), cea mai comodă este cea care utilizează relația (2.107) pentru că nu reclamă calculul puterilor de frecare în fiecare cuplă cinematică. Înlocuind în (2.107) expresiile (2.118) și (2.120) se obține

$$\eta = -\frac{M_n \omega_n}{M_1 \omega_1} = -\frac{M_n}{M_1} \cdot \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \quad (2.124)$$

Dacă elementul condus are mișcare de translație (2.119), formula este

$$\eta = -\frac{F_n v_n}{M_1 \omega_1} = -\frac{F_n}{M_1} \cdot \frac{dx_n}{d\varphi_1} \quad (2.125)$$

În formulele (2.124) și (2.125) $\frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}$ și $\frac{dx_n}{d\varphi_1}$ sunt funcții de transmitere caracteristice elementului condus n, care se determină din analiza cinematică a mecanismului.

Este important de observat că, în cazul neglijării forțelor de frecare ($\eta = 1$), formulele (2.124) și (2.125) permit determinarea momentului motor (de

echilibrare) în funcție de forțele (momentele) utile numai din considerente cinematice.

$$M_1 = -M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \quad (2.126)$$

$$M_1 = -F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} \quad (2.127)$$

Desigur, pentru calculul randamentului se pot folosi și formule în care vitezele și forțele (momentele) se introduc în valoare absolută

$$\eta = \frac{|M_n| \cdot |\omega_n|}{|M_1| \cdot |\omega_1|}; \quad \eta = \frac{|F_n| \cdot |v_n|}{|M_1| \cdot |\omega_1|}.$$

Randamentul global se determină introducând expresiile puterilor (2.118) - (2.121), în formulele (2.115), (2.116) și, apoi, în (2.111). Pentru cazul în care elementul condus are mișcare de rotație, rezultă

$$\eta_g = - \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_1 d\varphi_1} \quad (2.128)$$

sau

$$\eta_g = \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\eta} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1} \quad (2.129)$$

iar pentru cazul în care elementul condus are mișcare de translație se obține

$$\eta_g = - \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_1 d\varphi_1} \quad (2.130)$$

sau

$$\eta_g = \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\eta} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1} \quad (2.131)$$

Pentru exemplificare, se consideră, din nou, mecanismul manivelă - piston din Fig.2.50. S-a calculat randamentul instantaneu (2.125) și randamentul global (2.130) luând în considerare numai frecarea din cupla de translație și din

cupla conducătoare A. În Fig.2.58 se prezintă diagrama $\eta(\varphi_1)$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ și diagrama $\alpha(\varphi_1)$. Deoarece $\alpha < \alpha_{bl}$, mecanismul nu prezintă fenomenul de autoblocare iar randamentul este pozitiv pe întreg domeniul $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. Se observă că randamentul are cele mai mici valori în zonele în care unghiul de presiune este maxim, iar în punctele $\varphi_1 = 0$ și $\varphi_1 = \pi$, în care viteza patinei 3 este zero, randamentul tinde, de asemenea, la zero. Valoarea randamentului global, calculată prin integrare numerică, în intervalul $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ este marcată, de asemenea, pe diagrama din Fig.2.58. În Fig.2.59 sunt reprezentate aceleași diagrame dar cu alte date numerice. În acest caz intervin zone de autoblocare ($\alpha > \alpha_{bl}$) în care $\eta < 0$.

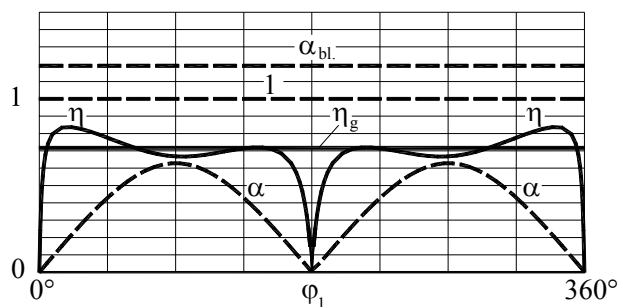


Fig. 2.58

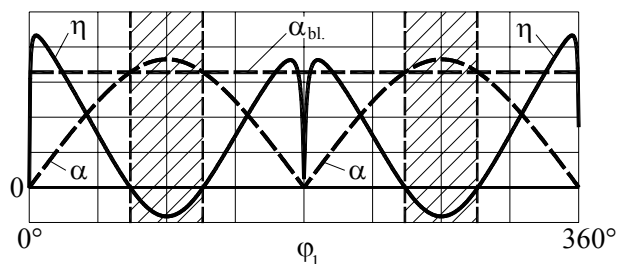


Fig. 2.59

2.2.5. Mecanismul cu șurub

Mecanismul elementar cu șurub (Fig.2.60.a) este format din două elemente mobile, legate printr-o cuplă elicoidală - șurub și piuliță, unul având mișcare de rotație, iar celălalt de translație. Mecanismul se poate construi în două variante: când șurubul are mișcare de rotație și piulița de translație

(Fig.2.60.a) sau invers (Fig.2.60.b). De obicei elementul conducător este cel cu mișcare de rotație. Filetul unui șurub poate avea două orientări - pe dreapta și pe stânga. Filetul pe dreapta (cel mai uzual) se recunoaște astfel: dacă așezăm șurubul vertical, linia spirei urcă de la stânga spre dreapta (Fig.2.61.a). Desigur, în cazul filetului pe stânga, înclinarea spirei este inversă (Fig.2.61.c).

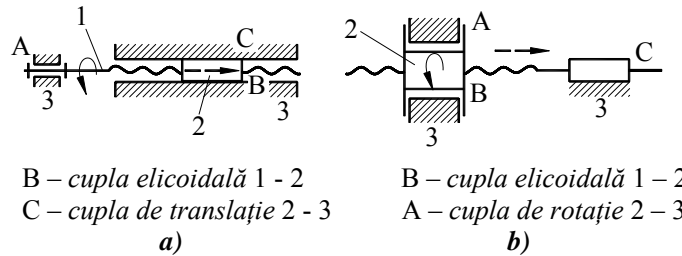


Fig. 2.60

Analiza cinematică a acestui mecanism nu a fost tratată în capitolul 2.1, deoarece este foarte simplă și este prezentată acum, împreună cu analiza cinetostatică, randamentul și problema autoblocării.

Mișcarea relativă șurub (1) - piuliță (2) este descrisă cu ajutorul unei funcții de transmitere de ordinul zero,

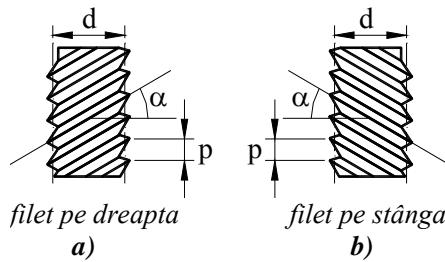


Fig. 2.61

$$\frac{s_{12}}{\varphi_{12}} = \pm \frac{p}{2\pi} = \pm \frac{d}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad (2.132)$$

în care s_{12} și φ_{12} sunt deplasările relative de translație și unghiulară, p - pasul filetului, d - diametrul mediu al șurubului, iar α - unghiul de înclinare a spirei filetului pe cilindrul de diametrul mediu (Fig.2.61). Semnul (+) corespunde filetului pe dreapta, iar (-) celui pe stânga. Prin derivare în raport cu φ_{12} se obține funcția de transmitere de ordinul unu:

$$\frac{ds_{12}}{d\varphi_{12}} = \frac{v_{12}}{\omega_{12}} = \pm \frac{p}{2\pi} = \pm \frac{d}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad (2.133)$$

Semnele parametrilor s_{12} , φ_{12} , v_{12} , ω_{12} se stabilesc prin raportare la o axă orientată, suprapusă peste axa șurubului (Fig.2.62). Funcțiile de transmitere (2.132) și (2.133) se folosesc pentru analiza cinematică a oricărui mecanism cu șurub. Astfel, în cazul mecanismului din Fig. 2.60.a, se scrie:

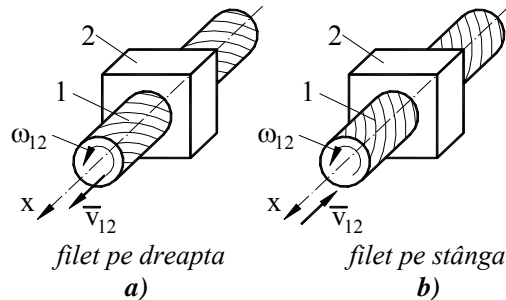


Fig. 2.62

$$s_1 = s_2 + s_{12}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_{12}$$

Deoarece $s_1 = 0$ și $\varphi_2 = 0$, rezultă $s_{12} = -s_2$ și $\varphi_{12} = \varphi_1$. Introducând aceste valori în formula (2.132) se obține funcția de transmitere de ordinul zero, pentru acest mecanism,

$$\frac{s_{12}}{\varphi_1} = \mp \frac{p}{2\pi} = \mp \frac{d}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad (2.134)$$

și, prin derivare în raport cu φ_1 , funcția de transmitere de ordinul unu,

$$\frac{ds_{12}}{d\varphi_1} = \frac{v_{12}}{\omega_1} = \mp \frac{p}{2\pi} = \mp \frac{d}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad (2.135)$$

cu semnul (-) pentru filetul pe dreapta și (+) pentru filetul pe stânga.

Pentru a efectua analiza cinetostatică, mecanismul cu șurub, care este spațial, se transformă, prin desfășurarea cilindrului de diametru mediu, într-un mecanism plan. Se consideră mecanismul din Fig.2.60 echipat cu un șurub cu filet dreptunghiular, orientat pe dreapta (Fig.2.63.a). Ne propunem să determinăm momentul motor M_1 necesar pentru ridicarea piuliței, încărcată cu forța F_2 , care poate fi greutatea unei sarcini la o mașină de ridicat. Prin operația menționată, cuplele elicoidale B și de rotație A, se transformă în cuple de translație, obținând un mecanism de familia $f = 4$ (Fig.2.36.b) ca și mecanismul cu șurub inițial. Între viteze există ecuația

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_{21},$$

în care

$$\bar{v}_1 \left\{ \begin{array}{l} |\bar{v}_1| = |\omega_1| \cdot \frac{d}{2} \\ // \text{ axa cuplei A} \\ \text{sens de la dreapta spre stânga} \end{array} \right.$$

$$\bar{v}_2 // \text{ axa cuplei C}, \quad \bar{v}_{21} // \text{ axa cuplei B}.$$

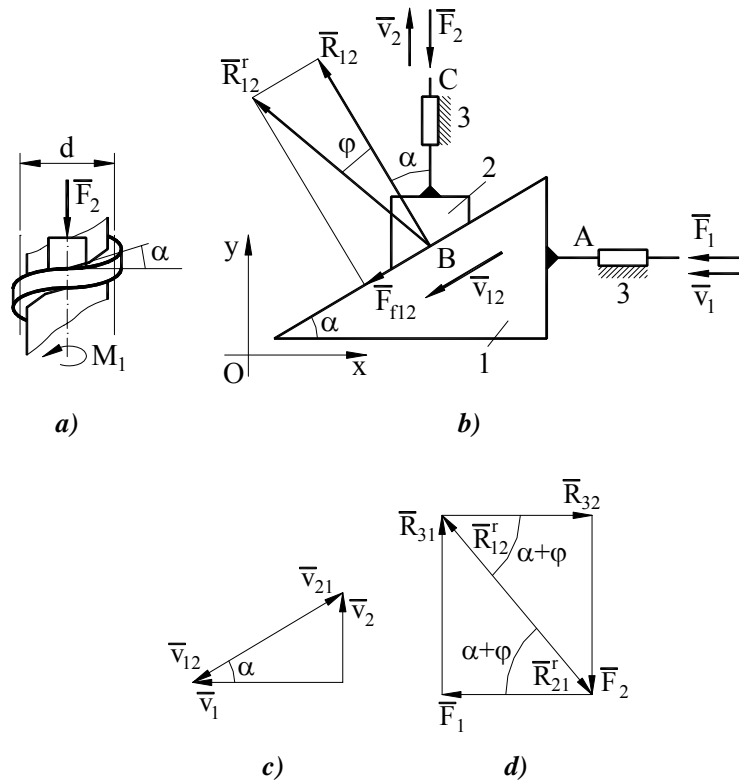


Fig. 2.63

Triunghiul vitezelor, corespunzător ecuației, este reprezentat în Fig.2.63.c.

Se scrie ecuația de echilibru a forțelor pentru elementul 2, considerând numai forța de frecare din cupla B,

$$\sum \bar{F}(2) = 0; \quad \underline{\underline{\bar{R}_{12}^r}} + \underline{\underline{\bar{R}_{32}}} + \underline{\underline{\bar{F}_2}} = 0$$

În această ecuație \bar{F}_2 este forța utilă, cunoscută, $\bar{R}_{32} \perp$ axa cuplei C, iar $\bar{R}_{12}^r = \bar{R}_{12} + \bar{F}_{f12}$ are orientarea indicată pe desen (Fig.2.63.b), având în vedere sensul forței de frecare, același cu al vitezei \bar{v}_{12} (triunghiul vitezelor - Fig.2.63.c). Rezolvarea grafică a ecuației de forțe este redată prin poligonul din Fig.2.63.d.

Se scrie apoi, ecuația de forțe pentru elementul 1,

$$\sum \bar{F}(1) = 0; \quad \underline{\underline{\bar{R}_{21}^r}} + \underline{\underline{\bar{R}_{31}}} + \underline{\underline{\bar{F}_1}} = 0,$$

în care $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$, $\bar{R}_{31} \perp$ axa cuplei A, iar $\bar{F}_1 //$ axa cuplei A. Rezolvarea grafică este arătată, de asemenea, în Fig.2.63.d. Din poligonul forțelor se deduce, imediat,

$$F_1 = F_2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

în care φ este unghiul de frecare din cupla B. Semnele forțelor F_1 și F_2 se stabilesc prin raportare la axele sistemului Oxy.

În cazul în care piulița coboară, fiind încărcată de aceeași forță \bar{F}_2 (Fig.2.64), se observă că sensurile vitezelor se inversează (Fig.2.64.b). Acest fapt modifică sensul forței de frecare \bar{F}_{f12} și direcția reacțiunii rezultante \bar{R}_{12}^r ca în Fig.2.64.a. Poligonul de forțe, construit după aceleași ecuații de echilibru, se prezintă ca în Fig.2.64.c.

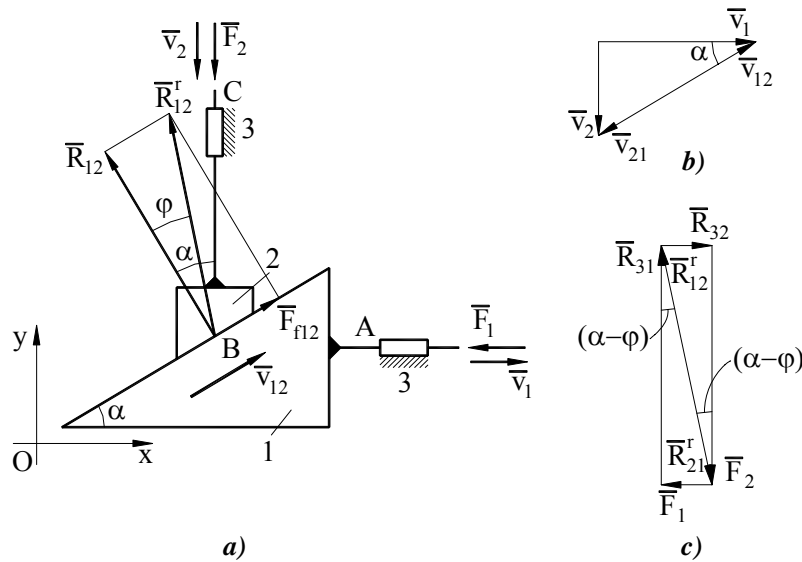


Fig. 2.64

Din acest poligon rezultă

$$F_1 = F_2 \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

Revenind la mecanismul inițial, cu șurub, se calculează $M_1 = F_1 \frac{d}{2}$,

pentru cele două cazuri,

$$M_1 = F_2 \frac{d}{2} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad (2.136)$$

$$M_1 = F_2 \frac{d}{2} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad (2.137)$$

Randamentul mecanismului, în cazul ridicării piuliței, când șurubul este elementul conducător și piulița - element condus, se determină cu formula (2.125) care, cu notațiile de aici, devine

$$\eta = -\frac{F_2 v_2}{M_1 \omega_1}$$

Înlocuind M_1 (2.136) și $\frac{v_2}{\omega_1}$ (2.135) cu expresiile lor se obține

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad (2.138)$$

Autoblocarea mecanismului se produce când $\eta \leq 0$, deci

$$\alpha + \varphi \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha_{bl}$$

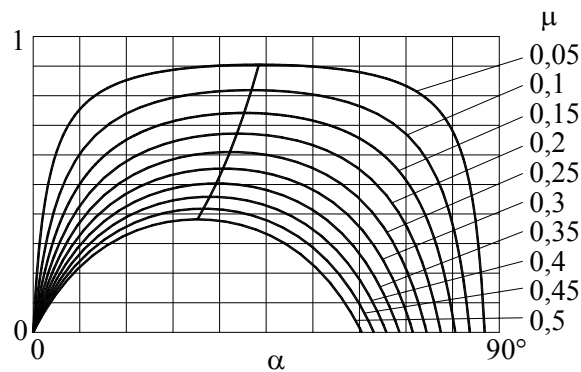


Fig. 2.65

În mod obișnuit unghiul α este mult mai mic decât valoarea de blocare. Din studiul expresiei (2.138) rezultă că valoarea maximă (optimă) a randamentului se obține când $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. În Fig. 2.65 se prezintă diagrama $\eta(\alpha)$ pentru câteva valori ale coeficientului de frecare

din cupla elicoidală.

În cazul coborârii piuliței, aceasta este element conducător, iar șurubul element condus, astfel că randamentul este

$$\eta = -\frac{M_1 \omega_1}{F_2 v_2}$$

Introducând expresiile lui M_1 (2.137) și a raportului $\frac{\omega_1}{v_2}$ (2.135) se obține

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} \quad (2.139)$$

Dacă $\alpha > \varphi$, $\eta > 0$, iar M_1 orientat în sus opus lui ω_1 , are semnificația unui moment de frânare care împiedică accelerarea necontrolată a mișcării.

Dacă $\alpha < \varphi$, $\eta < 0$, are loc autoblocarea. Pentru a realiza deplasarea piuliței trebuie să acționeze și momentul M_1 care, în acest caz, are caracter motor - este orientat în același sens cu ω_1 .

Șuruburile cu $\alpha < \varphi$ se numesc **cu autofrânare** deoarece împiedică deșurubarea sub acțiunea forțelor elastice de strângere este împiedicată.

*

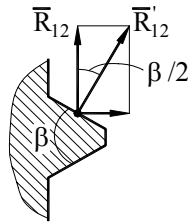


Fig. 2.66

Dacă filetul este triunghiular sau trapezoidal (Fig.2.66), reacțiunea normală la flancul elicoidal \bar{R}'_{12} generează o componentă axială \bar{R}_{12} care intervine în ecuațiile aferente analizei statice. Pe de altă parte, forța de frecare se calculează astfel,

$$|\bar{F}_{r12}| = \mu |\bar{R}'_{12}| = \frac{\mu}{\cos(\beta/2)} |\bar{R}_{12}|$$

în care β este unghiul dinte flancurile filetului.

Se fac notațiile

$$\mu' = \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\mu}{\cos(\beta/2)},$$

în care μ' se numește coeficient de frecare convențional, iar φ' - unghi de frecare convențional. Acești parametri se folosesc în locul parametrilor μ și φ în toate formulele precedente, atunci când filetul este trapezoidal. Deoarece $\mu' > \mu$ randamentul acestor mecanisme este inferior celor cu filet dreptunghiular, dar se utilizează la șuruburile de fixare, când pericolul de autodeșurubare se reduce.

2.3. ANALIZA PRECIZIEI

2.3.1. Introducere. Abateri elementare

Analiza preciziei presupune definirea noțiunilor de **mecanism ideal** și **mecanism real**. În cazul mecanismului ideal, parametrii constructivi au valori strict egale cu cele proiectate, numite valori nominale. În cazul mecanismului

real valorile acestor parametri sunt afectate de abateri (erori) în raport cu valorile **nominale**, numite **abateri elementare**. Aceste abateri reprezintă o consecință a proceselor de fabricare, reglare și montare.

Precizia de funcționare a mecanismului ideal este absolută, pe când parametrii mișcării mecanismului real (deplasări, viteze, accelerații) sunt afectați de **abateri funcționale**. Obiectivul analizei preciziei este de a face legătura între abaterile elementare și abaterile funcționale ale mecanismului. Abaterile de deplasare (poziție) pentru un parametru de poziție oarecare, φ este

$$\Delta\varphi = \varphi(q_k + \Delta q_k) - \varphi_0(q_k), \quad (k = 1 \dots p) \quad (2.140)$$

în care φ este **deplasarea** (poziția) în mecanismul real, iar φ_0 în cel ideal; q_k - valorile nominale ale parametrilor constructivi; Δq_k - abaterile elementare; p - numărul parametrilor constructivi. Abaterile de viteză și de accelerație se obțin prin derivarea, în raport cu timpul, a abaterilor de deplasare.

Trebuie menționat că analiza preciziei este justificată numai în situațiile în care abaterile funcționale influențează decisiv calitatea operațiilor deservite. Pot fi menționate, în acest sens, mecanismele echipamentelor de mecatronică și mecanică fină, mecanismele din industria militară, mecanismele de dozare din industria farmaceutică și alimentară, etc. Precizăm, de asemenea, că abaterile de deplasare sunt cele mai importante pentru aprecierea calității funcționării unui element de execuție. De aceea, în cele ce urmează, ne vom referi numai la această categorie de abateri.

Abaterile elementare reprezintă erori de poziție ale suprafețelor active care aparțin aceluiași element dar fac parte din cuple diferite. Astfel, un element k , având două cuple de rotație are două suprafețe active de formă cilindrică, interioare sau exterioare (Fig.2.67.a). Distanța dintre axele geometrice ale acestor suprafețe l_k este afectată de abaterea Δl_k . În acest caz mai pot interveni și alte abateri cum ar fi eroarea unghiulară de la paralelismul axelor sau eroarea de la paralelismul suprafețelor plane frontale. Acestea se neglijează dacă sunt mici și nu influențează consistent abaterile funcționale. Dacă elementul are o cuplă de rotație și una de translație (Fig.2.67.b), parametrul care pune în evidență poziția relativă dintre suprafețele active este lungimea l_k dintre axele suprafeței cilindrice care intervine în cupla de rotație și a suprafeței prismatice care ține de cupla de translație. Cele două axe trebuie să fie, teoretic, perpendiculare, dar eroarea de la perpendicularitate, de obicei, se neglijează.

Pentru analiza preciziei se utilizează **metoda deterministă și metoda probabilistică sau stocastică**.

Metoda deterministă se aplică unui mecanism singular, cu abateri elementare cunoscute, iar rezultatul operației îl constituie valorile abaterilor funcționale.

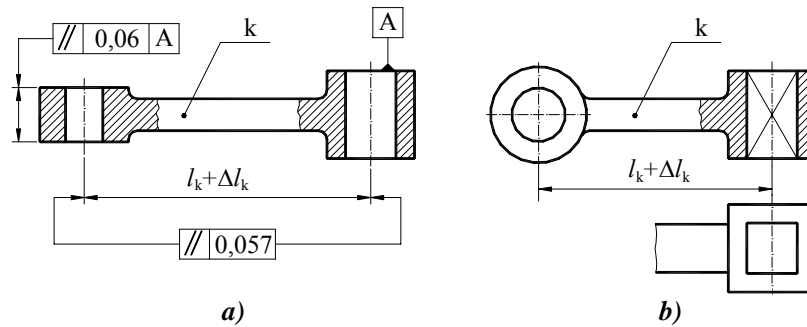


Fig. 2.67

În cadrul metodei probabilistice datele de intrare, pentru fiecare abatere elementară, sunt câmpul de toleranță și legea de distribuție stabilită în funcție de procesul tehnologic de fabricare. Rezultatul aplicării acestei metode se concretizează printr-o lege de distribuție specifică fiecărei abateri funcționale. Desigur, metoda stocastică este superioară celei deterministe fiind asociată unui proces normal de proiectare și fabricație a mecanismului. Pe de altă parte, metoda deterministă trebuie cunoscută deoarece intervine ca o etapă în desfășurarea metodei probabilistice.

2.3.2. Metoda deterministă

Calculul abaterilor de deplasare se poate efectua cu ajutorul relației (2.140), dar printr-o dezvoltare în serie Taylor a funcției $\varphi(q_k + \Delta q_k)$, din care se rețin primii doi termeni, se ajunge la o relație mai comodă

$$\Delta\varphi = \sum_k \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k} \right) \cdot \Delta q_k \quad (2.141)$$

Deoarece expresia este liniară în raport cu abaterile elementare, aplicarea ei în procesul de analiză a preciziei, poartă denumirea de metodă liniară. Derivatele parțiale $\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}$ se numesc funcții de transmitere ale abaterilor.

Pentru exemplificare, vom aplica metoda liniară în scopul determinării abaterilor de deplasare a pistonului (patinei) unui mecanism manivelă - piston (Fig.2.68). Presupunem cunoscute abaterile elementare ale lungimilor l_1, l_2, l_4 notate cu $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_4$. Abaterea de deplasare a punctului C, Δl_3 , se exprimă în conformitate cu formula (2.141)

$$\Delta l_3 = \frac{\partial l_3}{\partial l_1} \Delta l_1 + \frac{\partial l_3}{\partial l_2} \Delta l_2 + \frac{\partial l_3}{\partial l_4} \Delta l_4 \quad (2.142)$$

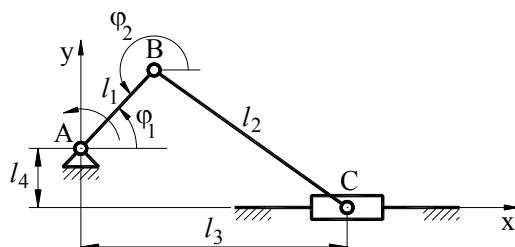


Fig. 2.68

Pentru determinarea funcțiilor de transmitere ale abaterilor se apelează la relațiile întâlnite la analiza cinematică a acestui mecanism (par. 2.1.4.3.).

Proiecțiile ecuației de închidere (2.36) pe axele sistemului de co-

ordonate sunt

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 = 0 \quad (2.143)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_4 = 0 \quad (2.144)$$

Având în vedere că unghiul φ_2 este un parametru variabil care depinde de l_1 , l_2 și l_4 , din ecuația (2.143) se deduce

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_1} = \cos \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_1}$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_2} = \cos \varphi_2 - l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_2}$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_4} = -l_2 \sin \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_4}$$

Derivatele parțiale $\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_1}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_2}$ și $\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_4}$ se obțin prin derivarea succesivă a ecuației (2.144) în raport cu l_1 , l_2 și l_4 ,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_1} = -\frac{\sin \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_2} = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_4}{l_2^2 \cos \varphi_2}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial l_4} = -\frac{1}{l_2 \cos \varphi_2}$$

Făcând substituțiile necesare se ajunge la expresiile finale ale funcțiilor de transmitere a abaterilor,

$$\begin{cases} \frac{\partial l_3}{\partial l_1} = \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2} \\ \frac{\partial l_3}{\partial l_2} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \\ \frac{\partial l_3}{\partial l_4} = \operatorname{tg} \varphi_2 \end{cases} \quad (2.145)$$

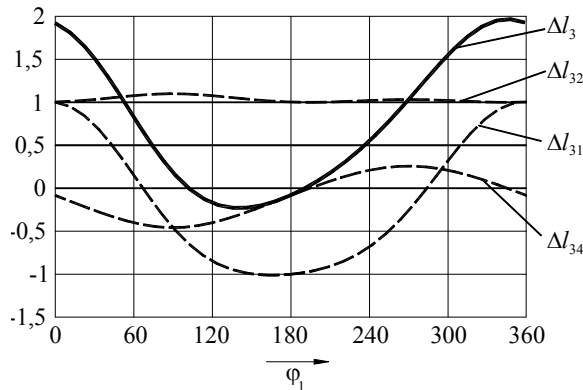


Fig. 2.69

$$l_1 = 100 \text{ [mm]}; l_2 = 300 \text{ [mm]}; l_4 = 25 \text{ [mm]} \\ \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_4 = 1.$$

abateri elementare asupra abaterii totale Δl_3 .

■ Influența jocurilor

Cuplele cinematice au suprafețele active, teoretic congruente, de formă și dimensiuni identice, astfel încât, contactul se realizează după o zonă din aceste suprafețe. De exemplu, în cazul cuplei de rotație (Fig.2.70.a), raza fusului este egală cu raza lagărului, iar centrele lor coincid. În mecanismul real dimensiunile care definesc cele două suprafețe sunt afectate de abateri, iar între ele se creează un spațiu care permite deplasări relative în raport cu poziția ideală – numite **jocuri**. Această situație este ilustrată în Fig.2.70.b pentru cupla de rotație. Jocul \bar{j}_{12} este o mărime vectorială, caracterizată prin modul, direcție și sens. Dacă modulul $j_{12} = \Delta_2 - \Delta_1$ (Δ_2, Δ_1 - abaterile celor două raze) este constant, direcția și sensul jocului sunt variabile în timpul funcționării. O situație similară se poate constata în cazul cuplei de translație (Fig.2.71) unde poate să intervină o deplasare de translație (Fig.2.71.b) sau una de rotație

În Fig.2.69 se prezintă, pentru un caz concret, diagrama abaterii Δl_3 în funcție de unghiul φ_1 , calculată cu formula (2.142). Sunt trasate, de asemenea, diagramele abaterilor parțiale $\Delta l_{31} = \frac{\partial l_3}{\partial l_1} \Delta l_1$,

$$\Delta l_{32} = \frac{\partial l_3}{\partial l_2} \Delta l_2 \text{ și}$$

$$\Delta l_{34} = \frac{\partial l_3}{\partial l_4} \Delta l_4 \text{ care}$$

arată influența fiecărei

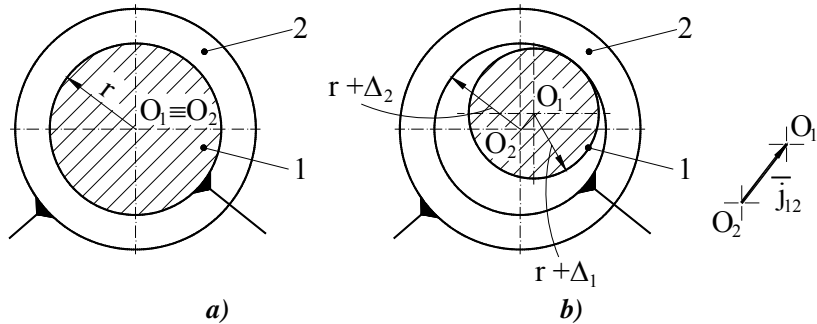


Fig. 2.70

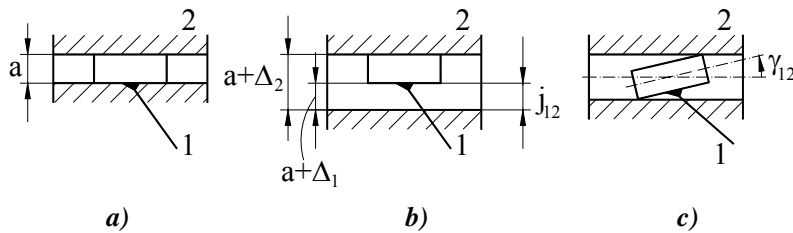


Fig. 2.71

(Fig.2.71.c) care dă naștere unui joc unghiular (γ_{12}). Existența jocurilor influențează, desigur, precizia de funcționare. Ele pot fi interpretate ca niște abateri elementare și introduse în procesul de analiză liniară a preciziei. Dificultatea problemei constă în determinarea orientării jocului din fiecare cuplă. Există, în acest sens, două teorii care se sprijină pe anumite ipoteze legate de funcționarea mecanismului. Dacă regimul de lucru permite o apreciere bună a distribuției de forțe și aceasta are un caracter pronunțat periodic, atunci orientarea jocurilor este aceeași cu orientarea reacțiunilor din cuplurile cinematice. Se înțelege că, în acest caz, analiza preciziei trebuie asociată cu analiza cinetostatică. Dacă regimul de funcționare este aleator, orientarea jocurilor are același caracter și se impune o tratare probabilistică a problemei.

2.3.3. Metoda probabilistică

Așa cum am arătat, fiecare abatere elementară este introdusă, în calcul, sub forma unei mulțimi de valori, caracterizate printr-o lege de distribuție și care se încadrează într-un câmp de toleranță determinat. Caracterul legii de distribuție depinde de tipul abaterilor elementare, în conformitate cu următoarele recomandări:

- Pentru abaterile elementare dimensionale, legea de distribuție normală (Gauss):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

în care x este variabila funcției reprezentată în cazul nostru de abaterile elementare $f(x)$ - probabilitatea apariției abaterii elementare x .

- Pentru jocuri, legea exponențială

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{pentru } x > 0 \\ 0, & \text{pentru } x \leq 0 \end{cases}$$

în care λ este un parametru al legii exponențiale, determinat pe bază experimentală.

În faza următoare se execută o combinație aleatorie a valorilor care reprezintă fiecare abatere elementară, obținând o mulțime de seturi de numere. Fiecare set caracterizează precizia unui mecanism, care se analizează printr-o metodă deterministă, calculând abaterile funcționale care interesează. Mulțimea de valori obținute pentru fiecare abatere funcțională se prelucrează statistic prin trasarea unor curbe de distribuție și prin determinarea unor parametri ca valoarea medie, abaterea medie pătratică, etc. Acest procedeu de calcul

simulează un proces de fabricație în serie a unui mecanism care aparține unei mașini. Dacă rezultatele nu satisfac, din punct de vedere a preciziei de funcționare, se poate interveni asupra abaterilor inițiale, modificând câmpurile de toleranță.

În Fig.2.72 se reprezintă curba de distribuție a abaterii de deplasare a pistonului pentru un mecanism manivelă – piston, considerând repartitia Gauss pentru abaterile la lungimile l_1 și l_2 .

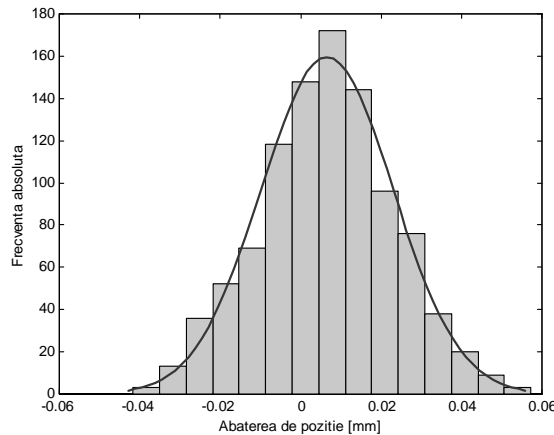


Fig. 2.72

$l_1 = 100$ [mm]; $l_2 = 200$ [mm]; $l_4 = 0$; $\varphi_1 = 50^\circ$
 Toleranțele la lungimile l_1 și l_2 : 0,07 și 0,09.

2.4. SINTEZA DIMENSIONALĂ

2.4.1. Considerații generale

Sinteza dimensională constă în determinarea parametrilor constructivi ai mecanismului pornind de la condițiile funcționale pe care acesta trebuie să le realizeze. Problematika sintezei dimensionale este largă și variată fiind determinată de rolul funcțional pe care trebuie să-l îndeplinească diverse mecanisme în mașinile din care fac parte. Condițiile funcționale pot fi de natură cinematică (poziții, viteze, accelerații) sau dinamică (transmiterea forțelor). Modelul matematic se constituie din sisteme de ecuații și/sau inecuații, în general, neliniare, rezolvabile prin metode numerice. Problemele de sinteză sunt, de regulă, nedeterminate. Pentru a restrânge domeniul soluțiilor se folosesc diverse procedee. Astfel, o parte dintre necunoscute se adoptă arbitrar sau din considerente independente de problema de sinteză, ajungând la o problemă determinată. De multe ori, în procesul de proiectare al unui mecanism, se asociază mai multe probleme de sinteză, reducând astfel domeniul soluțiilor. Un procedeu care conduce la o soluție unică este acela de a formula problema de sinteză ca una de optimizare. Adoptarea funcției obiectiv depinde de criteriul de optimizare ales. Acest criteriu poate fi legat, de exemplu, de precizia soluțiilor sau de calitatea transmiterii forțelor. Uneori criteriul de optimizare este de natură economică, dar atunci problema de sinteză dimensională se asociază cu proiectarea organologică a mecanismului.

Un aspect interesant care intervine în sinteza dimensională este cel al mecanismelor asemenea. Dacă dimensiunile constructive a două mecanisme cu aceeași structură sunt proporționale, cele două mecanisme formează figuri asemenea. În această situație sunt mecanismele patrulatere ABCD și AB'C'D' din Fig.2.73, având lungimile elementelor proporționale,

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3} = \frac{l_4}{l'_4} \quad (2.146)$$

Funcțiile de transmitere adimensionale (ale unghiurilor, vitezelor unghiulare și accelerațiilor unghiulare) sunt identice pentru cele două mecanisme, iar funcțiile de transmitere ale deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor liniare sunt proporționale. Astfel, pozițiile unghiulare ale elementelor 2 și 3 sunt aceleași pentru o valoare dată a unghiului φ_1 . Traietoriile descrise de puncte asemenea, aparținând bielei, sunt curbe asemenea. Dacă într-o problemă de sinteză condițiile inițiale sunt formulate în funcție de parametri unghiulari, ele sunt îndeplinite de o infinitate de mecanisme asemenea având rapoartele lungimilor constante

$$\frac{l_2}{l_1} = k_{21}, \quad \frac{l_3}{l_1} = k_{31}, \quad \frac{l_4}{l_1} = k_{41}$$

În această situație necunoscutele problemei sunt k_{21} , k_{31} și k_{41} în loc de l_1, l_2, l_3, l_4 . Se observă că, astfel, numărul de necunoscute se reduce cu o unitate. Practic, se atribuie unuia dintre parametrii l_1, l_2, l_3, l_4 o valoare arbitrară, iar ceilalți se determină prin rezolvarea problemei de sinteză. Implicit, rezultă rapoartele k_{21}, k_{31}, k_{41} care sunt caracteristici pentru întreaga clasă de mecanisme asemenea.

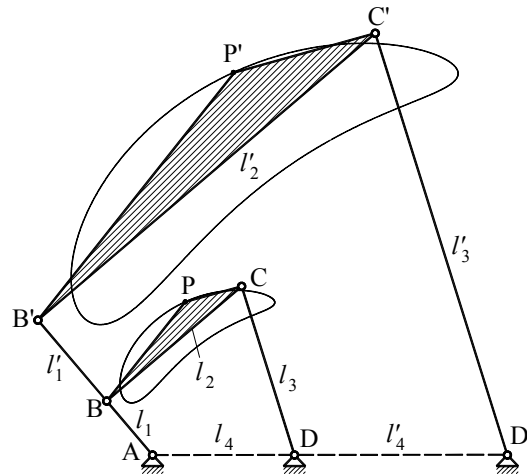


Fig. 2.73

Din multitudinea de probleme de sinteză dimensională se pot grupa câteva, de importanță practică deosebită, care intervin aproape întotdeauna în procesul de proiectare al unui mecanism cu cuple inferioare și care formează **sinteza elementară**. Celelalte probleme de sinteză intervin relativ rar în practica de proiectare și sunt mai dificile, din punct de vedere al rezolvărilor numerice, în raport cu problemele de sinteză elementară. Pornind de la aceste considerente, în cele ce urmează, sinteza elementară este prezentată detaliat, iar alte probleme de sinteză sunt tratate cu titlu introductiv.

2.4.2. Sinteza elementară

2.4.2.1. Problematika sintezei elementare

Sinteza elementară cuprinde patru probleme care vor fi definite și caracterizate în continuare.

■ **Problema rotabilității.** În cadrul acestei probleme se stabilesc condițiile care trebuie satisfăcute de parametri constructivi astfel încât, anumite elemente să poată avea mișcare de rotație completă (**manivele**) sau de oscilație (**balansiere**). Această problemă intervine, în special, la elementele conducătoare, care, pentru a putea fi acționate cu motoare rotative, trebuie să aibă rol de manivele. Condițiile de rotabilitate, pentru un anumit element, se deduc din condițiile de a obține soluții reale în problema pozițiilor pentru toate grupele mecanismului și pentru o rotație completă a elementului respectiv, considerat element conducător. Problema rotabilității este legată de pozițiile critice ale mecanismului care intervin când condițiile de rotabilitate, care sunt niște inegalități, sunt îndeplinite la limită.

■ **Sinteza pentru asigurarea calității transmiterii forțelor.** Așa cum am arătat (par. 2.2.3.3.) calitatea transmiterii forțelor este determinată de limitarea parametrilor de configurație astfel încât să se evite apropierea de configurațiile critice la grupele structurale componente ale mecanismului. La majoritatea mecanismelor plane cu patru elemente parametrul în cauză este unghiul de presiune α (Tab.2.5) care trebuie să satisfacă condiția $\alpha \leq \alpha_a$. Face excepție mecanismul cu culisă oscilantă, la care intervine un parametru cu dimensiune de lungime, l_0 (Tab.2.5) limitat inferior, $l_0 \geq l_{0a}$. Este important de precizat următoarea observație: condițiile care asigură transmiterea favorabilă a forțelor sunt mai restrictive decât condițiile de rotabilitate a elementului conducător. Din această cauză, prin rezolvarea problemei de sinteză în discuție se rezolvă, implicit, și problema rotabilității.

■ **Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale elementului condus.** Problema intervine la mecanismele care au un element condus cu mișcare de oscilație (translație sau rotație) între două poziții extreme. Parametrul de intrare esențial este cursa - distanța (h) sau unghiul (ψ) dintre cele două poziții extreme. Modelul matematic este constituit, de regulă, din două ecuații neliniare.

■ **Sinteza după coeficientul de productivitate.** Problema apare, ca și cea precedentă, la mecanismele cu elemente conduse în mișcare de oscilație, caracterizate printr-o cursă activă și una pasivă. Raportul vitezelor medii în cele două curse ω_{ma} și ω_{mp} sau v_{ma} și v_{mp} se numește coeficient de productivitate k_p ,

$$k_p = \frac{\omega_{ma}}{\omega_{mp}} = \frac{v_{ma}}{v_{mp}} \leq 1^*) \quad (2.147)$$

Vitezele medii sunt diferite deoarece unghiurile parcurse de elementul conducător, în timpul celor două curse, φ_a și φ_p (Fig.2.74) pot fi diferite.

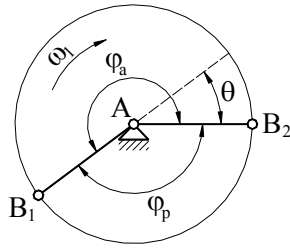


Fig. 2.74

Astfel, viteza medie a cursei active se exprimă cu relația

$$\omega_{ma} = \frac{\psi}{t_a} = \frac{\psi}{\frac{\varphi_a}{\omega_1}} = \frac{\psi \cdot \omega_1}{\varphi_a},$$

în care ψ este cursa unghiulară, t_a - timpul cursei active, iar ω_1 - viteza unghiulară constantă a elementului conducător. În mod similar,

$$\omega_{mp} = \frac{\psi \cdot \omega_1}{\varphi_p}.$$

Introducând aceste expresii în formula coeficientului de productivitate se obține

$$k_p = \frac{\varphi_p}{\varphi_a} = \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta}, \quad (2.148)$$

în care θ (Fig.2.74) este unghiul ascuțit format între direcțiile manivelei conducătoare, când balansierul condus trece prin pozițiile extreme. Din relația (2.148) se calculează θ în funcție de k_p ,

$$\theta = \pi \cdot \frac{1 - k_p}{1 + k_p}. \quad (2.149)$$

Prin operația de sinteză se urmărește obținerea unui mecanism care să aibă valoarea prestabilită cu ajutorul formulei (2.149), pentru unghiul θ . Modelul matematic este format, în general, din două ecuații neliniare, care se scriu în funcție de tipul mecanismului în discuție.

În cele ce urmează se prezintă aplicarea sintezei elementare pentru mecanismele plane uzuale cu 4 elemente: mecanismul patruleter articulată, mecanismul manivelă - piston, mecanismul cu culisă oscilantă și mecanismul cu cilindru oscilant.

*) În unele cărți coeficientul k_p este definit $k_p = \frac{\omega_{mp}}{\omega_{ma}}$

2.4.2.2. Mecanismul patrulater articulat plan

■ Problema rotabilității.

Ne propunem să stabilim condițiile de rotabilitate completă (manivelă) pentru elementul 1 aparținând mecanismului patrulater din Fig.2.75. Dacă presupunem că acest element este conducător, condițiile (2.2) corespunzătoare grupei structurale RRR (2, 3 - BCD) sunt

$$|l_2 - l_3| \leq l_0 \leq l_2 + l_3 \quad (2.150)$$

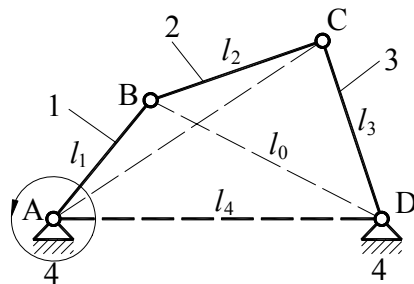


Fig. 2.75

Condițiile (2.150) trebuie respectate pentru orice valoare a lungimii variabile l_0 , la o rotație a elementului 1. Această cerință este satisfăcută, dacă relațiile (2.150) sunt verificate pentru valorile extreme:

$$l_{0\min} = |l_1 - l_4| \text{ și } l_{0\max} = l_1 + l_4,$$

$$|l_1 - l_4| \geq |l_2 - l_3| \quad (2.151)$$

$$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3.$$

Relațiile (2.151) reprezintă **condițiile de rotabilitate completă (manivela)** pentru elementul 1. În mod similar se deduc condițiile de rotabilitate completă pentru elementul 3,

$$|l_3 - l_4| \geq |l_2 - l_1| \quad (2.152)$$

$$l_3 + l_4 \leq l_2 + l_1.$$

Dacă sunt verificate ambele seturi de condiții, (2.151) și (2.152), mecanismul este de tip dublă - manivelă. Dacă este respectat numai un set de condiții, (2.151) sau (2.152), mecanismul este de tip manivelă - balansier, iar dacă nu se respectă nici (2.151), nici (2.152), mecanismul este de tip dublu - balansier.

Dacă, dintre cele patru lungimi, se adoptă două (de exemplu l_1 și l_4) se poate determina un domeniu, în sistemul de coordonate l_2 l_3 , în care condițiile (2.151) sunt respectate (Fig.2.76).

Condițiile de rotabilitate completă se pot exprima și în altă formulare, mai sugestivă și mai practică, obținută prin analiza celor două moduri în care se pot scrie expresiile $|l_1 - l_4|$ și $|l_2 - l_3|$. Din această analiză, prezentată în Tab.2.6 rezultă următoarea formulare a condițiilor de rotabilitate pentru elementul 1

1) Elementul cel mai scurt trebuie să fie elementul 1 sau baza 4

$$l_1 = l_{\min} \text{ sau } l_4 = l_{\min}.$$

2) Condiția lui Grashof: suma formată din lungimea minimă și

lungimea maximă trebuie să fie mai mică sau egală decât suma formată din lungimile celorlate două elemente. Această condiție se mai poate formula și astfel,

$$l_{\min} + l_{\max} \leq \frac{p}{2},$$

în care p este perimetrul patrulaterului, $p = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$.

Desigur, pentru rotabilitatea elementului 3, condiția 1) se modifică astfel: $l_3 = l_{\min}$ sau $l_4 = l_{\min}$, iar condiția 2) (Grashof) rămâne neschimbată.

Din condiția 1) rezultă că, atunci când se respectă

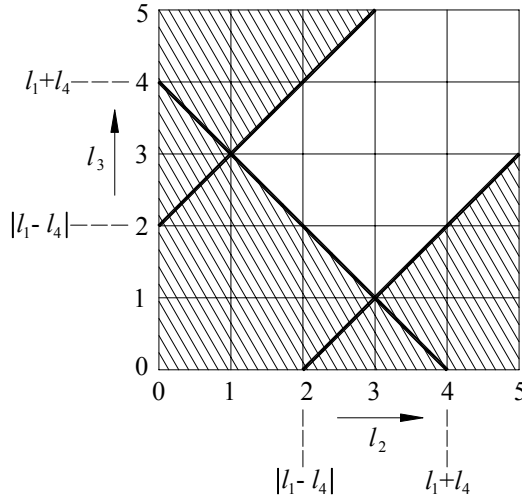


Fig. 2.76

$l_1 = 1, l_4 = 3$

condiția lui Grashof, tipul mecanismului patrulater este determinat de poziția elementului cel mai scurt.

Astfel, dacă elementul cel mai scurt este alăturat bazei ($l_1 = l_{\min}$) mecanismul este de tip **manivelă - balansier** (Fig.2.77.a), deoarece condiția 1) este respectată numai de elementul 1. Dacă elementul cel mai scurt este baza ($l_4 = l_{\min}$), mecanismul este de tip **dublă - manivelă** (Fig.2.77.b), deoarece condiția 1) este respectată de ambele elemente, 1 și 3. În fine, dacă elementul cel mai scurt este opus bazei ($l_2 = l_{\min}$), mecanismul este de tip dublu - balansier (Fig.2.77.c) pentru că nu este respectată condiția 1), nici de elementul 1, nici de elementul 3.

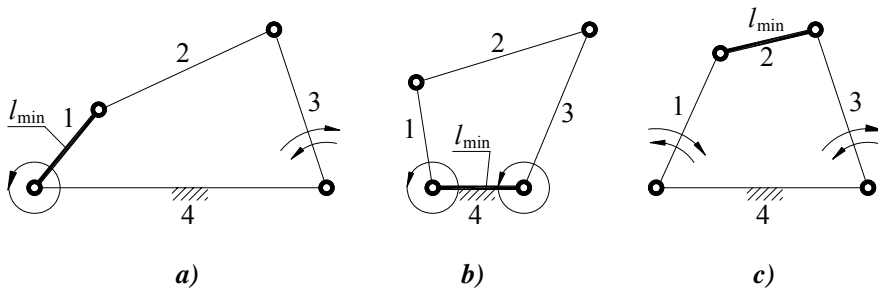


Fig. 2.77

<i>Tabelul 2.6</i>		Ipoteza 1	Ipoteza 2	Ipoteza 3	Ipoteza 4
Relațiile de ipoteză	(1)	$l_1 \leq l_4$	$l_1 \leq l_4$	$l_4 \leq l_1$	$l_4 \leq l_1$
	(2)	$l_2 \leq l_3$	$l_3 \leq l_2$	$l_2 \leq l_3$	$l_3 \leq l_2$
Condițiile (2.151)	(3)	$l_4 - l_1 \geq l_3 - l_2$	$l_4 - l_1 \geq l_3 - l_2$	$l_1 - l_4 \geq l_3 - l_2$	$l_1 - l_4 \geq l_2 - l_3$
	(4)	$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$
Din (3) și (4) \Rightarrow	(5)	$l_1 \leq l_2$	$l_1 \leq l_3$	$l_4 \leq l_2$	$l_4 \leq l_3$
Din (1), (2) și (5) \Rightarrow	(6)	$l_1 = l_{\min}$ sau $l_4 = l_{\max}$	$l_1 = l_{\min}$ sau $l_4 = l_{\max}$	$l_4 = l_{\min}$ sau $l_1 = l_{\max}$	$l_4 = l_{\min}$ sau $l_1 = l_{\max}$
Relația de ipoteză	(7)	$l_3 = l_{\max}$	$l_2 = l_{\max}$	$l_3 = l_{\max}$	$l_2 = l_{\max}$
Relațiile (6) și (7) verifică (4)	(4)	$l_3 - l_1 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_4 - l_2$	$l_2 - l_1 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_4 - l_3$	$l_3 - l_4 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_1 - l_2$	$l_2 - l_4 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_1 - l_3$
Condiția (3) care trebuie verificată	(3)	$l_1 + l_3 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_4 + l_2$	$l_1 + l_2 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_3 + l_4$	$l_4 + l_3 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_1 + l_2$	$l_4 + l_2 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_1 + l_3$
Relația de ipoteză	(8)	$l_4 = l_{\max}$	$l_4 = l_{\max}$	$l_1 = l_{\max}$	$l_1 = l_{\max}$
Relațiile (6) și (8) verifică (3)	(3)	$l_4 - l_1 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_3 - l_2$	$l_4 - l_1 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_2 - l_3$	$l_1 - l_4 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_3 - l_2$	$l_1 - l_4 = l_{\max} - l_{\min} \geq l_2 - l_3$
Condiția (4) care trebuie verificată	(4)	$l_1 + l_4 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_2 + l_3$	$l_4 + l_1 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_2 + l_3$	$l_4 + l_1 = l_{\min} + l_{\max} \leq l_2 + l_3$

Problema rotabilității este legată de problema pozițiilor critice. Acestea intervin atunci când grupa structurală RRR (2, 3 - BCD) înregistrează configurații critice, adică atunci când se verifică cel puțin una dintre egalitățile

$$l_0 = |l_2 - l_3|$$

$$l_0 = l_2 + l_3,$$

iar punctele B, C, D sunt coliniare. Pozițiile critice se pot grupa în două categorii în funcție de comportarea funcțională a mecanismului.

1) Poziții critice care pot fi traversate fără ca elementul conducător să-și schimbe sensul de rotație. Aceste poziții se înregistrează când condițiile (2.151), scrise pentru elementul conducător, sunt respectate, iar cel puțin una dintre ele este verificată la limită, cu semnul egal. În acest caz condiția lui Grashof se verifică, de asemenea, cu semnul egal, iar punctele din diagrama $l_3(l_2)$ (Fig.2.76) se găsesc la limita domeniului admisibil. La trecerea printr-o astfel de poziție critică se produce o nedeterminare - grupa BCD poate ocupa oricare dintre cele două poziții posibile. Pentru exemplificare, se consideră mecanismul din Fig.2.78 având următoarele relații între lungimile elementelor

$$|l_1 - l_4| > |l_2 - l_3|$$

$$l_1 + l_4 = l_2 + l_3$$

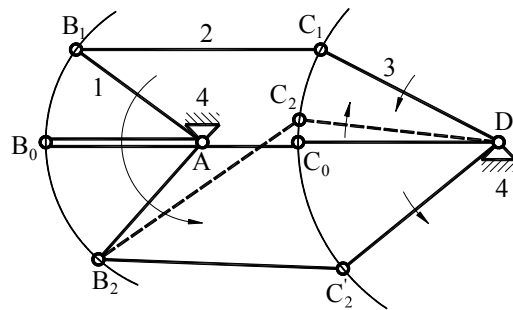


Fig. 2.78

Ca urmare se înregistrează poziția critică AB_0C_0D . Să presupunem că elementul conducător 1 se rotește în sens trigonometric, astfel încât, mecanismul se deplasează din poziția AB_1C_1D , trecând prin poziția critică AB_0C_0D , până când elementul 1 ajunge în poziția AB_2 .

Imediat ce depășește poziția critică, grupa RRR poate ocupa fie poziția B_2C_2D , fie $B_2C'_2D$. În felul acesta, odată cu trecerea prin poziția critică, sensul de rotație al elementului 3 se poate păstra (soluția $B_2C'_2D$) sau se poate schimba (soluția B_2C_2D). În aplicațiile practice interesează, de obicei, păstrarea sensului de rotație pentru elementul condus. Pentru a determina o astfel de funcționare, se pot folosi mai multe procedee. Astfel, dacă elementul 3 are un moment de inerție corespunzător, el își păstrează sensul de rotație datorită efectului inerțial. Un alt

procedeu constă în utilizarea unor limitatori de dirijare a mișcării (Fig.2.79). În cazul mecanismului paralelogram, care are $l_1 = l_3$ și $l_2 = l_4$, rezultând

$$|l_1 - l_4| = |l_2 - l_3|$$

$$l_1 + l_4 = l_2 + l_3,$$

se folosește cuplarea a două mecanisme (Fig.2.80) astfel încât, acestea să treacă prin poziții critice în momente diferite.

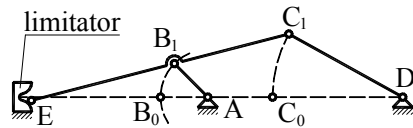


Fig. 2.79

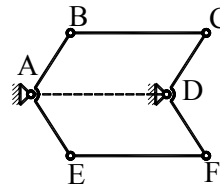


Fig. 2.80

2) Poziții critice care conduc la blocarea mecanismului dacă elementul conducător tinde să-și păstreze sensul de rotație când ajunge în aceste poziții. Ele se înregistrează când condițiile (2.151), scrise pentru elementul conducător, nu sunt respectate (una sau ambele). În acest caz elementul conducător este balansier, iar pozițiile critice limitează mișcarea sa de rotație, așa cum se observă la mecanismul din Fig.2.81.

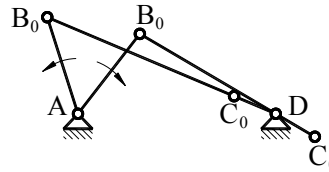


Fig. 2.81

■ Sinteza după unghiul de presiune

Unghiul de presiune al unui mecanism patrulater (Fig.2.82) cu elementul 1 conducător se definește (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca fiind unghiul ascuțit format între elementul 2 (biela BC) și perpendiculara pe elementul 3 (CD) și se exprimă prin formula

$$\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BCD \right|. \quad (2.153)$$

Unghiul $\sphericalangle BCD$ se calculează din triunghiul BCD,

$$\sphericalangle BCD = \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_0^2}{2l_2l_3}, \quad (2.154)$$

iar l_0 se determină din triunghiul ABC,

$$l_0 = l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \varphi_1. \quad (2.155)$$

Condiția care asigură calitatea transmiterii forțelor, $\alpha \leq \alpha_a$, se exprimă, ținând seama de (2.153), sub forma

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \sphericalangle BCD \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_a. \quad (2.156)$$

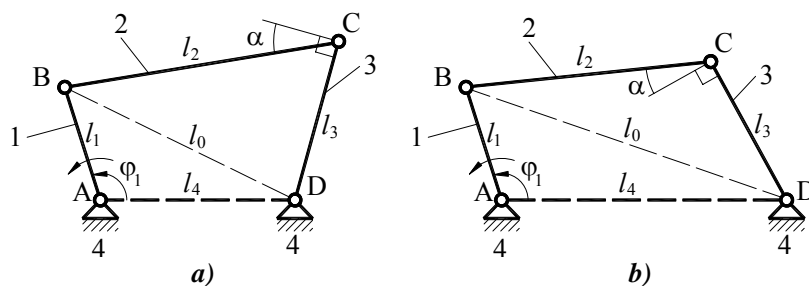


Fig. 2.82

Condițiile (2.156) sunt respectate pentru toate pozițiile mecanismului atunci când unghiul φ_1 variază într-un interval dat, dacă sunt verificate pentru valorile extreme $\sphericalangle BCD_{\min}$ și $\sphericalangle BCD_{\max}$,

$$\sphericalangle BCD_{\min} \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_a$$

$$\sphericalangle BCD_{\max} \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_a.$$

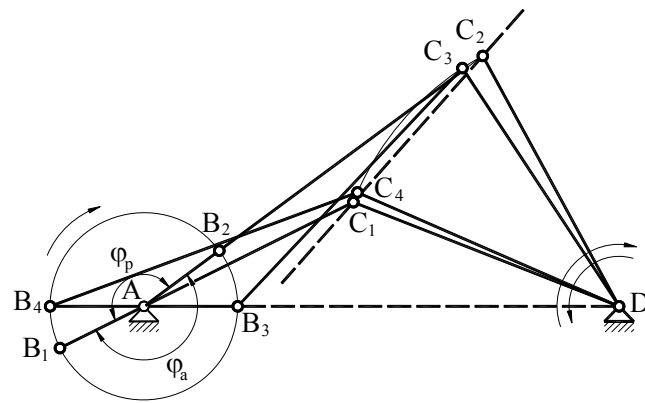
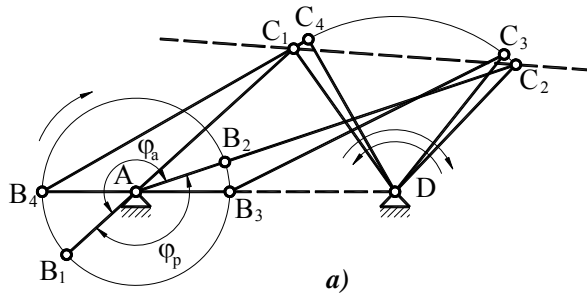
În ipoteza cea mai uzuală, când mecanismul este de tip manivelă - balansier, pentru studiul problemei, interesează patru poziții caracteristice ale mecanismului (reprezentate în Fig.2.83), care conduc la patru valori ale unghiului de presiune $\sphericalangle BCD$,

$$\sphericalangle B_1C_1D = \arccos \frac{(l_2 - l_1)^2 + l_3^2 - l_4^2}{2(l_2 - l_1) \cdot l_3}$$

$$\sphericalangle B_2C_2D = \arccos \frac{(l_1 + l_2)^2 + l_3^2 - l_4^2}{2(l_1 + l_2) \cdot l_3}$$

$$\sphericalangle B_3C_3D = \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_4 - l_1)^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3}$$

$$\sphericalangle B_4C_4D = \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 + l_4)^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3}.$$



b)
Fig. 2.83

Dacă intervalul în care trebuie respectată condiția $\alpha \leq \alpha_a$, este o rotație completă a elementului conducător, valorile extreme ale unghiului $\sphericalangle BCD$ sunt $\sphericalangle BCD_{\min} = \sphericalangle B_3C_3D$ și $\sphericalangle BCD_{\max} = \sphericalangle B_4C_4D$, iar condițiile de sinteză sunt

$$\begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_a \\ \sphericalangle B_4C_4D \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_a \end{cases} \quad (2.157)$$

Dacă interesează respectarea condiției $\alpha \leq \alpha_a$ numai pentru cursa activă, sau dacă, pentru cele două curse se impun valori diferite pentru α_a (α_{aa} și α_{ap}), trebuie să facem distincție între două tipuri de patrulare

(Fig.2.83). În cazul mecanismului din Fig.2.83.a punctele fixe A și D sunt de aceeași parte a dreptei C_1C_2 , iar cursa activă a balansierului ($\varphi_1 \in [\varphi_a]$) se execută în același sens cu rotația manivelei. La acest mecanism poziția AB_4C_4D este în cursa activă, iar AB_3C_3D în cursa pasivă. Ca urmare, valorile externe ale unghiului $\sphericalangle BCD$, pentru cursa activă sunt $\sphericalangle B_2C_2D$ și $\sphericalangle B_4C_4D$, iar pentru cursa pasivă $\sphericalangle B_3C_3D$ și $\sphericalangle B_1C_1D$. Condițiile de sinteză, scrise separat pentru cele două curse, se formulează astfel:

$$\begin{cases} \sphericalangle B_2C_2D \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_{aa} \\ \sphericalangle B_4C_4D \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_{aa} \end{cases} \quad \begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_{ap} \\ \sphericalangle B_1C_1D \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_{ap} \end{cases}$$

În cazul mecanismului din Fig.2.83.b dreapta C_1C_2 trece printre punctele fixe A și D, iar cursa activă ($\varphi_1 \in [\varphi_a]$) se execută în sens opus în raport cu rotația manivelei. La acest mecanism poziția AB_3C_3D este în cursa activă, iar AB_4C_4D în cursa pasivă. Condițiile de sinteză, pentru cele două curse sunt:

$$\begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_{aa} \\ \sphericalangle B_1C_1D \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_{aa} \end{cases} \quad \begin{cases} \sphericalangle B_2C_2D \geq \frac{\pi}{2} - \alpha_{ap} \\ \sphericalangle B_4C_4D \leq \frac{\pi}{2} + \alpha_{ap} \end{cases}$$

Condițiile (2.157) se pot scrie, ținând seama de expresiile unghiurilor $\sphericalangle B_3C_3D$ și $\sphericalangle B_4C_4D$, în felul următor:

$$\begin{aligned} |l_1 - l_4| &\geq \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \sin \alpha_a} \\ l_1 + l_4 &\leq \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \sin \alpha_a} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Ca și la problema rotabilității, se poate determina un domeniu, în planul de coordonate (l_2, l_3) , în care relațiile (2.158) sunt îndeplinite (Fig.2.84), admitând că l_1 și l_4 se cunosc. Punctele situate pe conturul domeniului corespund unor mecanisme la care unghiul de presiune maxim este $\alpha_{\max} = \alpha_a$. Comparând condițiile (2.158) și (2.151) se observă că primele (2.158) sunt mai restrictive. Deci, dacă sunt respectate condițiile (2.158) sunt respectate și condițiile (2.151). Această concluzie reiese și din Fig.2.84 unde sunt trasate domeniile pentru ambele seturi de condiții. Se observă că domeniul corespunzător condițiilor (2.158) este inclus în cel corespunzător condițiilor (2.151). Aceasta înseamnă că sinteza după unghiul de presiune rezolvă, implicit, și problema rotabilității elementului conducător.

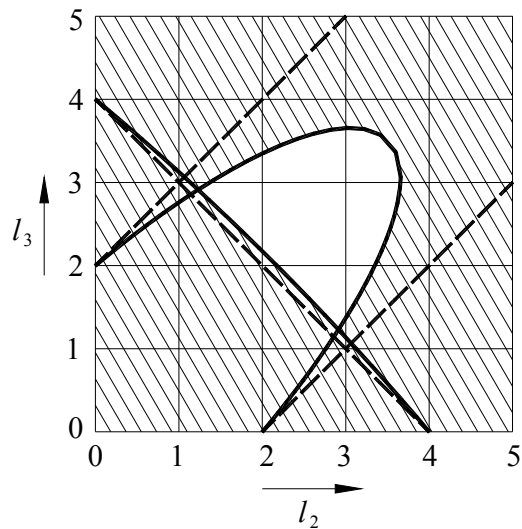


Fig. 2.84

$$l_1 = 1, l_4 = 3, \alpha_a = 60^\circ$$

■ **Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale balansierului**

Pozițiile extreme ale balansierului 3, aparținând unui mecanism de tip manivelă - balansier (Fig.2.75), se înregistrează când unghiul $\sphericalangle ADC$ și segmentul AC trec prin valori extreme. În Fig.2.85 sunt reprezentate pozițiile mecanismului, AB_1C_1D și AB_2C_2D corespunzătoare pozițiilor extreme ale balansierului, în care $AC_1 = AC_{\min} = l_2 - l_1$ și $AC_2 = AC_{\max} = l_2 + l_1$. Evident, în aceste poziții manivela 1 și biela 2 sunt coliniare - suprapuse (AB_1C_1) sau în prelungire (AB_2C_2).

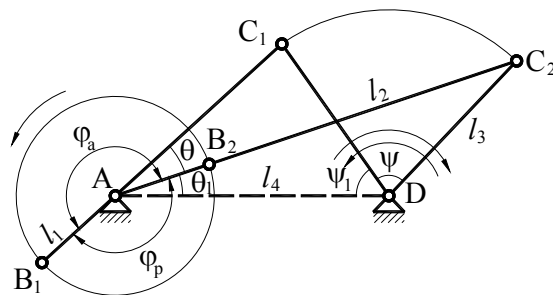


Fig. 2.85

Aplicând teorma lui Pitagora generalizată în triunghiurile AC_1D și AC_2D , se obțin condițiile de sinteză

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= (l_2 - l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4 \cos \psi_1 \\ AC_2^2 &= (l_2 + l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4 \cos(\psi_1 + \psi). \end{aligned} \quad (2.159)$$

În aceste relații ψ este cursa unghiulară a balansierului, care reprezintă parametrul de intrare al problemei. În sistemul de ecuații (2.159) intervin 5 parametri (l_1, l_2, l_3, l_4 și ψ_1), dintre care trei se adoptă, iar ceilalți doi se calculează. Un caz întâlnit frecvent este acela în care necunoscutele sunt l_1 și l_2 , parametrii l_3, l_4 și ψ_1 fiind cunoscuți. Din (2.159) rezultă imediat:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{AC_2 - AC_1}{2} \\ l_2 &= \frac{AC_1 + AC_2}{2}, \end{aligned}$$

în care AC_1 și AC_2 au expresiile

$$\begin{aligned} AC_1 &= \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4 \cos \psi_1} \\ AC_2 &= \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4 \cos(\psi_1 + \psi)}. \end{aligned}$$

■ Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate

După cum am arătat (par. 2.4.2.1.) coeficientul de productivitate k_p este în corespondență cu unghiul ascuțit format între AB_1 și AB_2 (Fig.2.85) notat θ ,

$$\theta = \pi \frac{1 - k_p}{1 + k_p}.$$

Se observă că, la mecanismul patrulater, $\theta = \sphericalangle C_1AC_2$. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile AC_1D și AC_2D se obțin condițiile de sinteză,

$$\begin{aligned} l_3^2 &= (l_2 - l_1)^2 + l_4^2 - 2(l_2 - l_1) \cdot l_4 \cos(\theta + \theta_1) \\ l_3^2 &= (l_1 + l_2)^2 + l_4^2 - 2(l_1 + l_2) \cdot l_4 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Având în vedere că θ este cunoscut, avem două ecuații în care intervin 5 parametri (l_1, l_2, l_3, l_4 și θ_1), astfel încât, trei dintre aceștia trebuie adoptați, iar ceilalți doi se calculează. Această problemă nu intervine, însă,

niciodată separat ci împreună cu celelalte probleme de sinteză elementară așa cum se prezintă în continuare.

■ Sinteza elementară combinată

Sinteza combinată reunește cele trei probleme de sinteză prezentate anterior: în funcție de unghiul de presiune, în funcție de pozițiile extreme ale balansierului și în funcție de coeficientul de productivitate. Așa cum am arătat, problema rotabilității elementului conducător este rezolvată implicit prin sinteza după unghiul de presiune.

Condițiile sintezei combinate sunt formate din 4 ecuații, (2.159) și (2.160), și două inecuații (2.158) în care figurează 6 parametri necunoscuți: l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , ψ_1 și θ_1 .

Rezolvarea problemei se poate face strict numeric sau prin procedee interactive, utilizând facilitățile grafice ale programelor utilitare. Pentru aplicarea procedurii numerice inecuațiile (2.158) se ridică la pătrat și, apoi, toate relațiile (2.158), (2.159) și (2.160) se împart la pătratul uneia dintre lungimile l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , de exemplu l_3 . În felul acesta numărul de necunoscute

se reduce la 5: $l_1^* = \frac{l_1}{l_3}$, $l_2^* = \frac{l_2}{l_3}$, $l_4^* = \frac{l_4}{l_3}$, ψ_1 și θ_1 . Se apelează, apoi, la o

strategie de căutare atribuind unui parametru un șir de valori, într-un domeniu determinat. Este preferabil să se aleagă parametrul $\psi_1 = \left[0, \pi - \frac{\psi}{2}\right]$. Pentru

fiecare valoare a lui ψ_1 se rezolvă numeric sistemul (2.159), (2.160), determinând toți parametri necunoscuți și se testează condițiile (2.158). Procesul se oprește când aceste condiții sunt verificate. Problema poate fi interpretată și ca una de optimizare. Restricțiile sunt egalitățile (2.159), (2.160) iar funcția obiectiv este valoarea maximă a unghiului de presiune $\alpha_{\max}(l_1^*, l_2^*, l_4^*)$, care trebuie minimizată. Funcția α_{\max} are expresia

$$\alpha_{\max} = \max \left(\left| \frac{\pi}{2} - \angle B_3 C_3 D \right|, \left| \frac{\pi}{2} - \angle B_4 C_4 D \right| \right) \quad (2.161)$$

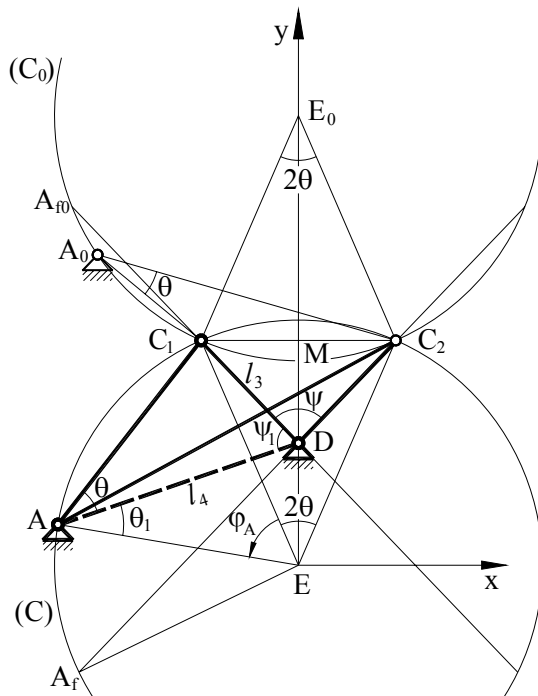


Fig. 2.86

În continuare se prezintă un procedeu fundamentat pe transpunerea analitică a unei construcții grafice (Fig.2.86). Se reprezintă pozițiile extreme ale elementului 3, DC_1 și DC_2 , cu unghiul $\sphericalangle C_1DC_2 = \psi$, adoptând pentru l_3 o valoare arbitrară. Se construiesc, apoi, triunghiurile isoscele EC_1C_2 și $E_0C_1C_2$, de o parte și de cealaltă a dreptei C_1C_2 , cu unghiurile din E și din E_0 egale cu 2θ . Se trasează cercurile cu centrele în E și E_0 , trecând prin C_1 și C_2 , notate (C) și (C_0) . Dacă centrul de rotație al manivelei se adoptă pe cercul (C), într-un punct arbitrar A, unghiul $\sphericalangle C_1AC_2$ rezultă egal cu θ . Prin adoptarea punctului A, se determină, implicit, $l_4 = AD$ și $\psi_1 = \sphericalangle C_1AD$. Cunoscând, prin determinare grafică, segmentele AC_1 și AC_2 , se calculează l_1 și l_2 în modul arătat la sinteza după pozițiile extreme ale balansierului. Mecanismul patrulater este, astfel, complet determinat și se poate calcula unghiul de presiune maxim, α_{\max} (2.161). Dacă se verifică relația $\alpha_{\max} \leq \alpha_a$, mecanismul satisface toate condițiile de sinteză, iar dacă nu se verifică, se testează altă poziție pentru punctul A. Trebuie remarcat că punctul A se poate adopta numai pe arcul $\widehat{C_1A_f}$, adică în afara domeniului unghiular format de dreptele DC_1 și DC_2 , între care se măsoară unghiul ψ . Dacă nu se respectă această regulă se înregistrează situația descrisă în Fig.2.87 unde se vede că balansierul mecanismului obținut prin sinteză nu oscilează cu unghiul prescriș $\psi = \sphericalangle C_1DC_2$ ci cu unghiul $\psi' = \sphericalangle C_1DC'_2$. Se observă că mecanismele patrulater obținute cu punctul A pe cercul (C) au ambele puncte fixe situate în aceeași parte a dreptei C_1C_2 . În mod similar, centrul de rotație al manivelei se poate adopta într-un punct A_0 , pe arcul $\widehat{C_1A_{f_0}}$ aparținând cercului (C_0) . Sinteza mecanismului se efectuează în același fel ca în cazul punctului A.

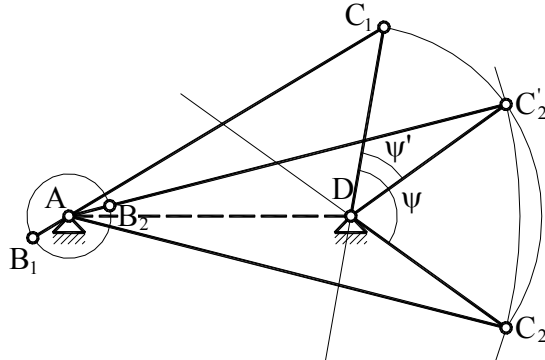


Fig. 2.87

Mecanismul obținut se caracterizează prin aceea că punctele fixe A_0 și D sunt separate de dreapta C_1C_2 . Se poate demonstra că mecanismele cu $A \in (C)$ sunt superioare, din punct de vedere al valorii unghiului de presiune în raport cu mecanismele cu $A_0 \in (C_0)$. Din această cauză, varianta analitică se va dezvolta numai pentru mecanismele

cu centrul de rotație al manivelei situat pe cercul (C) . Considerând o valoare arbitrară pentru l_3 și un punct $A \in (\overline{C_1A_f})$, determinat de unghiul $\varphi_A = \sphericalangle C_1EA$, se calculează lungimile l_1, l_2, l_4 precum și unghiul de presiune $\alpha_{\max}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Pentru aceasta se adoptă un sistem de coordonate Exy (Fig.2.86) și se calculează, succesiv, următorii parametri:

- $r = AE = \frac{l_3 \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \theta}$
- $x_{C_1} = -l_3 \sin \frac{\psi}{2}; x_{C_2} = l_3 \sin \frac{\psi}{2}$
- $y_{C_1} = y_{C_2} = l_3 \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\text{tg} \theta}$
- $y_D = -l_3 \cos \frac{\psi}{2} + l_3 \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\text{tg} \theta}; x_D = 0$
- $x_A = r \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \varphi_A \right); y_A = r \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \varphi_A \right)$
- $l_4 = \sqrt{x_A^2 + (y_A - y_D)^2}$
- $AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2}; AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}$
- $l_1 = \frac{AC_2 - AC_1}{2}; l_2 = \frac{AC_1 + AC_2}{2}$

$$\bullet \alpha_{\max} = \max \left(\left| \frac{\pi}{2} - \angle B_3 C_3 D \right|, \left| \frac{\pi}{2} - \angle B_4 C_4 D \right| \right)$$

Aplicând repetat procedeul indicat se determină, prin valori discrete, funcțiile $l_1(\varphi_A)$, $l_2(\varphi_A)$, $l_4(\varphi_A)$, $\alpha_{\max}(\varphi_A)$ care se prezintă ca în Fig.2.88, în care sunt trasate și dreptele $l_3 = \text{ct.}$ și $\alpha_a = \text{ct.}$.

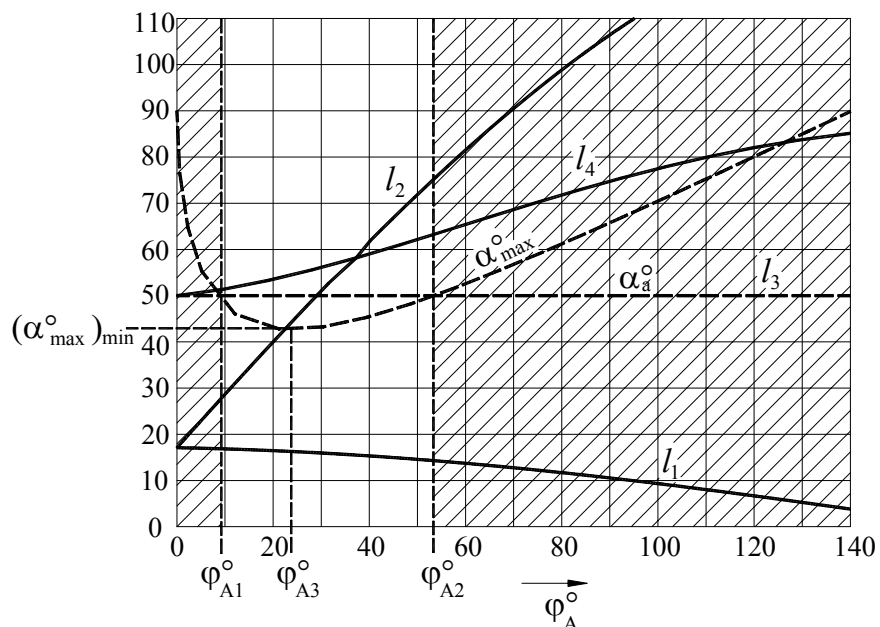


Fig. 2.88

$$l_3 = 50, \alpha_a = 50^\circ, \psi = 40^\circ, k_p = 0,85$$

Din analiza diagramei rezultă că, pentru a avea $\alpha_{\max} \leq \alpha_a$, $\varphi_A \in [\varphi_{A1}, \varphi_{A2}]$. Soluția optimă, după criteriul unghiului de presiune minim, se obține pentru $\varphi_A = \varphi_{A3}$, care conduce la $\alpha_{\max}(\varphi_A) \rightarrow \min$. Desigur, φ_{A1} , φ_{A2} și φ_{A3} se pot calcula prin metode numerice. Adoptând φ_A se calculează l_1 , l_2 și l_4 care, împreună cu l_3 , determină complet mecanismul. Trebuie precizat că toate mecanismele asemenea cu cel determinat au aceleași valori pentru ψ , k_p și α_{\max} , deci satisfac condițiile de sinteză. Prin urmare putem adopta orice mecanism având lungimile proporționale cu cele determinate, așa încât lungimea arbitrară luată inițial pentru l_3 nu influențează soluția constructivă finală.

Procedeul descris nu se poate aplica în cazul particular $k_p = 1$, $\theta = 0$, pentru că intervin singularități (împărțiri prin zero) în procesul de calcul. Deoarece $\theta = 0$, centrul de rotație al manivelei se găsește pe dreapta C_1C_2 (Fig.2.89). Din reprezentarea mecanismului în pozițiile AB_1C_1D și AB_2C_2D (Fig.2.89) rezultă lungimile l_1 , l_2 și l_4 în funcție de l_3 și ψ_1 ,

- $l_1 = \frac{AC_2 - AC_1}{2} = \frac{C_1C_2}{2} = l_3 \sin \frac{\psi}{2}$
- $l_2 = \frac{AC_1 + AC_2}{2} = AM = l_3 \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\psi}{2} + \psi_1 \right)$
- $l_4 = \frac{l_3 \cos \frac{\psi}{2}}{\cos \left(\frac{\psi}{2} + \psi_1 \right)}$

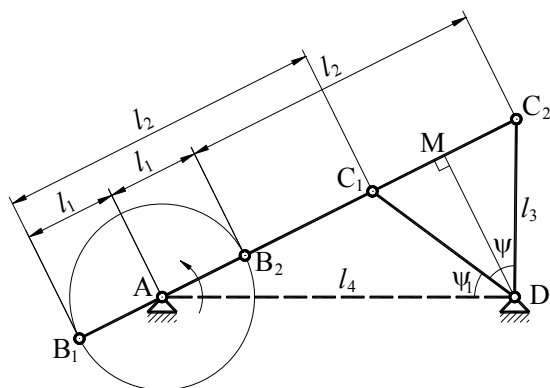


Fig. 2.89

În Fig.2.90 sunt reprezentate diagramele $l_1(\psi_1)$, $l_2(\psi_1)$, $l_4(\psi_1)$, $\alpha_{\max}(\psi_1)$ precum și dreptele $\alpha_a = \text{ct.}$ și $l_3 = \text{ct.}$, din care se poate adopta convenabil ψ_1 , care, la rândul său, determină complet mecanismul.

Parametrii de intrare caracteristici unei probleme de sinteză elementară complexă, ψ , k_p și α_a , nu sunt întotdeauna compatibili. Din diagrama reprezentată în Fig.2.88 rezultă că pentru ψ și $k_p(\theta)$ date, se obține o mulțime de mecanisme având $\alpha_{\max} \geq (\alpha_{\max})_{\min}$. Pentru ca problema să aibă soluții trebuie respectată condiția $\alpha_a \geq (\alpha_{\max})_{\min}$. Pentru a permite formularea corectă a problemei de sinteză, în Fig.2.91 se indică valorile pentru $(\alpha_{\max})_{\min}$ în funcție de ψ și k_p .

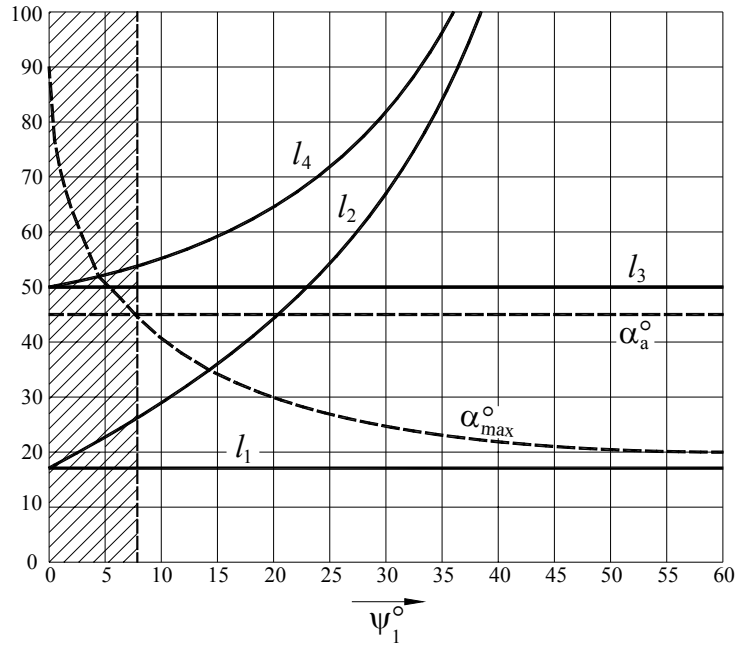


Fig. 2.90

$l_3 = 50, \alpha_a = 45^\circ, \psi = 40^\circ, k_p = 1$

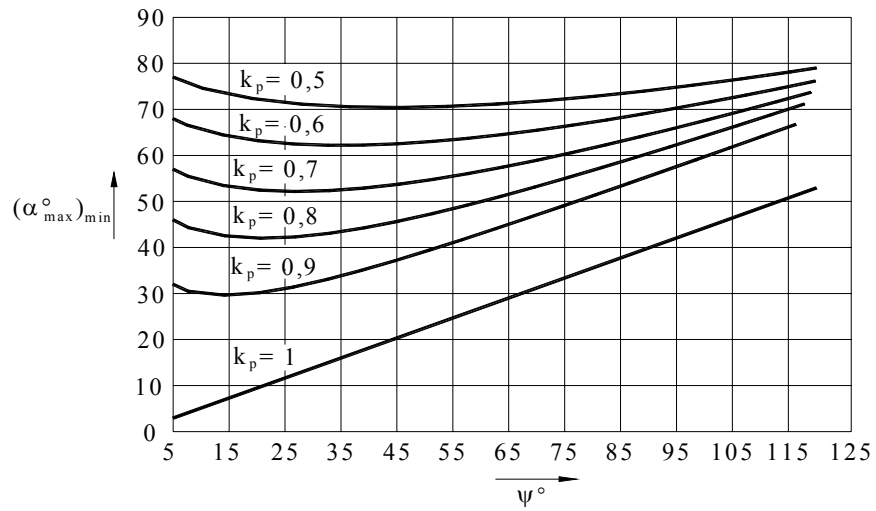


Fig. 2.91

2.4.2.3. Mecanismul manivelă - piston

■ Problema rotabilității

Condiția de rotabilitate pentru elementul conducător 1 (Fig.2.92) se stabilește aplicând condiția (2.5) în cazul grupeii RRT (2, 3 - BC)

$$l_2 \geq l_0.$$

La o rotație completă a elementului 1, $l_{0\max} = l_1 + l_4$ ceea ce conduce la condiția

$$l_1 + l_4 \leq l_2. \quad (2.162)$$

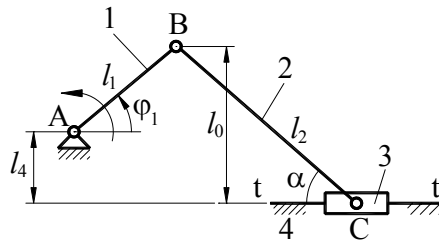


Fig. 2.92

Dacă mecanismul are $l_1 + l_4 = l_2$, se înregistrează o poziție critică ($BC \perp tt$).

Mecanismul manivelă - piston utilizat în construcția motoarelor cu ardere internă, când pistonul este element conducător, are două poziții moarte (critice) când manivela și biela sunt coliniare (grupa RRR - 1, 2 - ABC). Trecerea prin aceste

poziții fără schimbarea sensului de rotație al manivelei este determinată de efectul inerțial și de faptul că motorul are mai multe mecanisme paralele (cilindri) care trec prin pozițiile moarte în momente diferite.

■ Sinteza după unghiul de presiune

Unghiul de presiune al mecanismului manivelă - piston se definește (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca fiind unghiul format între biela BC și axa de translație tt (Fig.2.92) și are expresia

$$\sin \alpha = \frac{l_0}{l_2} = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_4}{l_2},$$

iar valoarea maximă, α_{\max} , este

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{l_1 + l_4}{l_2}. \quad (2.163)$$

Condiția $\alpha \leq \alpha_a$, care se asigură când $\alpha_{\max} \leq \alpha_a$, se scrie

$$l_1 + l_4 \leq l_2 \sin \alpha_a. \quad (2.164)$$

Condiția (2.164) este mai restrictivă decât condiția (2.162) ceea ce înseamnă că sinteza în funcție de unghiul de presiune asigură și rotabilitatea elementului conducător, așa cum se întâmplă și la mecanismul patruleter.

■ Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale patinei

Pozițiile extreme ale patinei se înregistrează când distanța AC trece prin valori extreme $AC_1 = AC_{\min} = l_2 - l_1$ și $AC_2 = AC_{\max} = l_1 + l_2$. Desigur, în aceste poziții manivela și biela sunt coliniare (Fig.2.93). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice AC_1D și AC_2D se obțin condițiile de sinteză

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= (l_2 - l_1)^2 = l_4^2 + h_1^2 \\ AC_2^2 &= (l_1 + l_2)^2 = l_4^2 + (h + h_1)^2. \end{aligned} \quad (2.165)$$

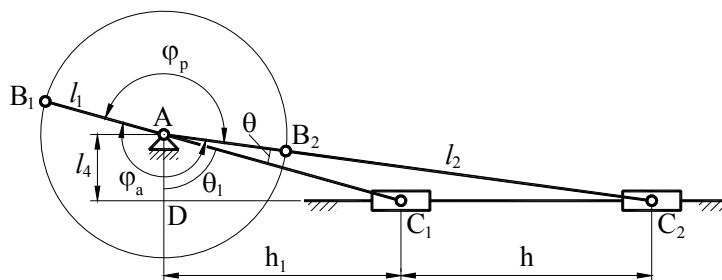


Fig. 2.93

În aceste ecuații h este cursa patinei și constituie parametrul de intrare al problemei, iar l_1 , l_2 , l_4 și h_1 sunt necunoscute. Desigur, pentru rezolvare, doi dintre cei 4 parametri se adoptă, iar ceilalți doi se calculează. De obicei l_4 și h_1 se adoptă, iar l_1 și l_2 se calculează cu ușurință din (2.165).

■ Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate

Ca și la mecanismul patruleter, unghiul $\theta(k_p) = \sphericalangle C_1AC_2$. Condițiile de sinteză rezultă din triunghiurile dreptunghice AC_1D și AC_2D ,

$$\begin{aligned} l_4 &= (l_2 - l_1) \cos \theta_1 \\ l_4 &= (l_1 + l_2) \cos(\theta + \theta_1). \end{aligned} \quad (2.166)$$

În sistemul (2.166) θ este parametrul de intrare, rezultând patru parametri necunoscuți (l_1, l_2, l_4 și θ_1), astfel că, pentru rezolvare, doi parametri se adoptă. Această problemă intervine, practic, întotdeauna în combinație cu celelalte probleme de sinteză elementară.

■ Sinteza elementară combinată

Ca și la mecanismul patrulater, sinteza combinată reunește cele trei probleme precedente. Modelul matematic este constituit din ecuațiile (2.165) și (2.166) și din inecuația (2.164), în care intervin parametrii de intrare $h, \theta(k_p)$ și α_a , iar parametrii care trebuie determinați sunt l_1, l_2, l_4, h_1 și θ_1 . Printr-o strategie de căutare se atribuie unui parametru (de exemplu h_1) un șir de valori într-un domeniu adoptat convenabil. Pentru fiecare valoare a lui h_1 se rezolvă numeric sistemul (2.165), (2.166) și se verifică, apoi, condiția (2.164). Desigur, problema poate fi formulată ca una de optimizare în care funcția obiectiv este $\alpha_{\max}(l_1, l_2, l_4)$ (2.163), iar restricțiile sunt condițiile (2.165) și (2.166). Trebuie menționat că la modificarea parametrului de intrare h (păstrând $k_p(\theta)$ constant)

soluțiile pentru l_1, l_2, l_4 și h_1 se modifică proporțional cu raportul $\frac{h}{h'}$ în care h și h' reprezintă valoarea inițială și cea modificată a cursei. Aceasta înseamnă

că soluțiile obținute pentru un h arbitrar pot fi adoptate cu ușurință pentru orice valoare a cursei.

În continuare se prezintă un procedeu de rezolvare grafic și transpunerea sa analitică. Se trasează axa de translație tt și se pune în evidență segmentul $C_1C_2 = h$ (Fig.2.94). Se construiește, apoi, triunghiul isoscel EC_1C_2 cu unghiul $\sphericalangle C_1EC_2 = 2\theta$. Cu centrul în E , se trasează un cerc care

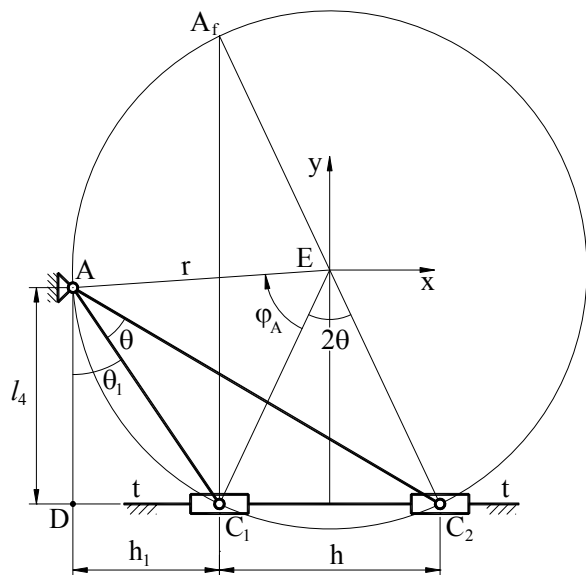


Fig. 2.94

trece prin C_1 și C_2 . Centrul de rotație al manivelei, A, se adoptă pe acest cerc, deoarece, în acest caz, $\sphericalangle C_1AC_2 = \theta$. Lungimea $l_4 = AD$ rezultă implicit, iar l_1 și l_2 se calculează în modul arătat la sinteza după pozițiile extreme ale patinei, în funcție de AC_1 și AC_2 evaluate grafic. Pentru determinările analitice se consideră sistemul de coordonate Exy și se adoptă variabila independentă $\varphi_A = \sphericalangle C_1EA$. Se calculează, succesiv, următorii parametri:

- $r = AE = \frac{h}{2 \sin \theta}$
- $x_{C_1} = -\frac{h}{2}; x_{C_2} = \frac{h}{2}; y_{C_1} = y_{C_2} = -\frac{h}{2 \operatorname{tg} \theta}$
- $x_A = r \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta - \varphi_A\right); y_A = r \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta - \varphi_A\right)$
- $AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2}; AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}$
- $l_1 = \frac{AC_2 - AC_1}{2}; l_2 = \frac{AC_1 + AC_2}{2}; l_4 = y_A - y_{C_1}$
- $\alpha_{\max} = \arcsin \frac{l_1 + l_4}{l_2}$.

Astfel, se obțin funcțiile $l_1(\varphi_A)$, $l_2(\varphi_A)$, $l_4(\varphi_A)$, $\alpha_{\max}(\varphi_A)$ exprimate prin valori discrete. În Fig.2.95 sunt reprezentate aceste funcții împreună cu dreptele $h = ct$ și $\alpha_a = ct$. Mecanismul se adoptă în domeniul $\varphi_A \in [\varphi_{A_1}, \varphi_{A_2}]$, unde $\alpha_{\max} \leq \alpha_a$, iar pentru optimizarea soluției, $\varphi_A = \varphi_{A_3}$, când $\alpha_{\max} \rightarrow \min$. Valoarea inițială pentru h se poate lua arbitrar, deoarece, așa cum am arătat, la schimbarea acestei valori rezultă mecanisme asemenea, având laturile proporționale cu cele determinate și aceleași valori pentru θ și α_{\max} . De altfel curba $\alpha_{\max}(\varphi_A)$, precum și minimumul acestei curbe $(\alpha_{\max})_{\min}$ sunt determinate numai de valoarea parametrului k_p . În Fig.2.96 este reprezentată funcția $(\alpha_{\max})_{\min}(k_p)$ necesară pentru formularea problemei de sinteză care trebuie să respecte condiția $\alpha_a \geq (\alpha_{\max})_{\min}$.

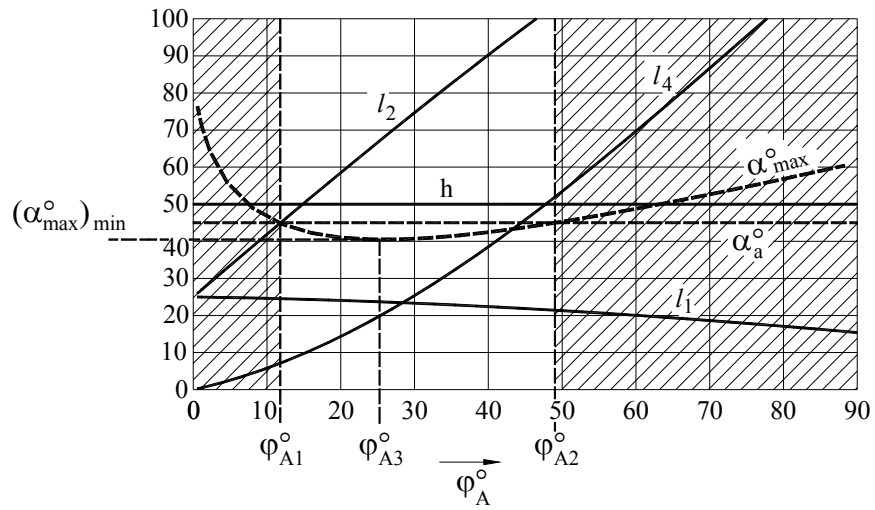


Fig. 2.95
 $h = 50, \alpha = 45^{\circ}, k_p = 0,85$

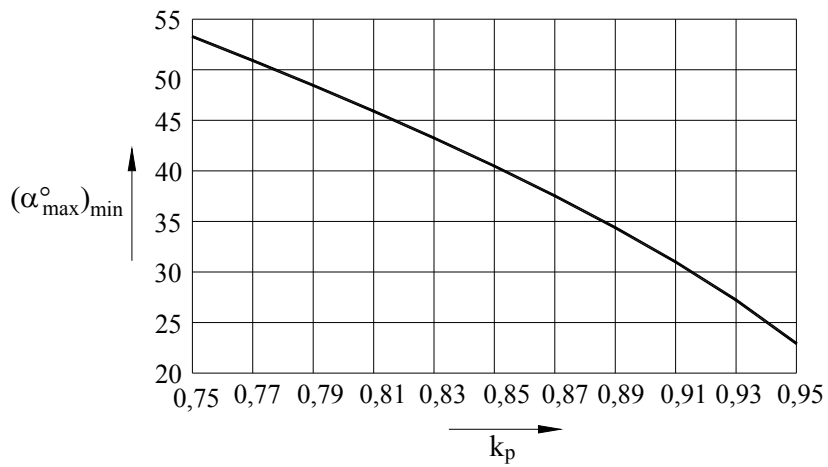


Fig. 2.96

2.4.2.4. Mecanismul cu culisă de rotație

■ Problema rotabilității

Considerând elementul 1 - conducător (Fig.2.97) se scrie condiția (2.7) caracteristică grupei RTR (2, 3 - BC)

$$l_0 \geq 0. \quad (2.167)$$

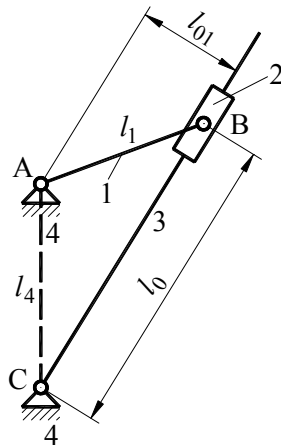


Fig. 2.97

Deoarece $l_0 < 0$ nu are semnificație fizică, condiția (2.167) este satisfăcută pentru toate pozițiile elementului 1 și pentru orice valori ale parametrilor constructivi l_1 și l_4 . Ca urmare elementul 1 este întotdeauna manivelă. Dacă $l_0 = 0$ ($B \equiv C$) se înregistrează o poziție critică la mecanismul cu $l_1 = l_4$.

Se consideră, în mod similar, elementul 3 - conducător și se scrie condiția (2.5) pentru grupa structurală RRT (1, 2 - AB)

$$l_1 \geq |l_{01}|.$$

La o rotație completă a elementului 3, $|l_{01}|_{\max} = l_4$, astfel încât, condiția de rotabilitate a elementului 3 este $l_1 \geq l_4$.

Prin urmare, dacă $l_1 \geq l_4$ mecanismul este de tip dublă - manivelă (cu culisă rotitoare), iar dacă $l_1 < l_4$ mecanismul este de tip manivelă - balansier (cu culisă oscilantă). În aplicațiile practice se folosește, de regulă, mecanismul cu culisă oscilantă cu elementul 1 - conducător, având

$$l_4 > l_1. \quad (2.168)$$

■ Sinteza în funcție de calitatea transmiterii forțelor

Condiția pentru transmiterea forțelor (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) este

$$l_0 \geq l_{0a},$$

iar $l_{0\min} = l_4 - l_1$, de unde rezultă

$$l_4 - l_1 \geq l_{0a}. \quad (2.169)$$

Dacă se împarte relația (2.169) la l_1 se obține

$$\frac{l_4}{l_1} - 1 \geq \frac{l_{0a}}{l_1} = \varepsilon_a, \quad (2.170)$$

în care ε_a este o lungime relativă admisibilă care se poate recomanda indiferent de lungimea absolută l_1 .

■ Sinteza elementară combinată

Pozițiile extreme ale culisei se obțin atunci când unghiul $\sphericalangle ACB$ are valori maxime, simetrice față de dreapta AC. Aceste poziții se înregistrează când manivela AB este perpendiculară pe culisa BC (Fig.2.98). Condiția de sinteză în funcție de pozițiile extreme ale culisei rezultă din triunghiul dreptunghic AB_1C (sau AB_2C)

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{l_1}{l_4}. \quad (2.171)$$

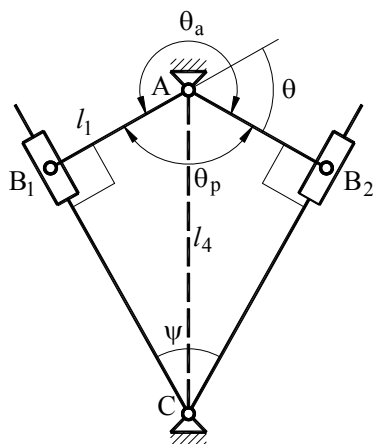


Fig. 2.98

Din Fig.2.98 se observă că unghiurile ψ și θ sunt egale. Aceasta înseamnă că pentru parametrii k_p și ψ nu se pot impune valori independente atunci când se formulează problema de sinteză.

Din relațiile (2.170) și (2.171) se obține

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\psi}{2} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon_a},$$

care arată că ψ și, implicit, k_p , au valori limitate în funcție de valoarea admisibilă ε_a .

2.4.2.5. Mecanismul cu cilindru oscilant

În cazul acestui mecanism, care este acționat printr-o cuplă de translație, problemele rotabilității și a coeficientului de productivitate nu intervin. În consecință, interesează sinteza după unghiul de presiune și cea în funcție de pozițiile extreme ale elementului condus, care sunt, așa cum se va vedea, strâns legate.

Unghiul de presiune se definește (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca unghiul ascuțit format între dreapta AC și perpendiculara pe elementul CD (Fig.2.99) și se calculează cu relația

$$\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACD \right|, \quad (2.172)$$

în care unghiul $\sphericalangle ACD$ rezultă din triunghiul ACD

$$\sphericalangle ACD = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2l_{21}l_3}\right). \quad (2.173)$$

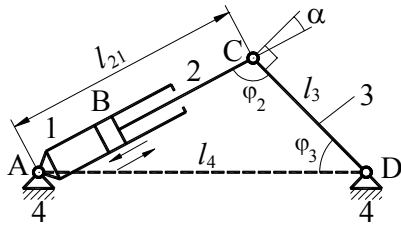


Fig. 2.99

O problemă esențială în proiectarea acestui mecanism este legată de poziționarea unghiului de oscilație a elementului 3 astfel încât, să înregistrăm unghiuri de presiune cât mai mici. Pentru a rezolva această problemă se exprimă unghiul de presiune în funcție de unghiul de poziție al elementului 3, φ_3 . Din triunghiul ACD se obține

$$l_{21} = \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4 \cos \varphi_3}, \quad (2.174)$$

care se poate introduce în formula (2.173). În felul acesta se obține funcția $\alpha = f(\varphi_3)$ având graficul reprezentat în Fig.2.100. Punctul φ_{30} , în care $\alpha = 0$, corespunde poziției în care $AC \perp CD$. Desigur, intervalul util al acestei diagrame, având mărimea egală cu cursa unghiulară ψ , este definit de unghiurile φ_{31} și φ_{32} care determină pozițiile extreme ale elementului 3. Valoarea maximă a unghiului de presiune, în acest interval, este una dintre valorile α_1 sau α_2 ,

$$\alpha_{\max} = \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Valoarea minimă a unghiului α_{\max} în intervalul $\varphi_{31} \in [0, \pi - \psi]$, $(\alpha_{\max})_{\min}$ se obține când $\alpha_1 = \alpha_2$ (Fig.2.101). Într-adevăr, pentru orice altă poziție a intervalului $[\varphi_{31}, \varphi_{32}]$, α_1 sau α_2 sunt mai mari decât $(\alpha_{\max})_{\min}$. Pozițiile mecanismului pentru care $\alpha_1 = \alpha_2$, notate AC_1D și AC_2D (Fig.2.102), se caracterizează prin aceea că punctele A, C_1 și C_2 sunt coliniare. Din Fig.2.102 se observă imediat că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (\alpha_{\max})_{\min} = \frac{\psi}{2}.$$

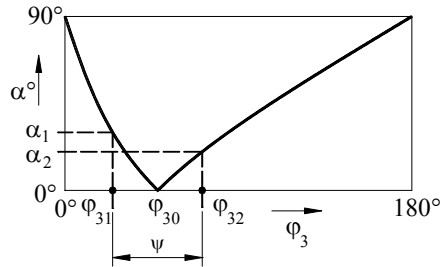


Fig. 2.100

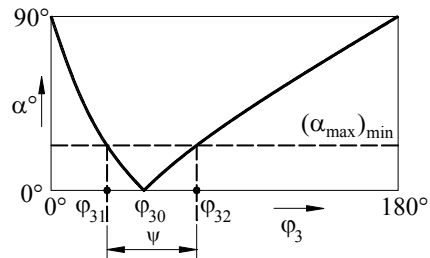


Fig. 2.101

Din condiția $\alpha \leq \alpha_a$, rezultă $\psi \leq 2\alpha_a$ ceea ce arată că în cazul acestui mecanism cursa unghiulară este limitată de valoarea unghiului de presiune admisibil. Cu aceste observații, fazele procesului de sinteză se desfășoară în modul următor. Lungimea l_3 se adoptă, de regulă, din considerente legate de destinația mecanismului. Se calculează, apoi, cursa pistonului

$$h_p = C_1 C_2 = l_3 \sin \frac{\psi}{2},$$

în funcție de care se alege motorul hidraulic, care are o construcție tipizată. Distanțele $AC_1 = l_{21\min}$ și $AC_2 = l_{21\max}$ se înscriu între parametrii tehnici ai acestui motor. În fine, se calculează l_4 din triunghiul dreptunghic AMD,

$$l_4 = \sqrt{\left(\frac{AC_1 + AC_2}{2}\right)^2 + l_3^2}.$$

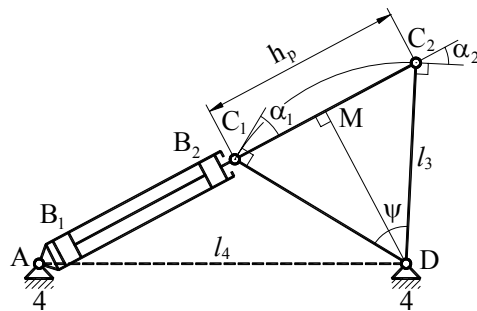


Fig. 2.102

2.4.3. Sinteza mecanismelor pentru generarea curbelor

În cadrul acestei probleme se cere să se construiască un mecanism, de structură cunoscută, astfel încât, un punct al acestuia să descrie o curbă dată. Problema are numeroase aplicații tehnice legate, în special, de conducerea unei scule sau a unui element de execuție după o curbă determinată de condițiile tehnologice. Curbă impusă poate fi dată printr-o ecuație (în plan) sau prin puncte. În primul caz, problema admite o soluție exactă numai în cazuri excepționale, când ecuația traiectoriei se poate aduce, prin diverse particularizări, la aceeași formă cu ecuația curbei date. Altfel, curba este generată aproximativ cu o abatere care trebuie menținută sub o valoare admisibilă, iar rezolvarea este fundamentată pe noțiuni de teoria aproximării funcțiilor. În cazul al doilea se indică un număr finit de puncte, date prin coordonatele lor, prin care trebuie să treacă traiectoria unui punct al mecanismului. În cele ce urmează se prezintă o aplicație pentru un mecanism patrulater articulat, unde curba este dată prin puncte, cu observația că abordarea altor mecanisme se face în mod similar. Un aspect aparte al acestei probleme, cu implicații practice deosebite, este sinteza pentru generarea de traiectorii rectilinii și circulare.

2.4.3.1. Aplicație la mecanismul patrulater articulat plan

Curba dată este definită prin punctele $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, p$), în raport cu un sistem de referință fix. Ne propunem să construim un mecanism patrulater (Fig.2.103), astfel încât un punct al bielei să descrie o traiectorie care să treacă prin punctele date. Necunoscutele problemei, în număr de 9 sunt: lungimile elementelor: (l_1, l_2, l_3, l_4), parametrii de poziție ai bazei (x_A, y_A, φ_4) și

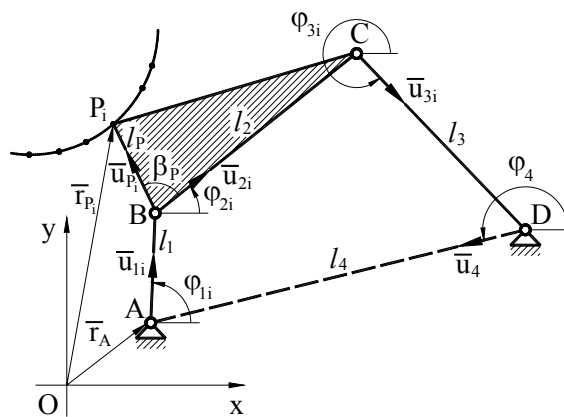


Fig. 2.103

parametrii de poziție ai punctului generator în raport cu biela ($l_P = l_{BP}, \beta_P$). Modelul matematic se obține prin scrierea ecuațiilor de analiză a pozițiilor pentru fiecare punct P_i ($i = 1, p$). Pentru aceasta se pot utiliza diverse metode de analiză cinematică. Aplicând metoda contururilor vectoriale închise se obțin

ecuațiile vectoriale

$$\begin{cases} \bar{u}_i l_1 + \bar{u}_{2i} l_2 + \bar{u}_{3i} l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \\ \bar{r}_i = \bar{r}_A + \bar{u}_i l_1 + \bar{u}_{pi} l_p \end{cases} \quad (i = 1, p)$$

care se proiectează pe axele de coordonate,

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_{1i} + l_2 \cos \varphi_{2i} + l_3 \cos \varphi_{3i} + l_4 \cos \varphi_4 = 0 \\ l_1 \sin \varphi_{1i} + l_2 \sin \varphi_{2i} + l_3 \sin \varphi_{3i} + l_4 \sin \varphi_4 = 0 \\ x_A + l_1 \cos \varphi_{1i} + l_p \cos(\varphi_{2i} + \beta_p) = x_i \\ y_A + l_1 \sin \varphi_{1i} + l_p \sin(\varphi_{2i} + \beta_p) = y_i \end{cases} \quad (i = 1, p) \quad (2.175)$$

Odată cu scrierea sistemului (2.175) se introduc încă $3p$ necunoscute - unghiurile φ_{1i} , φ_{2i} , φ_{3i} ($i = 1, p$). Din condiția ca numărul de ecuații ($4p$) să fie egal cu cel al necunoscutelor ($3p + 9$) se obține numărul de puncte $p = 9$, rezultând un sistem neliniar cu 36 de ecuații. Desigur, rezolvarea se face prin metode numerice. Pentru o funcționare corespunzătoare, mecanismul trebuie să îndeplinească și alte condiții cum ar fi cea referitoare la unghiul de presiune sau cele de existență a manivelei. În această situație numărul de puncte trebuie redus. Astfel, dacă $p = 8$, numărul de ecuații este $4p = 32$, numărul de necunoscute este $3p + 9 = 33$, iar problema are o infinitate simplă de soluții. Dintre acestea se adoptă una care să verifice condițiile suplimentare sau, printr-un proces de optimizare, se caută soluția pentru care unghiul de presiune este minim. Trebuie menționat că, pentru a asigura convergența procedurii de calcul numeric, soluția inițială trebuie să fie cât mai apropiată de cea căutată. În acest scop se pot utiliza atlase care conțin curbe de bielă pentru un număr mare de mecanisme.

În cazul mecanismelor cu 6 elemente se pot adopta 15 puncte realizând o definiție mai bună a curbei care trebuie generată. Există, însă, dezavantajul unui mecanism mai complicat și a unei rezolvări numerice dificile fiind vorba de un sistem neliniar format din $6p = 90$ de ecuații.

■ Teorema Roberts - Cebâșev

Curbele de bielă ale mecanismului patralater, care în cazul general, sunt de gradul 6, au făcut obiectul unor studii foarte aprofundate și s-au pus în evidență o serie de proprietăți utile pentru procesul de sinteză [8, 23]. Una dintre aceste proprietăți este cunoscută sub denumirea de **teorema Roberts - Cebâșev** și arată că **aceeași curbă de bielă poate fi generată de trei mecanisme patralatere distincte.**

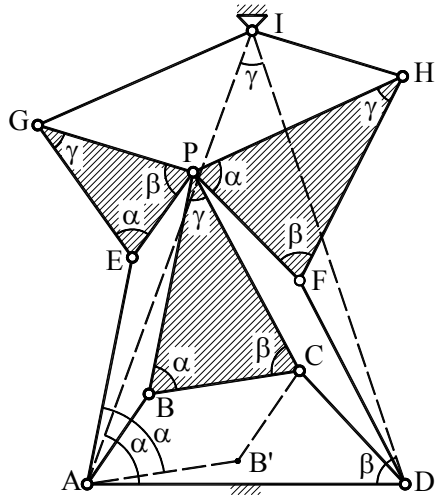


Fig. 2.104

Se consideră patrulaterul ABCD (Fig.2.104) și punctul P solidar cu biela BC, care se dezvoltă prin legarea succesivă a grupelor structurale AEP, DFP și GIH, toate de tip RRR. Dimensiunile se adoptă în așa fel, încât patrulateralele ABPE, DCPF și GIHP să fie paralelograme, iar triunghiurile EGP și FHP să fie asemenea cu triunghiul BCP. Se face o construcție suplimentară trasând prin A o paralelă la BC și prin C o paralelă la AB. Rezultă paralelogramul ABCB'. Pe baza asemănării celor trei triunghiuri, se pot scrie proporțiile

$$\frac{BP}{BC} = \frac{EG}{EP} = \frac{HP}{FP} = k,$$

care conduc la următoarele relații

$$AE = BP = BC \cdot k = AB' \cdot k$$

$$EG = EP \cdot k = AB \cdot k = B'C \cdot k$$

$$GI = HP = FP \cdot k = CD \cdot k.$$

Din figură se observă că segmentele AE, EG și GI sunt rotite față de segmentele AB', B'C și CD cu unghiul α . Aceasta înseamnă că patrulateralele AEGI și AB'CD sunt asemenea și primul este rotit față de cel de-al doilea cu unghiul α . Prin urmare, unghiul $\angle DAI$ are tot valoarea α . Printr-un raționalment similar se demonstrează că $\angle ADI$ are valoarea β și, ca urmare, triunghiul ADI este asemenea cu triunghiul BCP. Deoarece triunghiul BCP are dimensiuni invariabile rezultă că triunghiul ADI are aceeași proprietate, iar cum latura AD este fixă, înseamnă că și punctul I este fix, deși elementele mecanismului sunt mobile. În aceste condiții în punctul I se poate amplasa o articulație fixă fără a modifica funcționarea mecanismului. Se formează, în felul acesta încă două patrulatere AEGI și DFHI care se mișcă simultan cu patrulaterul inițial ABCD, iar punctul lor comun P descrie, evident, o curbă de bielă unică.

Teorema arată că soluția unei probleme de sinteză pentru generarea unei curbe nu este unică și că, pornind de la o soluție determinată, se pot construi cu ușurință, alte două mecanisme care descriu aceeași traiectorie.

2.4.3.2. Mecanisme generatoare de traiectorii rectilinii și circulare

Aplicațiile practice reclamă, uneori, utilizarea de mecanisme care să genereze traiectorii rectilinii sau circulare. De-a lungul timpului au fost descoperite, prin metode științifice sau pe cale intuitivă, multe asemenea mecanisme [3, 8]. Mecanismele care generează traiectorii rectilinii exacte se numesc **inversoare** deoarece construcția lor se bazează pe transformarea matematică inversă a unui cerc într-o dreaptă. Pentru exemplificare, în Fig.2.105 este reprezentat **inversorul lui Peaucellier**. Aplicațiile practice ale inversoarelor sunt reduse datorită construcției complexe, cu multe elemente. Mecanismele care generează segmente de traiectorii aproximativ rectilinii se numesc **directoare**. Din multitudinea de mecanisme directe cunoscute [3], în Fig.2.106 se prezintă câteva, precizându-se dimensiunile relative ale elementelor.

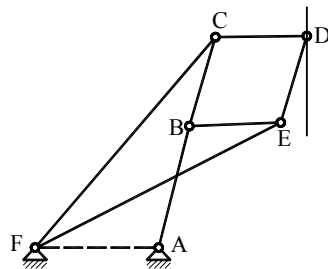
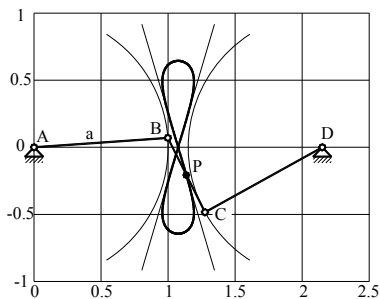


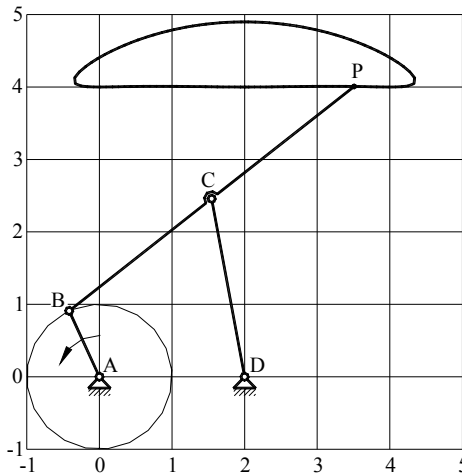
Fig. 2.105
AB = AF;

$$BC = CD = DE = BE; FC = FE$$



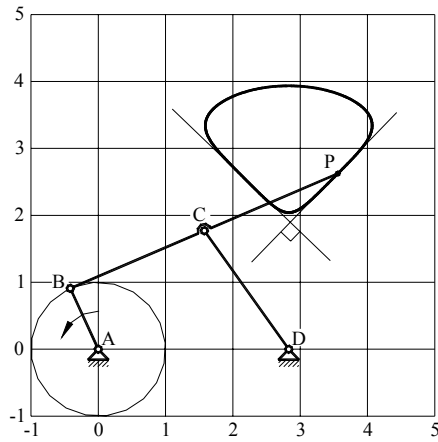
a) Mecanism patrulater director Watt: AB = CD = a;
BC = 0,62a; AD = 2,15a,
BP = PC = 0,31a.

Generarea traiectoriilor circulare se poate face, de asemenea exact (cu ajutorul inversoarelor) sau aproximativ. Ca și în cazul precedent, interesează, în primul rând, mecanismele care descriu, arce de cerc, cu aproximație. În Fig.2.107 se prezintă două dintre aceste mecanisme.

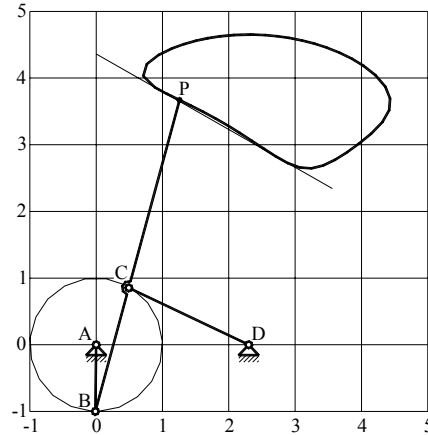


b) Mecanism patrulater director Cebășev
AB = a; BC = CD = CP = 2,5a; AD = 2a

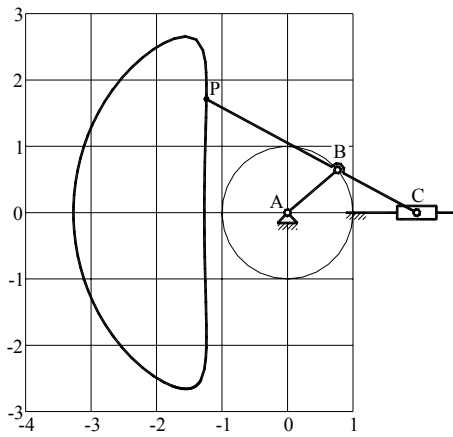
Fig. 2.106



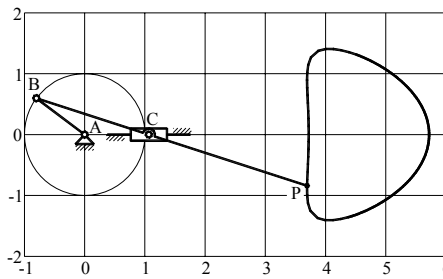
c) *Mecanism patrulater director Cebățev*
 $AB = a$; $BC = CD = CP = 2,17a$;
 $AD = 2,83a$



d) *Mecanism patrulater director Evans*
 $AB = a$; $BC = 1,92a$; $CD = 2a$;
 $CP = 2,92a$; $AD = 2,3a$

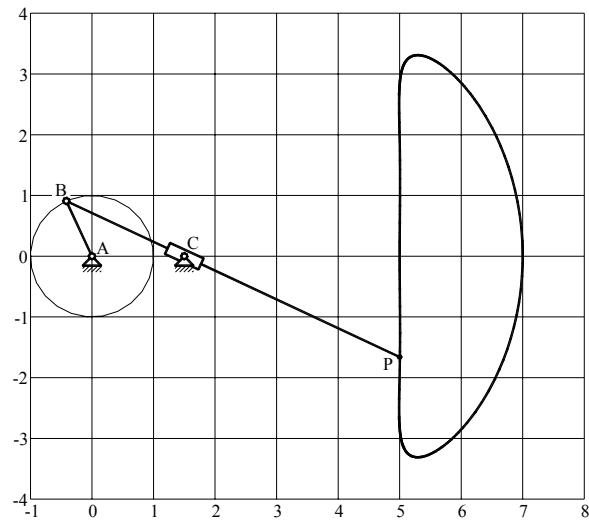


e) *Mecanism director manivelă – piston*
 $AB = a$, $BC = 1,37a$, $BP = 2,27a$



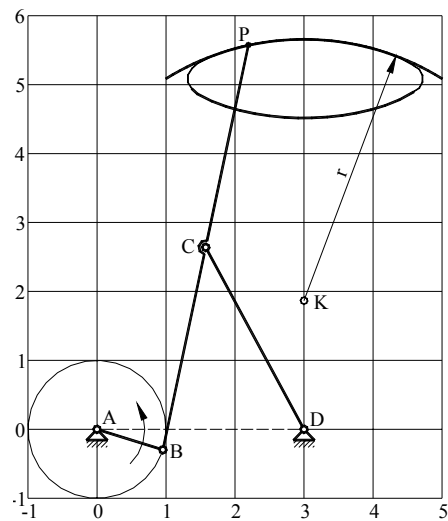
f) *Mecanism director manivelă – piston*
 $AB = a$, $BC = 1,96a$, $BP = 2,76a$

Fig. 2.106



g) Mecanism director cu culisă oscilantă
 $AB = a, AC = 1,5a, BP = 6a$

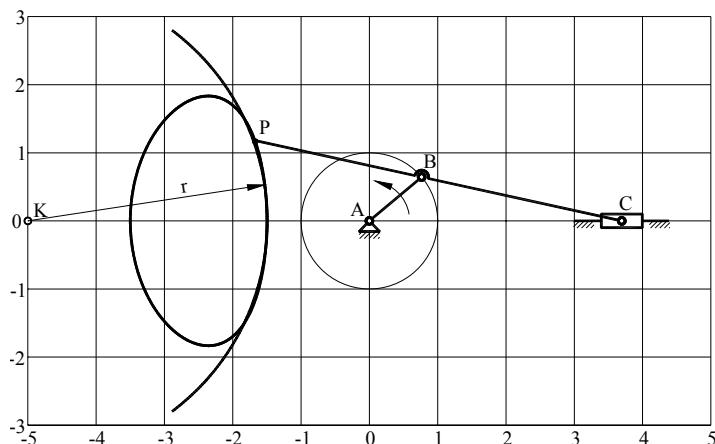
Fig. 2.106



a) Mecanism patrulater Cebățev pentru generarea unei traiectorii parțial circulare

$AB = a, BC = CD = CP = AD = 3a, x_k = 3a, y_k = 1,867a, r = 3,79a$

Fig. 2.107



b) Mecanism manivelă piston pentru generarea unei traiectorii parțial circulară
 $AB = a, BC = 3a, BP = 2,5a, r = 3,5a, x_k = -5a$

Fig. 2.107

2.4.4. Sinteza mecanismelor pentru ghidarea elementelor

În cadrul acestei probleme de sinteză se impune ca un element al mecanismului să treacă, în timpul mișcării sale, printr-un șir de poziții date. Cea mai simplă formulare a acestei probleme se referă la sinteza unui mecanism patrulater astfel încât biela să treacă prin două sau trei poziții impuse. În primul caz se dau pozițiile B_1C_1, B_2C_2 și, implicit, lungimea l_2 (Fig.2.108).

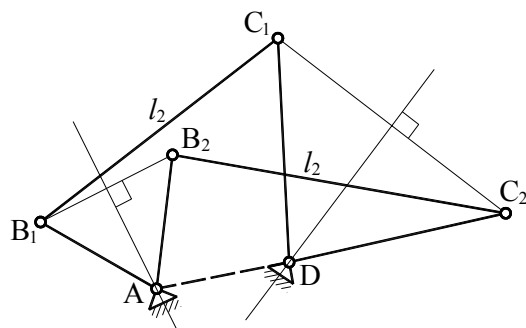


Fig. 2.108

Articulațiile fixe A și D se găsesc, evident, pe mediatoarele segmentelor B_1B_2 și C_1C_2 , existând, în acest sens, o infinitate de soluții. Dacă se dau trei poziții B_1C_1, B_2C_2 și B_3C_3 (Fig.2.109), soluția este unică - articulațiile A și D sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $B_1B_2B_3$ și $C_1C_2C_3$.

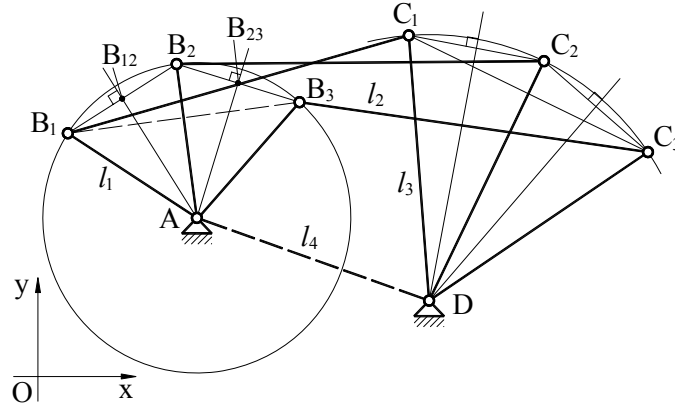


Fig. 2.109

Tratarea analitică a problemei presupune cunoașterea pozițiilor punctelor B_1 , B_2 , B_3 , C_1 , C_2 , C_3 prin coordonatele lor, în raport cu un sistem fix. Aceste coordonate trebuie să respecte, desigur, condițiile

$$l_2 = \sqrt{(x_{B_1} - y_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2} = \sqrt{(x_{B_2} - y_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2} = \sqrt{(x_{B_3} - y_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2}.$$

Se scrie ecuația mediatoarei segmentului B_1B_2 ,

$$y = m_{B_{12}} \cdot x + n_{B_{12}} \quad (2.176)$$

în care,

$$m_{B_{12}} = -\frac{x_{B_2} - x_{B_1}}{y_{B_2} - y_{B_1}},$$

$$n_{B_{12}} = x_{B_{12}} \frac{x_{B_2} - x_{B_1}}{y_{B_2} - y_{B_1}} + y_{B_{12}},$$

iar $x_{B_{12}}$ și $y_{B_{12}}$ sunt coordonatele punctului B_{12} (Fig.2.109),

$$x_{B_{12}} = \frac{x_{B_1} + x_{B_2}}{2}, \quad y_{B_{12}} = \frac{y_{B_1} + y_{B_2}}{2}.$$

În mod similar se scrie ecuația mediatoarei segmentului B_2B_3 ,

$$y = m_{B_{23}} \cdot x + n_{B_{23}}. \quad (2.177)$$

Prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile (2.176) și (2.177) se determină coordonatele punctului A,

$$x_A = -\frac{n_{B_{12}} - n_{B_{23}}}{m_{B_{12}} - m_{B_{23}}}, \quad y_A = -m_{B_{12}} \frac{n_{B_{12}} - n_{B_{23}}}{m_{B_{12}} - m_{B_{23}}} + n_{B_{12}}.$$

Procedând în mod asemănător se determină poziția punctului D în funcție de punctele C₁, C₂ și C₃. În final, se calculează lungimile l₁, l₃ și l₄,

$$l_1 = AB_1 = \sqrt{(x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2}$$

$$l_3 = DC_1 = \sqrt{(x_{C_1} - x_D)^2 + (y_{C_1} - y_D)^2}$$

$$l_4 = AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}.$$

Pentru o formulare mai generală, se atașează elementului care trebuie ghidat un punct P și o dreaptă orientată Δ. În timpul mișcării, punctul P și dreapta Δ trebuie să treacă printr-un șir de poziții succesive P_i(x_i, y_i), Δ_i(φ_i), (i=1, p). Să considerăm, pentru exemplificare, cazul mecanismului patrulater (Fig. 2.110). Necunoscutele problemei, în număr de 10, sunt lungimile elementelor (l₁, l₂, l₃, l₄), parametrii de poziție ai bazei (x_A, y_A, φ₄) și parametrii de poziție ai punctului P și a dreptei Δ în raport cu biela (l_p = BP, β_p și β_Δ). Ecuațiile de sinteză sunt la fel cu cele utilizate la sinteza pentru generarea curbelor (2.175), cu observația că unghiul φ_{2i} se exprimă în funcție de φ_i,

$$\varphi_{2i} = \varphi_i - \beta_{\Delta}, \quad (i = 1, p).$$

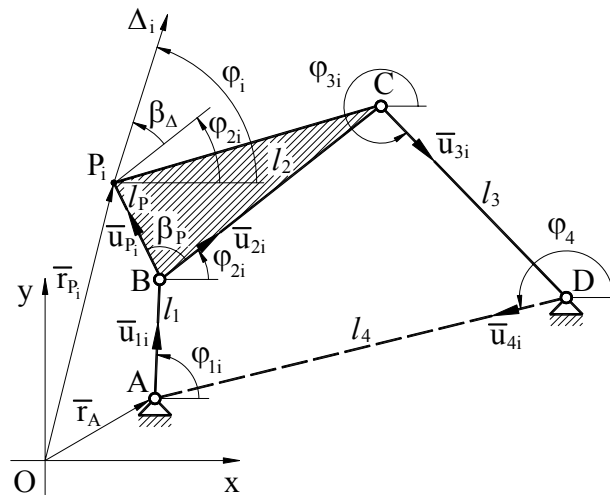


Fig. 2.110

În aceste ecuații intervin necunoscutele suplimentare φ_{1i} și φ_{3i} (i=1, p). Egalând numărul de ecuații (4p) cu cel de necunoscute (2p + 10), rezultă numărul de poziții impuse, p = 5.

Numărul de ecuații și de necunoscute este, în acest caz, 4p = 20. Aceste rezultate nu sunt în contradicție cu ce

am constatat la formularea inițială a problemei când am obținut o soluție determinată pentru $p = 3$. Atunci am considerat $P \equiv B$, și $\Delta \equiv BC$, ceea ce conduce la $l_{BP} = 0$, $\beta_P = 0$, $\beta_{\Delta} = 0$ iar l_2 a fost adoptat implicit. În felul acesta numărul de necunoscute este $2p + 6$, rezultând $p = 3$.

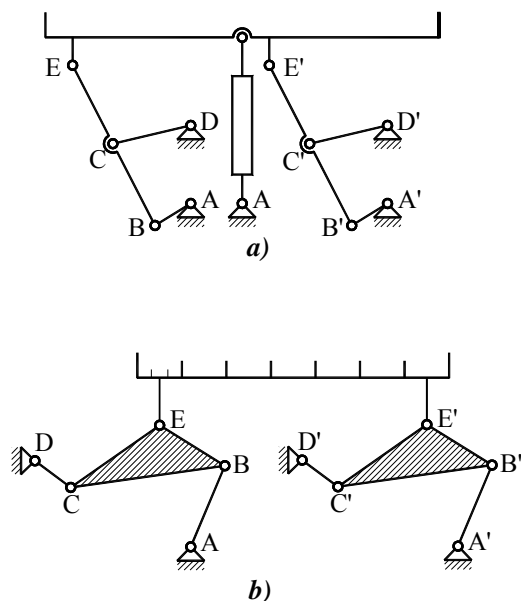


Fig. 2.111

În aplicațiile practice intervine, uneori, problema ghidării unui element în mișcare de translație rectilinie sau curbilinie. Cea mai simplă soluție, pentru rezolvarea acestei probleme, constă în utilizarea a două mecanisme identice care se cuplează prin articulații cu un element comun. Deoarece punctele de articulație au traiectorii identice elementul de cuplare are mișcare de translație. În Fig.2.111 se prezintă două mecanisme de acest fel. Mecanismul de ridicat din Fig.2.111.a conține două patrulatere directe ABCD și A'B'C'D' care conduc punctele E și E' după traiectorii rectilinii. În felul acesta elementul EE' are o mișcare de translație rectilinie pe verticală fiind acționat de un cilindru hidraulic. În Fig.2.111.b este reprezentat un mecanism de transportor format, de asemenea, din două patrulatere cuplate. Elementul de cuplare EE' are o mișcare de translație curbilinie după o traiectorie corespunzătoare cu operația pe care o execută.

2.4.5. Sinteza mecanismelor generatoare de funcții

Se consideră un mecanism care transmite mișcarea de la un element conducător 1 la un element condus n. Se cere să se determine parametrii constructivi ai mecanismului, astfel ca dependența dintre parametrii de poziție p_1 și p_n să se realizeze printr-o funcție dată $p_n = f(p_1)$. Funcția $f(p_1)$ poate fi dată analitic sau prin valori discrete. Chiar atunci când este cunoscută analitic, poate fi discretizată, astfel încât, vom prezenta modul de rezolvare a problemei

având în vedere numai această formă. Perechile de valori corespondente (p_{li}, p_{ni}) ($i = 1, p$), definesc un șir de **poziții asociate**.

Pentru exemplificare, se consideră mecanismul patrulater (Fig.2.112) la care se impun pozițiile relative $(\varphi_{1i}, \varphi_{3i})$ ($i = 1, p$). Modelul matematic reprezintă ecuația de închidere a conturului vectorial proiectată pe axele de coordonate,

$$\begin{cases} l_1 \cos(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2 \cos \varphi_{2i} + l_3 \cos(\varphi_{3i} + \beta_3) - l_4 = 0 \\ l_1 \sin(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2 \sin \varphi_{2i} + l_3 \sin(\varphi_{3i} + \beta_3) = 0 \end{cases}, (i = 1, p). \quad (2.178)$$

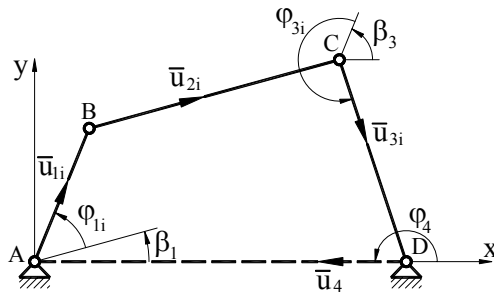


Fig. 2.112

Dacă unghiurile β_1 și β_3 sunt date, pozițiile corespondente ale elementelor 1 și 3 se numesc **absolut asociate**, iar dacă β_1 și β_3 sunt necunoscute, se numesc **relativ asociate**. Se observă că sistemul (2.178) este omogen în raport cu lungimile l_1, l_2, l_3, l_4 și admite o soluție banală $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$.

Pentru determinarea unor soluții diferite de cea banală, se împart ambele ecuații cu valoarea l_1 . Notând $l_2^* = \frac{l_2}{l_1}$, $l_3^* = \frac{l_3}{l_1}$ și $l_4^* = \frac{l_4}{l_1}$ se obține sistemul:

$$\begin{cases} \cos(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2^* \cos \varphi_{2i} + l_3^* \cos(\varphi_{3i} + \beta_3) - l_4^* = 0 \\ \sin(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2^* \sin \varphi_{2i} + l_3^* \sin(\varphi_{3i} + \beta_3) = 0 \end{cases}, (i = 1, p). \quad (2.179)$$

În cazul pozițiilor absolut asociate necunoscutele sunt parametrii l_2^* , l_3^* , l_4^* și unghiurile φ_{2i} ($i = 1, p$). Egalând numărul de ecuații (2p) cu numărul de necunoscute ($p + 3$), rezultă $p = 3$.

În cazul pozițiilor relativ asociate numărul de necunoscute se majorează cu două (β_1 și β_3), rezultând $p = 5$. Cunoscând, prin rezolvarea sistemului (2.179), l_2^* , l_3^* și l_4^* , una dintre lungimile l_1, l_2, l_3, l_4 se poate adopta arbitrar, iar celelalte trei rezultă. În felul acesta se obțin o infinitate de mecanisme asemenea care respectă condițiile impuse.

2.4.6. Sinteza mecanismelor cu mișcare intermitentă (cu opriri)

Mișcarea intermitentă se caracterizează prin staționări (opriri) periodice. Mecanismele care conțin elemente cu mișcare intermitentă se utilizează, de regulă, în structura sistemelor automate. Mișcarea intermitentă este de două tipuri - cu păstrarea sensului de mișcare între opriri și cu schimbarea sensului. Cele două cazuri reclamă soluții constructive diferite și, de aceea, vor fi tratate separat.

2.4.6.1. Mecanisme cu mișcare intermitentă în același sens

■ Mecanisme cu clichet

Diagramele deplasării unghiulare în funcție de timp $\varphi(t)$ și a vitezei unghiulare $\omega(t)$, caracteristice pentru o mișcare intermitentă în același sens, sunt reprezentate în Fig.2.113. Parametrii specifici ai acestei mișcări sunt cursa ψ și raportul k_t dintre timpul de mișcare și timpul de staționare,

$$k_t = \frac{t_m}{t_s}.$$

Mecanismele care se utilizează în acest scop

se grupează în două categorii - cu clichet și cu cruce (disc) de Malta.

În Fig.2.114 este reprezentat un mecanism cu clichet care conține un mecanism patrulater ABCD de tip manivelă - balansier. Balansierul 3 este prevăzut cu clichetul articulat 5 care acționează roata de clichet 6 numai când se rotește în sens orar. Când balansierul execută cursa în sens invers (antiorar) roata 6 staționează deoarece clichetul 5 se deplasează peste dantura roții. În același timp, roata este blocată de clichetul 7 articulat la bază. Parametrii prestabiliți ai mișcării intermitente ψ și k_t se obțin prin sinteza mecanismului patrulater. Astfel, cursa roții de clichet, ψ ,

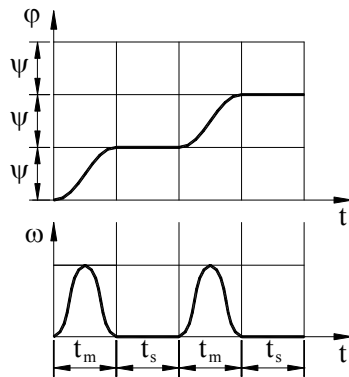


Fig. 2.113

este chiar cursa balansierului. Dacă raportul k_t este supraunitar ($k_t > 1$), roata de clichet trebuie montată ca în Fig. 2.114, astfel încât, înclinarea danturii să permită antrenarea atunci când balansierul se rotește în același sens cu

manivela. În acest caz coeficientul de productivitate k_p al mecanismului patrulater este inversul raportului k_t : $k_p = \frac{1}{k_t}$. Dacă raportul k_t este subunitar ($k_t < 1$), montarea roții se face invers față de cazul precedent iar $k_p = k_t$.

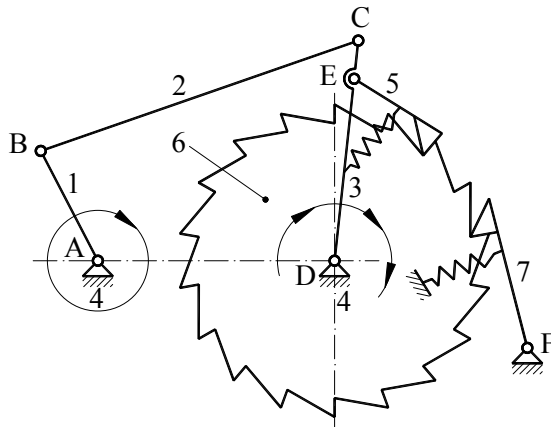


Fig. 2.114

Rezultă că, pentru determinarea constructivă a mecanismului patrulater, trebuie aplicată operația de sinteză elementară combinată.

Cursa unghiulară a balansierului este, de regulă, reglabilă, între anumite limite, prin variația lungimii manivelei. Pentru o funcționare precisă a mecanismului, unghiul ψ trebuie să cuprindă un număr întreg de dinți ai roții de clichet.

■ Mecanisme cu cruce de Malta

Mecanismele cu cruce de Malta (cu disc maltez, mecanisme de Geneva) se construiesc în diverse variante având caracteristici funcționale diferite. În Fig.2.115 sunt reprezentate două mecanisme cu cruce de Malta cu 4 canale, unul numit **exterior** (Fig.2.115.a), iar celălalt **interior** (Fig.2.115.b). Elementul conducător al acestor mecanisme este un braț 1, prevăzut cu o rolă 2, iar elementul condus este discul 3 care are patru canale perpendiculare (crucea de Malta). Brațul 1 se rotește continuu și antrenează, periodic, discul 3 numai atunci când rola 2 se află în interiorul unui canal. Când rola nu este în contact cu un canal, discul staționează și este blocat, pentru a evita o rotație întâmplătoare, de sectorul circular a, solidar cu brațul 1, care pătrunde în cavitațile circulare b, ale discului 3. În faza de mișcare, mecanismul este echivalent cu un mecanism cu culisă oscilantă la care patina 2 (Fig.2.116.a) este înlocuită prin rola 2 (Fig.2.116.b) cu mobilitate locală. Culisa 3 (Fig.2.116.b) este materializată de canalele crucii de Malta (Fig.2.115). În Fig.2.116.b este reprezentat mecanismul cu culisă oscilantă în pozițiile în care brațul AB este perpendicular pe culisa BC. În construcția mecanismului exterior (Fig.2.115.a) se utilizează segmentul de culisă BE (Fig.2.116.b) care determină rotația crucii în sens opus în raport cu rotația brațului, iar în construcția mecanismului interior (Fig.2.115.b) se

folosește segmentul BF (Fig.2.116.b) care determină același sens de rotație pentru braț și cruce. Pentru ambele mecanisme intrarea și ieșirea rolei din canal se face în poziții similare cu cele din Fig.2.116.b - când brațul 1 este perpendicular pe direcția canalului. Acest lucru este avantajos din punct de vedere dinamic deoarece se asigură continuitatea vitezei crucii în pozițiile care delimitează cele două faze.

Cursa mecanismului cu cruce de Malta, care este și cursa mecanismului cu culisă oscilantă, este determinată de numărul de canale z ,

$$\psi = \frac{2\pi}{z} = \frac{360^\circ}{z}.$$

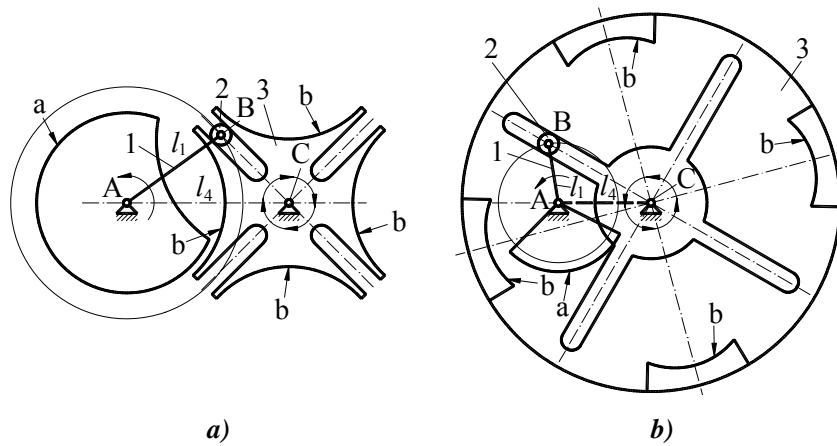


Fig. 2.115

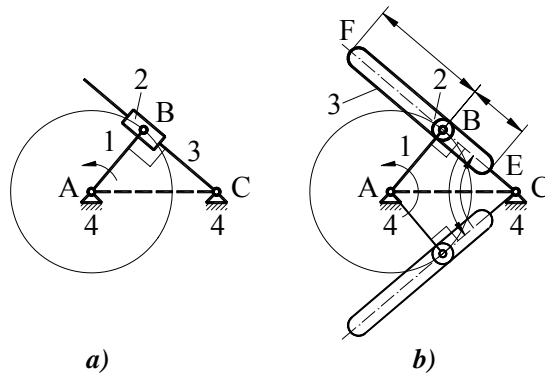


Fig. 2.116

În cazul nostru $z = 4$, deci $\psi = \frac{\pi}{2} = 90^0$. Raportul k_t este, în cazul mecanismului exterior, egal cu coeficientul de productivitate al mecanismului cu culisă oscilantă ($k_t = k_p$) iar în cazul mecanismului interior este inversul acestuia ($k_t = \frac{1}{k_p}$). Având în vedere că

$$k_p = \frac{\pi - \psi}{\pi + \psi} = \frac{1}{3},$$

rezultă $k_t = \frac{1}{3}$ la mecanismul exterior și $k_t = 3$ la cel interior.

Lungimile $l_1 = AB$ și $l_4 = AC$ (Fig.2.115) satisfac relația întâlnită la sinteza mecanismului cu culisă oscilantă,

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{l_1}{l_4},$$

iar pentru cazul $z = 4$ și $\psi = 90^0$,

$$\frac{l_1}{l_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.4.6.2. Mecanisme cu mișcare intermitentă însoțită de schimbarea sensului

Acest tip de mișcare se produce dacă într-un ciclu de deplasare alternativă, de rotație sau translație, se intercalează una sau mai multe staționări. În aplicațiile practice interesează, în special, cazul cu o singură staționare care coincide cu o poziție extremă. Diagramele acestei mișcări sunt redată în Fig.2.117.

Procedeul de sinteză pentru mecanismele capabile să reproducă o astfel de mișcare pornește de la un mecanism inițial care generează o traiectorie parțial circulară sau parțial rectilinie. Să considerăm, în acest sens, mecanismul patrulater ABCD (Fig.2.118.a). Punctul E descrie o traiectorie de formă circulară pe segmentul $\widehat{E_1E_2}$, având centrul în K. Mecanismul se dezvoltă cu grupa structurală EFG (RRR), având următoarele lungimi ale elementelor: $EF = r$ - raza arcului de cerc $\widehat{E_1E_2}$, GF - distanța dintre articulația fixă G și centrul K al arcului de cerc $\widehat{E_1E_2}$. Determinând poziția articulației F prin

metoda intersecțiilor, rezultă că pentru $E \in \widehat{E_1E_2}$, punctul F coincide cu centrul K, deci este fix. Ca urmare, elementul FG este, de asemenea, imobil.

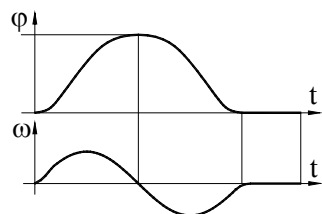
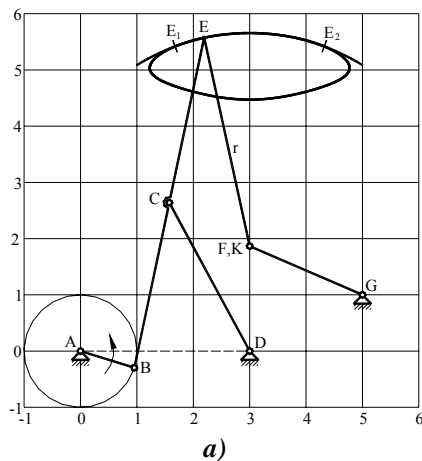


Fig. 2.117

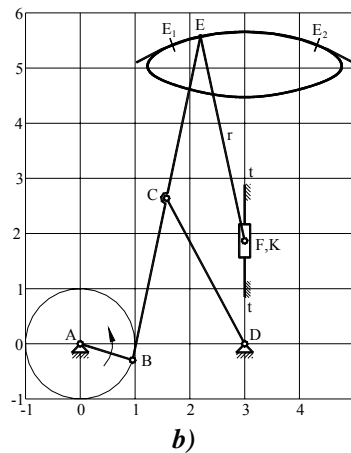
Mecanismul din Fig.2.118.b se obține pornind de la același mecanism patrulater, prin anexarea unei grupe structurale de tip RRT. Lungimea EF se adoptă egală cu raza r, iar axa de translație fixă tt, astfel încât să treacă prin K. Dacă $E \in \widehat{E_1E_2}$ articulația F coincide cu centrul K și este fixă ca și patina mecanismului.

În Fig.118.c este reprezentat un mecanism cu opriri având aceeași structură cu cel din Fig.118.a, dar cu dimensiuni relative diferite. Rezultate similare se obțin considerând, inițial, un mecanism manivelă - piston (Fig.118.d) care generează o traiectorie parțial circulară.

Sinteza mecanismelor cu opriri se poate realiza și pe baza unor mecanisme directoare. În acest caz, la mecanismul inițial, se atașează o grupă RTR (Fig.2.118.e) obținând o mișcare intermitentă pentru un element în mișcare de rotație. Dacă se atașează o grupă RTT (Fig.2.118.f) se obține o mișcare de translație intermitentă.

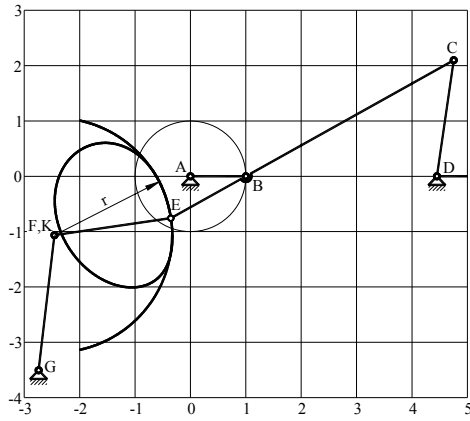


$$AB = a, BC=CD=AD=CE=3a, x_k = 3a, \\ y_k = 1,867a, EF=3,79a, FG=2,18a, \\ x_G = 5a, y_G = a$$



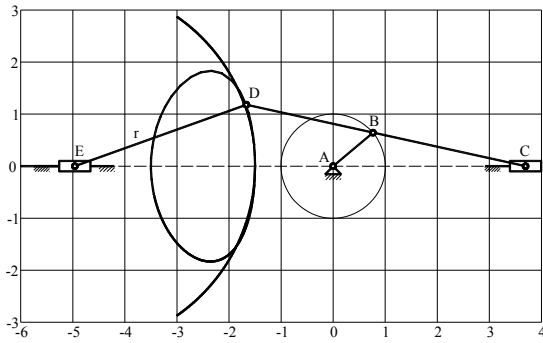
$$AB = a, BC=CD=AD=CE=3a, \\ x_k = 3a, y_k = 1,867a, EF=3,79a$$

Fig. 2.118



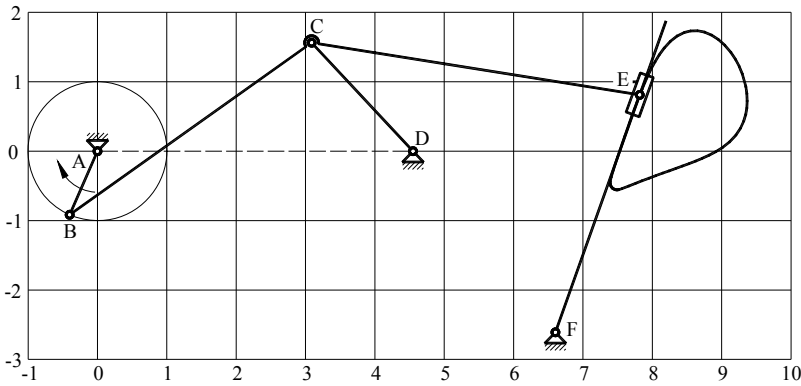
c)

$AB = a$, $BC = 4,3a$, $CD = 2,12a$,
 $AD = AG = 4,45a$, $CE = 5,85a$,
 $DG = 8a$, $FE = r = 2,12a$,
 $GF = 2,46a$,
 $x_k = -2,455a$, $y_k = -1,064a$



d)

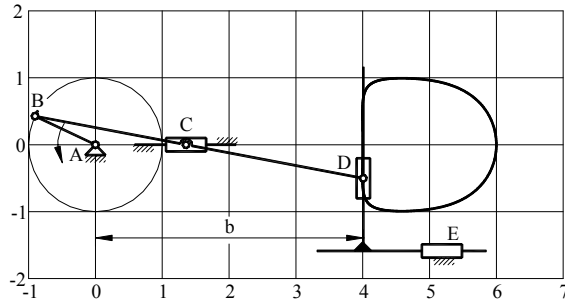
$AB = a$, $BC = 3a$,
 $BD = 2,5a$, $ED = r = 3,5a$



e)

$AB = a$, $BC = 4,28a$, $CD = 2,14a$, $AD = 4,55a$,
 $CE = 4,86a$, $BE = 8,44a$, $AF = 7,1a$, $DF = 3,32a$

Fig. 2.118



f)

$$AB = a, \quad BC = 2,3a, \\ BD = 5a, \quad b = 4a$$

Fig. 2.118

2.4.7. Sinteza mecanismelor pentru reproducerea curbelor asemenea (pantografe)

Mecanismele pantografe se utilizează pentru gravarea desenelor sau a textelor prin copiere, la scară, după un șablon. Obținerea unei curbe asemenea cu o curbă dată se numește **transformare omotetică**. Se consideră curba (C_1) și un punct P pe această curbă (Fig.2.119). Se unește P cu un punct fix O - **centrul de omotetie**, iar pe raza OA se adoptă un al doilea punct Q. Când punctul P se deplasează pe curba (C_1) , punctul Q descrie o curbă asemenea (C_2) , dacă se respectă condiția

$$\frac{OP}{OQ} = k,$$

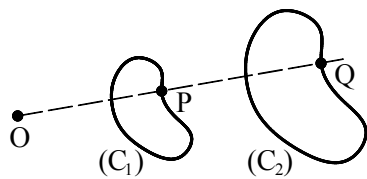


Fig. 2.119

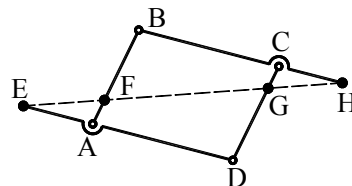


Fig. 2.120

unde k reprezintă raportul de asemănare. Sinteza mecanismelor pantografe se face pe baza unui lanț cinematic articulată, paralelogram ABCD (Fig.2.120). Se trasează o dreaptă care intersectează laturile paralelogramului (sau prelungirile lor) în punctele E, F, G, H. Dacă, în unul dintre aceste puncte, se amplasează o articulație fixă, se obține un mecanism pantograf, în care celelalte trei puncte, considerate invariabile în raport cu elementele pe care se găsesc, descriu curbe

asemenea între ele. Pentru a demonstra acest lucru, să considerăm pantograful care are articulația fixă E (Fig.2.121). Din asemănarea triunghiurilor EAF, EDG și EIH rezultă proporțiile

$$\frac{EA}{AF} = \frac{ED}{DG} = \frac{EI}{HI} \quad (2.180)$$

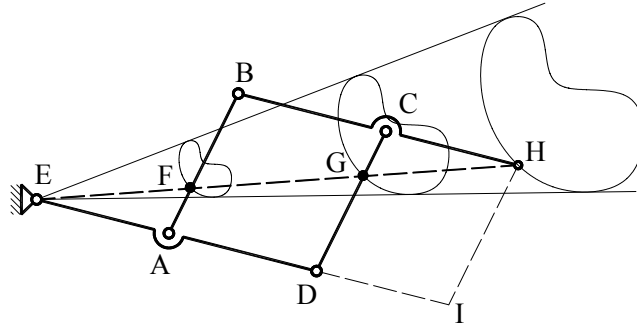


Fig. 1.121

Dacă paralelogramul ABCD se deformează, dar punctele E, F, G rămân invariabile în raport cu elementele AB, CD și BC, cele trei triunghiuri se mențin asemenea, deoarece proporțiile (2.180), în care intervin numai lungimi constante se păstrează, iar laturile AF, DG și HI sunt permanent paralele. Ca urmare, punctele E, F, G, H rămân coliniare. În același timp, din asemănarea triunghiurilor menționate, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{EF}{EG} &= \frac{EA}{ED} = k_1 \\ \frac{EF}{EH} &= \frac{EA}{ED + CH} = k_2 \\ \frac{EG}{EH} &= \frac{ED}{ED + CH} = k_3. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Astfel, sunt îndeplinite condițiile transformării prin omotetie pentru curbele descrise de punctele E, F și G. Prin reglarea corespunzătoare a lungimilor care intervin în relațiile (2.181) se pot obține valori convenabile pentru scările k_1 , k_2 și k_3 .

Capitolul 3 MECANISME CU CAME

3.1. CLASIFICARE, TRANSFORMĂRI

3.1.1. Clasificare

Un mecanism cu camă este constituit dintr-un element conducător profilat, numit camă, care transmite mișcarea, prin intermediul unei cuple superioare, unui element condus, numit tchet.

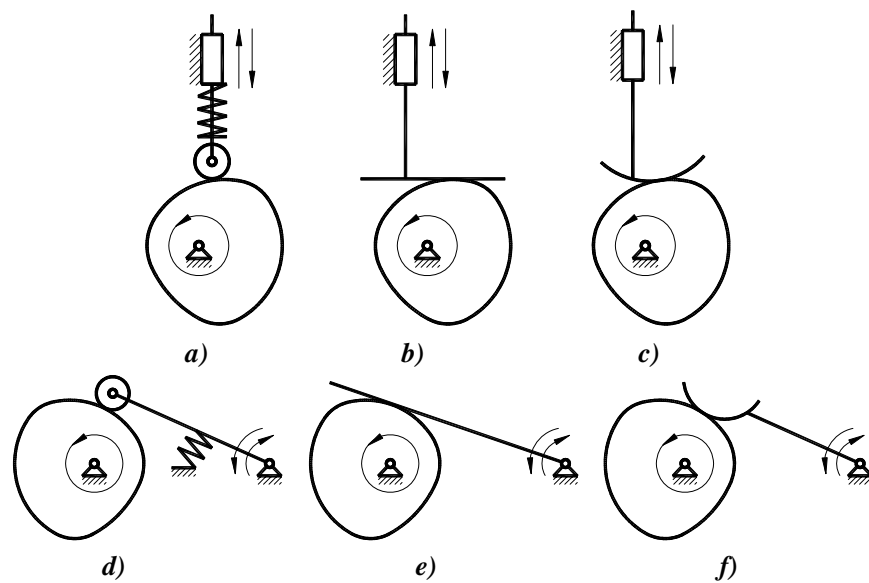


Fig. 3.1

În majoritatea cazurilor **camea are o mișcare de rotație continuă**, iar **tachetul - o mișcare de translație** (Fig.3.1.a,b,c) sau de rotație (Fig.3.1.d,e,f).

Contactul camă - tchet se poate face prin intermediul unei **role articulate** (Fig.3.1.a, d, Fig.3.2., Fig.3.3.a) sau în mod direct. În cazul contactului direct suprafața activă a tchetului poate fi **plană (tchet plat sau cu talpă plană** - Fig.3.1.b, e, Fig.3.3.b) sau **sferică (tchet bombat** - Fig.3.1.c, f).

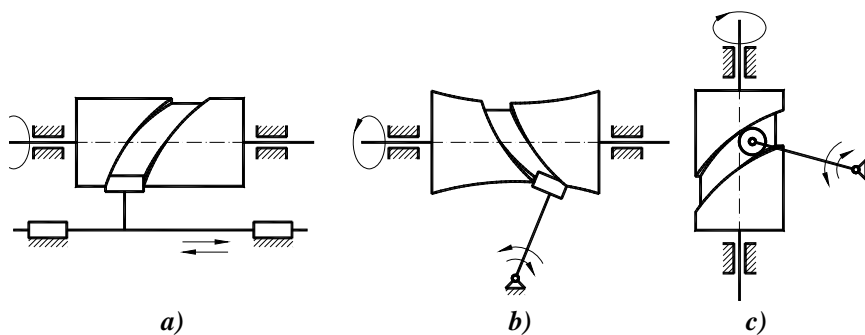


Fig. 3.2

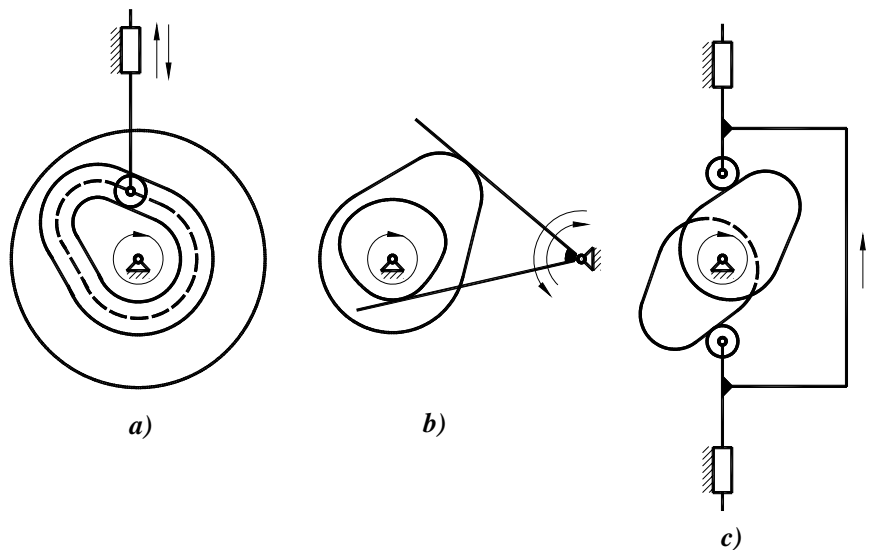


Fig. 3.3

Din punct de vedere teoretic interesează și cazul în care suprafața activă a tchetului se reduce la un **punct (tchet cu vârf)**. Mecanismele cu came pot fi **plane** (Fig.3.1) sau **spațiale** (Fig.3.2). În primul caz cama are forma unui **disc plan** prevăzut cu o suprafață activă **cilindrică** (în accepțiunea generală). Intersecția suprafeței active cu un plan frontal (perpendicular pe axa de rotație) constituie **profilul** camei. La mecanismele spațiale cama are forma unei suprafețe de revoluție: **cilindru** (Fig.3.2.a, c), **globoid** (Fig.3.2.b), **con**, **hiperboloid de rotație**, **sferă**, iar profilul este o curbă pe această suprafață.

Cupla superioară camă - rolă sau camă - tchet se poate concepe sub formă **deschisă (unilaterală)** (Fig.3.1) sau **închisă (bilaterală)** (Fig.3.2, Fig.3.3). Închiderea cuplei superioare se poate face în două moduri: prin practicarea unui canal în corpul camei, în care pătrunde rola (Fig.3.2, Fig.3.3.a) sau prin utilizarea unui tchet cu două suprafețe active (role) antrenat de două came cuplate rigid (Fig.3.3.b, c). În cazul cuplei deschise, menținerea contactului se realizează cu ajutorul unei forțe generată de un arc (Fig.3.1.a, d). Uneori acest rol este preluat de forța de greutate sau de forța tehnologică.

Mecanismele cu came au o răspândire foarte largă în aproape toate domeniile construcției de mașini, cum ar fi: mașinile textile, mașinile unelte, mecanica fină și construcția de aparate, motoarele termice, industria alimentară, mașinile și sistemele automate. Avantajul principal al utilizării lor constă în faptul că permit obținerea, cu mare precizie, a unei mișcări prestabilite pentru tchet.

Dintre tipurile de mecanisme prezentate, cea mai largă utilizare o au cele prevăzute cu rolă datorită avantajelor oferite de contactul de rostogolire. Tchetul cu talpă și cel bombat se folosesc în regimuri de funcționare ușoară și reclamă o lubrifiere foarte bună.

3.1.2. Transformări

Studiul mecanismelor cu came apelează, uneori, la transformări fictive utilizate ca metode de lucru. Prin aceste transformări se urmărește obținerea unor mecanisme echivalente cu cele inițiale, dar care permit rezolvări mai simple ale unor probleme de analiză și de sinteză. Echivalența mecanismului transformat cu cel inițial este concepută după criteriul cinematic - menținerea mișcărilor relative dintre elemente.

3.1.2.1. Transformarea prin schimbarea bazei (procedeul inversării mișcărilor)

Această transformare constă în schimbarea bazei mecanismului, acest rol fiind preluat de camă. La rândul său, elementul care, inițial, este bază devine mobil, având funcția de element conducător. Pentru a menține mișcările relative dintre elemente, este necesar ca mișcarea relativă dintre camă și bază să rămână neschimbată. Astfel, după transformare, viteza unghiulară a elementului 3, inițial bază (Fig.3.4) este

$$\omega_3 = \omega_{31} = -\omega_{13} = -\omega_1,$$

în care ω_1 este viteza unghiulară a camei în mecanismul real. Cum se vede, cele două viteze sunt egale și de sensuri contrare, ceea ce justifică denumirea procedurii. Transformarea permite reprezentarea comodă a mecanismului în mai multe poziții succesive folosind un desen unic pentru profilul camei, așa cum rezultă din Fig.3.4.

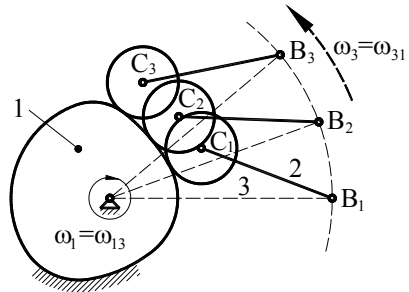


Fig. 3.4

3.1.2.2. Transformarea prin eliminarea rolei

Se consideră un mecanism prevăzut cu tacher cu rolă (Fig.3.5.a). Centrul rolei descrie, în raport cu planul camei, o traiectorie numită **profil teoretic** (C_t) spre deosebire de **profilul real interior** (C_{ri}) și de cel **exterior** (C_{re}).

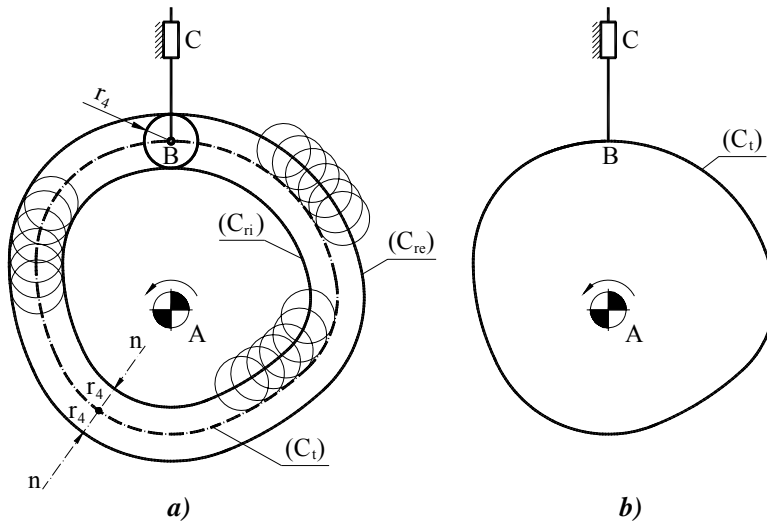


Fig. 3.5

Este evident că, adoptând un tchet cu vârf și înlocuind profilele reale cu cel teoretic, se obține un mecanism echivalent cu cel inițial (Fig. 3.5.b). Profilul teoretic se obține ca înfășurătoarea unor familii de cercuri cu centrele pe profilul real interior sau pe cel exterior și de rază egală cu raza rolei r_4 . Cele trei profile sunt curbe **echidistante** și au următoarele proprietăți:

- 1) Normala la un profil este și normală la celelalte două.
- 2) Distanța dintre profilul teoretic și profilele reale, măsurată pe o normală comună, este constantă în orice punct și egală cu raza rolei r_4 .
- 3) Punctele aflate pe o normală comună au același centru de curbură, astfel încât, între razele de curbură ale profilelor teoretic R_{ct} , real exterior R_{cre} și real interior R_{cri} există relațiile

$$R_{ct} = R_{cre} - r_4 = R_{cri} + r_4.$$

Dacă se cunoaște profilul teoretic, profilele reale se obțin prin înfășurarea unor familii de cercuri cu centrele pe profilul teoretic, având razele egale cu raza rolei.

3.1.2.3. Transformarea mecanismelor spațiale în mecanisme plane

Această transformare se practică în cazul mecanismelor spațiale care au came cilindrice sau conice. Prin desfășurarea plană a suprafeței camei, însoțită de transformarea mișcării de rotație în una de translație, mecanismul spațial se transformă în unul plan fără a modifica mișcarea tchetului. În Fig.3.6 se exemplifică procedeul în cazul unui mecanism cu camă cilindrică și tchet de rotație. Se observă că cilindrul desfășurat are raza r_1 care corespunde cu adâncimea medie a canalului profilat, iar viteza de translație a camei plane este

$$v_1 = \omega_1 \cdot r_1,$$

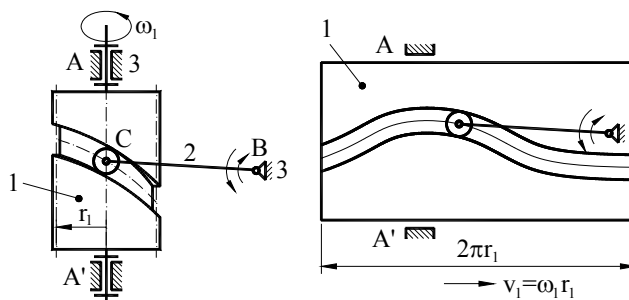


Fig. 3.6

în care ω_1 este viteza unghiulară a camei în mecanismul spațial.

3.1.2.4. Transformarea mecanismelor cu came în mecanisme cu cuple inferioare

Această transformare se efectuează prin înlocuirea cuplei superioare camă - tchet (rolă) printr-un lanț cinematic cu cupe inferioare. Așa cum am arătat (par. 1.3.1.) lanțul cinematic înlocuitor este format dintr-un element și

Tabelul 3.1

Mecanismul cu cam\	Mecanismul înlocuitor	Mecanismul cu cam\	Mecanismul înlocuitor

două articulații amplasate în centrele de curbură aparținând profilului camei și curbei active a tachelului.

În cazul tachelului cu rolă se obține același rezultat dacă se consideră mecanismul transformat prin eliminarea rolei, când curba activă se reduce la un punct (vârful tachelului) care este și centrul de curbură. În cazul tachelului plat, articulația corespunzătoare se transformă într-o cuplă de translație cu axa pe linia tălpii. O situație asemănătoare apare când profilul conține un segment de dreaptă. În Tab.3.1 se prezintă mecanismele înlocuitoare pentru principalele tipuri de mecanisme cu came, luând în considerare și cazurile în care profilul conține segmente de dreaptă. În cazul mecanismelor cu tachel cu rolă s-au tratat mecanismele echivalente cu tachel cu vârf, iar mecanismele spațiale cu camă cilindrică s-au transformat în mecanisme plane. Pentru a urmări cu ușurință corespondența dintre cele două mecanisme, elementele și cuplele sunt notate la fel, centrul de curbură al profilului este notat cu O , iar elementul suplimentar, care rezultă prin operația de înlocuire, cu 4. Trebuie menționat că echivalența dintre cele două mecanisme are caracter instantaneu, deoarece odată cu schimbarea poziției, se deplasează punctul de contact pe profil, iar raza de curbură și, deci, lungimea elementului suplimentar se modifică de asemenea.

3.2. ANALIZA CINEMATICĂ

Operația de analiză cinematică urmărește determinarea legii de mișcare a tachelului cunoscând construcția mecanismului, inclusiv forma profilului camei. Această operație are o însemnătate redusă în procesul de proiectare a mecanismului deoarece mișcarea tachelului este complet prestabilită în cazul operației de sinteză. Intervin, totuși, unele situații în care mecanismul este cunoscut fizic și este necesară analiza funcționării sale. În aceste cazuri se recomandă aplicarea metodei funcțiilor de transmitere (par. 2.1.6.). Funcția de transmitere de ordinul zero se stabilește prin măsurători efectuate pe mecanism sau pe desen. Primul procedeu presupune utilizarea unor instrumente, de precizie corespunzătoare, pentru măsurarea deplasărilor unghiulare și/sau liniare ale camei și tachelului. În felul acesta se obțin funcțiile $s(\varphi)$ sau $\psi(\varphi)$, în care φ este unghiul de poziție al camei, s - parametrul liniar de poziție al tachelului de translație, ψ - unghiul de poziție al tachelului oscilant de rotație. Cel de-al doilea procedeu constă în reprezentarea mecanismului într-un șir de poziții succesive și măsurarea, pe desen, a parametrilor de poziție. Pentru aceasta se folosește inversarea mișcărilor care permite reprezentarea profilului o singură dată. În Fig.3.7 se prezintă acest procedeu pentru un mecanism plan cu tachel de translație și rolă. Într-o primă fază se aplică operația de transformare prin eliminarea rolei. În Fig.3.7 este reprezentat direct mecanismul transformat. Pornind de la o poziție arbitrară AB_0C_0 se reprezintă mecanismul într-o poziție

obținută prin rotația camei cu unghiul φ . Pentru aceasta se trasează un cerc oarecare (C) care intersectează axa tachelului B_0C_0 în punctul E_0 . De la raza AE_0 se măsoară unghiul φ în sens opus vitezei unghiulare a camei, conform cu procedeul inversării mișcărilor. În felul acesta se obține punctul E ($\sphericalangle E_0AE = \varphi$) prin care se trasează axa tachelului tangentă la un cerc de rază e (excentricitatea) și se obține noua poziție a mecanismului ABC. Parametrul de poziție al tachelului s se măsoară de la punctul C la un punct fix situat pe axa de translație.

De obicei se consideră, în acest scop, punctul situat la extremitatea inferioară a cursei C_1 . Acest punct este situat pe cercul de rază minimă a profilului teoretic (C_{tmin}). Atribuind unghiului φ un șir de valori și repetând această construcție, se determină funcția de transmitere $s(\varphi)$, prin valori discrete. În mod asemănător se procedează în cazul mecanismului cu tachel de rotație oscilant și rolă (Fig.3.8), determinând funcția de transmitere $\psi(\varphi)$.

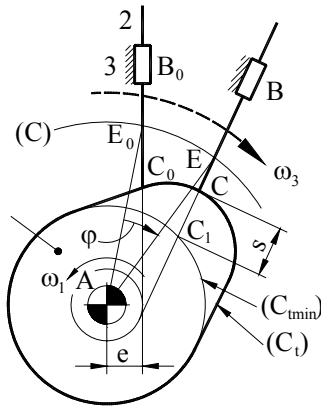


Fig. 3.7

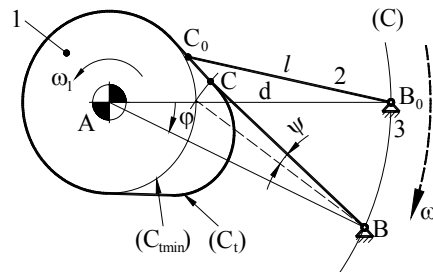


Fig.3.8

Dacă profilul este constituit din arce de cerc și segmente de dreaptă se recomandă aplicarea transformării mecanismului cu camă într-un mecanism cu cuple inferioare. Acest mod de a proceda este avantajos deoarece poziția centrelor de curbă, pentru fiecare segment de profil, este cunoscută și invariabilă. Procedeul este ilustrat în Fig.3.9 pentru un mecanism cu tachel de translație și rolă. Profilul real (C_{ri}) este format din două arce de cerc și două segmente de dreaptă. Aplicând transformarea prin eliminarea rolei se obține un profil teoretic (C_t) format în același fel. Pentru fiecare segment de profil se obține câte un mecanism cu cuple inferioare diferit, așa cum se arată în

Fig.3.9.b, c, d, care se analizează folosind metode specifice acestor mecanisme (par. 2.1.).

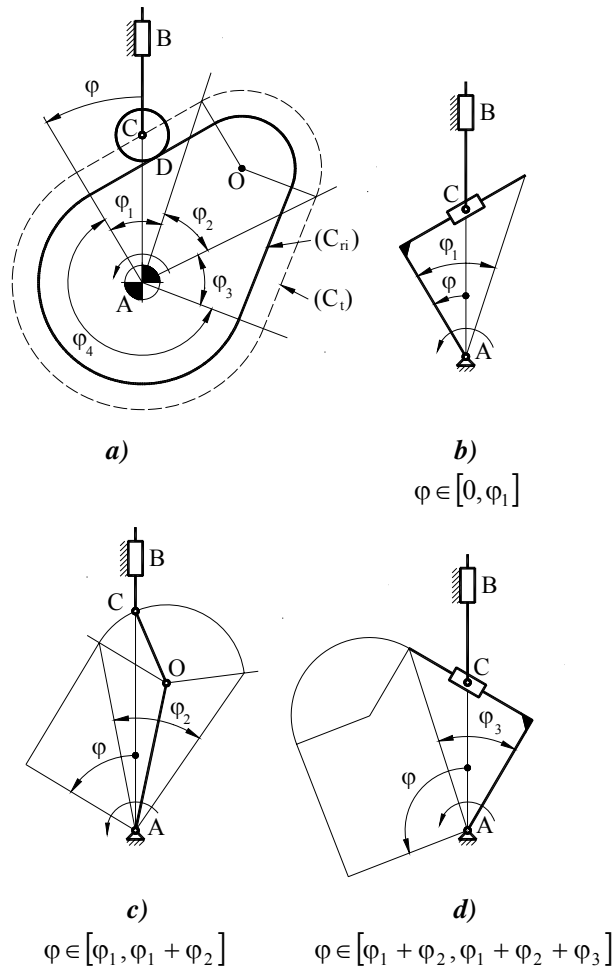


Fig. 3.9

3.3. LEGILE DE MIȘCARE

3.3.1. Ciclul de funcționare

Ciclul de funcționare al unui mecanism cu camă cuprinde o succesiune de faze în care tachelul se deplasează într-un sens, în sens opus sau staționează. Cazul cel mai reprezentativ presupune existența a patru faze, după cum urmează.

- **Faza de ridicare** sau **cursa ascendentă** (R) în care tachelul se deplasează din **poziția extremă inferioară** (cea mai apropiată de centrul camei) în **poziția extremă superioară** (cea mai depărtată de centrul camei);
- **Faza de staționare superioară** (S) în care tachelul este imobil în poziția extremă superioară;
- **Faza de coborâre** sau **cursa descendentă** (C) în care tachelul se deplasează din poziția extremă superioară în poziția extremă inferioară;
- **Faza de staționare inferioară** (S) în care tachelul este imobil în poziția extremă inferioară.

Ciclul cu patru faze (R, S, C, S) este ilustrat cu ajutorul diagramelor $s(\varphi)$ sau $\psi(\varphi)$ - Fig.3.10. Deplasarea tachelului între cele două poziții extreme este **cursa** (h , ψ_h), iar unghiurile de rotație ale camei, pentru fiecare fază, se numesc **unghiuri de fază** și sunt notate, în ordinea fazelor, φ_r , φ_s , φ_c , φ_i . Fazele de staționare pot lipsi, amândouă sau numai una dintre ele, obținând ciclurile funcționare de tip RC, RSC sau RCS.

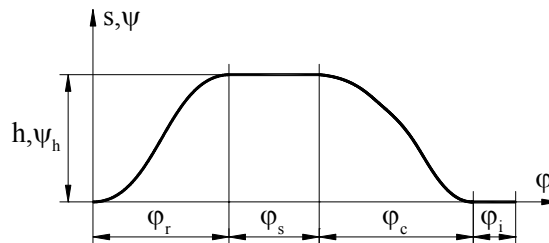


Fig. 3.10

Cinematica mecanismului cu camă este descrisă analitic de funcțiile de transmitere $s(\varphi)$, $s'(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$, $s''(\varphi) = \frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $s'''(\varphi) = \frac{d^3s}{d\varphi^3}$ pentru tachelul de translație și $\psi(\varphi)$, $\psi'(\varphi) = \frac{d\psi}{d\varphi}$, $\psi''(\varphi) = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$, $\psi'''(\varphi) = \frac{d^3\psi}{d\varphi^3}$ - pentru tachelul de rotație. Mișcarea camei se consideră uniformă, având viteza unghiulară

$\omega_1 = \dot{\varphi} = ct$. Această ipoteză este valabilă (sau poate fi admisă aproximativ) în marea majoritate a aplicațiilor practice. Ca urmare, între funcțiile de transmitere ale mecanismului cu tchet de translație $s(\varphi)$, $s'(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$, $s''(\varphi) = \frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $s'''(\varphi) = \frac{d^3s}{d\varphi^3}$, pe de o parte, și parametrii cinematici ai tchetului v (viteza), a (acelația), p (pulsul - acelația de ordinul doi), pe de altă parte, există relațiile

$$s'(\varphi) = \frac{v}{\omega_1}, \quad s''(\varphi) = \frac{a}{\omega_1^2}, \quad s'''(\varphi) = \frac{p}{\omega_1^3} \quad (3.1)$$

În cazul tchetului de rotație, parametrul de poziție natural este unghiul φ_2 măsurat în sens antiorar de la semi-axa pozitivă Ax_3 (Fig.3.11), dar, în mod obișnuit, se folosește unghiul ψ măsurat în sens invers. Între cele două unghiuri există relația $\psi_0 + \psi + \varphi_2 = \pi$, în care ψ_0 este un unghi constant (Fig.3.11). Această situație conduce la următoarele relații între funcțiile de transmitere $\psi(\varphi)$, $\psi'(\varphi)$, $\psi''(\varphi)$, $\psi'''(\varphi)$ și parametrii mișcării tchetului ω_2 , ε_2 , $\dot{\varepsilon}_2$,

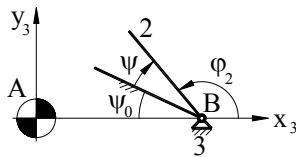


Fig.3.11

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \pi - \psi_0 - \varphi_2(\varphi) \\ \psi'(\varphi) &= -\varphi_2'(\varphi) = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ \psi''(\varphi) &= -\varphi_2''(\varphi) = -\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2} \\ \psi'''(\varphi) &= -\varphi_2'''(\varphi) = -\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\omega_1^3} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.3.2. Adoptarea legii de mișcare

Pentru adoptarea legii de mișcare a tchetului se utilizează mai multe criterii:

- criteriul funcțional;
- criteriul dinamic;
- criteriul tehnologic.

■ Criteriul funcțional

Legea de mișcare trebuie să îndeplinească anumite condiții cinematice specifice operației tehnologice executate fie direct de tchet, fie prin intermediul

unui mecanism de transmitere. În majoritatea cazurilor acest criteriu nu reclamă o lege de mișcare bine definită, ci numai anumite caracteristici ale acesteia, cum sunt unghiurile de fază, cursa sau tipul ciclului de funcționare.

■ Criteriul dinamic

Conform acestui criteriu, legea de mișcare trebuie să asigure o funcționare "liniștită" - fără șocuri și vibrații și cu solicitări ale elementelor cât mai reduse. Comportarea dinamică este determinată, desigur, de variația accelerației tachtului.

Cel mai nefavorabil fenomen dinamic este **șocul dur** care se înregistrează când există **discontinuități în variația vitezei**, iar accelerația tinde, teoretic, la infinit. Acest fenomen este similar cu o ciocnire și este însoțit de o suprasolicitare foarte mare a mecanismului.

Când **accelerația are discontinuități finite**, iar pulsul (supraaccelerația) tinde la infinit, se produc **șocuri moi**, care constituie o sursă de vibrații. Pentru a asigura continuitatea vitezei și accelerației acestea trebuie să fie egale cu zero la începutul și la sfârșitul fazelor R sau C dacă acestea se învecinează cu faze de staționare (S).

Valoarea maximă a accelerației absolute constituie, de asemenea, un element de apreciere a dinamicii mecanismului.

Trebuie remarcat că forțele de inerție, ca și suprasolicitările cauzate de șocuri și vibrații sunt proporționale cu pătratul vitezei unghiulare a camei (viteza de funcționare). De aceea când se discută oportunitatea alegerii unei legi de mișcare trebuie avută în vedere și viteza de funcționare. De exemplu, legile de mișcare cu discontinuități la viteze (șocuri dure) nu se recomandă a fi utilizate. Totuși, la viteze de funcționare foarte lente (sub 1 rad/s) pot fi acceptate fără consecințe dinamice majore. În mod similar, legile de mișcare cu discontinuități la accelerații (șocuri moi) pot fi utilizate la viteze mici și medii.

■ Criteriul tehnologic

Acest criteriu caracterizează legile de mișcare din punct de vedere al posibilităților de prelucrare a profilului în condiții cât mai economice. Relația precizie de prelucrare - precizie cinematică este diferită pentru diverse legi de mișcare, astfel încât, unele sunt mai tehnologice, iar altele mai puțin.

*

În cele ce urmează se prezintă cele mai uzuale legi de mișcare, se indică proprietățile lor dinamice (accelerația maximă, existența discontinuităților la viteză și la accelerații) și tehnologice precum și recomandări de utilizare.

Pentru scrierea comodă și generală a ecuațiilor, se utilizează variabilele adimensionale

$$S = \frac{s}{h}, \quad \phi = \frac{\varphi}{\varphi_f}, \quad (3.3)$$

în care φ_r unghiul de fază. Între derivatele funcției $s(\varphi)$ și derivatele funcției $S(\phi)$ există relațiile

$$S' = \frac{\varphi_r}{h} s', \quad S'' = \frac{\varphi_r^2}{h} s'', \quad S''' = \frac{\varphi_r^3}{h} s''' \quad (3.4)$$

Domeniul de variație al variabilelor S și ϕ pentru o fază este, așa cum rezultă din (3.3), $[0, 1]$. Revenirea la variabilele s și φ se face cu ușurință utilizând relațiile (3.3) și (3.4).

Ecuțiile legilor de mișcare sunt scrise pentru faza de ridicare a tachelului (forma standard). Pentru faza de coborâre, considerând originea de măsură a parametrului ϕ la începutul fazei, ecuațiile se modifică astfel

$$\begin{aligned} S_c(\phi) &= 1 - S_r(\phi) \\ S'_c(\phi) &= -S'_r(\phi) \\ S''_c(\phi) &= -S''_r(\phi) \\ S'''_c(\phi) &= -S'''_r(\phi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3.3. Legi de mișcare uzuale

3.3.3.1. Legi de mișcare elementare

■ Legea de mișcare cu viteză constantă

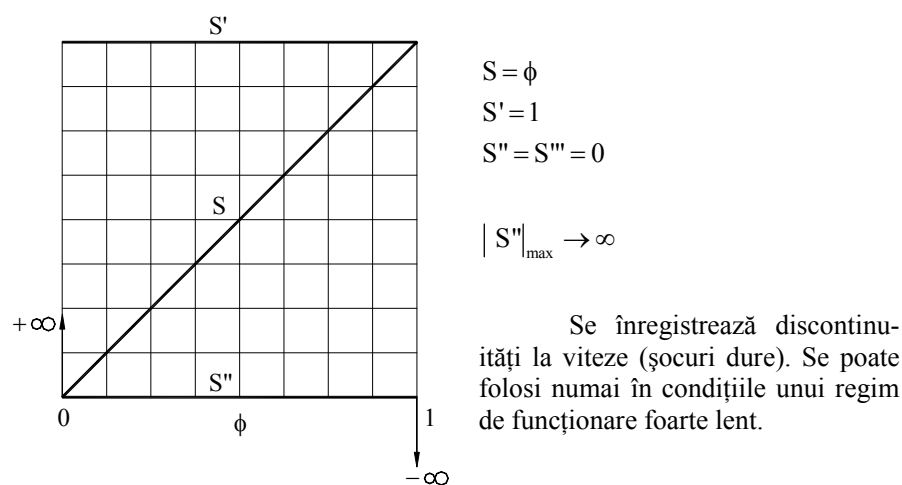


Fig. 3.12

■ **Legea de mișcare cu accelerație constantă (mișcarea uniform accelerată)**

Domeniul $\phi \in [0,1]$ se împarte în două subdomenii $\phi \in [0,q]$ și $\phi \in [q,1]$ în care $q \in (0, 1)$. Ecuațiile au forme diferite pentru fiecare subdomeniu.

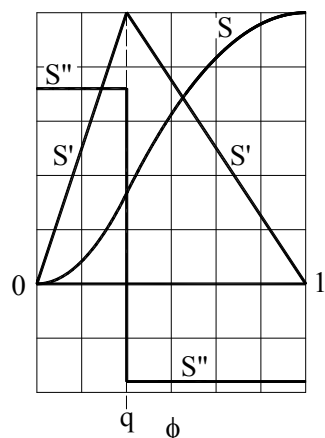


Fig. 3.13

$\phi \in [0, q]$	$\phi \in [q, 1]$
$S = \frac{1}{q} \phi^2$	$S = -\frac{1}{1-q} (\phi^2 - 2\phi + q)$
$S' = \frac{2}{q} \phi$	$S' = -\frac{2}{1-q} (\phi - 1)$
$S'' = \frac{2}{q}$	$S'' = -\frac{2}{1-q}$
$S''' = 0$	$S''' = 0$

$$|S''|_{\max} = \max\left(\frac{2}{q}, \frac{2}{1-q}\right)$$

Se înregistrează discontinuități la accelerații (șocuri moi) fapt care recomandă utilizarea acestei legi de mișcare numai la viteze mici și medii. Valoarea optimă, din punct de vedere dinamic, este $q = \frac{1}{2}$, care conduce la cea mai mică accelerație $|S''|_{\max} = 4$.

■ **Legea de mișcare cu accelerație cosinoidală**

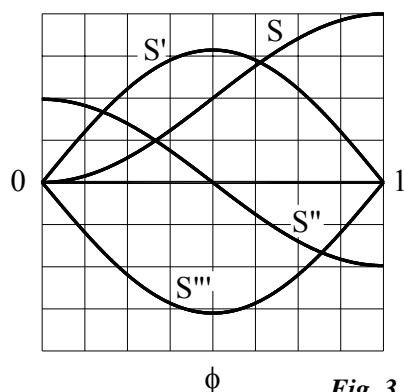


Fig. 3.14

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\pi\phi)$$

$$S' = \frac{\pi}{2} \sin(\pi\phi)$$

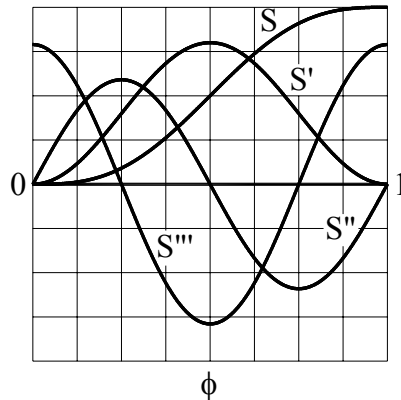
$$S'' = \frac{\pi^2}{2} \cos(\pi\phi)$$

$$S''' = -\frac{\pi^3}{2} \sin(\pi\phi)$$

$$|S''|_{\max} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4,93$$

Se înregistrează discontinuități la accelerații (șocuri moi). Se recomandă utilizarea la viteze mici și medii. Această lege de mișcare are calități dinamice foarte bune (continuitate la accelerații) în cazul particular $\varphi_r = \varphi_c = \pi$, $\varphi_s = \varphi_1 = 0$.

■ **Legea de mișcare cu accelerație sinusoidală**



$$S = \phi - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\phi)$$

$$S' = 1 - \cos(2\pi\phi)$$

$$S'' = 2\pi \sin(2\pi\phi)$$

$$S''' = 2\pi^2 \cos(2\pi\phi)$$

$$|S'''| = 2\pi \approx 6,28$$

Fig. 3.15

Viteza și accelerația sunt continue ceea ce conferă acestei legi de mișcare calități dinamice foarte bune. Prelucrarea profilului reclamă o precizie ridicată.

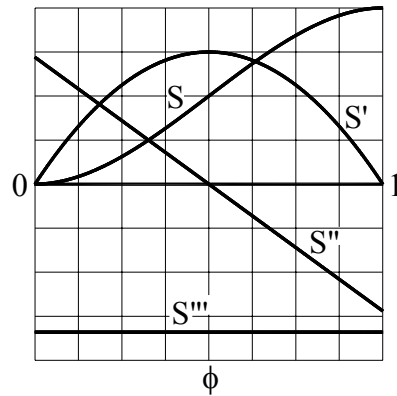
3.3.3.2. Legi de mișcare polinomiale

Funcția $S(\phi)$ se exprimă prin polinoame de forma

$$S(\phi) = C_0 + C_1\phi + \dots + C_n\phi^n$$

Datorită numărului nelimitat de constante se pot impune condiții numeroase și variate pentru funcțiile de transmitere. Astfel, este posibil să se obțină continuitate pentru funcțiile de transmitere de orice ordin (k).

■ Legea de mișcare polinomială 2 -3 (k=1)



$$S = 3\phi^2 - 2\phi^3$$

$$S' = 6\phi - 6\phi^2$$

$$S'' = 6 - 12\phi$$

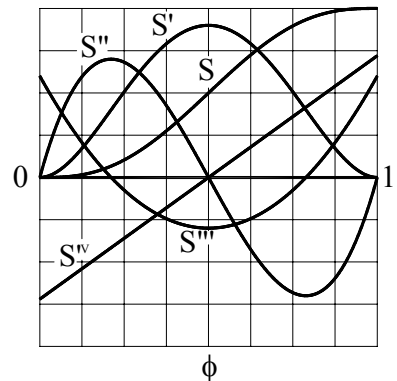
$$S''' = -12$$

$$|S''|_{\max} = 6$$

Fig. 3.16

Este o lege de mișcare cu discontinuități la accelerații care se poate utiliza la viteze mici și medii.

■ Legea de mișcare polinomială 3 -4 - 5 (k=2)



$$S = 10\phi^3 - 15\phi^4 + 6\phi^5$$

$$S' = 30\phi^2 - 60\phi^3 + 30\phi^4$$

$$S'' = 60\phi - 180\phi^2 + 120\phi^3$$

$$S''' = 60 - 360\phi + 360\phi^2$$

$$|S''|_{\max} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cong 5,77$$

Fig. 3.17

Această lege de mișcare are calități dinamice foarte bune (continuitate la viteze și accelerații), fiind comparabilă cu legea de mișcare cu accelerație sinusoidală, dar este mai tehnologică decât aceasta.

■ **Legea de mișcare polinomială 4 - 5 - 6 - 7 (k=3)**

$$S = 35\phi^4 - 84\phi^5 + 70\phi^6 - 20\phi^7$$

$$S' = 140\phi^3 - 420\phi^4 + 420\phi^5 - 140\phi^6$$

$$S'' = 420\phi^2 - 1680\phi^3 + 2100\phi^4 - 840\phi^5$$

$$S''' = 840\phi - 5040\phi^2 + 8400\phi^3 - 4200\phi^4$$

$$|S''|_{\max} = \frac{84}{5\sqrt{5}} \cong 7,52$$

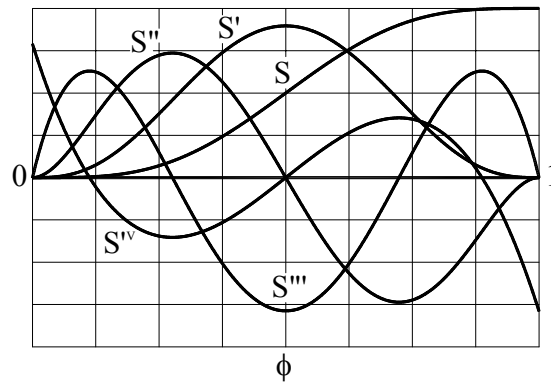


Fig. 3.18

■ **Legea de mișcare polinomială 3 - 4 - 5 - 6 (k=2)**

$$S = 8\phi^3 - 12\phi^4 + 6\phi^5 - \phi^6$$

$$S' = 24\phi^2 - 48\phi^3 + 30\phi^4 - 6\phi^5$$

$$S'' = 48\phi - 144\phi^2 + 120\phi^3 - 30\phi^4$$

$$S''' = 48 - 288\phi + 360\phi^2 - 120\phi^3$$

$$|S''|_{\max} = 6$$

Această lege de mișcare se folosește pentru un ciclu de funcționare de tip RCS cu $\varphi_r = \varphi_c$. În aceste condiții are calități dinamice foarte bune asigurând continuitatea la viteze și la accelerații. Ecuațiile sunt unice pentru ambele faze - de ridicare și de coborâre: $\phi \in [0, 2]$.

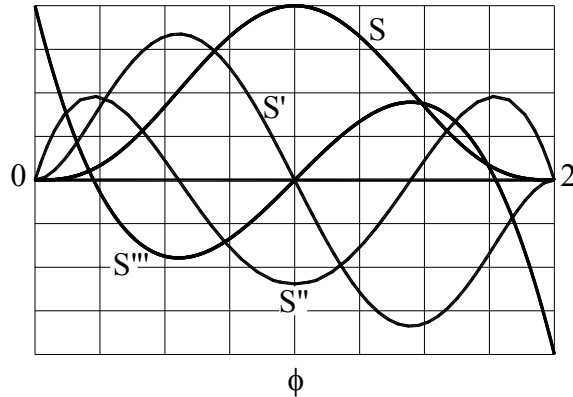


Fig. 3.19

3.3.3.3. Legi de mișcare combinate

Unghiul de fază este împărțit în mai multe sectoare (intervale), iar pentru fiecare interval funcțiile de transmitere au expresii diferite. Scopul utilizării lor este de a pune de acord criteriul dinamic cu cel determinat de rolul funcțional sau pentru a obține calități dinamice foarte bune.

■ Legea de mișcare cu viteză trapezoidală

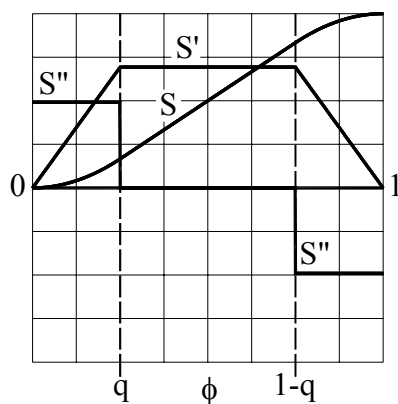


Fig. 3.20

Se prevăd trei sectoare: unul central, $\phi \in [q, 1-q]$ și cu $v = ct$ și două laterale, $\phi \in [0, q]$ și $\phi \in [1-q, 1]$ cu $a = ct$. Se utilizează pentru a elimina șocurile dure când criteriul rolului funcțional pretinde o mișcare uniformă. Problema esențială este alegerea parametrului q , care determină mărimea sectoarelor laterale, de racordare. O valoare prea mare pentru q are consecințe defavorabile în ceea ce privește rolul funcțional, iar o valoare prea mică înrăutățește condițiile dinamice și tehnologice. De mare importanță, pentru adoptarea unei soluții, este testarea sau utilizarea experienței în

exploatarea unor mecanisme similare. O valoare cu caracter de recomandare este $q = \frac{1}{8}$.

$\phi \in [0, q]$	$\phi \in [q, 1-q]$	$\phi \in [1-q, 1]$
$S = \frac{1}{2q(1-q)} \phi^2$	$S = \frac{1}{1-q} \phi - \frac{q}{2(1-q)}$	$S = -\frac{1}{2q(1-q)} (\phi^2 - 2\phi + 1) + 1$
$S' = \frac{1}{q(1-q)} \phi$	$S' = \frac{1}{1-q}$	$S' = -\frac{1}{q(1-q)} (\phi - 1)$
$S'' = \frac{1}{q(1-q)}$	$S'' = 0$	$S'' = -\frac{1}{q(1-q)}$
$S''' = 0$		$S''' = 0$

$|S''|_{\max} = \frac{1}{q(1-q)}$. Pentru $q = \frac{1}{8}$, $|S''|_{\max} \cong 9,142$. Se înregistrează discontinuități la accelerații (șocuri moi).

■ **Legea de mișcare cu viteză trapezoidală modificată sinusoidal**

Această lege de mișcare este concepută similar cu cea precedentă cu deosebirea că în sectoarele de racordare accelerația este sinusoidală. În felul acesta se elimină discontinuitățile de la accelerații, ceea ce permite o viteză de funcționare mai mare, dar trebuie acordată o atenție sporită tehnologiei de prelucrare a camei.

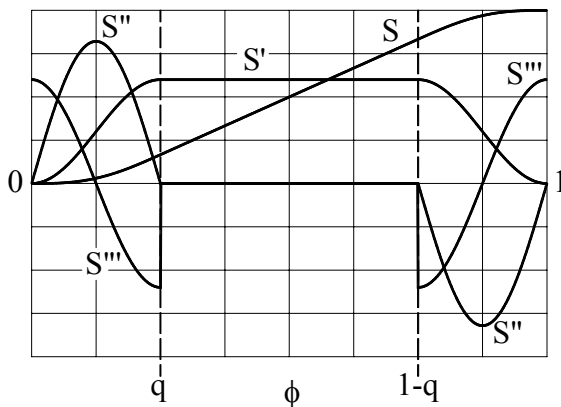


Fig. 3.21

$\phi \in [0, q]$ $S = \frac{1}{2(1-q)}\phi - \frac{q}{2\pi(1-q)}\sin\left(\frac{\pi}{q}\phi\right)$ $S' = \frac{1}{2(1-q)}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{q}\phi\right)\right)$ $S'' = \frac{\pi}{2q(1-q)}\sin\left(\frac{\pi}{q}\phi\right)$ $S''' = \frac{\pi^2}{2q^2(1-q)}\cos\left(\frac{\pi}{q}\phi\right)$	$\phi \in [q, 1-q]$ $S = \frac{1}{1-q}\phi - \frac{q}{2(1-q)}$ $S' = \frac{1}{1-q}$ $S'' = 0$
--	---

$$\phi \in [1-q, 1]$$

$$S = \frac{1}{2(1-q)}\phi + \frac{q}{2\pi(1-q)}\sin\left(\frac{\pi}{q}(\phi + q - 1)\right) - \frac{1}{2(1-q)} + 1$$

$$S' = -\frac{1}{2(1-q)}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q}(\phi + q - 1)\right)\right)$$

$$S'' = -\frac{\pi}{2q(1-q)}\sin\left(\frac{\pi}{q}(\phi + q - 1)\right)$$

$$S''' = \frac{\pi^2}{2q^2(1-q)}\cos\left(\frac{\pi}{q}(\phi + q - 1)\right)$$

$$|S''|_{\max} = \frac{\pi}{2q(1-q)}. \text{ Pentru } q = \frac{1}{8}, |S''|_{\max} \cong 14,361.$$

■ **Legea de mișcare cu accelerație trapezoidală**

Pentru a obține o funcție de transmitere de ordinul doi de formă trapezoidală (Fig.3.22) sunt necesare cinci sectoare.

$\phi \in [0, q]$	$\phi \in [q, \frac{1}{2} - q]$
$S = \frac{1}{6} A \frac{\phi^3}{q}$	$S = \frac{1}{2} A (\phi - q)^2 + B_1 (\phi - q) + B_2$
$S' = \frac{1}{2} A \frac{\phi^2}{q}$	$S' = A (\phi - q) + B_1$
$S'' = A \frac{\phi}{q}$	$S'' = A$
$S''' = \frac{A}{q}$	$S''' = 0$

$\phi \in [\frac{1}{2} - q, \frac{1}{2} + q]$
$S = -\frac{1}{6q} A (\phi + q - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} A (\phi + q - \frac{1}{2})^2 + C_1 (\phi + q - \frac{1}{2}) + C_2$
$S' = -\frac{1}{2q} A (\phi + q - \frac{1}{2})^2 + A (\phi + q - \frac{1}{2}) + C_1$
$S'' = -\frac{A}{q} (\phi + q - \frac{1}{2}) + A$
$S''' = -\frac{A}{q}$

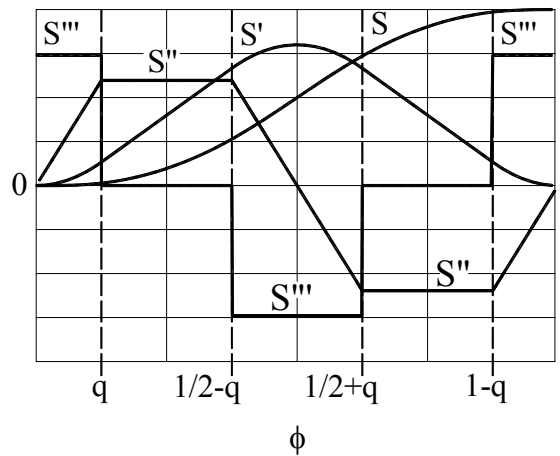


Fig. 3.22

Pentru sectoarele 4 cu $\phi \in [\frac{1}{2} + q, \frac{1}{2} - q]$ și 5 cu $\phi \in [1 - q, 1]$, funcțiile de transmitere se calculează, prin simetrie, pe baza relațiilor

$$S(\phi) = 1 - S(1 - \phi)$$

$$S'(\phi) = S'(1 - \phi)$$

$$S''(\phi) = -S''(1 - \phi)$$

$$S'''(\phi) = S'''(1 - \phi)$$

Constantele care intervin în ecuații au următoarele valori

$$A = \frac{4}{1 - 2q}, B_1 = \frac{1}{2}Aq, B_2 = \frac{1}{6}Aq^2$$

$$C_1 = A \frac{1 - 3q}{2}, C_2 = A \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2q \right)^2 + \frac{1}{2}q \left(\frac{1}{2} - 2q \right) + \frac{1}{6}q^2 \right)$$

$$|S''|_{\max} = \frac{4}{1 - 2q}. \text{ Pentru } q = \frac{1}{8}, |S''|_{\max} \cong 5,33.$$

Această lege de mișcare asigură continuitatea la viteze și la accelerații având calități dinamice foarte bune în orice regim de viteze. Are, de asemenea, caracteristici tehnologice mai bune decât legea de mișcare cu accelerație sinusoidală cu care poate fi comparată. Pentru valoarea recomandată $q = \frac{1}{8}$, accelerația maximă este mai redusă decât la legile de mișcare similare - cu accelerație sinusoidală și polinomială 3 - 4 - 5.

3.4. ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI CINEMATICĂ

3.4.1. Problematika generală

În cadrul acestui capitol se prezintă procedeele de calcul pentru o serie de parametri geometrici și cinematici. Aceste procedee intervin în operația de sinteză dimensională care va fi tratată într-un capitol următor. Ca date inițiale se consideră legea de mișcare a tachelului și parametrii geometrici de bază - constante care definesc mecanismul din punct de vedere constructiv. Se tratează, din acest punct de vedere, patru tipuri de mecanisme cu came - trei plane și unul spațial. Pentru fiecare tip se abordează aceleași probleme prezentate pe scurt în continuare.

■ Caracterizarea constructivă a mecanismului

Se adoptă, convenabil, un sistem de axe de coordonate fix (3) - solidar cu batiul și un sistem (1) solidar cu cama (Fig.3.29, 3.30, 3.31, 3.32).

Unghiul sistemului (1) față de sistemul (3) este unghiul de poziție al camei, φ .

Se definesc parametrii geometrici de bază ai mecanismului și se calculează dimensiunile de gabarit ale camei (razele extreme ale profilului).

■ Sinteza profilului teoretic

Se stabilesc ecuațiile parametrice, în coordonate carteziene ale profilului teoretic. Pentru aceasta se determină coordonatele punctului C (centrul rolei) în sistemul fix (3) și, apoi, se operează o transformare de coordonate în sistemul (1) utilizând relațiile [A.5]. Parametrul care intervine în ecuațiile profilului teoretic este unghiul de poziție al camei, φ .

■ Cinematica cuplei superioare

Se scrie ecuația de viteze la nivelul cuplei superioare,

$$\bar{v}_{C2} = \bar{v}_{C1} + \bar{v}_{C21} \quad (3.6)$$

în care C este centrul rolei sau punctul geometric de contact în cazul tachelului plat. Punctele C_1 și C_2 coincid cu C și aparțin elementului 1 (cama), respectiv 2 (tachelul). Din această ecuație se calculează viteza relativă de alunecare \bar{v}_{C21} care are direcția tangentei la profilul teoretic sau la profilul real în cazul tachelului plat.

■ Unghiul de presiune

Unghiul de presiune este unghiul ascuțit format între viteza punctului de contact aparținând tachelului (\bar{v}_{C2}) și normala la profil. În cazul mecanismelor cu rolă, unghiul de presiune se definește pe mecanismul echivalent, aplicând transformarea prin eliminarea rolei. Determinarea unghiului de presiune se face pornind de la expresia vectorială a vitezei relative de alunecare, \bar{v}_{C21} .

■ Sinteza profilelor reale

Pentru determinarea profilelor reale, interior și exterior, se stabilește poziția punctelor de contact rolă - profile reale, în raport cu sistemul fix (3), utilizând noțiunea de unghi de presiune. Apoi, se aplică transformarea de

coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) obținând ecuațiile parametrice ale profilelor reale.

Observație. În ecuațiile profilelor intervine parametrul φ care se consideră scalar cu semn și se introduce în calcul cu semnul (+) când viteza unghiulară a camei este pozitivă și cu (-) în caz contrar. Funcțiile $s(\varphi)$, $s'(\varphi)$, $s''(\varphi)$ care intervin, de asemenea, în ecuații se calculează cu formulele standard (prezentate în subcap. 3.3.), dar în cazul în care viteza unghiulară a camei este negativă, derivatele de ordin impar ($s'(\varphi)$, $s'''(\varphi)$) își schimbă semnul.

■ Raza de curbură, subtăierea

Raza de curbură, R_c , a profilului unei came disc se calculează cu formula [A.12],

$$R_c = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot \text{SGN}(xy' - yx'), \quad (3.7)$$

în care x și y sunt coordonatele punctului pentru care se calculează raza de curbură, iar x' , x'' , y' , y'' sunt derivatele în raport cu parametrul φ , calculate în același punct. Funcția $\text{SGN}(xy' - yx')$ este egală cu ± 1 după cum expresia din paranteză este pozitivă sau negativă.

Formula (3.7) indică și caracterul profilului cu condiția ca originea sistemului de coordonate să coincidă cu centrul camei (Fig.3.23). Astfel, dacă raza de curbură rezultă pozitivă, profilul este convex, iar dacă rezultă negativă este concav. Precizăm că un profil se consideră convex în P dacă are concavitatea orientată spre centrul camei (Fig.3.23.a) și concav în caz contrar (Fig.3.23.b).

În cazul camelor cu mișcare de translație paralelă cu axa Ox (Fig.3.24) raza de curbură se calculează cu formula [A.13],

$$R_c = \frac{-(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot \text{SGN}(x'). \quad (3.8)$$

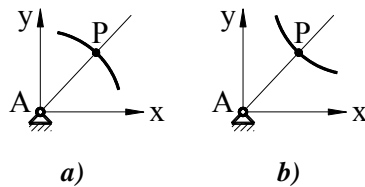


Fig. 3.23

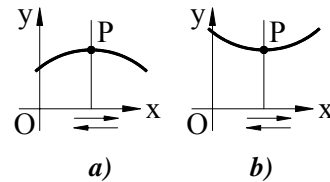


Fig. 3.24

care arată și caracterul profilului. Prin convenție, se consideră că profilul este convex în P dacă are convexitatea orientată spre sensul pozitiv al axei Oy (Fig.3.24.a) și concav în caz contrar (Fig.3.24.b).

În cazul mecanismelor cu rolă formulele (3.7) și (3.8) servesc pentru calculul razei de curbură a profilului teoretic (R_{ct}). Razele de curbură ale profilelor reale, interior (R_{cni}) și exterior (R_{cre}), se determină cu formulele

$$R_{cni} = R_{ct} - r_4 \quad (3.9)$$

$$R_{cre} = R_{ct} + r_4 \quad (3.10)$$

în care r_4 este raza rolei.

Fenomenul de subtăiere este legat de generarea profilelor reale ca înfășurătoare ale familiei de cercuri de rază egală cu raza rolei și având centrele pe profilul teoretic. El se produce în zonele în care caracterul (convex sau concav) al profilului real este diferit de cel al profilului teoretic - adică razele de curbură au semne diferite. Analizând formulele (3.9) și (3.10) din acest punct de vedere se constată următoarele concluzii:

- Subtăierea profilului real interior se produce când $R_{ct} \in [0, r_4]$. deci, condițiile de evitare a subtăierii sunt

$$R_{ct} > r_4 \text{ sau } R_{ct} < 0 \quad (3.11)$$

- Subtăierea profilului real exterior se produce când $R_{ct} \in [-r_4, 0]$, iar condițiile de evitare a subtăierii sunt

$$R_{ct} < -r_4 \text{ sau } R_{ct} > 0 \quad (3.12).$$

Pentru a exemplifica producerea fenomenului de subtăiere, în Fig. 3.25 sunt reprezentate profilele teoretic (C_t), real interior (C_{ni}) și real exterior (C_{re}) ale unei came, iar în Fig.3.26 este reprezentată diagrama $R_{ct}(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Se observă că în zona AB nu sunt îndeplinite condițiile (3.12) și, deci, se produce subtăierea pe profilul real exterior, iar în zona DC nu sunt îndeplinite condițiile (3.11) și, prin urmare, are loc fenomenul de subtăiere pe profilul real interior. Punctele A, B, C și D, în care razele de curbură reale sunt egale cu zero reprezintă puncte singulare pentru curbele respective. Este evident că subtăierea nu este compatibilă cu realizarea practică a profilelor astfel încât, în procesul de proiectare, este necesară verificarea condițiilor (3.11) și (3.12).

Denumirea de **subtăiere** indică faptul că, în ipoteza prelucrării camei, segmentele de profil SABS, respectiv TBCT (Fig. 3.25) se elimină rezultând un profil cu vârfuri ascuțite în S și T.

În cazul mecanismelor care au tachtet plat raza de curbură se calculează cu formula (3.7). Pentru o funcționare corectă profilul trebuie să fie integral convex, deci trebuie îndeplinită condiția

$$R_{ct} > 0 \quad (3.13)$$

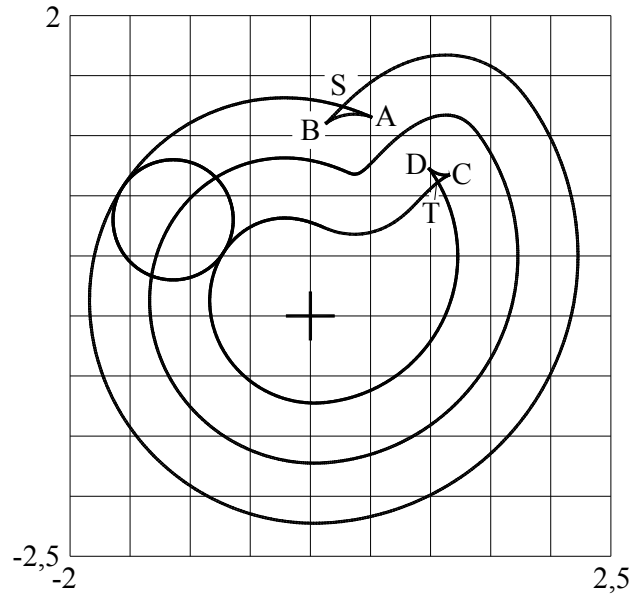


Fig. 3.25

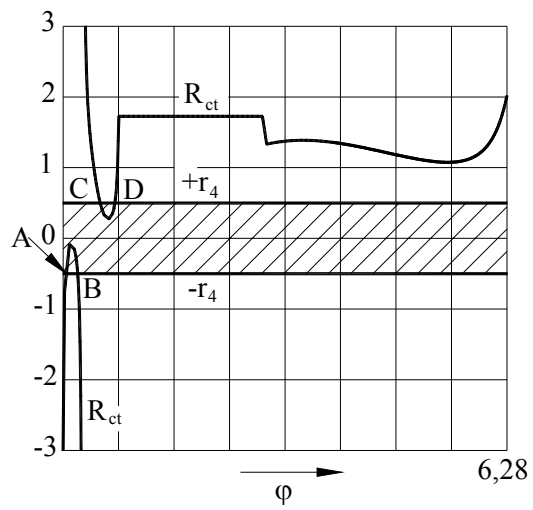


Fig. 3.26

Dacă această condiție nu este respectată, se produce și la aceste mecanisme fenomenul de subțaiere. Pentru exemplificare, în Fig.3.27 este reprezentat profilul unei came, iar în Fig.3.28 - diagrama $R_{cr}(\varphi)$.

Acest profil are patru puncte singulare A, B, C, D, în care $R_{cr} = 0$. În aceste puncte se schimbă caracterul profilului (convex \rightarrow concav sau concav \rightarrow convex), rezultând imaginea din Fig.3.28.b.

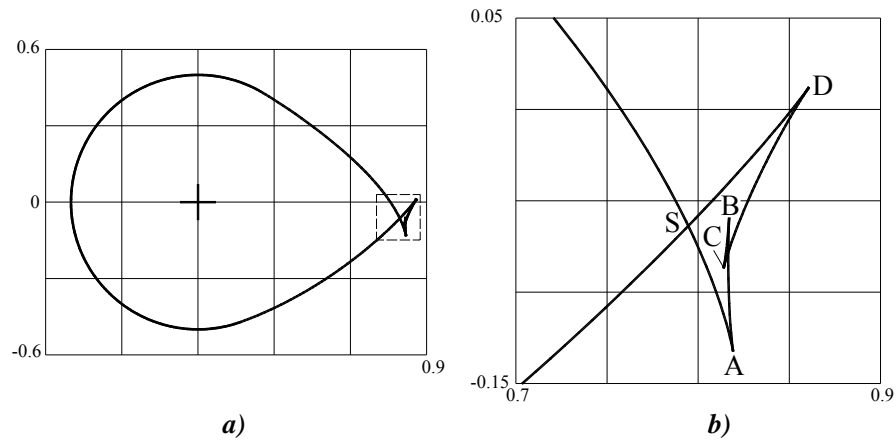


Fig. 3.27

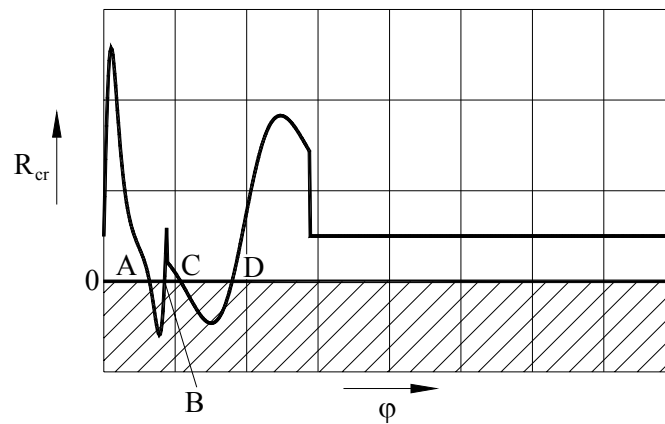


Fig. 3.28

3.4.2. Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă

■ Caracterizarea constructivă

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ (Fig.3.29) cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ay_3 paralelă cu axa de translație a tchetului, în sensul de ridicare, și axa Az_3 perpendiculară pe planul mișcării, orientată spre observator. Se adoptă, de asemenea, un sistem $Ax_1y_1z_1$ solidar cu cama, rotit față de $Ax_3y_3z_3$ cu unghiul de poziție al camei, φ .

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului, definiți cu ajutorul schemei din Fig.3.29, sunt:

- e - excentricitatea (scalar cu semn), distanța de la centrul de rotație al camei la axa tchetului;
- s_0 - distanța minimă, măsurată paralel cu axa tchetului, de la centrul rolei (C) la centrul camei (A);
- r_4 - raza rolei.

Razele extreme ale profilului teoretic rezultă, de asemeni, din Fig. 3.29 și au expresiile

$$r_{t\min} = \sqrt{e^2 + s_0^2}, \quad r_{t\max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2}, \quad (3.14)$$

în care h este cursa tchetului.

■ Sinteza profilului teoretic

Vectorul de poziție al punctului C (centrul rolei) (Fig.3.29) $\vec{r}_C = \overline{AC}$ se proiectează pe axele sistemului fix (3)

$$\begin{aligned} x_{3C} &= e \\ y_{3C} &= s_0 + s \end{aligned} \quad (3.15)$$

Printr-o transformare de coordonate, din sistemul (3) în sistemul (1) [A.5] se obțin expresiile coordonatelor punctului C în raport cu sistemul (1) care reprezintă, în același timp, ecuațiile parametrice ale profilului teoretic,

$$\begin{aligned} x_t &= x_{1C} = e \cos \varphi + (s_0 + s) \sin \varphi \\ y_t &= y_{1C} = -e \sin \varphi + (s_0 + s) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

Prin derivare în raport cu parametrul φ rezultă:

$$\begin{aligned} x'_t &= x'_{1C} = (s' - e) \sin \varphi + (s_0 + s) \cos \varphi \\ y'_t &= y'_{1C} = (s' - e) \cos \varphi - (s_0 + s) \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} x''_t &= x''_{1C} = (2s' - e) \cos \varphi - (s_0 + s - s'') \sin \varphi \\ y''_t &= y''_{1C} = -(2s' - e) \sin \varphi - (s_0 + s - s'') \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.18)$$

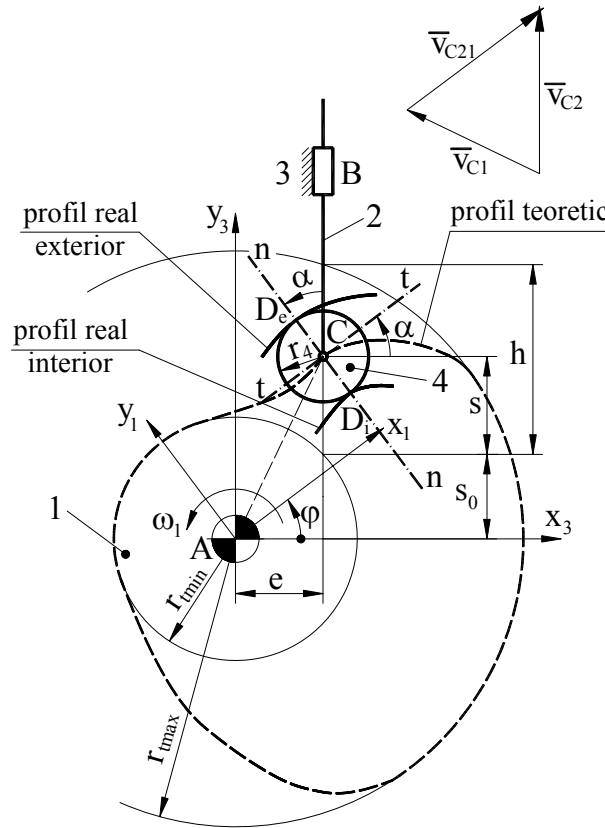


Fig. 3.29

Ecuțiile profilului teoretic, în coordonate polare, se obțin pe baza relațiilor de transformare [A.7],

$$\begin{aligned} r_t &= \sqrt{e^2 + (s_0 + s)^2} \\ \theta_t &= \arctg \frac{-e \sin \varphi + (s_0 + s) \cos \varphi}{e \cos \varphi + (s_0 + s) \sin \varphi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

■ Cinematica cuplei superioare

Din ecuațiile de viteze (3.6) se determină viteza realivă \bar{v}_{C21} ,

$$\bar{v}_{C21} = \bar{v}_{C21} - \bar{v}_{C1}$$

Vitezele \bar{v}_{C2} și \bar{v}_{C1} au expresiile analitice

$$\bar{v}_{C2} = \bar{j}_3 v$$

$$\bar{v}_{C1} = \bar{\omega} \times \overline{AC} = \bar{k}_3 \omega \times (\bar{i}_3 e + \bar{j}_3 (s_0 + s)) = -\bar{i}_3 \omega (s_0 + s) + \bar{j}_3 \omega e$$

care conduce la

$$\bar{v}_{C21} = \bar{i}_3 \omega (s_0 + s) + \bar{j}_3 (v - \omega e) \quad (3.20)$$

În aceste relații $v = v_{C2}$ este viteza tachtului, iar $\omega = \omega_1$ - viteza unghiulară a camei.

■ Unghiul de presiune

Particularizând definiția generală (par. 3.4.1.), la acest mecanism unghiul de presiune, α , se formează între axa tachtului (Ay_3) și normala la profile trasată prin centrul rolei (C). Evident, același unghi se formează între tangenta la profil și perpendiculara pe tacht (Ax_3). Deoarece viteza relativă \bar{v}_{C21} are direcția tangentei la profil, se poate scrie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\bar{v}_{C21})_{y_3}}{(\bar{v}_{C21})_{x_3}}$$

Având în vedere expresia (3.20) a vectorului \bar{v}_{C21} , rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v}{\omega} - e}{s_0 + s} = \frac{s' - e}{s_0 + s} \quad (3.21)$$

Menționăm că unghiul de presiune calculat cu formula (3.21) este un unghi orientat, măsurat de la axa tachtului la normala profilului teoretic și se exprimă printr-un scalar cu semn.

■ Sinteza profilului real

Razele vectoriale ale punctelor de contact rolă - profil real: D_i și D_e (Fig.3.29) sunt:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{Di} &= \overline{AC} + \overline{CD}_i \\ \bar{r}_{De} &= \overline{AC} + \overline{CD}_e\end{aligned}\quad (3.22)$$

Proiectând \bar{r}_{Di} și \bar{r}_{De} pe axele sistemului (3) se obțin coordonatele punctelor D_i și D_e ,

$$\begin{aligned}x_{3Di} &= x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = x_{3C} + r_4 \sin \alpha \\ y_{3Di} &= y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = y_{3C} - r_4 \cos \alpha \\ x_{3De} &= x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x_{3C} - r_4 \sin \alpha \\ y_{3De} &= y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y_{3C} + r_4 \cos \alpha\end{aligned}$$

Înlocuind x_{3C} și y_{3C} cu expresiile lor (3.15) se poate scrie

$$\begin{aligned}x_{3D} &= e \pm r_4 \sin \alpha \\ y_{3D} &= (s_0 + s) \mp r_4 \cos \alpha\end{aligned}\quad (3.23)$$

în care semnul de sus corespunde profilului interior, iar cel de jos - profilului exterior.

Aplicând transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) [A.5], se obțin ecuațiile parametrice ale profilului real,

$$\begin{aligned}x_r &= x_{1D} = (e \pm r_4 \sin \alpha) \cos \varphi + (s_0 + s \mp r_4 \cos \alpha) \sin \varphi \\ y_r &= y_{1D} = -(e \pm r_4 \sin \alpha) \sin \varphi + (s_0 + s \mp r_4 \cos \alpha) \cos \varphi\end{aligned}\quad (3.24)$$

sau

$$\begin{aligned}x_r &= x_{1D} = e \cos \varphi + (s_0 + s) \sin \varphi \pm r_4 \sin(\alpha - \varphi) \\ y_r &= y_{1D} = -e \sin \varphi + (s_0 + s) \cos \varphi \mp r_4 \cos(\alpha - \varphi)\end{aligned}\quad (3.25)$$

■ Raza de curbură

Pentru calculul razei de curbură a profilului teoretic R_{ct} . Se aplică formula (3.7), în care se introduc coordonatele și derivatele lor date de formulele (3.16), (3.17) și (3.18).

$$R_{ct} = \frac{\left((s' - e)^2 + (s_0 + s)^2\right)^{3/2}}{(s' - e)(2s' - e) + (s_0 + s)(s_0 + s - s'')} \cdot \text{SGN}\left((s_0 + s)^2 - e(s' - e)\right)\quad (3.26)$$

3.4.3. Mecanismul plan cu tchet de rotație și rolă

■ Caracterizarea constructivă

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ (Fig.3.30) cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ax_3 orientată după vectorul \overline{AB} , iar axa Ay_3 orientată astfel încât y_{3C} să fie pozitiv.

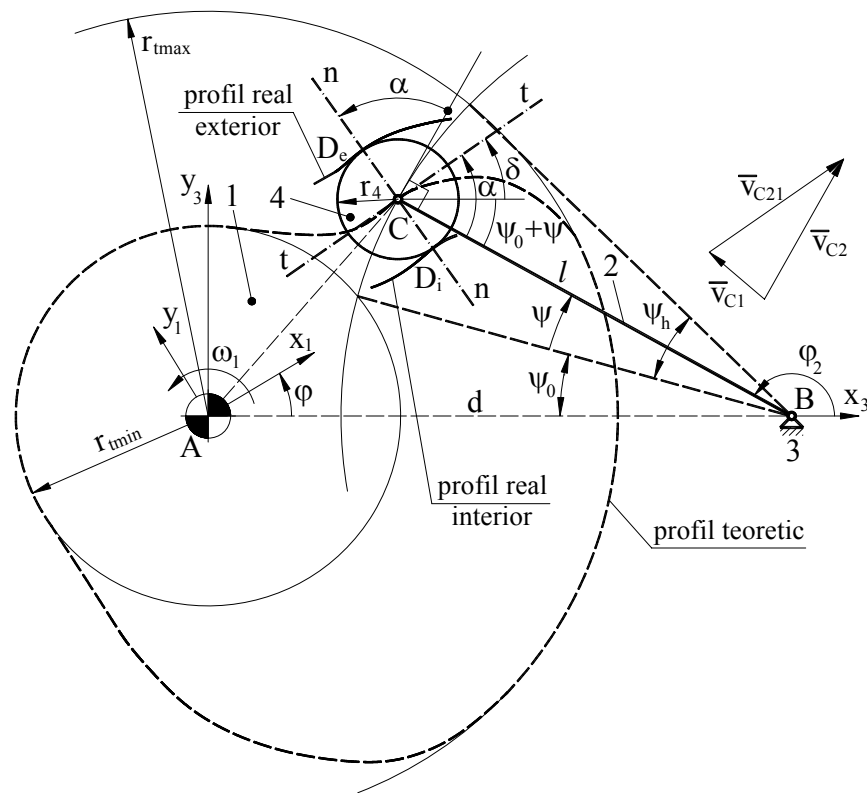


Fig. 3.30

Se recomandă reprezentarea mecanismului astfel încât centrul de rotație al tchetului, B, să fie în dreapta punctului A. În această ipoteză axa Az_3 rezultă orientată spre observator. Se adoptă, de asemenea, sistemul $Ax_1y_1z_1$ solidar cu cama și rotit cu unghiul φ în raport cu sistemul $Ax_3y_3z_3$.

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului sunt:

- $d=AB$ - distanța dintre centrul camei (A) și centrul de rotație al tachelului (B);
- $\ell = BC$ - lungimea tachelului;
- ψ_0 - unghiul minim format de tachelul BC cu linia centrelor AB;
- r_4 - raza rolei.

Razele extreme ale profilului teoretic rezultă, de asemeni, din Fig.3.29 și au expresiile

$$r_{t\min} = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2\ell d \cos \psi_0}, \quad r_{t\max} = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2\ell d \cos(\psi_0 + \psi_h)}, \quad (3.14)$$

în care ψ_h este cursa unghiulară a tachelului.

■ Sinteza profilului teoretic

Vectorul de poziție al punctului C,

$$\vec{r}_C = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

se proiectează pe axele triedrului fix (3),

$$x_{3C} = d + \ell \cos \varphi_2$$

$$y_{3C} = \ell \sin \varphi_2$$

Având în vedere că $\varphi_2 = \pi - (\psi_0 + \psi)$, se obține

$$x_{3C} = d - \ell \cos(\psi_0 + \psi) \quad (3.28)$$

$$y_{3C} = \ell \sin(\psi_0 + \psi)$$

Se aplică transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1), obținând ecuațiile parametrice ale profilului teoretic

$$x_t = x_{1C} = (d - \ell \cos(\psi_0 + \psi)) \cos \varphi + \ell \sin(\psi_0 + \psi) \sin \varphi$$

$$y_t = y_{1C} = -(d - \ell \cos(\psi_0 + \psi)) \sin \varphi + \ell \sin(\psi_0 + \psi) \cos \varphi$$

sau

$$x_t = x_{1C} = d \cos \varphi - \ell \cos(\varphi + \psi_0 + \psi) \quad (3.29)$$

$$y_t = y_{1C} = -d \sin \varphi + \ell \sin(\varphi + \psi_0 + \psi)$$

Prin derivare, în raport cu parametrul φ , se obține

$$x'_t = x'_{1C} = -d \sin \varphi + \ell(1 + \psi') \sin(\varphi + \psi_0 + \psi) \quad (3.30)$$

$$y'_t = y'_{1C} = -d \cos \varphi + \ell(1 + \psi') \cos(\varphi + \psi_0 + \psi)$$

$$\begin{aligned}x''_t = x''_{1C} &= -d \cos \varphi + \ell(1 + \psi')^2 \cos(\varphi + \psi_0 + \psi) + \ell\psi'' \sin(\varphi + \psi_0 + \psi) \\y''_t = y''_{1C} &= d \sin \varphi - \ell(1 + \psi')^2 \sin(\varphi + \psi_0 + \psi) + \ell\psi'' \cos(\varphi + \psi_0 + \psi)\end{aligned}\quad (3.31)$$

■ Cinematica cuplei superioare

Se determină expresiile analitice ale vitezelor \bar{v}_{C1} și \bar{v}_{C2} ,

$$\begin{aligned}\bar{v}_{C1} &= \bar{\omega}_1 \times \overline{AC} = \bar{k}_3 \omega_1 \times (\bar{i}_3 x_{3C} + \bar{j}_3 y_{3C}) = \\&= -\bar{i}_3 \omega_1 \ell \sin(\psi_0 + \psi) + \bar{j}_3 \omega_1 (d - \ell \cos(\psi_0 + \psi)) \\ \bar{v}_{C2} &= \bar{\omega}_2 \times \overline{BC} = \bar{k}_3 \omega_2 \times (-\bar{i}_3 \ell \cos(\psi_0 + \psi) + \bar{j}_3 \ell \sin(\psi_0 + \psi)) = \\&= -\bar{i}_3 \omega_2 \ell \sin(\psi_0 + \psi) - \bar{j}_3 \omega_2 \ell \cos(\psi_0 + \psi)\end{aligned}$$

Introducând aceste expresii în ecuațiile de viteze (3.6) se obține viteza relativă \bar{v}_{C21} ,

$$\bar{v}_{C21} = \bar{i}_3 \ell (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \sin(\psi_0 + \psi) + \bar{j}_3 (\ell (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \cos(\psi_0 + \psi) - \omega_1 d) \quad (3.32)$$

■ Unghiul de presiune

Prin particularizarea definiției generale (par. 3.4.1.), la acest mecanism, unghiul de presiune, α , se formează între perpendiculara pe tchet și normala la profile trasată prin centrul rolei (C) sau între tchetul (BC) și tangenta în (C) la profilul teoretic. Pentru a determina unghiul de presiune se calculează mai întâi, unghiul δ format de tangenta la profilul teoretic în (C) și linia centrelor ($AB = Ax_3$).

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \delta &= \frac{(\bar{v}_{C21})_{y_3}}{(\bar{v}_{C21})_{x_3}} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{\ell \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \cos(\psi_0 + \psi) - d}{\ell \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \sin(\psi_0 + \psi)} = \frac{\ell(1 + \psi') \cos(\psi_0 + \psi) - d}{\ell(1 + \psi') \sin(\psi_0 + \psi)}\end{aligned}$$

Unghiul de presiune este suma formată din unghiurile δ și $(\psi_0 + \psi)$ (Fig.3.30),

$$\alpha = \delta + \psi_0 + \psi,$$

iar

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}(\psi_0 + \psi)}{1 - \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}(\psi_0 + \psi)}$$

Efectuând transformările corespunzătoare, se obține formula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ell \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - d \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}{d \cdot \sin(\psi_0 + \psi)} = \frac{\ell(1 + \psi') - d \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}{d \cdot \sin(\psi_0 + \psi)} \quad (3.33)$$

■ Sinteza profilului real

Razele vectoriale ale punctelor D_i și D_e , având aceleași expresii (3.22) ca la mecanismul cu tchet de translație, conduc la

$$x_{3Di} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = x_{3C} + r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3Di} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = y_{3C} - r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$x_{3De} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = x_{3C} - r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3De} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = y_{3C} + r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

Înlocuind expresiile coordonatelor x_{3C} și y_{3C} (3.28) se obține

$$x_{3D} = d - \ell \cos(\psi_0 + \psi) \pm r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3D} = \ell \sin(\psi_0 + \psi) \mp r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

Operând schimbarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) se ajunge la ecuațiile parametrice ale celor două profile reale,

$$x_r = x_{1D} = d \cos \varphi - \ell \cos(\psi_0 + \psi + \varphi) \pm r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi + \varphi)) \quad (3.34)$$

$$y_r = y_{1D} = -d \sin \varphi + \ell \sin(\psi_0 + \psi + \varphi) \mp r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi + \varphi))$$

■ Raza de curbură

Se aplică formula (3.7) cu expresiile coordonatelor și ale derivatelor acestora date de formulele (3.29), (3.30) și (3.31). Se ajunge la următoarea formulă pentru raza de curbură a profilului teoretic R_{ct} ,

$$R_{ct} = \frac{(d^2 + \ell^2(1 + \psi')^2 - 2\ell d(1 + \psi')\cos(\psi_0 + \psi))^{3/2}}{d\ell\psi''\sin(\psi_0 + \psi) + d\ell(1 + \psi')(2 + \psi')\cos(\psi_0 + \psi) - d^2 - \ell^2(1 + \psi')^3} \cdot \text{SGN}(-d^2 - \ell^2(1 + \psi') + d\ell(2 + \psi')\cos(\psi_0 + \psi)) \quad (3.35)$$

3.4.4. Mecanismul plan cu tchet de translație și talpă

■ Caracterizarea constructivă

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ay_3 orientată paralel cu axa de translație, în sensul de ridicare, și axa Az_3 orientată spre observator (Fig.3.31). Se adoptă, de asemenea, sistemul $Ax_1y_1z_1$, solidar cu cama, formând cu sistemul $Ax_3y_3z_3$ unghiul φ .

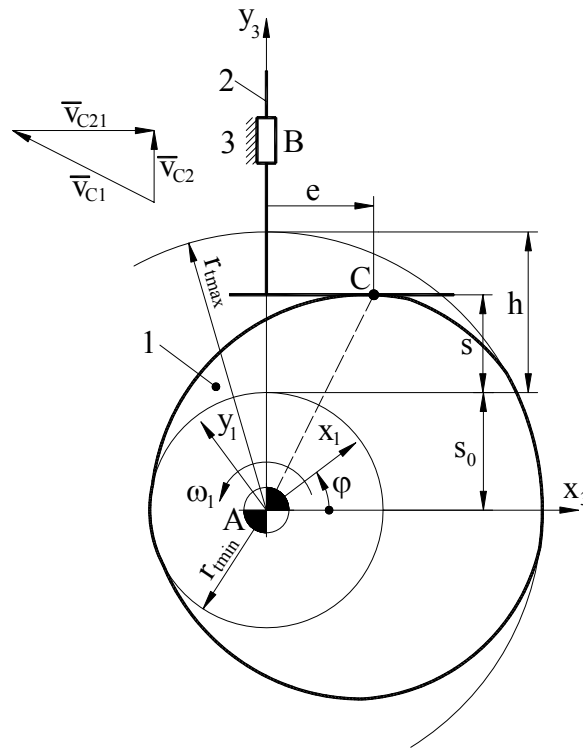


Fig. 3.31

- Mecanismul are un parametru de bază unic,
- s_0 - distanța minimă dintre centrul camei (A) și talpa tachelului.
Razele extreme ale profilului sunt

$$r_{tmin} = s_0, \quad r_{tmax} = s_0 + h, \quad (3.36)$$

■ Cinematica cuplei superioare

Vectorii din ecuația de viteze (3.6) au expresiile

$$\bar{v}_{C1} = \bar{\omega} \times \overline{AC} = \bar{k}_3 \omega \times (\bar{i}_3 e + \bar{j}_3 (s_0 + s)) = -\bar{i}_3 \omega (s_0 + s) + \bar{j}_3 \omega e$$

$$\bar{v}_{C2} = \bar{j}_3 v$$

$$\bar{v}_{C21} = \bar{i}_3 v_{C21}$$

în care e reprezintă excentricitatea variabilă - distanța de la centrul camei la punctul de contact (C) măsurată paralel cu talpa tachelului.

Introducând aceste expresii în ecuația (3.6) se obține

$$v_{C21} = \omega(s_0 + s) \quad (3.41)$$

$$e = s' \quad (3.42)$$

■ Sinteza profilului

Se proiectează vectorul $\bar{r}_C = \overline{AC}$ pe axele sistemului fix (3),

$$x_{3C} = e = s' \quad (3.37)$$

$$y_{3C} = s_0 + s$$

Prin transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1), se obțin ecuațiile parametrice ale profilului

$$x_r = x_{1C} = s' \cos \varphi + (s_0 + s) \sin \varphi \quad (3.38)$$

$$y_r = y_{1C} = -s' \sin \varphi + (s_0 + s) \cos \varphi$$

Se derivează x_r și y_r în raport cu parametru φ

$$x'_r = x'_{1C} = (s_0 + s + s'') \cos \varphi \quad (3.39)$$

$$y'_r = y'_{1C} = -(s_0 + s + s'') \sin \varphi$$

$$x''_r = x''_{1C} = -(s_0 + s + s''') \sin \varphi + (s' + s''') \cos \varphi \quad (3.40)$$

$$y''_r = y''_{1C} = -(s_0 + s + s''') \cos \varphi - (s' + s''') \sin \varphi$$

■ Raza de curbură

Aplicând formula (3.7) în care se introduc expresiile (3.38), (3.39) și (3.40) se ajunge la următoarea expresie simplă pentru raza de curbură a profilului

$$R_{ct} = s_0 + s + s'' \quad (3.43)$$

Menționăm că formula (3.43) indică și semnul pentru raza de curbură cu semnificația cunoscută (par. 3.4.1.).

3.4.5. Mecanismul spațial cu camă cilindrică și tchet de translație

■ Caracterizarea constructivă

Mecanismul spațial se transformă într-un mecanism plan (par. 3.1.2.3.) prin desfășurarea cilindrului de rază medie r_1 (valoarea medie dintre raza exterioară a cilindrului și raza fundului canalului) (Fig.3.32). În mecanismul transformat mișcarea camei este una de translație, perpendiculară pe direcția mișcării tchetului.

Se adoptă un sistem de axe fix $O_3x_3y_3$ cu axa O_3y_3 după direcția tchetului în sensul convențional de ridicare.

Se adoptă, de asemenea, un sistem $O_1x_1y_1$, solidar cu cama, paralel cu sistemul $O_3x_3y_3$ și deplasat față de acesta, pe direcția O_3x_3 , cu $s_1 = \varphi \cdot r_1$ (φ - unghiul de poziție al camei cilindrice).

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului sunt:

- r_1 - raza medie a camei cilindrice;
- r_4 - raza rolei.

Dimensiunile de gabarit ale camei sunt raza medie r_1 și cursa h .

■ Sinteza profilului teoretic

Vectorul de poziție al punctului C, $\vec{r}_C = \overline{O_3C}$ se proiectează pe axele sistemului fix,

$$\begin{aligned} x_{3C} &= 0 \\ y_{3C} &= s \end{aligned} \quad (3.44)$$

și se aplică transformarea de coordonate [A.6] din sistemul (3) în sistemul (1),

$$x_t = x_{1C} = -s_1 = -r_1 \varphi \quad (3.45)$$

$$y_t = y_{1C} = s$$

Se derivează x_t și y_t în raport cu parametrul φ ,

$$x'_t = x'_{1C} = -r_1 \quad (3.46)$$

$$y'_t = y'_{1C} = s'$$

$$x''_t = x''_{1C} = 0 \quad (3.47)$$

$$y''_t = y''_{1C} = s''$$

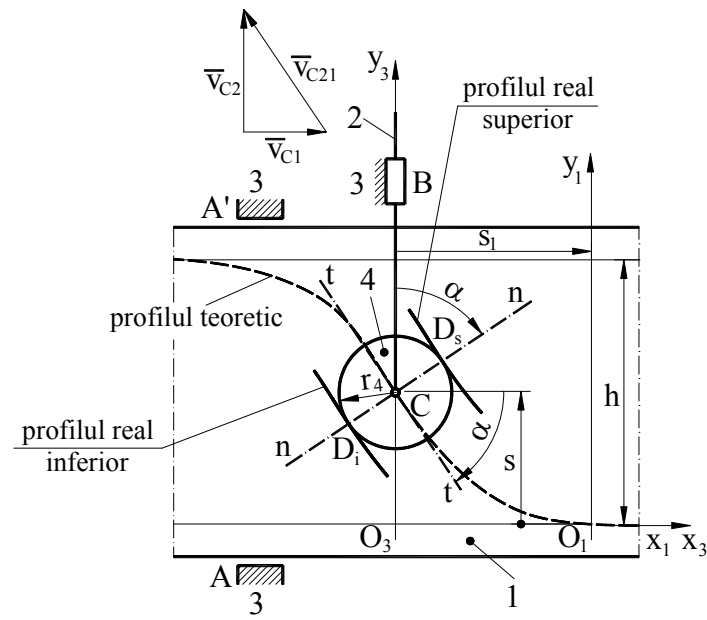


Fig. 3.32

■ Cinematica cuplei superioare

Vectorii \bar{v}_{C1} și \bar{v}_{C2} au expresiile,

$$\bar{v}_{C1} = \bar{i}_3 v_1 = \bar{i}_3 \omega r_1$$

$$\bar{v}_{C2} = \bar{j}_3 v_{C2} = \bar{j}_3 \omega s'$$

în care $v_1 = \omega \cdot r_1$ este viteza de translație a camei plane.

Introducând aceste expresii în ecuația (3.6), rezultă

$$\bar{v}_{C21} = -\bar{i}_3 \omega r_1 + \bar{j}_3 \omega s' \quad (3.48)$$

■ Unghiul de presiune

Unghiul de presiune, α , se formează între axa tachtului (O_3y_3) și normala la profile trasată prin centrul rolei (C) sau între perpendiculara pe tacht (O_3x_3) și tangenta la profilul teoretic în (C). Deoarece vectorul \bar{v}_{C21} este paralel cu tangenta, se poate scrie

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{(\bar{v}_{C21})_{y_3}}{(\bar{v}_{C21})_{x_3}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{s'}{r_1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

■ Sinteza profilului real

Punctele de tangență ale rolei cu profilul real inferior, D_i , și cu profilul real superior, D_s , au următorii vectori de poziție

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Di} &= \overline{O_3C} + \overline{CD_i} \\ \bar{r}_{Ds} &= \overline{O_3C} + \overline{CD_s} \end{aligned}$$

Proiectând pe axele sistemului fix (3) se obține

$$\begin{aligned} x_{3D} &= r_4 \cos \left(\alpha \mp \frac{\pi}{2} \right) = \pm r_4 \sin \alpha \\ y_{3D} &= s + r_4 \sin \left(\alpha \mp \frac{\pi}{2} \right) = s \mp r_4 \cos \alpha \end{aligned}$$

Prin transformarea de coordonate [A.6] din sistemul (3) în sistemul (1) rezultă ecuațiile parametrice ale profilelor reale

$$\begin{aligned} x_r = x_{1D} &= -\varphi r_1 \pm r_4 \sin \alpha \\ y_r = y_{1D} &= s \mp r_4 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.50)$$

cu semnul de sus pentru profilul real inferior și cu cel de jos pentru profilul real superior.

■ Raza de curbura

Se aplică formula (3.8) în care se introduc parametri determinați cu formulele (3.45), (3.46) și (3.47). Rezultă raza de curbura a profilului teoretic,

$$R_{ct} = \frac{-(r_1^2 + s^2)^{3/2}}{r_1 s''}. \quad (3.51)$$

3.5. ANALIZA CINETOSTATICĂ

3.5.1. Forțele de legătură din cupla superioară

Considerațiile generale privind obiectul analizei cinetostatice și forțele care intervin în această operație, prezentate la mecanismele cu cuple inferioare (par. 2.2.), rămân valabile și pentru mecanismele cu came. Un aspect deosebit îl reprezintă prezența cuplei superioare camă - tachet, pentru care se prezintă, în continuare, modul în care acționează forțele de legătură.

3.5.1.1. Cupla superioară simplă

Se consideră cupla superioară formată din cama 1 și tachetul 2, având suprafețele active constituite din doi cilindri în contact după o generatoare (Fig.3.33.a). În ipoteza că sistemul de forțe care încarcă mecanismul este amplasat într-un plan paralel cu planul mișcării, tursorul reacțiunilor normale din cupla superioară se reduce la o reacțiune unică \bar{R}_{12} având ca suport normala comună în punctul de contact C. Dacă suprafața activă aferentă tachetului se reduce la un punct (tachet cu vârf) (Fig.3.33.b), reacțiunea \bar{R}_{12} are ca suport normala la profilul camei în punctul de contact C.

Sistemul forțelor de frecare se compune dintr-o forță de frecare de alunecare \bar{F}_{f12} și un moment de frecare de rostogolire M_{f12} care au următoarele caracteristici:

$$\bar{F}_{f12} \left\{ \begin{array}{l} |F_{f12}| = \mu_c |R_{12}| \\ // \text{tt} \\ \bar{F}_{f12} \text{ are același sens cu viteza relativă de alunecare } \bar{v}_{c12} \end{array} \right.$$

$$M_{f12} \left\{ \begin{array}{l} |M_{f12}| = f_c |R_{12}| \\ M_{f12} \text{ are același sens cu viteza unghiulară relativă } \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 \end{array} \right.$$

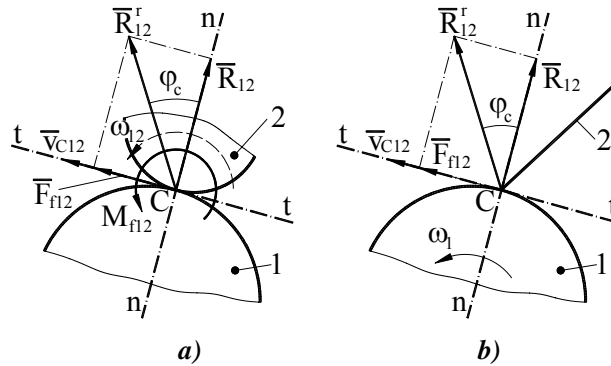


Fig. 3.33

Parametrul f_c este coeficientul de frecare de rostogolire cu dimensiune de lungime.

În cazul tachelului cu vârf mișcarea relativă este de alunecare pură astfel încât momentul de frecare de rostogolire nu intervine.

Reacțiunea normală \bar{R}_{12} și forța de alunecare \bar{F}_{f12} se pot compune, obținând reacțiunea rezultantă $\bar{R}_{12}^r = \bar{R}_{12} + \bar{F}_{f12}$. Reacțiunea \bar{R}_{12}^r este deviată de la normală, în sensul vitezei relative \bar{v}_{C12} , cu unghiul $\varphi_c = \text{arctg } \mu_c$.

3.5.1.2. Cupla superioară cu rolă

Se consideră lanțul cinematic format din cama 1, rola 4 și tachelul 2 (Fig.3.34.a). În cupla superioară camă - rolă acționează reacțiunea normală \bar{R}_{14} având ca suport normala comună nn care, evident, trece prin centrul rolei, C. Se scrie ecuația de echilibru de forțe pentru rolă în ipoteza neglijării frecării și a forțelor de greutate și de inerție care sunt mici datorită dimensiunilor reduse ale rolei,

$$\sum \bar{F}(4); \bar{R}_{14} + \bar{R}_{24} = 0$$

Din această ecuație se poate deduce

$$\bar{R}_{14} = -\bar{R}_{24} = \bar{R}_{42},$$

ceea ce înseamnă că reacțiunea din cupla superioară se transmite nemodificată asupra tachelului în centrul rolei C.

În felul acesta lanțul cinematic 1 - 4 - 2 se poate înlocui printr-o cuplă superioară formată între profilul teoretic al camei 1 și tachelul 2 prevăzut cu vârf (Fig.3.34.b) în care acționează reacțiunea $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{14} = \bar{R}_{42}$.

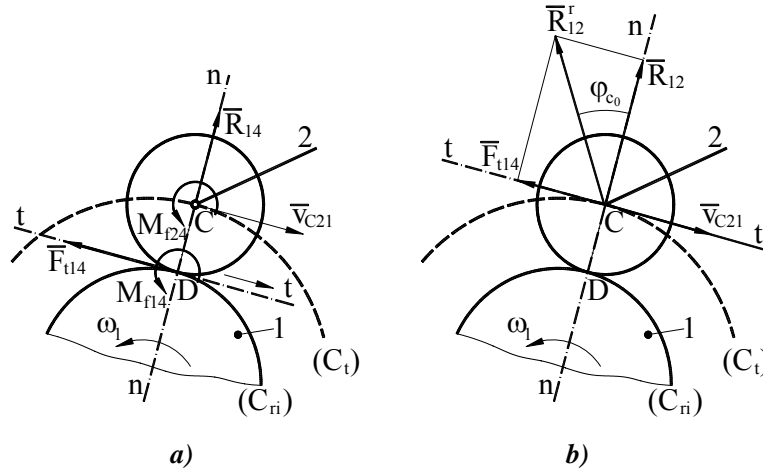


Fig. 3.34

Dacă se iau în considerare forțele de frecare și se admite că rola execută o mișcare de rostogolire pură pe suprafața activă a camei, asupra rolei acționează momentul de frecare de rostogolire M_{f14} în cupla superioară D și momentul de frecare M_{f24} în cupla de rotație C.

Aceste momente au următoarele mărimi

$$|M_{f14}| = f_D |R_{14}| \quad (3.52)$$

$$|M_{f24}| = \mu_C r_C |R_{24}| = r_C |R_{24}^r| \sin \varphi_C \quad (3.53)$$

La nivelul cuplei superioare D acționează, de asemenea, o forță tangențială \bar{F}_{t14} având ca suport tangenta comună la profilul camei și la cercul rolei. Această forță intervine în echilibrul momentelor, așa cum rezultă din următoarea ecuație

$$\sum M_C(4) = 0; M_C(F_{t14}) + M_{f14} + M_{f24} = 0, \quad (3.54)$$

din care rezultă

$$|F_{t14}| = \frac{1}{r_4} (|M_{f14}| + |M_{f24}|) \quad (3.55)$$

Condiția de rostogolire a rolei pe profilul camei este

$$|F_{t14}| < |F_{f14}|, \quad (3.56)$$

în care \bar{F}_{f14} este forța de frecare de alunecare din cupla superioară, având valoarea:

$$|F_{f14}| = \mu_D |R_{14}| \quad (3.57)$$

în care $\mu_D = \operatorname{tg} \varphi_D$ este coeficientul de frecare de alunecare.

Forța tangențială \bar{F}_{t14} se poate transfera în punctul C, dacă asupra elementului 4 se aplică momentul suplimentar $M_C(F_{t14})$. În aceste condiții momentul resultant care acționează asupra elementului 4 este

$$M_4 = M_{r14} + M_{r24} + M_C(F_{t14})$$

Având în vedere ecuația (3.54), rezultă $M_4 = 0$, astfel încât, prin transferul forței \bar{F}_{t14} din punctul D în punctul C, se compensează efectul momentelor de frecare. Reacțiunea normală \bar{R}_{14} și forța tangențială \bar{F}_{t14} se compun rezultând $\bar{R}_{14}^r = \bar{R}_{14} + \bar{F}_{t14}$. Din ecuația de forțe

$$\sum \bar{F}(4) = 0; \bar{R}_{14}^r + \bar{R}_{24}^r = 0$$

rezultă $\bar{R}_{14}^r = -\bar{R}_{24}^r = \bar{R}_{42}^r$, care arată că reacțiunea \bar{R}_{14} din cupla camă - rolă se transmite nemodificată asupra tachelului, în punctul C. Ca și în cazul neglijării frecării, lanțul cinematic 1 - 4 - 2 se poate asimila cu o cuplă superioară formată din profilul teoretic al camei și un tachel cu vârful în C (Fig.3.34.b) în care acționează reacțiunea $\bar{R}_{12}^r = \bar{R}_{14}^r = \bar{R}_{24}^r$. Reacțiunea \bar{R}_{12}^r este deviată, în raport cu normala nn, în sensul vitezei unghiulare ω_1 , cu unghiul φ_{C_0} care se exprimă astfel,

$$\sin \varphi_{C_0} = \frac{|F_{t14}|}{|R_{12}^r|}$$

Forța tangențială F_{t14} se exprimă, la rândul ei, în modul următor

$$\begin{aligned} |F_{t14}| &= \frac{1}{r_4} (|M_{f14}| + |M_{f24}|) = \frac{1}{r_4} (f_D |R_{14}| + r_C |R_{24}^r| \sin \varphi_C) = \\ &= \frac{1}{r_4} (f_D |R_{12}^r| + r_C |R_{12}^r| \sin \varphi_C) \end{aligned} \quad (3.58)$$

astfel încât se obține ecuația

$$\sin \varphi_{C_0} = \frac{1}{r_4} (f_D \cos \varphi_{C_0} + r_C \sin \varphi_C)$$

sau

$$r_4 \sin \varphi_{C_0} - f_D \cos \varphi_{C_0} - r_C \sin \varphi_C = 0 \quad (3.59)$$

Această ecuație se rezolvă, analitic sau numeric, obținând unghiul φ_{C_0} . Deoarece φ_C și φ_{C_0} au valori mici (sub 5°), sinusurile se pot aproxima cu unghiurile, rezultând următoarea formulă

$$\varphi_{C_0} \cong \frac{f_D}{r_4} + \frac{r_C \varphi_C}{r_4} \quad (3.60)$$

Având în vedere relația (3.58) condiția de rostogolire (3.56) se poate scrie

$$\frac{1}{r_4} (f_D |R_{12}| + r_C |R_{12}^r| \sin \varphi_C) < \operatorname{tg} \varphi_D |R_{12}|$$

sau

$$\frac{1}{r_4} \left(f_D + r_C \frac{\sin \varphi_C}{\cos \varphi_{C_0}} \right) < \operatorname{tg} \varphi_D \quad (3.61)$$

Prin aproximarea funcțiilor sinus și tangentă cu unghiurile se obține o relație mai simplă

$$\frac{f_D}{r_4} + \frac{r_C}{r_4} \cdot \varphi_C < \varphi_D \quad (3.62)$$

Se observă că membrul din stânga este egal cu φ_{C_0} (3.60) ceea ce conduce la condiția

$$\varphi_{C_0} < \varphi_D. \quad (3.63)$$

3.5.2. Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă

3.5.2.1. Analiza cinetostatică

Se consideră un mecanism cu cuplă superioară unilaterală (Fig.3.35) pentru care se efectuează analiza cinetostatică, în prezența frecării, pentru faza de ridicare, în care tchetul este încărcat cu forța rezistentă \bar{F}_2 . În procesul de calcul se utilizează un sistem de coordonate fix, $Axyz$, identic cu sistemul $Ax_3y_3z_3$ folosit în par. 3.4.

Reacțiunea din cupla superioară \bar{R}_{12}^r este deviată de la normala nn cu unghiul φ_{C_0} (3.60) în sensul vitezei unghiulare ω , iar proiecțiile acesteia pe axele de coordonate au expresiile:

$$\begin{aligned}
 R_{12x}^r &= R_{12}^r \cos\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} + \frac{\pi}{2}\right) = -R_{12}^r \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \\
 R_{12y}^r &= R_{12}^r \sin\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} + \frac{\pi}{2}\right) = R_{12}^r \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0})
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

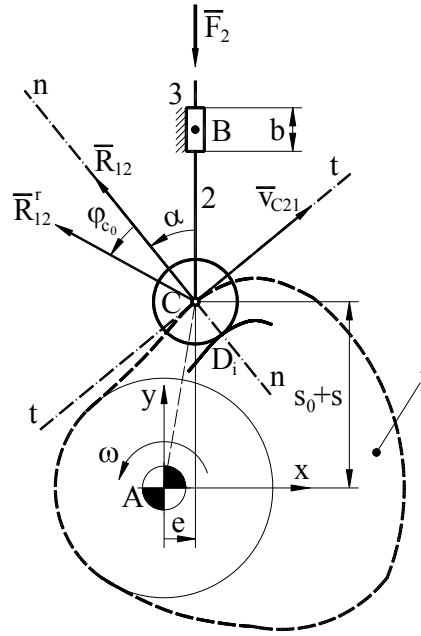


Fig. 3.35

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\begin{aligned}
 \sum \bar{M}_B(2) &= 0; \quad \overline{BC} \times \bar{R}_{12}^r + \bar{M}_{r32} = 0 \\
 \sum \bar{F}(2) &= 0; \quad \bar{F}_2 + \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{32} + \bar{F}_{f32} = 0,
 \end{aligned}$$

în care B este centrul zonei de contact a cuplei de translație.

Ecuția de momente se transpune scalar, iar ecuația de forțe se proiectează pe axele de coordonate

$$\begin{aligned}
 -\bar{j}(y_B - (s_0 + s)) \times R_{12}^r (-\bar{i} \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + \bar{j} \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0})) + \bar{k} M_{r32} &= 0 \\
 -\bar{k} R_{12}^r (y_B - (s_0 + s)) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + \bar{k} M_{r32} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -R_{12}^r (y_B - (s_0 + s)) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + M_{r32} = 0 \\ -R_{12}^r \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + R_{32} = 0 \\ -|F_2| + R_{12}^r \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + F_{f32} = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Forța de frecare \bar{F}_{f32} are expresii diferite în funcție de cazul în care se încadrează cupla de translație B (par. 2.2.1.4.). Această încadrare depinde de raportul $k_B = \frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|}$ care se poate calcula din ecuațiile sistemului (3.65), rezultând

$$k_B = \frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|} = |y_B - (s_0 + s)|.$$

- Dacă $k_B < \frac{b}{2}$, forța de frecare F_{f32} are expresia

$$F_{f32} = -\mu_B |R_{32}| \quad (3.66)$$

iar R_{12}^r se determină din (3.65),

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) (1 - \mu_B \operatorname{tg} |\alpha \pm \varphi_{C_0}|)} \quad (3.67)$$

- Dacă $k_B > \frac{b}{2}$, forța de frecare F_{f32} și reacțiunea rezultantă R_{12}^r sunt

$$F_{f32} = -\frac{2\mu_B}{b} |M_{r32}| \quad (3.68)$$

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \left(1 - \frac{2\mu_B}{b} |y_B - (s_0 + s)| \cdot \operatorname{tg} |\alpha \pm \varphi_{C_0}| \right)} \quad (3.69)$$

Necunoscutele R_{32} și M_{r32} se calculează, de asemenea, din sistemul (3.65):

$$R_{32} = R_{12}^r \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \quad (3.70)$$

$$M_{r32} = R_{12}^r (y_B - (s_0 + s)) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \quad (3.71)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1,

$$\sum \bar{M}_A(1) = 0; \quad \overline{AC} \times \bar{R}_{12}^r + \bar{M}_e + \bar{M}_{f12} = 0$$

$$\sum \bar{F}(1) = 0; \quad \bar{R}_{31}^r + \bar{R}_{21}^r = 0$$

Din ecuația de forțe rezultă

$$\bar{R}_{31}^r = -\bar{R}_{21}^r = \bar{R}_{12}^r \quad (3.72)$$

Ecuția de momente se transpune scalar

$$\begin{aligned} (\bar{i}e + \bar{j}(s_0 + s)) \times R_{12}^r (\bar{i} \sin(\alpha \pm \varphi_C) - \bar{j} \cos(\alpha \pm \varphi_C)) + \bar{k}M_e \mp \bar{k}R_{31}^r r_A \sin \varphi_A &= 0 \\ -\bar{k}R_{12}^r (e \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) + \bar{k}M_e \mp \bar{k}R_{12}^r r_A \sin \varphi_A &= 0 \\ -R_{12}^r (e \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) + M_e \mp R_{12}^r r_A \sin \varphi_A &= 0 \end{aligned}$$

Din această ecuație se determină momentul de echilibrare M_e ,

$$M_e = R_{12}^r (e \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) \pm r_A \sin \varphi_A \quad (3.73)$$

Relațiile de calcul ale reacțiunilor se pot particulariza pentru cazul în care se neglijează forțele de frecare făcând $\varphi_{C_0} = 0$, $\mu_B = 0$ și $\varphi_A = 0$,

$$R_{12}^r = R_{31}^r = \frac{|F_2|}{\cos \alpha} \quad (3.74)$$

$$R_{32} = |F_2| \operatorname{tg} \alpha \quad (3.75)$$

$$M_{r32} = |F_2| (y_B - (s_0 + s)) \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.76)$$

$$M_e = |F_2| (e + (s_0 + s)) \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.77)$$

Uneori, analiza cinetostatică se efectuează luând în considerare numai frecarea din cupla de translație B. Desigur, în acest caz, relațiile se particularizează numai cu $\varphi_{C_0} = 0$ și $\varphi_A = 0$.

În toate relațiile semnul (+) intervine când viteza unghiulară a camei este pozitivă, iar semnul (-) când este negativă.

3.5.2.2. Randamentul, autoblocarea

Pentru calculul randamentului mecanic instantaneu se utilizează relația

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{|F_2|s'}{M_e} \quad (3.78)$$

Momentul de echilibrare M_e se înlocuiește cu expresia sa (3.73) obținând

$$\eta = \frac{|F_2|s'}{R_{12}^r (e \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s) \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) \pm r_A \sin \varphi_A} \quad (3.79)$$

În această formulă R_{12}^r se înlocuiește cu expresia (3.67) sau (3.69) în funcție de cazul în care se încadrează cupla B. Astfel, dacă $k_B < \frac{b}{2}$ se obține următoarea formulă pentru η

$$\eta = \frac{(1 - \mu_B \operatorname{tg}|\alpha \pm \varphi_C|)s'}{e + (s_0 + s)\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \frac{\sin \varphi_A}{\cos(\alpha \pm \varphi_C)}} \quad (3.80)$$

Condiția de evitare a autoblocării ($\eta > 0$) aplicată expresiei (3.80) conduce la

$$1 - \mu_B \operatorname{tg}|\alpha \pm \varphi_C| > 0, \quad (3.81)$$

deoarece semnul randamentului este determinat numai de factorul $1 - \mu_B \operatorname{tg}|\alpha \pm \varphi_C|$. Soluția practică a inegalității (3.81), în raport cu necunoscuta α este

$$|\alpha| < \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu_B} - \varphi_C = \alpha_{bl} \quad (3.82)$$

în care α_{bl} este valoarea de blocare a unghiului de presiune.

Dacă $k_B > 1$,

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)| \cdot \operatorname{tg}|\alpha \pm \varphi_C|\right)s'}{e + (s_0 + s)\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \frac{\sin \varphi_A}{\cos(\alpha \pm \varphi_C)}} \quad (3.83)$$

Condiția de evitare a autoblocării este

$$1 - \frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)| \cdot \operatorname{tg}|\alpha \pm \varphi_C| > 0$$

sau

$$|\alpha| < \operatorname{arctg} \frac{1}{\frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)|}} - \varphi_C = \alpha_{bl} \quad (3.84)$$

Randamentul global, pentru faza de ridicare, se determină cu formula

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} P_u d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{P_u}{\eta} d\varphi} = \frac{\int_0^{\varphi_r} F_2 s' d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{F_2 s' d\varphi}{\eta}} \quad (3.85)$$

În ipoteza $F_2 = -|F_2| = \text{ct.}$ relația devine

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} s' d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{s' d\varphi}{\eta}} \quad (3.86)$$

Observații

- Autoblocarea este determinată de valoarea absolută a unghiului de presiune, așa cum rezultă din condițiile (3.82) și (3.84). Chiar dacă se respectă aceste condiții, dar unghiul de presiune este apropiat de α_{bl} , funcționarea este defavorabilă, cu valori mari ale reacțiunilor și cu randament redus. De aceea, în locul condițiilor (3.82) și (3.84) se utilizează condiția

$$|\alpha| \leq \alpha_a < \alpha_{bl} \quad (3.87)$$

în care α_a este unghiul de presiune admisibil, având următoarele valori recomandate: $\alpha_a = 12^\circ - 15^\circ$ pentru un regim de funcționare greu și $\alpha_a = 25^\circ - 30^\circ$ pentru un regim ușor. Pentru faza de coborâre, la mecanismele cu cuplă superioară unilaterală, $\alpha_a = 75^\circ - 80^\circ$.

- Așa cum am arătat și în par. 2.2.1.4., dintre cele două cazuri care pot interveni în legătură cu calculul forței de frecare din cupla de translație, **cazul (1)** este favorabil. Întrădevăr, formulele anterioare arată că, în acest caz, reacțiunile sunt mai reduse, iar randamentul și unghiul de presiune de blocare sunt mai mari. Condiția pentru **cazul (1)**

$$k_B = |y_B - (s_0 + s)| < \frac{b}{2},$$

extinsă pentru toată faza de ridicare se exprimă astfel

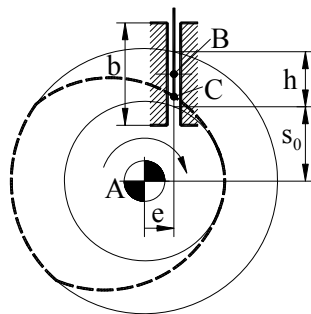


Fig. 3.36

$$\begin{cases} b \geq h \\ s_0 + h - \frac{b}{2} \leq y_B \leq s_0 + \frac{b}{2} \end{cases}$$

Condițiile (3.88) arată că punctul C trebuie să se deplaseze numai în interiorul zonei de contact a cuplei de translație B (Fig.3.36).

3.5.3. Mecanismul plan cu tachtet de rotație și rolă

3.5.3.1. Analiza cinetostatică

Se consideră mecanismul cu cuplă superioară unilaterală din Fig.3.37. Se efectuează analiza cinetostatică, în prezența frecării, pentru faza de ridicare în ipoteza că asupra tachtetului acționează momentul rezistent M_2 .

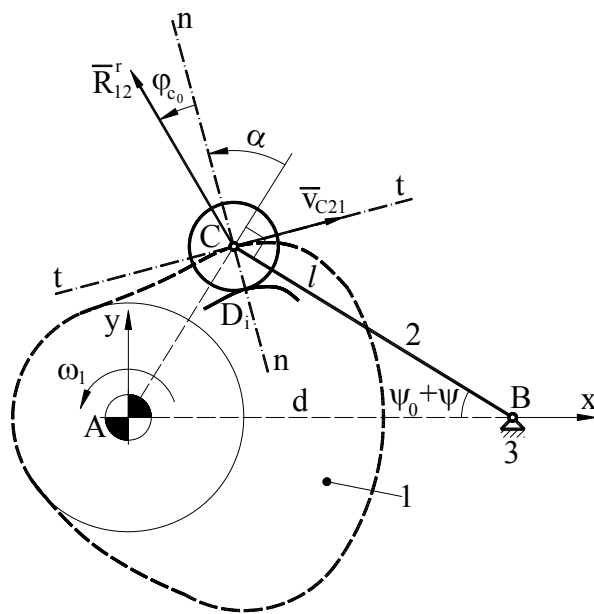


Fig. 3.37

Reacțiunea din cupla superioară \bar{R}_{12}^r se proiectează pe axele sistemului de coordonate Axyz,

$$\begin{aligned} R_{12x}^r &= R_{12}^r \cos\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi) + \frac{\pi}{2}\right) = -R_{12}^r \sin(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) \\ R_{12y}^r &= R_{12}^r \sin\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi) + \frac{\pi}{2}\right) = R_{12}^r \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(2) &= 0; \quad \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{32}^r = 0 \\ \sum \bar{M}_B(2) &= 0; \quad \overline{BC} \times \bar{R}_{12}^r + \bar{M}_2 + \bar{M}_{f32} = 0. \end{aligned}$$

Din ecuația forțelor rezultă

$$\bar{R}_{32}^r = -\bar{R}_{12}^r = \bar{R}_{21}^r, \quad (3.90)$$

iar din ecuația de momente, după dezvoltări corespunzătoare, se obține

$$R_{12}^r = \frac{|M_2|}{\ell \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) - r_B \sin \varphi_B} \quad (3.91)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1,

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}(1) = 0; \quad \bar{R}_{21}^r + \bar{R}_{31}^r &= 0 \\ \sum \bar{M}_A(1) = 0; \quad \overline{AC} \times \bar{R}_{12}^r + \bar{M}_e + \bar{M}_{f12} &= 0 \end{aligned}$$

Din ecuația de forțe se obține

$$\bar{R}_{31}^r = -\bar{R}_{21}^r = \bar{R}_{12}^r \quad (3.92)$$

iar din ecuația de momente rezultă

$$M_e = R_{12}^r (d \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) - (\psi_0 + \psi)) - \ell \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \pm r_A \sin \varphi_A \quad (3.93)$$

În toate formulele semnul (+) se aplică dacă viteza unghiulară a camei este pozitivă (sens antiorar), iar (-) în caz contrar.

În ipoteza neglijării forțelor de frecare ($\varphi_{C_0} = 0$, $\varphi_A = 0$ și $\varphi_B = 0$) se obțin relațiile:

$$R_{12}^r = \frac{|M_2|}{\ell \cos \alpha} \quad (3.94)$$

$$M_e = \frac{|M_2| (d \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi)) - \ell \cos \alpha)}{\ell \cos \alpha} \quad (3.95)$$

3.5.3.2. Randamentul, autoblocarea

Randamentul se determină aplicând formula

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{|M_2| \omega_2}{M_e \omega_1}$$

Având în vedere că $\psi' = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$ (3.2), se obține

$$\eta = \frac{|M_2| \psi'}{M_e} \quad (3.96)$$

Cunoscând expresiile pentru M_e (3.93) și R_{12}^r (3.91) se ajunge la următoarea relație de calcul pentru randamentul instantaneu

$$\eta = \frac{(\ell \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) - r_B \sin \varphi_B) \psi'}{d \cos(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) - \ell \cos(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \sin \varphi_A}. \quad (3.97)$$

Randamentul global se calculează cu o formulă similară cu o formulă similară cu (3.86),

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} \psi' d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{\psi' d\varphi}{\eta}}. \quad (3.98)$$

Condiția de evitare a autoblocării ($\eta > 0$) se formulează astfel

$$\ell \cos(\alpha \pm \varphi_C) - r_B \sin \varphi_B > 0,$$

care conduce la

$$|\alpha| < \arccos\left(\frac{r_B}{\ell} \sin \varphi_B\right) - \varphi_C \quad (3.99)$$

Discuția privitoare la unghiul de presiune, dezvoltată la mecanismul precedent, împreună cu condiția (3.87) sunt aplicabile și pentru acest mecanism. Pentru unghiul de presiune admisibil se recomandă următoarele valori: $\alpha_a = 30^\circ - 45^\circ$ pentru un regim de funcționare greu și $\alpha_a = 45^\circ - 60^\circ$ pentru un regim ușor.

3.5.4. Mecanismul plan cu tchet de translație și talpă

3.5.4.1. Analiza cinetostatică

La fel ca la mecanismele studiate anterior, se efectuează analiza cinetostatică, în prezența frecării, pentru o cursă de ridicare, luând în considerare forța rezistentă \bar{F}_2 (Fig.3.38).

Reacțiunea \bar{R}_{12}^r este deviată de la normala nn cu unghiul φ_C în sensul indicat de viteza unghiulară a camei, ω , având proiecțiile pe axele de coordonate,

$$R_{12x}^r = R_{12}^r \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi_C\right) = \mp R_{12}^r \sin \varphi_C$$

$$R_{12y}^r = R_{12}^r \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi_C\right) = R_{12}^r \cos \varphi_C$$
(3.100)

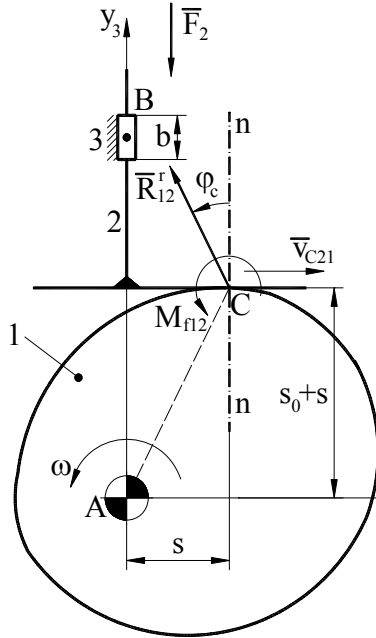


Fig. 3.38

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\begin{cases} \sum \bar{F}(2) = 0; \bar{F}_2 + \bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{32} + \bar{R}_{f32} = 0 \\ \sum \bar{M}_B(2) = 0; \overline{BC} \times \bar{R}_{12}^r + \bar{M}_{f12} + \bar{M}_{r32} = 0 \end{cases}$$

care se prelucrează în modul cunoscut de la mecanismele anterioare

$$\begin{cases} \mp R_{12}^r \sin \varphi_C + R_{32} = 0 \\ -|F_2| + R_{12}^r \cos \varphi_C + F_{f32} = 0 \\ R_{12}^r ((e + f_C) \cos \varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s)) \sin \varphi_C) + M_{r32} = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

Pentru a determina expresia forței de frecare \bar{F}_{f32} din cupla B, se calculează raportul k_B din sistemul (3.101)

$$k_B = \frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|} = \left| \frac{s' + f_C}{\operatorname{tg} \varphi_C} \mp (y_B - (s_0 + s)) \right|. \quad (3.102)$$

Dacă $k_B \leq \frac{b}{2}$, forța de frecare are expresia

$$F_{f32} = -\mu_B |R_{32}|$$

care se introduce în sistemul (3.101) și rezultă

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos \varphi_C - \mu_B \sin \varphi_C}. \quad (3.103)$$

Dacă $k_B > \frac{b}{2}$, forța de frecare se scrie

$$F_{f32} = -\frac{2\mu_B}{b} |M_{r32}|,$$

iar din sistemul (3.101) se obține

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos \varphi_C - \frac{2\mu_B}{b} |(s' + f_C) \cos \varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s)) \sin \varphi_C|}. \quad (3.104)$$

Reacțiunile R_{32} și M_{r32} rezultă, de asemenea, din sistemul (3.101)

$$R_{32} = R_{12}^r \sin \varphi_C \quad (3.105)$$

$$M_{r32} = -R_{12}^r ((s' + f_C) \cos \varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s)) \sin \varphi_C). \quad (3.106)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1

$$\begin{cases} \sum \bar{F}(1) = 0; & \bar{R}_{31}^r + \bar{R}_{21}^r = 0 \\ \sum \bar{M}_A(1) = 0; & \overline{AC} \times \bar{R}_{21}^r + \bar{M}_e + \bar{M}_{f31} + \bar{M}_{f21} = 0. \end{cases}$$

Din ecuația de forțe se obține

$$\bar{R}_{31}^r = -\bar{R}_{21}^r = \bar{R}_{12}^r, \quad (3.107)$$

iar din ecuația de momente se calculează momentul de echilibrare

$$M_e = R_{12}^r ((s' + f_C) \cos \varphi_C \pm (s_0 + s) \sin \varphi_C \pm r_A \sin \varphi_A). \quad (3.108)$$

În toate formulele semnul de sus se utilizează când viteza unghiulară a camei este pozitivă, iar cel de jos când este negativă.

Uneori, analiza cinetostatică se efectuează ținând seama numai de frecarea din cupla de translație. În această ipoteză $\varphi_C = f_C = \varphi_A = 0$, iar $k_B \rightarrow \infty$ ceea ce înseamnă că R_{12}^r se calculează numai cu formula (3.104) care se particularizează astfel

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{1 - \frac{2\mu_B |s'|}{b}} \quad (3.109)$$

În funcție de R_{12}^r se obțin și celelalte reacțiuni

$$R_{32} = 0 \quad (3.110)$$

$$M_{r32} = -R_{12}^r \cdot s' \quad (3.111)$$

$$M_c = R_{12}^r \cdot s' \quad (3.112)$$

3.5.4.2. Randamentul, autoblocarea

Calculul randamentului se face cu formula (3.78). Dacă $k_B \leq \frac{b}{2}$,

$$\eta = \frac{(1 - \mu_B \operatorname{tg} \varphi_C) s'}{(s' + f_C) \pm (s_0 + s) \operatorname{tg} \varphi_C \pm r_A \frac{\sin \varphi_A}{\cos \varphi_C}} \quad (3.113)$$

iar dacă $k_B > \frac{b}{2}$,

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{2\mu_B}{b} |(s' + f_C) \cos \varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s)) \sin \varphi_C| \right)}{(s' + f_C) \pm (s_0 + s) \operatorname{tg} \varphi_C \pm r_A \frac{\sin \varphi_A}{\cos \varphi_C}} \quad (3.114)$$

În cazul $k_B \leq \frac{b}{2}$, condiția de evitare a autoblocării ($\eta < 0$) este

$$1 - \mu_B \operatorname{tg} \varphi_C > 0$$

$$\mu_B \operatorname{tg} \varphi_C < 1. \quad (3.115)$$

Dacă $k_B > \frac{b}{2}$, condiția de evitare a autoblocării se formulează astfel

$$1 - \frac{2\mu_B}{b} |(s' + f_C) - (y_B - (s_0 + s)) \operatorname{tg} \varphi_C| > 0$$

$$\frac{2\mu_B}{b} |(s' + f_C) - (y_B - (s_0 + s)) \operatorname{tg} \varphi_C| < 1. \quad (3.116)$$

Pentru cazul în care se consideră numai frecarea din cupla de translație, condiția (3.116) devine

$$\frac{2\mu_B s'}{b} < 1. \quad (3.117)$$

Observații

- Mecanismul funcționează, de regulă, cu $k_B > \frac{b}{2}$ deoarece pentru a avea $k_B \leq \frac{b}{2}$, în toate fazele de funcționare, ar trebui să se adopte valori foarte mari și nepRACTICE pentru parametrul b . În cazul în care se consideră numai frecarea din cupla de translație, $k_B \rightarrow \infty$ și, deci, întotdeauna $k_B > \frac{b}{2}$.

- Condiția de evitare a autoblocării (3.115) este îndeplinită întotdeauna deoarece $\mu_B < 1$ și $\text{tg}\varphi_C < 1$. Expresiile care intervin în condițiile (3.116) și (3.117) sunt foarte apropiate având în vedere valorile practice ale coeficienților de frecare. Ca urmare condiția (3.116) se poate aproxima foarte bine prin condiția (3.117) din care rezultă domeniul în care se poate adopta parametrul b ,

$$b > 2\mu_B \cdot s'.$$

Această condiție, extinsă pentru întreaga fază de funcționare, are forma

$$b > 2\mu_B \cdot s'_{\max}, \quad (3.118)$$

în care s'_{\max} este valoarea maximă a funcției de transmitere s' corespunzătoare legii de mișcare utilizate. Trebuie menționat că parametrul b nu trebuie adoptat în apropierea valorii limită (3.118) deoarece aceasta conduce la suprasolicitarea mecanismului.

3.6. ANALIZA PRECIZIEI

Evaluarea preciziei de funcționare a unui mecanism cu camă constă în determinarea abaterii de poziție a tachelului în funcție de abaterile elementare ale mecanismului. O abatere elementară specifică mecanismelor cu came este abaterea de profil Δr , care afectează razele profilului real. Celelalte abateri elementare se referă la parametri constructivi constanți.

Pentru exemplificare se tratează cazul mecanismului plan cu tachel de translație și rolă (Fig.3.29). Abaterea de poziție a tachelului Δs , asociată parametrului s , se calculează cu formula (2.41) adoptată mecanismului considerat,

$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial s}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial s}{\partial r_4} \Delta r_4 \quad (3.119)$$

în care Δr_r reprezintă abaterea razei profilului real, Δe - abaterea excentricității, iar Δr_4 - abaterea razei rolei. Derivatele parțiale $\frac{\partial s}{\partial r_r}$, $\frac{\partial s}{\partial e}$ și $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ sunt funcțiile de transmitere ale abaterilor pentru aceiași parametri, esențiale pentru calculul abaterii funcționale Δs . Vom prezenta modul de determinare a acestor funcții. Folosind notațiile din par. 3.4.2. și din Fig.3.29, raza reală r_r se poate scrie

$$r_r = AD_i = \sqrt{x_{3D_i}^2 + y_{3D_i}^2},$$

în care x_{3D_i} și y_{3D_i} sunt coordonatele punctului D_i în raport cu sistemul fix Ax_3y_3 . Pentru simplificarea relațiilor se notează $x_{3D_i} = x$ și $y_{3D_i} = y$ astfel încât formula devine

$$r_r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.120)$$

iar derivata $\frac{\partial s}{\partial r_r}$ se calculează astfel

$$\frac{\partial s}{\partial r_r} = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r_r} = s' \cdot \frac{1}{\frac{\partial r_r}{\partial \varphi}} = \frac{s' \sqrt{x^2 + y^2}}{xx' + yy'} \quad (3.121)$$

Coordonatele x și y se determină cu relațiile (3.23), care, pentru un mecanism cu cuplă superioară unilaterală, au forma

$$\begin{aligned} x &= e + r_4 \sin \alpha \\ y &= (s_0 + s) - r_4 \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.122)$$

iar unghiul de presiune α , care intervine în aceste relații are expresia

$$\alpha = \arctg \left(\frac{s' - e}{s_0 + s} \right) \quad (3.21)$$

Prin derivarea expresiilor (3.122) în raport cu φ se obțin x' și y' ,

$$\begin{aligned} x' &= r_4 \alpha' \cos \alpha \\ y' &= s' + r_4 \alpha' \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.123)$$

în care α' este derivata unghiului α în raport cu φ

$$\alpha' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{s''(s_0 + s) - s'(s' - e)}{(s_0 + s)^2} \quad (3.124)$$

În felul acesta rezultă $\frac{\partial s}{\partial r_1}(\varphi)$ ca o funcție de parametrul φ , care intervine în formule prin intermediul legii de mișcare caracterizată prin funcțiile $s(\varphi)$, $s'(\varphi)$ și $s''(\varphi)$.

Funcția de transmitere $\frac{\partial s}{\partial e}$ se calculează cu ajutorul funcției $\frac{\partial s}{\partial r_1}$ determinată anterior

$$\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial s}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial e}, \quad (3.125)$$

iar $\frac{\partial r_1}{\partial e}$ se obține prin derivarea expresiei (3.120),

$$\frac{\partial r_1}{\partial e} = \frac{x \frac{\partial x}{\partial e} + y \frac{\partial y}{\partial e}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.126)$$

în care $\frac{\partial x}{\partial e}$ și $\frac{\partial y}{\partial e}$ se introduc cu expresiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= 1 + r_4 \frac{\partial \alpha}{\partial e} \cos \alpha \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= r_4 \frac{\partial \alpha}{\partial e} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Derivata unghiului de presiune $\frac{\partial \alpha}{\partial e}$ este

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(-\frac{1}{s_0 + s} \right). \quad (3.128)$$

În mod similar, funcția $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ se determină cu ajutorul relației

$$\frac{\partial s}{\partial r_4} = \frac{\partial s}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial r_4}, \quad (3.129)$$

în care se introduce $\frac{\partial r_1}{\partial r_4}$ calculat prin derivarea expresiei (3.120)

$$\frac{\partial r_1}{\partial r_4} = \frac{x \frac{\partial x}{\partial r_4} + y \frac{\partial y}{\partial r_4}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.130)$$

La rândul lor, funcțiile $\frac{\partial x}{\partial r_4}$ și $\frac{\partial y}{\partial r_4}$ rezultă prin derivarea expresiilor (3.122)

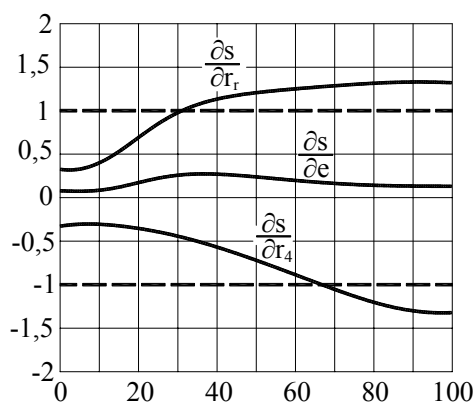


Fig. 3.39

$s_0 = 20$ [mm]; $h=30$ [mm];
 $e=+5$ [mm]; $r_4 = 10$ [mm];

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r_4} &= \sin \alpha \\ \frac{\partial y}{\partial r_4} &= -\cos \alpha \end{aligned} \quad (3.131)$$

Pentru exemplificare, în Fig.3.39 sunt reprezentate diagramele $\frac{\partial s}{\partial r_r}(\varphi)$, $\frac{\partial s}{\partial e}(\varphi)$ și $\frac{\partial s}{\partial r_4}(\varphi)$, determinate prin procedeul arătat, pentru un caz concret.

Pentru alte tipuri de mecanisme cu came tratate este asemănătoare. Astfel, în cazul mecanismului plan cu tachtet de rotație și rolă, analiza preciziei urmărește determinarea abaterii de poziție a tachtetului $\Delta\psi$, care

conform formulei (2.41) are expresia

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r_r} \Delta r_r + \frac{\partial\psi}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial\psi}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial\psi}{\partial r_4} \Delta r_4, \quad (3.132)$$

în care ψ , d , l și r_4 au semnificațiile cunoscute (par. 3.4.3.). Funcția $\frac{\partial\psi}{\partial r_r}$ se

determină similar cu funcția $\frac{\partial s}{\partial r_r}$ de la mecanismul tratat anterior, pornind de la expresiile coordonatelor x_{3D} , y_{3D} , și a unghiului de presiune α (3.33) specifice acestui mecanism. Funcțiile $\frac{\partial\psi}{\partial d}$, $\frac{\partial\psi}{\partial l}$ și $\frac{\partial\psi}{\partial r_4}$ se calculează cu ajutorul funcției

$\frac{\partial\psi}{\partial r_r}$ așa cum s-a procedat pentru funcțiile $\frac{\partial s}{\partial e}$ și $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ la mecanismul precedent.

3.7. SINTEZA DIMENSIONALĂ

3.7.1. Formularea generală a problemei

Obiectivul sintezei dimensionale este determinarea parametrilor geometrici de bază ai mecanismului. Valorile acestor parametri au consecințe atât asupra funcționării mecanismului, cât și asupra formei și dimensiunilor profilului. Adoptarea lor reprezintă rezultatul rezolvării unei probleme de optimizare. Dacă parametrii geometrici de bază se notează $p_1, p_2 \dots p_k$, formularea problemei este următoarea

$$F_0(p_1, p_2 \dots p_k) \rightarrow \min \quad (3.133)$$

$$f_i(p_1, p_2 \dots p_k) \leq 0 \quad (i=1, n). \quad (3.134)$$

Funcția obiectiv F_0 se poate alege în diverse moduri, după criteriul de optimizare adoptat: gabaritul camei legat de consumul de material, randamentul mecanismului, momentul de echilibrare maxim, etc. Dacă se ia în considerare criteriul minimizării gabaritului, funcția obiectiv se poate adopta, la mecanismele plane, ca fiind egală cu raza maximă a profilului real $F_0 = r_{r \max}(p_1, p_2 \dots p_k)$. În cazul mecanismelor spațiale, funcția obiectiv este raza medie a cilindrului camei, r_1 , care constituie unul dintre parametrii geometrici de bază.

Condițiile (3.134) constituie restricțiile problemei de optimizare și pot avea caracter funcțional, constructiv sau tehnologic. În cele ce urmează se prezintă cele mai importante restricții care pot interveni într-o astfel de problemă.

1) Condiția unghiului de presiune

Așa cum am arătat în Cap. 3.5., unghiul de presiune trebuie să satisfacă condiția

$$|\alpha(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi)| \leq \alpha_a.$$

Formulele de calcul, pentru fiecare tip de mecanism, sunt prezentate în subcap. 3.4. Deoarece α depinde, pe lângă parametrii geometrici de bază, de unghiul de poziție al camei φ , această condiție se poate scrie

$$|\alpha(p_1, p_2 \dots p_k)|_{\max_{\varphi}} \leq \alpha_a$$

sau

$$f_1 = |\alpha(p_1, p_2 \dots p_k)|_{\max_{\varphi}} - \alpha_a \leq 0. \quad (3.135)$$

Uneori, se impun valori diferite pentru α_a în faza de ridicare - α_{ar} și în faza de coborâre - α_{ac} . În acest caz, condiția (3.135) se scrie separat, pentru cele două faze

$$\begin{aligned} f_{1r} &= \left| \alpha_r(p_1, p_2 \dots p_k) \right|_{\max}^{\varphi} - \alpha_{ar} \leq 0 \\ f_{1c} &= \left| \alpha_c(p_1, p_2 \dots p_k) \right|_{\max}^{\varphi} - \alpha_{ac} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

2) Condiția de evitare a subtăierii

În cazul mecanismelor cu rolă și cuplă superioară bilaterală, pentru evitarea subtăierii trebuie îndeplinite condițiile (3.11) și (3.12)

$$\begin{aligned} R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) &> r_4 \\ R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) &< -r_4 \end{aligned}$$

care se pot scrie comasat

$$\left| R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) \right| > r_4$$

sau sub forma

$$f_2 = \left| R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k) \right|_{\min}^{\varphi} - r_4 > 0. \quad (3.137)$$

În cazul mecanismelor cu cuplă superioară unilaterală intervin condițiile (3.11),

$$R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) > r_4 \quad (3.138)$$

$$R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) < 0. \quad (3.139)$$

Așa cum rezultă din formulele de calcul ale razei de curbură a profilului teoretic (3.26, 3.35) aceasta nu trece niciodată prin zero, dar își poate schimba semnul trecând prin infinit, așa cum se observă în Fig.3.26. În consecință, profilul teoretic, corespunzător unei faze, poate fi integral convex ($R_{ct} > 0$) sau poate avea un segment concav ($R_{ct} < 0$) și unul convex ($R_{ct} > 0$). Având în vedere aceste observații condiția (3.138) poate fi scrisă sub forma

$$f_2 = R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\min}^{\varphi} - r_4 > 0 \quad (3.140)$$

în care $R_{ct \min}$ este valoarea minimă a razei de curbură pentru intervalul cu $R_{ct} > 0$. Condiția (3.139) se aplică intervalului cu $R_{ct} < 0$ și este, evident, de prisos. Condiția (3.140) poate fi înlocuită cu

$$f_2 = R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\min}^{\varphi} - r_4 \geq R_{ca} \quad (3.141)$$

unde R_{ca} este o valoare admisibilă pentru raza de curbură a profilului real. În felul acesta se evită o formă prea ascuțită a profilului.

În cazul mecanismelor cu tchet plat, condiția de evitare a subtăierii (3.13) este

$$R_{cr}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) > 0$$

și poate fi reformulată astfel

$$f_2 = R_{cr}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\min} > 0. \quad (3.142)$$

Dacă raza de curbură R_{cr} este apropiată de zero, profilul prezintă o formă aproape ascuțită care are consecințe nefavorabile în ce privește uzura suprafețelor active. De aceea raza de curbură poate fi limitată la o valoare admisibilă $R_{ca} > 0$, iar restricția (3.142) devine

$$f_2 = R_{cr}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\min} - R_{ca} > 0. \quad (3.143)$$

3) Condiția de portanță a cuplei superioare

Această condiție este legată de rezistența la solicitarea de contact a celor două elemente care formează cupla superioară. Deși problemele de rezistență și durabilitate nu fac obiectul lucrării de față, această condiție nu poate fi neglijată deoarece este strâns legată de geometria camei - în formula de calcul a tensiunii de contact, σ [4], intervine raza de curbură a profilului real.

$$\begin{aligned} \sigma(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) &\leq \sigma_a \\ f_3 = \sigma(p_1, p_2 \dots p_k)_{\max} - \sigma_a &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.144)$$

4) Condiția de prelucrare cu o sculă de rază dată

În cazul prelucrării profilului interior, raza de curbură reală, în intervalul concav, trebuie să fie mai mare, în valoare absolută, decât raza sculei r_s ,

$$\begin{aligned} |R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) - r_4| &\geq r_s \\ f_4 = R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\max} - (r_4 - r_s) &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

în care $R_{ct \max}$ este valoarea maximă a razei de curbură în intervalul concav ($R_{ct} < 0$).

La prelucrarea profilului exterior, raza de curbură reală, în intervalul convex, trebuie să fie mai mare decât raza sculei

$$R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi) + r_4 \geq r_s$$

$$f_4 = R_{ct}(p_1, p_2 \dots p_k)_{\max} + (r_4 - r_s) \geq 0, \quad (3.146)$$

în care $R_{ct \min}$ este minima razei de curbura în intervalul convex ($R_{ct} > 0$).

5) Condiții de montare

Aceste condiții se referă la relațiile dintre dimensiunile camei și rolei, pe de o parte, și diametrele arborilor pe care se montează, pe de altă parte. Ca urmare, raza rolei și raza minimă a profilului real trebuie limitate inferior,

$$f_5 = r_4 \geq r_{4a} \quad (3.147)$$

$$f_6 = r_{r \min} \geq r_{ra} \quad (3.148)$$

*

Rezolvarea problemei de optimizare se efectuează utilizând algoritmi și programe specifice acestui domeniu. Pentru alegerea adecvată a acestora, este util să se țină seama de câteva observații legate de caracterul matematic al problemei, care se prezintă în continuare.

- 1) **Problema este neliniară deoarece funcția obiectiv și majoritatea restricțiilor sunt neliniare.**
- 2) **Funcția obiectiv, deși neliniară, are o expresie simplă, ușor de calculat pe cale analitică.**
- 3) **Majoritatea funcțiilor care intervin în formularea restricțiilor reprezintă valori extreme, în raport cu parametrul φ , ale altor funcții. Calculul lor se face, cu unele excepții, prin procedee numerice iterative. Este preferabil să se evite algoritmi de optimizare care utilizează derivatele restricțiilor în raport cu parametrii $p_1, p_2 \dots p_k$, deoarece această operație reclamă aplicarea succesivă a două procedee iterative.**

În lucrarea [4] se propune un algoritm de optimizare elaborat în așa fel încât să exploateze specificul problemei în vederea simplificării rezolvării și a reducerii timpului de calcul.

Problema de optimizare prezintă unele particularități și rezolvări specifice în funcție de tipul mecanismului care se proiectează. În cazul mecanismelor prevăzute cu tchet cu rolă restricția legată de unghiul de presiune are o mare însemnătate pentru a asigura o bună funcționare. În cele ce urmează se prezintă procedeele de rezolvare a problemei de optimizare, luând în considerare această restricție, pentru câteva mecanisme uzuale. Aceste procedee, care au preponderent caracter grafic, sunt cunoscute în teoria mecanismelor înainte de dezvoltarea domeniului matematic al optimizării.

3.7.2. Mecanismul plan cu tchet de translație și rolă

Parametrii geometrice de bază sunt e , s_0 și r_4 (par. 3.4.2.), iar funcția obiectiv este

$$F_0(e, s_0, r_4) = r_{r \max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2} - r_4. \quad (3.149)$$

Se consideră mecanismul echivalent obținut prin eliminarea rolei reprezentat într-o poziție oarecare (Fig.3.40).

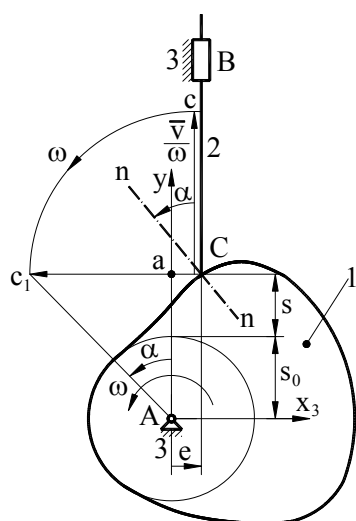


Fig. 3.40

Se aplică, în punctul C, vectorul $\overline{Cc} = \frac{\overline{v}}{\omega}$ corespunzător poziției considerate și apoi se rabate acest vector, cu 90° , în sensul vietzei unghiulare ω , ajungând în poziția $\overline{Cc_1}$. Se poate arăta că unghiul $\sphericalangle c_1Aa$, format între dreapta care unește centrul camei A cu vârful vectorului $\frac{\overline{v}}{\omega}$ rabătut, c_1 , și axa tchetului este unghiul de presiune α . Din triunghiul Aac_1 rezultă

$$\operatorname{tg} \sphericalangle c_1Aa = \frac{ac_1}{Aa} = \frac{Cc_1 - Ca}{Aa} = \frac{\frac{v}{\omega} - e}{s_0 + s} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pornind de la acest procedeu grafic, de determinare a unghiului de presiune, se prezintă o metodă de rezolvare a problemei de optimizare.

Se consideră un șir de poziții succesive ale tchetului în faza de ridicare și în faza de coborâre (Fig.3.41). Pentru fiecare poziție se reprezintă vectorul $\frac{\overline{v}}{\omega}$ rabătut. Extremitățile acestor vectori se unesc printr-o linie continuă obținând o curbă închisă. Această curbă are două ramuri separate de axa tchetului. Dacă ω are sens antiorar ca în Fig.3.41, ramura din stânga corespunde fazei de ridicare, iar cea din dreapta, fazei de coborâre. Se trasează, în continuare dreapta (R_1) tangentă la ramura de ridicare și înclinată cu unghiul α_{ar} față de axa tchetului și dreapta (R_2) prin punctul C_i , înclinată cu același unghi (α_{ar}) în sens opus. Dacă centrul camei se adoptă în domeniul unghiular format sub dreptele (R_1) și (R_2), unghiul de presiune respectă condiția $|\alpha| \leq \alpha_{ar}$, în faza de

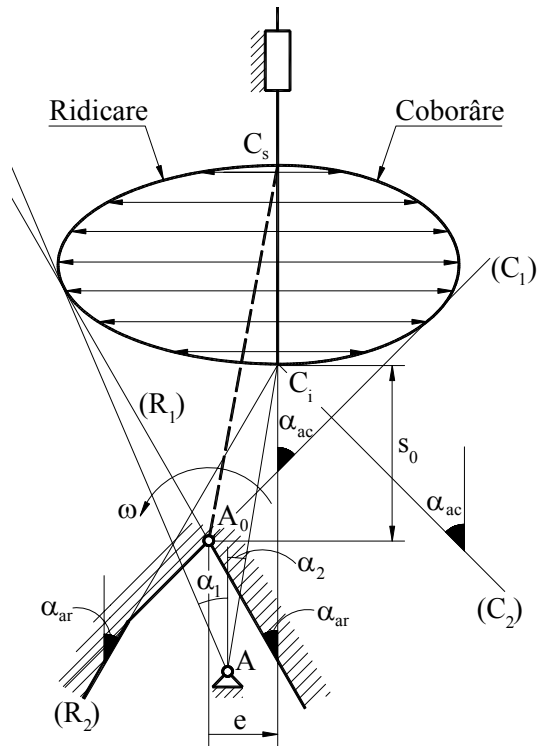


Fig. 3.41

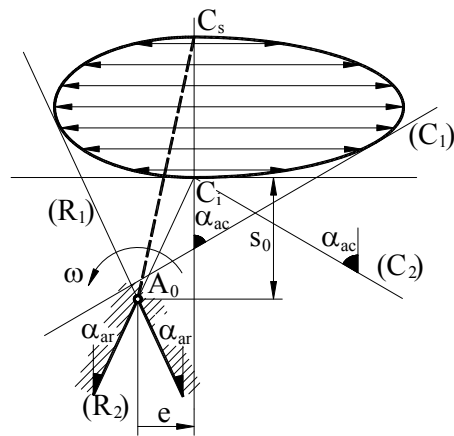


Fig. 3.42

ridicare. Această afirmație se poate verifica pe baza procedurii grafice de determinare a unghiului de presiune descris anterior. Astfel, dacă centrul camei se adoptă în punctul A, unghiul de presiune maxim este

$$|\alpha|_{\max} = |\alpha_1| \text{ sau } |\alpha_2|,$$

iar

$$|\alpha_1| \leq \alpha_{ar}; |\alpha_2| \leq \alpha_{ar}.$$

În mod similar se trasează dreptele (C_1) și (C_2) pentru faza de coborâre. Desigur, în domeniul unghiular situat sub aceste drepte se respectă condiția $|\alpha| \leq \alpha_{ac}$ pentru faza de coborâre. Pentru a asigura respectarea ambelor condiții, se definește un domeniu admisibil, situat sub cele patru drepte, pus în evidență în Fig.3.41.

Deoarece în această restricție nu este implicat parametrul r_4 , funcția obiectiv se poate reduce la forma

$$F_0(e, s_0) = r_{t \max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2}$$

care reprezintă, evident, raza maximă a profilului teoretic. Această rază este distanța AC_s , de la centrul camei la extremitatea superioară a cursei. Pentru situația din Fig.3.41, valoarea minimă (optimă) a acestui segment

se obține când A se adoptă în A_0 , punctul de intersecție dintre dreptele (R_1) și (C_1) . Domeniul admisibil poate avea, în funcție de valorile α_{ar} , α_{ac} și de parametrii care intervin în legea de mișcare și o altă configurație (Fig.3.42). În acest caz poziția optimă a centrului camei A_0 este la intersecția dreptelor (R_1) și (R_2) . Prin adoptarea punctului A_0 rezultă, implicit, parametrii e și s_0 (Fig.3.41, 3.42). Trebuie menționat că în această construcție grafică scările pentru lungimi și pentru $\frac{\bar{v}}{\omega}$ trebuie să fie egale.

Pentru determinarea razei rolei r_4 se recomandă relația empirică

$$r_4 \cong (0,3 - 0,4)r_{\min} . \quad (3.151)$$

Cunoscând e , s_0 și r_4 se verifică și celelalte restricții. Dacă se ajunge la o restricție nerespectată se modifică e , s_0 și r_4 în sensul necesar, având grijă ca centrul de rotație al camei să rămână în domeniul admisibil.

3.7.3. Mecanismul plan cu tachtet de rotație și rolă

Parametrii geometrici de bază sunt ℓ , d , ψ_0 și r_4 (par. 3.4.3.), iar funcția obiectiv are forma

$$F_0(\ell, d, \psi_0, r_4) = r_{\max} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d \cos(\psi_0 + \psi_h)} - r_4 . \quad (3.152)$$

Ca și în cazul mecanismului precedent, se prezintă un procedeu grafic de optimizare luând în considerare numai restricția unghiului de presiune.

Se consideră mecanismul echivalent obținut prin eliminarea rolei, într-o poziție oarecare (Fig.3.43). În punctul C se aplică vectorul $\overline{Cc} = \frac{\bar{v}}{\omega_1}$ în care \bar{v}

este viteza punctului C pentru poziția considerată. Acest vector se rabate cu 90° în sensul lui ω_1 , ajungând în poziția Cc_1 coliniară cu tachtetul BC. Se poate arăta că unghiul $\sphericalangle c_1Aa$, format între dreapta Ac_1 , care unește punctul c_1 cu centrul camei, și perpendiculara pe tachtet Aa este unghiul de presiune α . Din triunghiul dreptunghic c_1Aa rezultă

$$\operatorname{tg} \sphericalangle c_1Aa = \frac{\ell + Cc_1 - Ba}{Aa} . \quad (3.153)$$

Având în vedere că ω_1 și ω_2 au sensuri contrare, în poziția considerată, segmentul Cc_1 se poate exprima astfel

$$C c_1 = \left| \frac{v}{\omega_1} \right| = \frac{\ell |\omega_2|}{|\omega_1|} = -\ell \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

În aceste condiții formula (3.153) devine

$$\operatorname{tg} \angle c_1 A a = \frac{\ell \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) - d \cos(\psi_0 + \psi)}{d \sin(\psi_0 + \psi)} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.154)$$

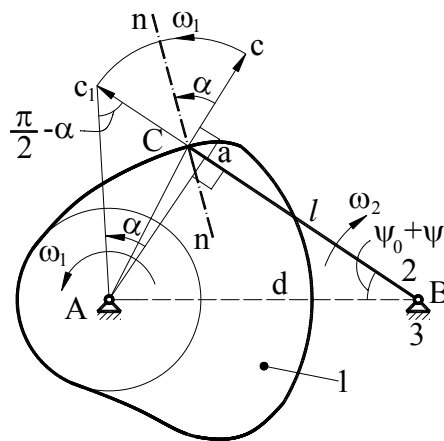


Fig. 3. 43

Pe baza acestui procedeu de determinare a unghiului de presiune se execută o construcție grafică pentru rezolvarea problemei de optimizare. Se reprezintă tachelul într-un șir de poziții succesive (Fig.3.44) în faza de ridicare și în faza de coborâre, cu lungimea ℓ adoptată arbitrar. Pentru fiecare poziție se reprezintă vectorul $\frac{\bar{v}}{\omega_1}$ rabățut. Acești vectori sunt orientați în mod diferit pentru cele două faze. Când ω_1 are sens antiorar, ca în Fig.3.44, orientarea este în sensul \overline{BC} pentru faza de ridicare și în sensul \overline{CB} pentru faza de coborâre. În extremitatea fiecărui vector se trasează două drepte care formează cu tachelul unghiurile $\frac{\pi}{2} - \alpha_{ar}$, pentru pozițiile fazei de ridicare și $\frac{\pi}{2} - \alpha_{ac}$ pentru coborâre. Astfel, pentru poziția BC (Fig.3.44) cele două drepte sunt (R_1) și (R_2) . Dacă

centrul camei se adoptă în domeniul unghiular format de aceste drepte, $|\alpha| \leq \alpha_{ar}$ pentru poziția considerată.

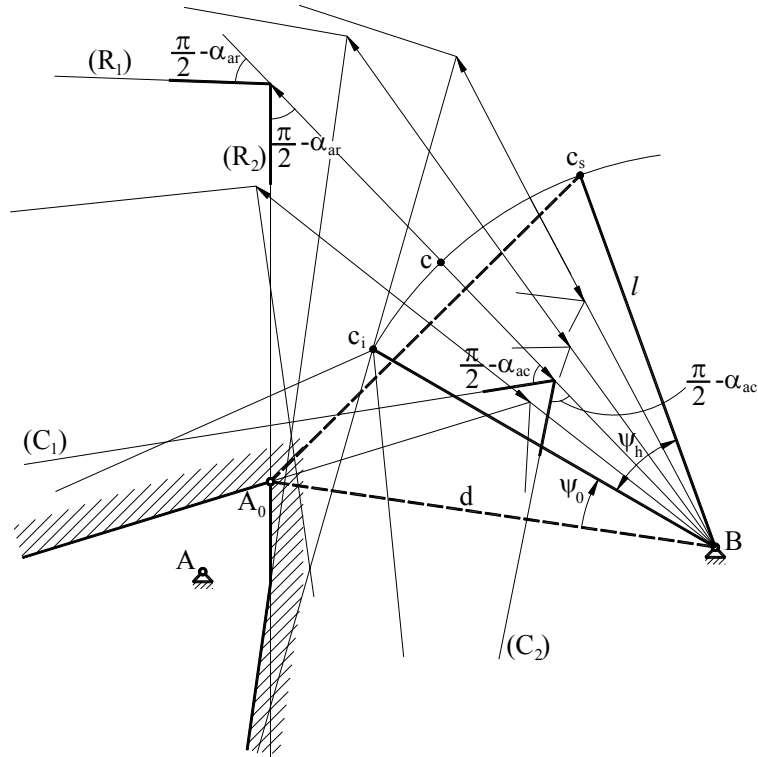


Fig. 3.44

Se definește un domeniu admisibil format prin intersecția domeniilor unghiulare specifice fiecărei poziții. Dacă centrul camei se adoptă în acest domeniu, $|\alpha| \leq \alpha_{ar}$ pentru toată faza de ridicare și $|\alpha| \leq \alpha_{ac}$ pentru întreaga fază de coborâre. Pentru a obține poziția optimă se consideră funcția obiectiv redusă la expresia

$$F_0(\ell, d, \psi_0) = r_{t \max} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d \cos(\psi_0 + \psi_h)}. \quad (3.155)$$

Raza teoretică maximă $r_{t \max}$ este distanța AC_s de la centrul camei A la punctul C_s corespunzător poziției extreme superioare. Valoarea minimă a acestui segment se obține când A este în vârful A_0 , rezultând astfel $\psi_0 = \sphericalangle A_0BC_i$ și $d = A_0B$. Dacă lungimea adoptată inițial pentru ℓ se schimbă,

d se modifică proporțional, iar ψ_0 rămâne nemodificat. Pentru adoptarea razei r_4 se utilizează relația empirică (3.151).

3.7.4. Mecanismul spațial cu camă cilindrică și tchet de translație

În cazul acestui mecanism parametrul care trebuie optimizat este raza medie a camei cilindrice r_1 , care este legată de unghiul de presiune α , prin relația

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{s'}{r_1}. \quad (3.49)$$

Impunând condiția $|\alpha| \leq \alpha_a$, se obține

$$\operatorname{tg} |\alpha| = \frac{|s'|}{r_1} \leq \operatorname{tg} \alpha_a$$

sau

$$r_1 \geq \frac{|s'|}{\operatorname{tg} \alpha_a}.$$

Această condiție este satisfăcută pentru orice valoare $s'(\varphi)$ dacă este îndeplinită pentru $|s'|_{\max}$,

$$r_1 \geq \frac{|s'|_{\max}}{\operatorname{tg} \alpha_a},$$

iar valoarea optimă (minimă) pentru r_1 este evident

$$r_1 = \frac{|s'|_{\max}}{\operatorname{tg} \alpha_a}. \quad (3.156)$$

Capitolul 4

MECANISME CU ROȚI DINȚATE

4.1. MECANISME ELEMENTARE CU ROȚI DINȚATE (ANGRENAJE)

Un mecanism elementar cu roți dințate (angrenaj) este format din două roți dințate cu mișcare de rotație în jurul a doua axe cu poziție relativă invariabilă, una antrenând-o pe cealaltă prin acțiunea dinților aflați succesiv și continuu în contact (STAS 915/2-81).

4.1.1. Suprafețele și liniile caracteristice ale roților dințate

Să considerăm un angrenaj, reprezentat simplificat în Fig.4.1, constituit din elementele dințate 1 și 2 care se rotesc cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 în jurul unor axe fixe (Δ_1) și (Δ_2) .

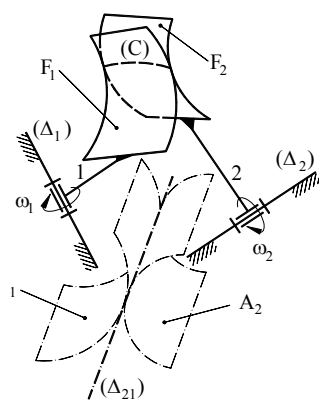


Fig. 4.1

Transmiterea mișcării între cele două roți dințate conjugate (care angrenează una cu cealaltă) se face prin intermediul unei cuple superioare formată între două suprafețe F_1 și F_2 tangente după o curbă (C), numite **flancuri**. Flancul F_1 , aparținând roții 1, ocupă în timpul mișcării, un șir de poziții succesive în raport cu elementul 2. Flancul F_2 rămâne tangent la toate aceste poziții, deci este înfășurătoarea lor. Analog, flancul F_1 este înfășurătoarea pozițiilor succesive ale flancului F_2 în raport cu roata 1. De aceea flancurile sunt denumite **suprafețe de înfășurare reciprocă**. În același timp transmiterea

mişcării se poate face prin intermediul axoizelor mişcării relative A_1 și A_2 . Acestea sunt generate de axa instantanee a mişcării relative (Δ_{21}) , în deplasarea sa în raport cu fiecare roată. Poziția axei instantanee (Δ_{21}) este determinată de raportul de transmitere i_{12} și de poziția relativă a axelor de rotație, definită prin distanța dintre axe, a și prin unghiul dintre axe Σ . Acești parametri se definesc la rândul lor, conform (STAS 915/2-81).

- **Raportul de transmitere, i_{12}** – raportul dintre viteza unghiulară a roții conducătoare 1 și viteza unghiulară a roții conduse 2.

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (*) \quad (4.1)$$

- **Distanța dintre axe, a** – lungimea perpendicularei comune (Fig.4.2.a).
- **Unghiul dintre axe, Σ** – cel mai mic unghi cu care trebuie rotită una dintre axe pentru a fi adusă în poziție de paralelism sau de suprapunere cu cealaltă axă, în așa fel încât sensurile de rotație ale celor două roți să fie opuse (Fig.4.2.b)

Axa instantanee (Δ_{21}) trece printr-un punct C situat pe perpendiculara comună AB și constituie suportul vitezei unghiulare relative $\bar{\omega}_{21}$ (Fig.4.2 a,b),

$$\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 + (-\bar{\omega}_1).$$

Parametrii care definesc poziția acestei axe sunt unghiurile δ_1 și δ_2 formate cu vectorii $-\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$, astfel încât

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2, \quad (4.2)$$

și razele orientate $r_1 = AC$ și $r_2 = CB$. Valorile acestor parametri se calculează cu relațiile (ANEXA 3),

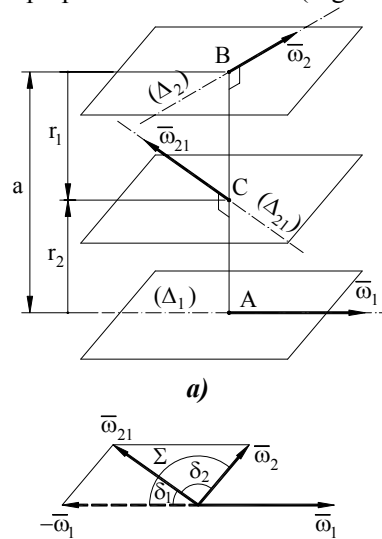


Fig. 4.2

(*) În cadrul acestui capitol convenim să folosim notațiile i_{12} , ω_1 , ω_2 atunci când parametrii respectivi sunt scalari fără semn și \tilde{i}_{12} , $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, când sunt scalari cu semn.

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{i_{12} + \cos \Sigma} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{i_{12} \sin \Sigma}{1 + i_{12} \cos \Sigma} \quad (4.4)$$

$$r_1 = \frac{a(1 + i_{12} \cos \Sigma)}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos \Sigma} \quad (4.5)$$

$$r_2 = -\frac{a \cdot i_{12} (\cos \Sigma + i_{12})}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos \Sigma} \quad (4.6)$$

Razele r_1 și r_2 rezultă pozitive dacă au sensul AB și negative în caz contrar.

Menționăm de asemenea două relații, utile pentru calculul raportului de transmitere, deduse din formulele (4.3) - (4.6),

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad (4.7)$$

$$i_{12} = -\frac{r_2 \cos \delta_2}{r_1 \cos \delta_1} \quad (4.8)$$

Axoidale mișcării relative se numesc, în terminologia angrenajelor, **suprafețe de rostogolire** și prezintă o importanță deosebită pentru studiul geometric și cinematic al roților dințate. Dacă se cunoaște forma flancului unei roți și mișcarea relativă, reprodusă cu ajutorul suprafețelor de rostogolire, se poate determina, prin înfășurare, flancul roții conjugate. Pe această proprietate se bazează definirea geometrică a **sistemelor de roți dințate** cu ajutorul unui **element dințat de referință**. Acesta are o formă particulară, caracterizată printr-o geometrie simplă – de obicei flancurile sunt plane. Definirea unei roți dințate aparținând sistemului se face din condiția de angrenare fictivă cu elementul de referință. În procesul de definire se cunosc suprafețele de rostogolire și forma flancului elementului de referință, rezultând prin înfășurare, flancul roții care se definește. Suprafața de rostogolire a roții dințate în angrenarea ei cu elementul dințat de referință se numește **suprafață de divizare**. Această suprafață este caracteristică și invariabilă pentru o anumită roată considerată izolat și servește la definirea geometrică a elementelor danturii. Spre deosebire de suprafața de divizare, suprafața de rostogolire a unei roți dințate depinde de parametrii geometrici ai roții conjugate și se poate modifica în ce privește dimensiunile și chiar forma, odată cu schimbarea roții conjugate. Suprafața de rostogolire poate să coincidă cu cea de divizare numai în situații particulare.

Flancurile sunt delimitate de **suprafața de cap** – spre vârful dinților și de **suprafața de picior** - spre fundul golurilor (Fig.4.3). Dacă suprafața de cap

este în exteriorul celei de picior, roata dințată are **dantură exterioară** (Fig.4.3a), iar dacă suprafața de cap este în interiorul celei de picior, roata are **dantură interioară** (Fig.4.3b).

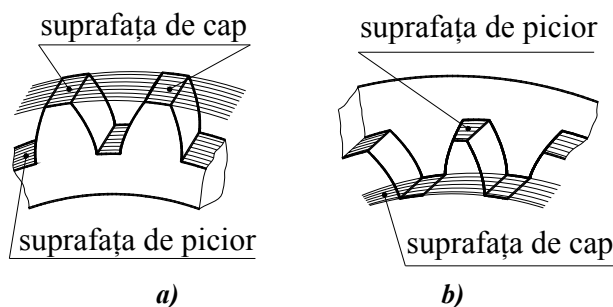


Fig. 4.3

Intersecțiile flancurilor cu diverse suprafețe formează liniile caracteristice ale roții dințate, după cum urmează.

Linii de divizare ale flancurilor – intersecțiile flancurilor cu suprafața de divizare (Fig.4.4). În mod analog se definesc **liniile de rostogolire ale flancurilor**, **liniile de cap ale flancurilor**, etc.

Profilul dintelui (golului dintre dinți) – intersecția suprafețelor care delimitează dintelul (flancurile dintelui și suprafața de cap) sau golul dintre dinți (flancurile golului și suprafața de picior) cu o suprafață dată (Fig.4.5). În funcție de această suprafață de intersecție, există mai multe tipuri de profile:

Profilul frontal – se obține când suprafața de intersecție este frontală. **Suprafața frontală** este ortogonală la generatoarele suprafeței de divizare.

Profilul normal – se obține când suprafața de intersecție este normală pe dinte sau pe gol. **Suprafața normală** este ortogonală la liniile de divizare ale flancurilor dintelui sau golului.

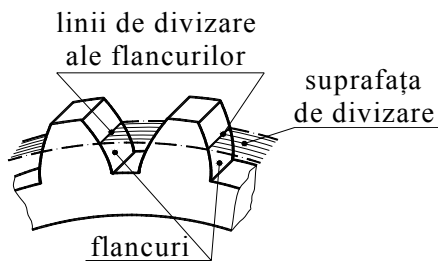


Fig. 4.4

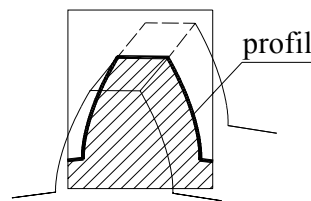


Fig. 4.5

Profilul axial – se obține când suprafața de intersecție este un plan care conține axa roții.

4.1.2. Clasificare angrenajelor

Angrenajele, precum și roțile dințate luate separat, prezintă o mare varietate de tipuri și de forme. Clasificarea lor se face după mai multe criterii, după cum se arată în continuare.

■ Variația raportului de transmitere

Dacă raportul de transmitere instantaneu este constant, axa instantanee a mișcării relative este fixă deoarece parametrii de poziție δ_1 (4.3), δ_2 (4.4), r_1 (4.5) și r_2 (4.6), au de asemeni valori constante. Prin mișcarea relativă de rotație a acestei axe în raport cu fiecare roată, se generează suprafețele de rostogolire care sunt suprafețe de revoluție. Evident, intersecțiile suprafețelor de rostogolire cu plane perpendiculare pe axa roții, sunt cercuri. Din această cauză **angrenajele cu raport de transmitere constant se numesc angrenaje circulare.**

Dacă raportul de transmitere instantaneu este variabil, poziția axei instantanee, este de asemenea, variabilă iar suprafețele de rostogolire nu sunt suprafețe de revoluție. **Angrenajele** de acest fel se numesc **necirculare.** În construcția de mașini, aplicațiile angrenajelor necirculare sunt foarte reduse. Din această cauză, în continuare vom trata numai angrenajele circulare.

Raportul de transmitere al angrenajelor circulare, indiferent de tipul lor, se calculează cu formula

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.9)$$

în care z_1 și z_2 reprezintă numerele de dinți ale roților. Formula (4.9) se demonstrează simplu. Să presupunem că roata 1 execută o rotație completă, cu unghiul $\varphi_1 = 2\pi$. În acest caz, dinții roții 1, în număr de z_1 , angrenează cu tot atâția dinți ai roții 2. Ca urmare roata 2 se rotește cu unghiul

$$\varphi_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot 2\pi$$

Având în vedere că rotațiile cu unghiurile φ_1 și φ_2 se execută în același timp, se poate scrie

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{2\pi}{\frac{z_1 \cdot 2\pi}{z_2}} = \frac{z_2}{z_1}$$

■ **Poziția relativă a axelor și forma suprafețelor de rostogolire**

Poziția relativă a axelor de rotație determină forma suprafețelor de rostogolire, astfel încât aceste criterii trebuie discutate împreună. Conform acestui criteriu se pot forma următoarele tipuri de angrenaje.

1) Angrenaje cu axele de rotație încrucișate (neparalele și neconcurente)

În acest caz $a \neq 0$, $\Sigma \neq 0$, $\Sigma \neq \pi$. Axa instantanee a mișcării relative are o poziție determinată în spațiu iar **suprafețele de rostogolire sunt hiperboloizi de rotație cu o pânză** (ANEXA 3) (Fig.4.6.a).

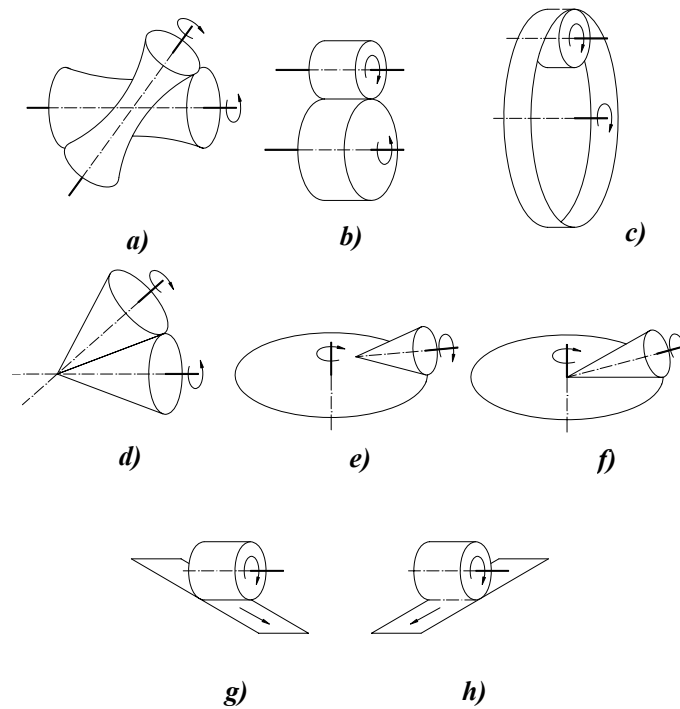


Fig. 4.6

2) Angrenaje cu axe de rotație paralele

În acest caz $a \neq 0$ și $\Sigma = 0$ sau $\Sigma = \pi$. Pentru $\Sigma = 0$ rezultă $\delta_1 = \delta_2 = 0$, iar pentru $\Sigma = \pi$, se obține $\delta_1 = 0$ și $\delta_2 = \pi$. Axa instantanee a mișcării relative este paralelă cu axele de rotație iar **suprafețele de rostogolire sunt cilindri circulari având axele geometrice identice cu axele de rotație** (Fig.4.6.b, c).

3) Angrenaje cu axe de rotație concurente

În acest caz $a = 0$, ceea ce conduce la $r_1 = 0$ și $r_2 = 0$. Rezultă că axa instantanee și axele de rotație sunt concurente în același punct, iar **suprafețele de rostogolire sunt conuri cu axele geometrice identice cu axele de rotație și cu vârful în punctul de intersecție al acestora** (Fig.4.6.d).

În procesul de definiție geometrică a roților dințate, interesează și angrenajele particulare, la care una din roți are suprafața de rostogolire plană. Aceste roți sunt utilizate de obicei ca elemente de referință. Pentru a pune în evidență aceste angrenaje să considerăm planul de coordonate

(Σ, i_{12}) ($\Sigma \in [0, \pi]$, $i_{12} \in [0, \infty)$) - Fig.4.7.

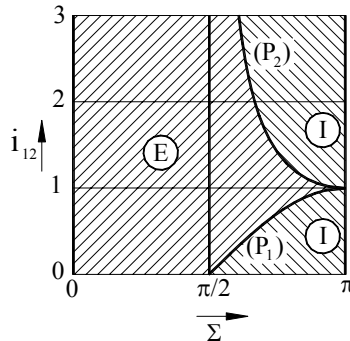


Fig. 4.7

Fiecare punct din acest plan reprezintă o infinitate de angrenaje având aceleași valori pentru Σ , i_{12} , δ_1 și δ_2 și o mulțime de valori pentru $a \in [0, \infty)$. Dreptele $\Sigma = 0$ și $\Sigma = \pi$, reprezintă angrenaje paralele, iar restul punctelor – angrenaje încrucișate (dacă $a \neq 0$) sau concurente (dacă $a = 0$).

Angrenajele cu o suprafață de rostogolire plană se pot obține în două moduri.

- Când $\delta_1 = \pi/2$ sau $\delta_2 = \pi/2$. Să presupunem $\delta_1 = \pi/2$. Din (4.3) – (4.6) rezultă $i_{12} = -\cos \Sigma$, $r_1 = a$, și $r_2 = 0$. Prin

urmare axa instantanee este perpendiculară pe axa de roții 1 ($\delta_1 = \pi/2$) și concurentă cu axa roții 2 ($r_2 = 0$). Angrenajul este format dintr-o roată 1, cu suprafața de rostogolire plană numită **roată plană** și o roată 2, cu suprafața de rostogolire conică. Acest angrenaj poate fi încrucișat (Fig.4.6.e) dacă $a \neq 0$ sau concurent (Fig.4.6.f) dacă $a = 0$. În planul (i_{12}, Σ) angrenajele cu roata 1 plană se găsesc pe curba (P_1) de ecuație $i_{12} = -\cos \Sigma$ (Fig.4.7). În ipoteza $\delta_2 = \pi/2$ se obțin angrenaje similare în care roata 2 este plană și se găsesc pe curba (P_2) de

$$\text{ecuație } i_{12} = -\frac{1}{\cos \Sigma}.$$

• Când $i_{12} = 0$ sau $i_{12} = \infty$. În ipoteza $i_{12} = 0$, $\omega_1 = 0$ și, deci elementul 1 are mișcare translație purtând denumirea de **cremalieră**. Din relațiile (4.3) – (4.6) rezultă $\delta_1 = \Sigma$, $\delta_2 = 0$, $r_1 = a = \infty$. Axa instantanee descrie, în raport cu elementul 1, o suprafață de rostogolire plană, deoarece cremaliera are mișcare de translație rectilinie. Roata 2 are suprafața de rostogolire cilindrică deoarece $\delta_2 = 0$. Dacă $\Sigma \neq 0$ și $\Sigma \neq \pi$, angrenajele cu cremalieră sunt spațiale – cele două elemente se deplasează paralel cu plane diferite, (Fig.4.6 g). Dacă $\Sigma = 0$ sau $\Sigma = \pi$, angrenajul este plan (Fig.4.7). În ipoteza $i_{12} = \infty$, se obțin angrenaje similare, cu elementul 2 – cremalieră, situate în planul (i_{12}, Σ), pe dreapta $i_{12} = \infty$.

■ Angrenaje exterioare și interioare

Angrenajele exterioare se caracterizează prin aceea că suprafețele de rostogolire sunt exterioare una în raport cu cealaltă, iar roțile au dantură exterioară.

În cazul angrenajelor interioare suprafața de rostogolire a uneia dintre roți (care are dantură exterioară) este amplasată în interiorul suprafeței de rostogolire aparținând celeilalte roți (care are dantură interioară).

Angrenajele exterioare au $\delta_1 < \frac{\pi}{2}$ și $\delta_2 < \frac{\pi}{2}$, pe când angrenajele interioare au $\delta_1 > \frac{\pi}{2}$ sau $\delta_2 > \frac{\pi}{2}$. Analizând aceste condiții pe baza relațiilor (4.3) și (4.4) se ajunge la concluzia că în domeniul (E) (Fig.4.7), avem angrenaje exterioare, iar în domeniul (I), angrenaje interioare. Cele două domenii sunt separate de curbele (P_1) și (P_2), care reprezintă angrenajele cu o suprafață de rostogolire plană. Acestea din urmă formează o clasă specială care nu poate fi încadrată nici în categoria angrenajelor exterioare, nici în categoria angrenajelor interioare. Menționăm că, deși teoretic, angrenajele interioare pot avea axe încrucișate, concurente sau paralele, în aplicațiile practice se utilizează numai cele cu axele paralele, (Fig.4.6.b). În planul (i_{12}, Σ) angrenajele paralele exterioare sunt pe dreapta $\Sigma = 0$, iar cele interioare, pe dreapta $\Sigma = \pi$. Precizăm, de asemenea, că angrenajele exterioare cu axe neparalele (concurente sau încrucișate), au în marea lor majoritate a aplicațiilor practice, axele de rotație perpendiculare, fiind pe dreapta $\Sigma = \frac{\pi}{2}$.

■ Forma liniilor de divizare ale flancurilor

1) **Roți dințate cu dinți dreپți** – liniile de divizare ale flancurilor coincid cu generatoarele suprafeței de divizare.

2) **Roți dințate cu dinți înclinați** – liniile de divizare ale flancurilor sunt elici cilindrice (la roțile cu suprafață de divizare cilindrică) sau conice (la roțile cu suprafața de divizare conică), cu pas constant.

3) **Roți dințate cu dinți curbi** - liniile de divizare ale flancurilor sunt curbe de diverse forme: arce de cerc, epicicloide alungite, evolvente alungite sau scurtate. Dantura curbă se utilizează, practic, numai în cazul roților cu suprafața de divizare conică sau plană.

■ Modul de definire geometrică

1) **Roți dințate cilindrice** – au suprafața de divizare cilindrică, iar elementul de referință este o cremalieră. Roțile cilindrice pot forma **angrenaje paralele** sau **încrucișate**, numite **elicoidale**.

2) **Roți dințate conice** – au suprafața de divizare conică, iar elementul de referință este o roată plană. Roțile conice pot forma **angrenaje concurente** sau **încrucișate**, numite **hipoide**.

3) **Angrenaje melcate**. Angrenajul melcat este un angrenaj încrucișat cu axe perpendiculare, ale cărui elemente sunt melcul și roata melcată.

Melcul este un element cu dinți elicoidali dispuși pe un cilindru. El poate fi asimilat cu o roată cilindrică cu dinți înclinați având un număr mic de dinți (1-4). Melcul este elementul de referință pentru roata melcată și este definit pe baza procedurii de prelucrare.

Roata melcată este elementul dințat conjugat cu melcul, care servește ca element de referință pentru definirea sa.

■ Forma profilului frontal

În marea majoritate a aplicațiilor tehnice, roțile dințate sunt evolventice – profilul frontal are formă de **evolventă**. În mecanica fină se întrebuințează și angrenaje **cicloidale**, cu profilul format dintr-un arc de **epicicloidă** și un arc de **hipocicloidă**. Se cunosc, de asemenea, angrenajele **Wildhaber – Novikov**, cu profile în formă de arce de cerc.

*

În Fig.4.8 sunt reprezentate tipurile principale de angrenaje uzuale, indicându-se încadrarea în categoriile de clasificare prezentate.

Cele mai simple angrenaje sunt cele cu axe paralele, formate din roți dințate cilindrice cu dinți dreپți, care se vor prezenta în continuare. Studiul

geometrico-cinematic al acestor angrenaje se extinde prin unele echivalențe și analogii și asupra celorlalte tipuri de angrenaje.

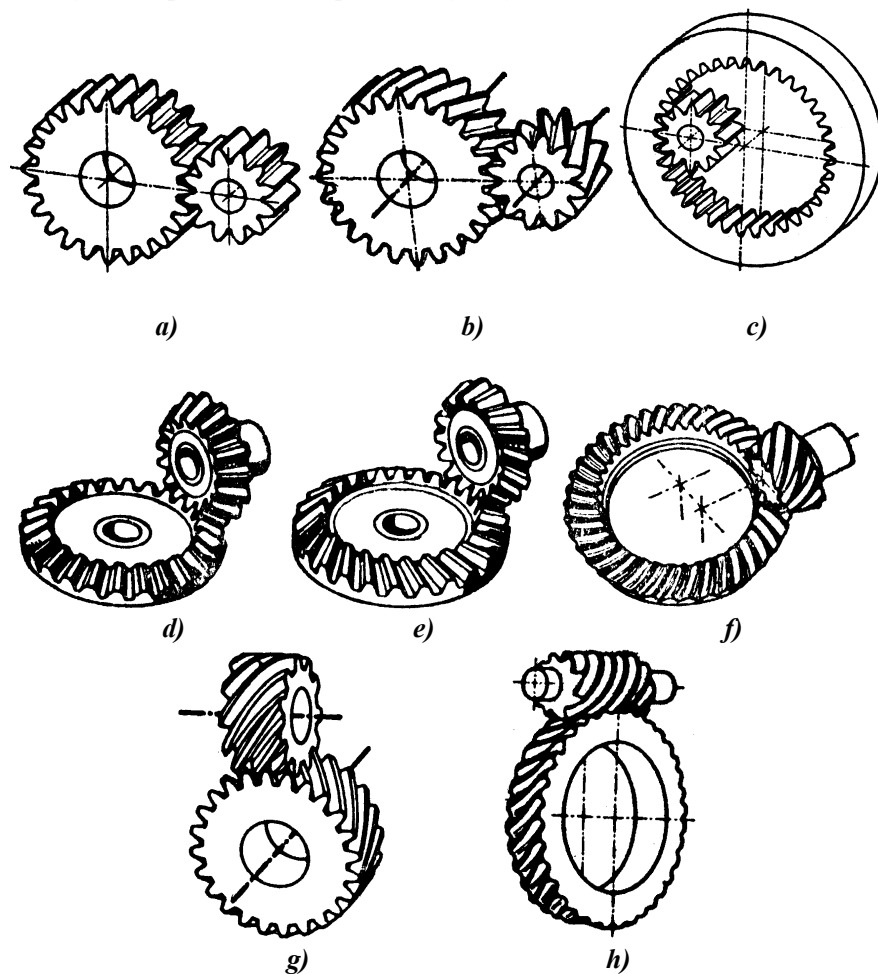


Fig. 4.8

a) angrenaj cilindric, paralel cu dinți drepți; **b)** angrenaj cilindric, paralel cu dinți înclinați; **c)** angrenaj cilindric, paralel, interior, cu dinți drepți; **d)** angrenaj conic, concurent, cu dinți drepți; **e)** angrenaj conic, concurent, cu dinți înclinați; **f)** angrenaj hipoid (format din roți conice cu axe încrucișate, cu dinți curbi); **g)** angrenaj elicoidal (format din roți cilindrice, cu axe încrucișate, cu dinți înclinați); **h)** angrenaj melcat (încrucișat, format dintr-un melc și o roată melcată)

4.1.3. Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți drepți

4.1.3.1. Raportul de transmitere. Legea fundamentală a angrenării

Angrenajele paralele sunt mecanisme plane, iar proprietățile lor geometrico-cinematice se studiază într-un plan frontal, perpendicular pe axele roților.

În ipoteza că raportul de transmitere este constant (angrenaje circulare), suprafețele de rostogolire sunt cilindri circulari coaxiali cu roțile. Intersecțiile lor cu un plan frontal, formează cercurile de rostogolire C_{w1} și C_{w2} , care reprezintă centroidele mișcării relative. Punctul lor de tangență este centrul instantaneu al mișcării relative C (Fig.4.9), numit în terminologia angrenajelor, **punct de rostogolire** sau **pol al angrenării**.

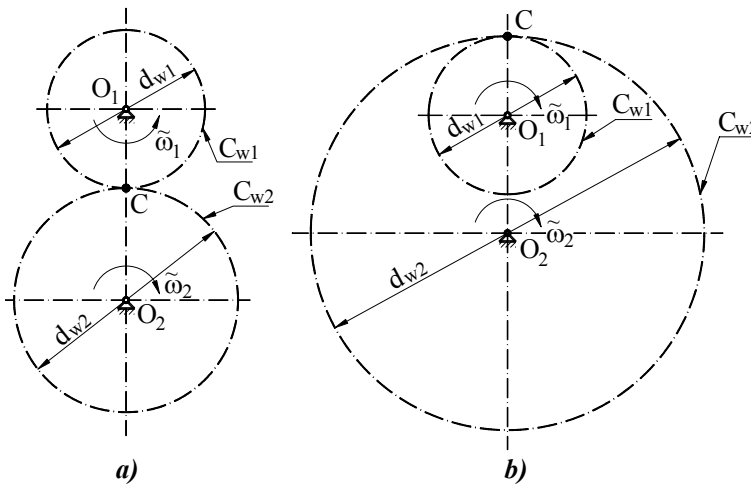


Fig. 4.9

Raportul de transmitere al angrenajelor paralele se calculează, desigur, cu formula generală (4.9), dar se poate exprima și în funcție de razele de rostogolire d_{w1} și d_{w2} .

Vitezele periferice $v_{C1} = \omega_1 \cdot (d_{w1}/2)$ și $v_{C2} = \omega_2 \cdot (d_{w2}/2)$, sunt egale datorită rostogolirii fără alunecare a celor două cercuri, unul peste altul,

$$v_{C1} = \omega_1 \cdot \frac{d_{w1}}{2} = v_{C2} = \omega_2 \cdot \frac{d_{w2}}{2},$$

ceea ce conduce la relația

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \quad (4.10)$$

Deoarece axele de rotație sunt paralele, sensurile de rotație sunt comparabile, astfel încât vitezele unghiulare se pot exprima și prin scalari cu semn $\tilde{\omega}_1$ și $\tilde{\omega}_2$. În această ipoteză, raportul de transmitere definit prin relația

$$\tilde{i}_{12} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \quad (4.11)$$

este, de asemenea, un număr cu semn. Dacă roțile au sensuri de rotație opuse, așa cum se întâmplă la angrenajul exterior (Fig.4.9.a), raportul de transmitere este negativ, iar expresiile sale de calcul sunt

$$\tilde{i}_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \quad (4.12)$$

Dacă roțile se rotesc în același sens, ca în cazul angrenajului interior (Fig.4.9.b), raportul de transmitere este pozitiv

$$\tilde{i}_{12} = +\frac{z_2}{z_1} = +\frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \quad (4.13)$$

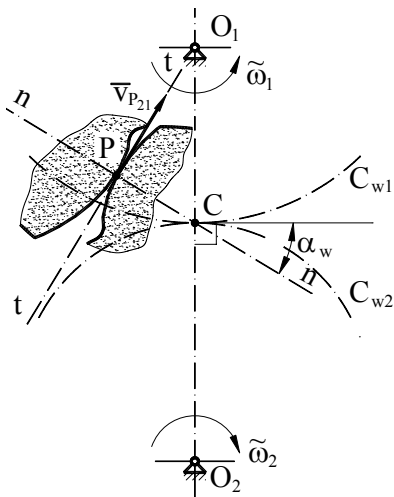


Fig. 4.10

roți. Vectorul $\bar{v}_{P_{21}}$ este viteza relativă de alunecare definită ca viteza punctului P_2 în mișcarea relativă a roții 2 în raport cu 1. Viteza relativă, este în același timp, tangentă comună la profilele în contact și perpendiculară pe dreapta PC, care unește punctul P cu centrul instantaneu de rotație. Aceasta înseamnă că

Existența angrenajelor circulare, cu raport de transmitere instantaneu constant, care se bucură de proprietățile evidențiate anterior, este determinată de forma profilelor frontale. Ne propunem să stabilim ce condiții trebuie să îndeplinească aceste profile pentru a obține angrenaje circulare.

Se consideră două profile conjugate, cu contactul în punctul P (Fig.4.10). Aceste profile formează o cuplă superioară într-un mecanism plan, pentru care se poate scrie ecuația de viteze,

$$\bar{v}_{P_2} = \bar{v}_{P_1} + \bar{v}_{P_{21}},$$

în care \bar{v}_{P_2} și \bar{v}_{P_1} reprezintă vitezele punctelor P_2 și P_1 , aparținând celor două

dreapta PC este normală comună la cele două profile în punctul de contact. Dacă angrenajele sunt circulare, punctul C este fix pe linia centrelor O_1O_2 , deoarece centroidele sunt cercuri cu centrele în O_1 și O_2 . Această concluzie permite formularea **legii fundamentale a angrenării**:

Pentru ca raportul de transmitere instantaneu să fie constant este necesar ca normala comună în punctul de contact al profilelor să treacă printr-un punct fix, situat pe linia centrelor.

Dacă profilul unei roți dințate este dat, se poate determina profilul conjugat, prin înfășurare, astfel încât să fie respectată legea fundamentală a angrenării. Aceasta înseamnă că se poate utiliza o înfinitate de perechi de profile de dinți. Cu toate acestea, în construcția de mașini, se folosesc aproape exclusiv, profilele formate din **evolventa cercului**, datorită avantajelor pe care le au.

În legătură cu procesul de angrenare dintre două profile, se definesc următoarele noțiuni.

- **Linie de angrenare** – locul geometric (traectoria) punctului de contact.
- **Unghi de angrenare** (α_w) – unghiul format între normala comună în punctul de contact și o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor (Fig.4.10).

4.1.3.2. Utilizarea evolventei cercului ca profil de dinte

■ Evolventa cercului. Definiție, ecuații, proprietăți

Evolventa cercului^(*) este curba descrisă de un punct care aparține unei drepte (dreaptă generatoare), care se rostogolește fără alunecare peste un cerc (cerc de bază).

Ecuațiile evolventei se deduc pe baza Fig.4.11 în care este reprezentat cercul de bază C_b , dreapta generatoare PK și punctul P care descrie evolventa. Coordonatele polare ale punctului curent P sunt unghiul θ și raza r, care se exprimă în funcție de raza de bază r_b și de unghiul α format între razele OP și OK. Având în vedere că arcul $\widehat{P_bK}$ și segmentul PK au lungimi egale deoarece se rostogolesc unul peste altul fără alunecare, se poate scrie

$$\theta = \frac{\widehat{P_bK}}{r_b} - \alpha = \frac{PK}{r_b} - \alpha = \text{tg}\alpha - \alpha .$$

*) În cele ce urmează se va folosi termenul simplificat **evolventă**, în loc de **evolventa cercului**

Funcția $\text{tg}\alpha - \alpha$ se numește **involută** și se notează **inv α** . La această relație se asociază expresia razei r dedusă din triunghiul dreptunghic OPK, obținând ecuațiile parametrice ale evolventei în coordonate polare,

$$\begin{cases} \theta = \text{inv}\alpha \\ r = \frac{r_b}{\cos\alpha} \end{cases} \quad (4.14)$$

în care parametrul α are semnificația menționată – unghiul dintre raza punctului curent P și raza punctului de tangență K, a dreapta generatoare cu cercul de bază.

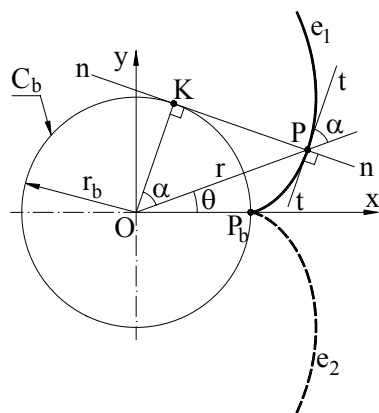


Fig. 4.11

Aplicând relațiile,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta,$$

se deduc ecuațiile parametrice în coordonate rectangulare,

$$x = r_b (\cos t + t \cdot \sin t) \quad (4.15)$$

$$y = r_b (\sin t - t \cdot \cos t),$$

în care parametrul t este

$$t = \alpha + \theta = \text{tg}\alpha .$$

Evolventa are o serie de proprietăți importante în contextul utilizării ei ca profil de roată dințată, pe care le menționăm în continuare.

1) Evolventa are două ramuri infinite e_1 și e_2 , separate printr-un punct de întoarcere P_b , situat pe cercul de bază,

2) În ecuațiile evolventei intervine un singur parametru constant – raza de bază r_b . Aceasta înseamnă că forma evolventei este determinată numai de mărimea cercului de bază.

3) Normala la evolventă în P este tangenta la cercul de bază PK sau dreapta generatoare, iar centrul de curbură este în punctul de tangență K. Pentru a demonstra aceste afirmații, se calculează panta normalei la evolventă în P (A.10),

$$m_n = -\frac{x'(t)}{y'(t)} .$$

Derivatele $x'(t)$ și $y'(t)$ rezultă din expresiile (4.15)

$$x'(t) = r_b \cdot t \cos t$$

$$y'(t) = r_b \cdot t \sin t,$$

astfel încât se obține,

$$m_n = -\frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \theta)}.$$

Această relație arată că normala în P este perpendiculară pe raza OK, deci coincide cu tangenta la cercul de bază. Raza de curbură se calculează cu relația (A.11)

$$R_c = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

în care $x''(t)$ și $y''(t)$ sunt

$$x''(t) = r_b (\cos t - t \sin t)$$

$$y''(t) = r_b (\sin t + t \cos t).$$

După efectuarea calculelor se obține

$$R_c = r_b t = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha = PK,$$

care arată că centrul de curbură este în K.

Dacă r_b tinde la infinit, adică cercul de bază devine o dreaptă, R_c tinde, de asemenea, la infinit, deci și evolventa se transformă într-o dreaptă.

4) Cunoscând direcția normalei la evolventă, se poate da o altă interpretare parametrului α - unghiul dintre raza OP și tangenta la evolventă în P. În cazul în care evolventa este utilizată ca profil de dinte, acest unghi se numește **unghi de presiune**.

Din ecuațiile (4.14) rezultă că pe cercul de bază ($r = r_b$), unghiul de presiune $\alpha = 0$.

5) Evolventa poate fi generată și prin înfășurare. Dacă atașăm drepte generatoare, o altă dreaptă, perpendiculară pe prima în punctul P, acesta se suprapune peste tangenta la evolventă. Astfel, la rostogolirea dreptei generatoare peste cercul de bază, dreapta suplimentară înfășoară evolventa.

■ Verificarea legii fundamentale a angrenării în cazul profilelor evolventice

Se consideră un angrenaj (Fig.4.12), având profilele de forma unor evolvente generate cu ajutorul cercurilor de bază C_{b1} și C_{b2} , coaxiale cu roțile. Normala comună în punctul de contact P trebuie să fie tangentă la ambele cercuri de bază. Cum această dreaptă (K_1K_2) este fixă, punctul ei de intersecție cu linia centrelor, este de asemenea fix, și reprezintă punctul de rostogolire C al angrenajului. Prin urmare, legea fundamentală a angrenării este respectată.

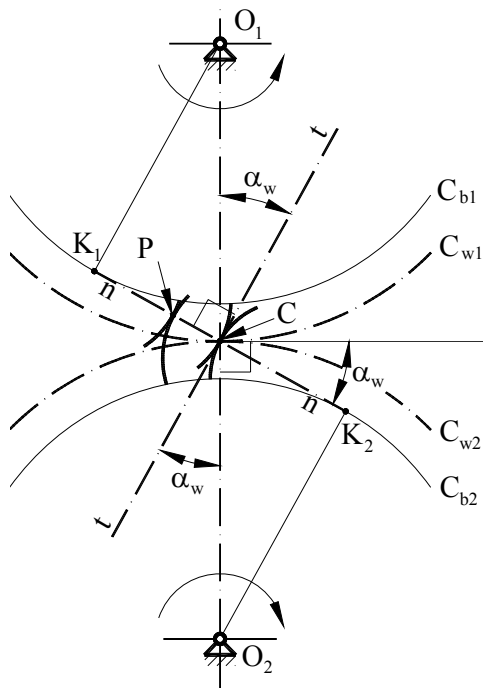


Fig. 4.12

Linia de angrenare a angrenajului evolventic coincide cu tangenta comună la cercurile de bază K_1K_2 , deoarece punctul de contact P aparține permanent acestei drepte invariabile. Datorită formei rectilinii, linia de angrenare se numește **dreaptă de angrenare**.

Unghiul de angrenare α_w , este constant, deoarece normala comună în punctul de contact este fixă.

Să considerăm cele două profile evolventice, reprezentate când punctul de contact concide cu punctul de rostogolire C . Tangenta comună tt , formează cu razele O_1C și O_2C unghiurile de presiune ale profilelor pe cercurile de rostogolire. Acestea sunt, evident, egale între ele și egale cu unghiul de angrenare α_w .

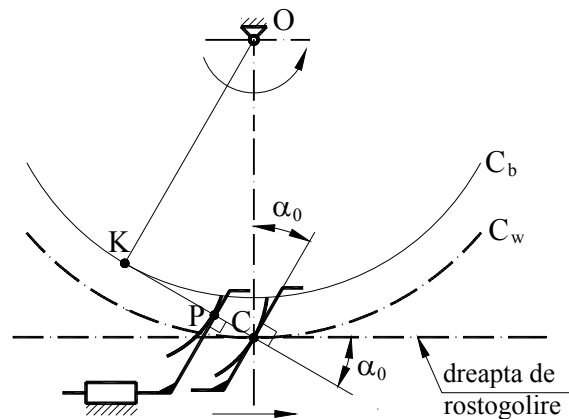


Fig. 4.13

În sistemul angrenajelor evolventice, un rol important îl are cremaliera – elementul dințat cu mișcare de translație. Se poate arăta că profilul cremalierii în angrenare cu o roată evolventică este rectiliniu. Să considerăm un astfel de angrenaj (Fig.4.13). Normala comună în punctul de contact P, trebuie să fie simultan, tangentă la cercul de bază al roții și perpendiculară pe profilul rectiliniu al cremalierii. Deoarece direcția profilului cremalierii este invariabilă datorită mișcării de translație, normala comună este o dreaptă fixă. Desigur, punctul ei de intersecție cu linia centrelor, este de asemenea fix, iar legea fundamentală a angrenării este verificată. În acest caz, linia centrelor se consideră dreapta care trece prin centrul roții O, și este perpendiculară pe direcția vitezei cremalierii. În punctul de rostogolire C, sunt tangente, cercul de rostogolire al roții C_w și dreapta de rostogolire a cremalierii.

Proprietățile evidențiate la angrenajul format din două roți evolventice, se regăsesc și în acest caz. Linia de angrenare este normala comună invariabilă CK și poartă denumirea de **dreaptă de angrenare**. Unghiul de angrenare este constant și este egal cu unghiul de înclinare al profilului cremalierii în raport cu o dreaptă perpendiculară pe direcția de deplasare, α_0 . Unghiul de presiune de rostogolire al profilului roții, este de asemenea, egal cu unghiul α_0 .

4.1.3.3. Definirea geometrică a roții dințate cilindrice cu dinți drepi

■ Cremaliera de referință

Cremaliera de referință este o cremalieră standardizată (STAS 821-82), cu profile rectilinii (Fig.4.14), care servește pentru definirea geometrică a roților dințate evolventice. Elementele geometrice ale danturii se definesc în raport cu **dreapta de referință**. Pe această dreaptă, grosimea dintelui și lățimea golului dintre dinți sunt egale.

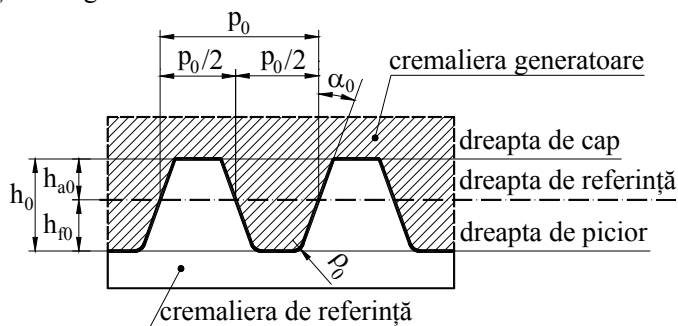


Fig. 4.14

Parametrii geometrici ai cremalierii de referință sunt:

- **Pasul p_0** – distanța dintre două profile omoloage (de aceeași parte a dintelui) consecutive, măsurată pe dreapta de referință sau pe o dreaptă paralelă cu aceasta;

- **Înălțimea dintelui h_0** – distanța dintre dreapta de cap și dreapta de picior;

- **Înălțimea de referință a capului dintelui h_{a0}** – distanța dintre dreapta de referință și dreapta de cap;

- **Înălțimea de referință a piciorului dintelui h_{f0}** – distanța dintre dreapta de referință și dreapta de picior;

- **Raza de racordare la piciorul dintelui ρ_0** – raza cercului de racordare dintre profilul dintelui și dreapta de picior;

- **Unghiul de înclinare a profilului α_0** – unghiul profilului, format cu o dreaptă perpendiculară pe dreapta de referință.

Înălțimea de referință a capului h_{a0} , este mai mică decât înălțimea de referință a piciorului h_{f0} , iar diferența dintre ele,

$$h_{f0} - h_{a0} = c_0$$

se numește **joc radial**.

Parametrii geometrici ai cremalierii de referință se calculează în funcție de o mărime unică numită **modul**. Modulul este un parametru standardizat (STAS 822-82), cu dimensiune de lungime, măsurat în [mm].

Formulele de calcul ale parametrilor geometrici sunt:

$$p_0 = \pi \cdot m, \quad (\pi = 3,141592654) \quad (4.16)$$

$$h_{a0} = h_{a0}^* m, \quad (h_{a0}^* = 1) \quad (4.17)$$

$$c_0 = c_0^* m \quad (c_0^* = 0,25) \quad (4.18)$$

$$h_{f0} = (h_{f0}^* + c_0^*) \cdot m \quad (4.19)$$

$$h = (2h_{a0}^* + c_0^*) \cdot m \quad (4.20)$$

$$\rho = \rho_0^* \quad (\rho_0^* = 0,38) \quad (4.21)$$

$$\alpha_0 = 20^\circ \quad (4.22)$$

Cremaliera complementară cu cea de referință, construită astfel încât dinții acesteia au forma golurilor dintre dinții cremalierii de referință, se numește **cremalieră generatoare**. Desigur cele două cremalieri sunt identice din punct de vedere al dispunerii profilelor în raport cu dreapta de referință.

- Parametrii geometrici principali ai roții dințate cilindrice exterioare cu dinți drepți**

Roțile dințate cilindrice în evolventă formează un sistem și se definesc din condiția de angrenare fictivă cu cremaliera de referință. Angrenajul de definire (Fig.4.15), se consideră fără joc între flancuri (profile), și cu joc radial standardizat (c_0). Profilele roții se obțin ca înfășurătoare ale profilelor rectilunii ale cremalierii de referință, în mișcarea relativă dintre cele două elemente. Geometria roții depinde de forma cremalierii de referință (care a fost descrisă în paragraful precedent), de mișcarea relativă dintre cele două elemente și de poziția cremalierii de referință față de roată. Mișcarea relativă este determinată de rostogolirea cercului de rostogolire al roții peste dreapta de rostogolire a cremalierii. Cercul de rostogolire al roții în procesul de definire se numește **cerc de divizare**. Poziția cremalierii de referință este determinată de distanța dintre dreapta de referință și dreapta de rostogolire, care este tangentă la cercul de divizare. Această distanță se numește **deplasare de profil (X)**. Prin convenție, deplasarea se consideră pozitivă dacă dreapta de referință este în exteriorul cercului de divizare (ca în Fig.4.15), și negativă dacă îl intersectează.

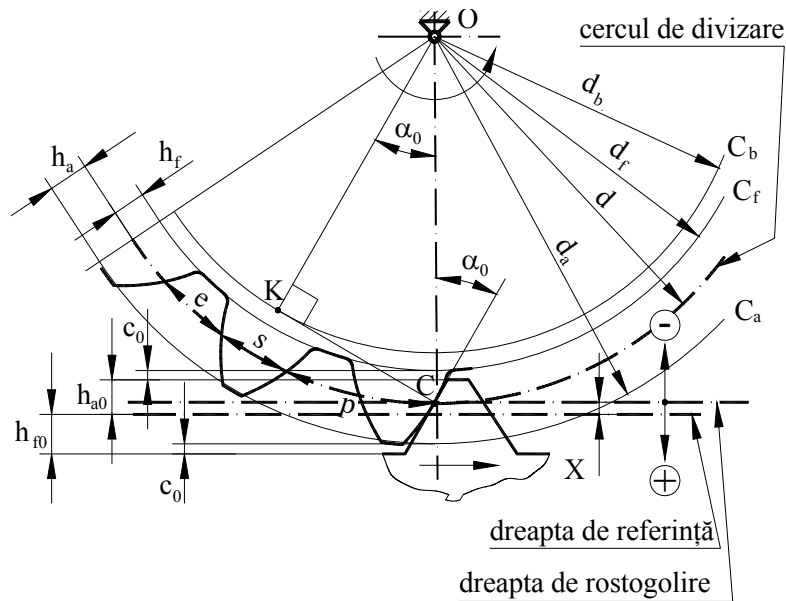


Fig. 4.15

Parametrii geometrici principali ai roții dințate se definesc în raport cu cercul de divizare și se exprimă în funcție de modulul cremalierii de referință care este și al roții, după cum urmează.

- **Deplasarea de profil, X** (definită anterior)

$$X = x \cdot m \quad (4.23)$$

Parametrul x se numește **coeficientul deplasării de profil sau deplasarea specifică**, iar adoptarea sa, pentru cele două roți ale angrenajului, constituie o problemă esențială a sintezei angrenajului.

- **Pasul de divizare, p** – arcul cercului de divizare, limitat de două profile omoloage (de aceeași parte a dintelui), consecutive. Datorită rostogolirii fără alunecare a dreptei de rostogolire a cremalierii peste cercul de divizare al roții, pasul cremalierii se reproduce pe cercul de divizare,

$$\begin{aligned} p &= p_0 \\ p &= \pi \cdot m \quad (\pi=3,141592654) \end{aligned} \quad (4.24)$$

- **Diametrul de divizare, d** (definit anterior) – rezultă ca raportul dintre lungimea cercului de divizare, $z \cdot p$ (z – numărul de dinți ai roții) și numărul π ,

$$\begin{aligned} d &= \frac{z \cdot p}{\pi} = \frac{z \cdot \pi \cdot m}{\pi} = m \cdot z \\ d &= m \cdot z. \end{aligned} \quad (4.25)$$

- **Înălțimea de divizare a capului dintelui, h_a** – distanța radială dintre cercul de divizare și cercul de cap. Din Fig.4.15 se obține

$$\begin{aligned} h_a &= h_{r0} - c_0 + X = h_{a0} + X \\ h_a &= (h_{a0}^* + x)m. \end{aligned} \quad (4.26)$$

- **Înălțimea de divizare a piciorului dintelui, h_f** – distanța radială dintre cercul de divizare și cercul de picior

$$\begin{aligned} h_f &= h_{a0} + c_0 - X \\ h_f &= (h_{a0}^* + c_0^* - x)m. \end{aligned} \quad (4.27)$$

- **Diametrul de cap, d_a**

$$\begin{aligned} d_a &= d + 2 \cdot h_a \\ d_a &= (z + 2 \cdot h_{a0}^* + 2 \cdot x)m \end{aligned} \quad (4.28)$$

- **Diametrul de picior, d_f**

$$\begin{aligned} d_f &= d - 2 \cdot h_f \\ d_f &= (z - 2 \cdot h_{a0}^* - 2 \cdot c_0^* + 2 \cdot x)m \end{aligned} \quad (4.29)$$

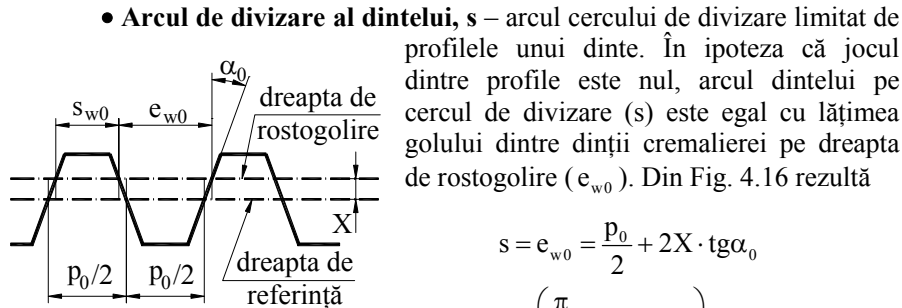


Fig. 4.16

• **Arcul de divizare al dintelui, s** – arcul cercului de divizare limitat de profilele unui dinte. În ipoteza că jocul dintre profile este nul, arcul dintelui pe cercul de divizare (s) este egal cu lățimea golului dintre dinții cremalierii pe dreapta de rostogolire (e_{w0}). Din Fig. 4.16 rezultă

$$s = e_{w0} = \frac{p_0}{2} + 2X \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$s = \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \right) m. \quad (4.30)$$

• **Arcul de divizare al golului dintre dinți, e** – arcul cercului de divizare limitat de profilele unui gol dintre dinți. Printr-un raționament similar celui expus la determinarea parametrului s , din Fig. 4.16 rezultă

$$e = s_{w0} = \frac{p_0}{2} - 2X \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$e = \left(\frac{\pi}{2} - 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \right) m. \quad (4.31)$$

• **Unghiul de presiune de divizare, α_0** - unghiul dintre tangenta la profil în punctul situat pe cercul de divizare și raza acestui cerc. Așa cum rezultă din Fig.4.15 acest unghi este egal cu unghiul de presiune al profilului cremalierii de referință, α_0 .

• **Diametrul de bază, d_b** – diametrul cercului de bază c_b , care intervine la generarea profilului evolventic. Din triunghiul OKC (Fig.4.15), rezultă

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_0$$

$$d_b = mz \cdot \cos \alpha_0 \quad (4.32)$$

Din cele arătate rezultă că geometria roții dințate depinde de trei parametri de bază: m , z și x .

• **Modulul m** indică mărimea danturii prin intermediul parametrilor p , s , e , h_a , și h_f .

• **Numărul de dinți z** , împreună cu **modulul m** determină mărimea roții, prin intermediul parametrilor d , d_a , d_f .

• **Coefficientul de deplasare x** determină forma dintelui. Din (4.32) rezultă că diametrul de bază nu depinde de coeficientul de deplasare. Aceasta înseamnă că profilele dinților cu coeficienți de deplasare diferiți, provin din aceeași evolventă, generată pornind de la un cerc de bază unic, așa cum se observă în Fig.4.17, unde sunt reprezentate trei danturi (un plin și un gol), având același modul și trei deplasări diferite. Comparativ cu dintele având deplasare

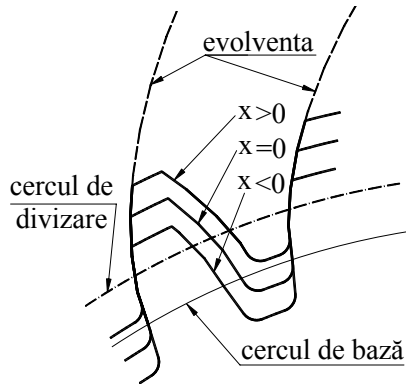


Fig. 4.17

zero, dintele cu deplasare pozitivă are vârful mai ascuțit și baza mai lată, iar dintele cu deplasare negativă are vârful mai gros și baza mai îngustă.

Aceste considerații legate de forma dintelui au implicații legate de calculul de rezistență al roții dințate.

Observații

1) Definierea roții dințate se poate face și din condiția de angrenare fictivă, fără joc radial, cu cremaliera generatoare, obținând evident aceiași parametri geometrici principali, ca și în cazul folosirii cremalierii de referință. În acest caz rezultă și forma curbei de racordare

de la piciorul dintelui roții. Acest lucru nu are o importanță deosebită, deoarece această curbă este determinată de procedeul de prelucrare și de geometria sculei, și poate fi diferită de cea care rezultă la definirea roții cu ajutorul cremalierii generatoare.

2) Pentru prelucrarea roților dințate, se folosește în principal, metoda rulării, care se bazează, ca și definirea geometrică, pe principiul “imitării” angrenării. Scula așchietoare provine dintr-un element dințat (cremalieră, roată dințată sau melc). Între scula și semifabricat se imprimă o mișcare relativă corespunzătoare angrenării dintre cele două elemente. Flancurile roții rezultă ca înfășurătoare ale suprafețelor descrise de muchiile așchietoare ale sculei.

■ Parametrii geometrici ai roții dințate pe un cerc oarecare

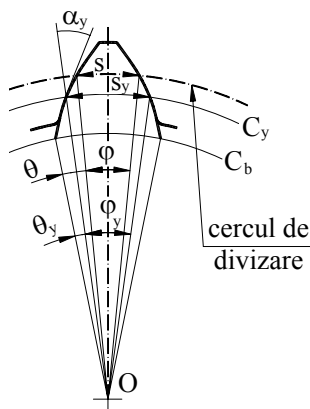


Fig. 4.18

Se consideră un cerc oarecare, concentric cu roata, C_y . Ne propunem să determinăm diametrul d_y , pasul p_y , arcul dintelui s_y și arcul golului e_y , în funcție de unghiul de presiune α_y .

Având în vedere ecuația razei unui punct curent al evolventei (4.14), se poate scrie

$$d_y = \frac{d_b}{\cos \alpha_y} = mz \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_y} \quad (4.33)$$

Pasul p_y se exprimă în funcție de diametrul d_y ,

$$p_y = \frac{\pi d_y}{z} = \pi m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_y} . \quad (4.34)$$

Pe baza Fig.4.18 se scrie

$$s_y = \varphi_y \frac{d_y}{2}$$

$$\varphi_y = \varphi + 2(\theta - \theta_y) = 2 \frac{S}{d} + 2(\operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_y).$$

Expresiile lui φ_y și d_y (4.34), se introduc în formula lui s_y , iar d și s se exprimă conform cu (4.25) și (4.30). Astfel se obține relația pentru arcul dintelui,

$$s_y = mz \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_y} \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_y \right). \quad (4.35)$$

Arcul golului rezultă pe baza relației

$$p_y = s_y + e_y ,$$

înlocuind p_y și s_y , cu expresiile lor,

$$e_y = mz \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_y} \left(\frac{\pi}{2z} - \frac{2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z} - \operatorname{inv} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_y \right). \quad (4.36)$$

Formulele deduse se pot utiliza, printre altele, pentru a determina arcul dintelui pe cercul de cap, s_a .

Din formula (4.33) se deduce unghiul de presiune la nivelul cercului de cap α_a ,

$$\cos \alpha_a = \frac{mz \cos \alpha_0}{d_a},$$

care se introduce în relația (4.35), obținând s_a ,

$$s_a = mz \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_a} \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_a \right).$$

4.1.3.4. Angrenajul paralel exterior

■ Parametrii geometrici

Parametrii geometrici ai angrenajului sunt unghiul de angrenare (α_w), diametrele de rostogolire (d_{w1} și d_{w2}) și distanța dintre axele de rotație (a) (Fig.4.19).

Formarea angrenajului se face din condiția absenței jocului dintre flancuri (profile). În această ipoteză, arcul de rostogolire al dintelui roții 1 trebuie să fie egal cu arcul de rostogolire al golului roții 2

$$s_{w1} = e_{w2}$$

Această afirmație se susține pe baza Fig.4.19, în care sunt surprinse două profile conjugate, când punctul de contact este în C. Dacă admitem că

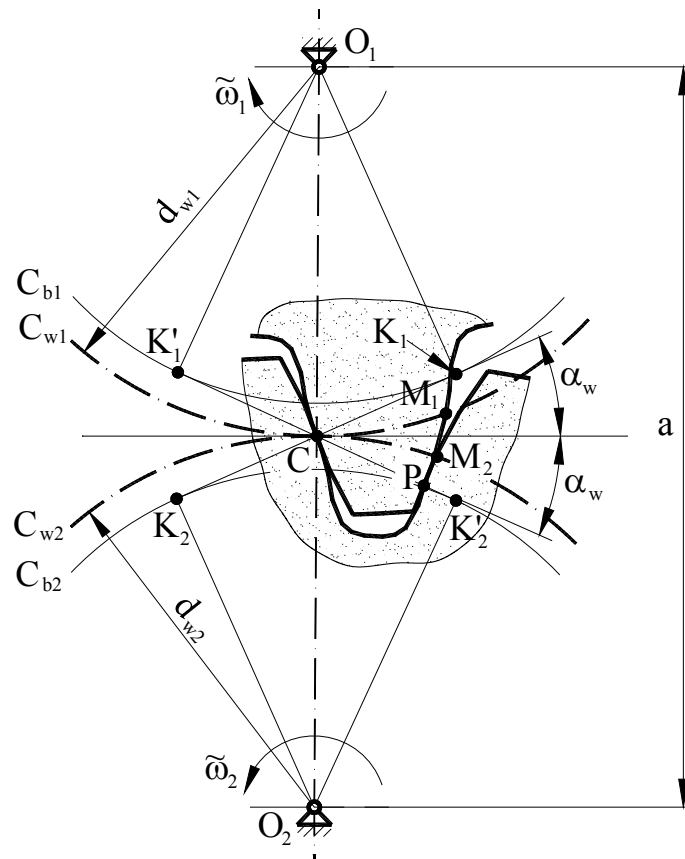


Fig. 4.19

jocul între profile este nul, profilele anti-omoloage cu primele, sunt de asemenea în contact, în punctul P. În procesul de angrenare, punctul de contact se deplasează pe linia de angrenare $K'_1 K'_2$ din poziția P în poziția C. În același timp punctul M_1 parcurge arcul $\widehat{M_1 C} = s_{w1}$, iar punctul M_2 – arcul $\widehat{M_2 C} = e_{w2}$. Aceste arce sunt egale, fiind parcurse în același timp cu aceeași viteză, deoarece aparțin cercurilor de rostogolire.

Cele două arce se exprimă cu ajutorul formulelor (4.35) și (4.36), având în vedere că unghiurile de presiune de rostogolire sunt egale cu unghiul de angrenare (par. 4.1.3.3), $\alpha_{w1} = \alpha_{w2} = \alpha_w$, iar modulul pentru două roți conjugate este același $m_1 = m_2 = m$,

$$\begin{aligned} m z_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \left(\frac{\pi}{2 z_1} + \frac{2 x_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_w \right) = \\ = m z_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \left(\frac{\pi}{2 z_2} - \frac{2 x_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z_2} - \operatorname{inv} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_w \right) \end{aligned}$$

Din această ecuație se obține unghiul de angrenare α_w , prin intermediul funcției involută

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_0 + 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (4.37)$$

Diametrele de rostogolire se determină cu formula (4.33),

$$d_{w1} = m z_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \quad (4.38)$$

$$d_{w2} = m z_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}$$

În fine, distanța dintre axe, rezultă în funcție de diametrele de rostogolire,

$$\begin{aligned} a &= \frac{d_{w1}}{2} + \frac{d_{w2}}{2} \\ a &= m \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Lungimea a_0 , definită ca suma razelor de divizare,

$$a_0 = m \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right), \quad (4.40)$$

se numește **distanța dinte axe de referință**.

Diferența $(a - a_0)$ se numește modificarea distanței dintre axe, iar raportul,

$$y = \frac{a - a_0}{m} = \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} - 1 \right)$$

este **coeficientul modificării distanței dintre axe**. Distanța dintre axe se poate exprima în funcție de a_0 și y ,

$$a = a_0 + my. \quad (4.42)$$

■ Angrenarea cu joc radial standardizat

Formarea angrenajului din condiția eliminării jocului dintre profile neglijează condiția de a realiza un joc radial de valoare standardizată, c_0 . Pentru a rezolva această problemă, se calculează din nou distanța dintre axe (a_x), pe baza acestei condiții. Urmărind schema angrenajului din Fig.4.20, rezultă

$$a_x = \frac{d_{a1}}{2} + \frac{d_{r2}}{2} + c_0.$$

Înlocuind d_{a1} , d_{r2} și c_0 cu expresiile lor, se obține

$$a_x = m \frac{z_1 + z_2}{2} + m(x_1 + x_2) = a_0 + m(x_1 + x_2). \quad (4.43)$$

Analiza relațiilor (4.42) și (4.43) arată că $a_x \geq a$ (ANEXA 4). Prin urmare, montarea roților la distanța dintre axe, calculată cu formula (4.42), conduce la micșorarea jocului radial în raport cu valoarea c_0 . Pentru a obține valoarea necesară, se operează o reducere a înălțimii capului de divizare al dintelui, pentru ambele roți, cu lungimea,

$$a_x - a = a_0 + (x_1 + x_2)m - (a_0 + ym) = m(x_1 + x_2 - y).$$

În felul acesta, parametrii h_{a1} , h_{a2} , d_{a1} , și d_{a2} se recalculează în raport cu valorile stabilite la definirea roții,

$$h_{a1} = m(h_{a0}^* + x_1) - m(x_1 + x_2 - y)$$

$$\begin{cases} h_{a1} = m(h_{a0}^* - x_2 + y) \\ h_{a2} = m(h_{a0}^* - x_1 + y) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$d_{a1} = z_1 m + 2h_{a1}$$

$$\begin{cases} d_{a1} = m(z_1 + 2h_{a0}^* - 2x_2 + 2y) \\ d_{a2} = m(z_2 + 2h_{a0}^* - 2x_1 + 2y) \end{cases} \quad (4.45)$$

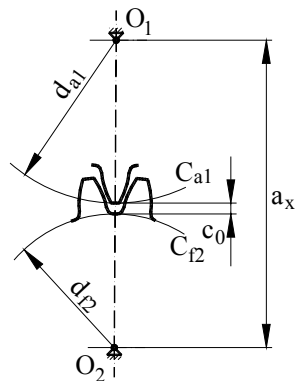


Fig. 4.20

Angrenajele cu $x_1 = x_2 = 0$ se numesc angrenaje zero sau nedeplasate, iar angrenajele cu $x_1 + x_2 = 0$, se numesc zero deplasate. În ambele cazuri se înregistrează $\alpha_w = \alpha_0$, $d_{w1} = d_1$, $d_{w2} = d_2$, $a = a_0 = a_x$ și $y = 0$.

4.1.3.5. Angrenajul paralel interior

Așa cum am arătat (par. 4.1.2), angrenajele interioare sunt formate dintr-o roată cu dantură exterioară și o roată cu dantură interioară, și au o utilizare practică mult mai redusă decât angrenajele exterioare. În cele ce urmează se vor pune în evidență particularitățile angrenajului interior, urmărind aceeași problematică pe care am prezentat-o la cel exterior.

Roata dințată interioară se definește în același mod ca și roata exterioară, pe baza cremalierii de referință, inversându-se dinții cu golurile dintre dinți. Două roți, una cu dantură exterioară și cealaltă cu dantură interioară, având aceleași valori pentru m , z , și x , au același cerc de divizare, iar profilele lor sunt congruente (Fig.4.21). Cercul de cap al unei roți, nu se suprapune însă pe cercul de picior al celeilalte, între ele fiind distanța radială c_0 .

Parametrii geometrici principali ai roții cu dantură interioară se definesc în același mod ca și cei ai roții cu dantură exterioară, iar expresiile pentru X , p , α_0 și d_b rămân neschimbate. Ceilalți parametri se calculează cu formulele care urmează, deduse pe baza Fig.4.21.

$$h_a = h_{a2} = h_{r1} - c_0 = (h_{a0}^* - x)m \quad (4.46)$$

$$h_f = h_{f2} = h_{a1} + c_0 = (h_{a0}^* + c_0^* + x)m \quad (4.47)$$

$$d_a = d_{a2} = d - 2h_a = (z - 2h_{a0}^* + 2x)m \quad (4.48)$$

$$d_f = d_{f2} = d + 2h_f = (z + 2h_{a0}^* + 2c_0^* + 2x)m \quad (4.49)$$

$$s = s_2 = e_1 = \left(\frac{\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) m \quad (4.50)$$

$$e = e_2 = s_1 = \left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) m \quad (4.51)$$

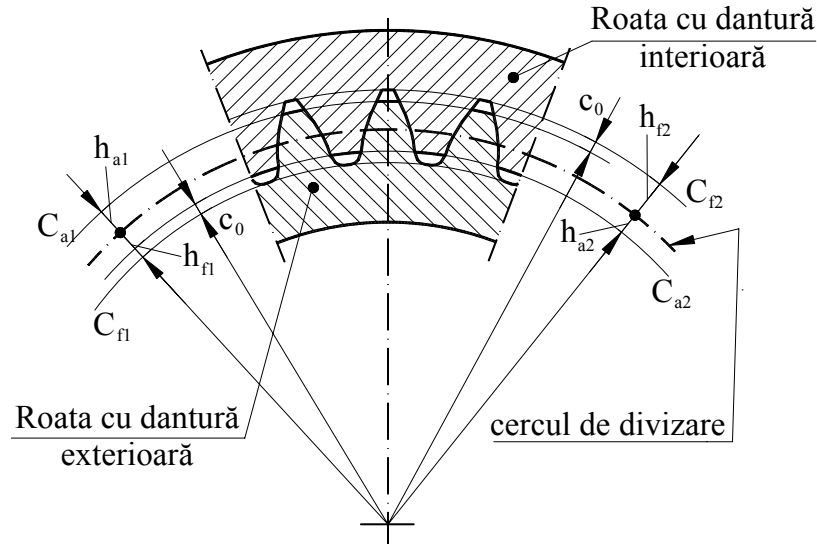


Fig. 4.21

Dintre parametrii definiți pe un cerc oarecare, diametrul (d_y) și pasul (p_y) au aceleași expresii, iar formulele pentru s_y și e_y (4.35, 4.36) se inversează.

În aceste condiții, unghiul de angrenare, α_w (Fig.4.22), dedus din condiția absenței jocului dintre profile, este

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_0 + 2 \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \operatorname{tg} \alpha_0, \quad (4.52)$$

în care x_1 și z_1 se referă la roata cu dantură exterioară, iar x_2 și z_2 – la roata cu dantură interioară. Diametrele de rostogolire se calculează cu aceleași formule (4.38), astfel încât distanța dintre axe (Fig.4.22) are expresia

$$a = \frac{d_{w2}}{2} - \frac{d_{w1}}{2} = m \frac{z_2 - z_1}{2} \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w}, \quad (4.53)$$

care se poate pune și sub forma cunoscută

$$a = a_0 + my,$$

în care

$$a_0 = m \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right), \quad (4.54)$$

$$y = \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right) \left(\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (4.55)$$

Distanța dintre axe, a_x , calculată din condiția angrenării cu joc standardizat, rezultă

$$a_x = \frac{d_{r2}}{2} - \frac{d_{a1}}{2} - c_0 = a_0 + m(x_2 - x_1). \quad (4.56)$$

Deoarece $a_x \geq a$, înseamnă că angrenajul montat fără joc între profile, are joc radial mai mare decât cel standardizat. Pentru a-l aduce la valoarea standardizată, ar trebui operată o majorare a înălțimii dinților, care nu se aplică pentru că nu conferă avantaje în funcționare.

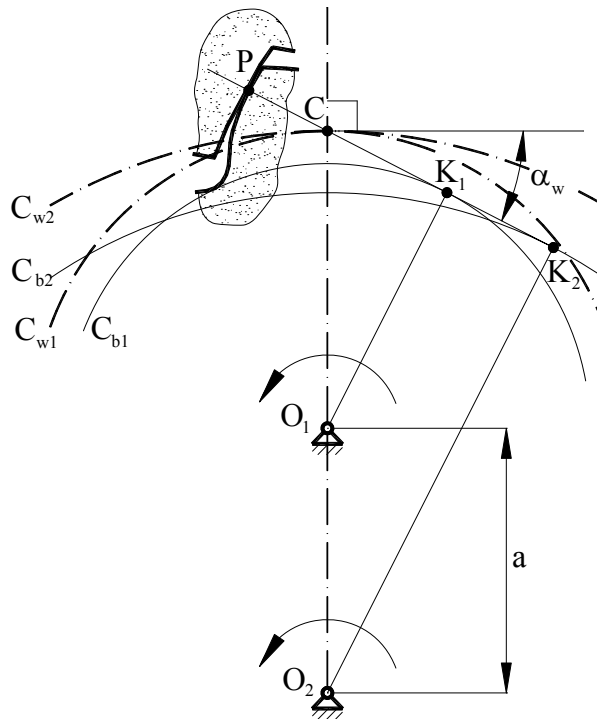


Fig. 4.22

4.1.3.6. Formarea și întreruperea contactului dintre dinți. Continuitatea angrenării

Fenomenul de angrenare se produce prin contactul succesiv al perechilor de profile conjugate. Ne propunem să analizăm procesul de formare și de întrerupere a contactului și implicațiile sale asupra funcționării angrenajului, considerând un angrenaj exterior compus din roata conducătoare 1 și roata condusă 2 (Fig.4.23). Așa cum am arătat, locul geometric al punctului de contact este dreapta de angrenare K_1K_2 (par. 4.1.3.2.). Pe de altă parte, contactul poate avea loc numai în zona în care există profile materializate. Aceasta este limitată de cercurile de cap c_{a1} și c_{a2} , având forma de lentilă. Ca urmare pozițiile limită ale punctului de contact se găsesc la intersecția dreptei de angrenare cu cele două cercuri de cap. Contactul se formează în punctul A, aflat la intersecția dreptei de angrenare cu cercul de cap al roții conduse c_{a2} , și se întrerupe în punctul E – intersecția dreptei de angrenare cu cercul de cap al roții conducătoare, c_{a1} . Segmentul $g = AE$, pe care se produce contactul efectiv se

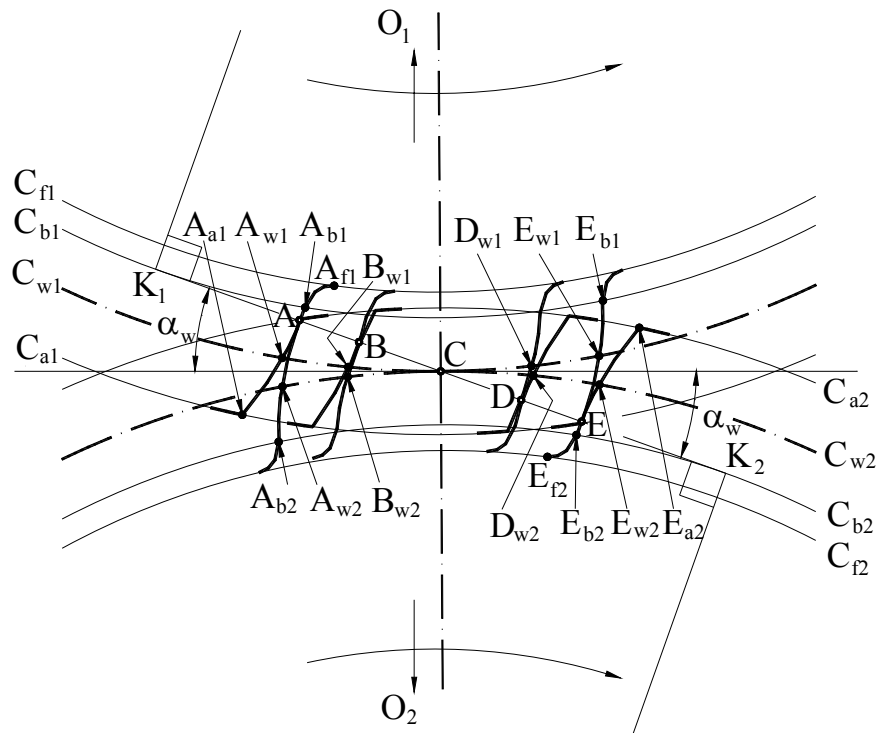


Fig. 4.23

numește **segment de angrenare**. Segmentele AC și CE se numesc **segment de intrare în angrenare**, respectiv **segment de ieșire din angrenare**. Lungimea segmentului de angrenare rezultă pe baza Fig.4.23,

$$g = AE = K_1K_2 - (K_1K_2 - K_2A) - (K_1K_2 - K_1E) = K_2A + K_1E - K_1K_2 .$$

$$g = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha_w , \quad (4.57)$$

în care a este distanța dintre axe,

$$a = r_{w1} + r_{w2} .$$

Se observă, că pe profilul roții conducătoare 1, contactul se formează în zona piciorului dintelui și se deplasează până la nivelul cercului de cap, iar pe profilul roții conduse 2, contactul se formează pe cercul de cap și se deplasează înspre piciorul dintelui. Profilele AA_{a1} și EE_{a2} , care participă la angrenare, se numesc **profile active**, iar profilele AA_{f1} și EE_{f2} , care nu participă la angrenare, se numesc **profile inactive**. Desigur, profilele inactive nu este necesar să fie evolventice. Razele punctelor care delimitează cele două feluri de profile se numesc **raze active**. În cazul roții 1, raza activă r_{ac1} este raza punctului A,

$$r_{ac1} = r_A = \sqrt{r_{b1}^2 + K_1A^2} = \sqrt{r_{b1}^2 + (K_1K_2 - K_2A)^2}$$

$$r_{ac1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(a \sin \alpha_w - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \right)^2} . \quad (4.58)$$

În cazul roții 2, raza activă r_{ac2} este raza punctului E,

$$r_{ac2} = r_E = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(a \cdot \sin \alpha_w - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \right)^2} \quad (4.59)$$

Trebuie menționat că segmentul de angrenare se poate exprima și în funcție de razele active,

$$g = K_1K_2 - K_1A - K_2E$$

$$g = a \sin \alpha_w - \sqrt{r_{ac1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{ac2}^2 - r_{b2}^2} . \quad (4.60)$$

Arcul parcurs de un punct aparținând cercului de rostogolire, din momentul formării până în momentul întreruperii contactului, se numește **arc de angrenare**. Arcele de angrenare ale celor două roți sunt egale deoarece sunt parcurse cu aceeași viteză (viteza periferică a cercurilor de rostogolire), în aceeași perioadă de timp. Având în vedere că în Fig.4.23 este surprinsă aceeași pereche de profile conjugate în momentul formării contactului, în A, și în momentul întreruperii sale, în E, arcele de angrenare sunt

$$\widehat{A_{w1}E_{w1}} = \widehat{A_{w2}E_{w2}} .$$

Lungimea arcului de angrenare se determină pe baza observației că raza oricărui punct al roții, se rotește între cele două momente, cu același unghi.

Deci

$$\sphericalangle A_{w1}O_1E_{w1} = \sphericalangle A_{b1}O_1E_{b1},$$

și

$$\frac{\widehat{A_{w1}E_{w1}}}{r_{w1}} = \frac{\widehat{A_{b1}E_{b1}}}{r_{b1}}.$$

Arcul $\widehat{A_{b1}E_{b1}}$ este egal cu segmentul de angrenare $g = AE$, deoarece se rostogolesc unul peste altul, când se generează evolventele $A_{b1}A_{a1}$ și $E_{b1}E$, și prin urmare,

$$\widehat{A_{w1}E_{w1}} = g \frac{r_{w1}}{r_{b1}} = \frac{g}{\cos \alpha_w}. \quad (4.61)$$

Raportul dintre arcul de angrenare și pasul de rostogolire se numește **grad de acoperire (ε)**

$$\varepsilon = \frac{g}{p_w \cos \alpha_w} = \frac{g}{\pi m \cos \alpha_0} = \frac{g}{p_b}, \quad (4.62)$$

în care p_b este pasul pe cercul de bază – același pentru ambele roți.

Pentru a asigura continuitatea angrenării este necesar, ca în momentul întreruperii contactului unei perechi de profile în E, perechea următoare să fie în angrenare. Să presupunem că această pereche se află în contact în punctul B. Arcele $\widehat{B_{w1}E_{w1}}$ și $\widehat{B_{w2}E_{w2}}$, reprezintă pasul de rostogolire p_w . Rezultă că angrenarea este continuă dacă arcul de angrenare $\widehat{A_{w1}E_{w1}} > p_w$ sau $\varepsilon > 1$. Practic, limita gradului de acoperire se adoptă mai mare decât unitatea, pentru a lua în considerare abaterile de la valoarea teoretică, cauzate de imprecizie și deformații, $\varepsilon \geq (1,1 \div 1,3)$. Este util de precizat semnificația valorii gradului de acoperire care rezultă din calcul, de regulă, fracționară. În momentul formării contactului în A, de către o pereche de profile, perechea anterioară este în contact în D, astfel încât $\widehat{A_{w1}D_{w1}} = \widehat{A_{w2}D_{w2}} = p_w$. Urmărind procesul de angrenare, constatăm că atunci când pe segmentul AB se află o pereche de profile în contact, pe segmentul DE se află de asemenea, o pereche de profile în angrenare, deci angrenarea este **bipară**. Când contactul se produce pe segmentul BD, angrenarea este **monopară**. Calculând arcele $(\widehat{A_{w1}B_{w1}} + \widehat{D_{w1}E_{w1}})$ și $\widehat{B_{w1}D_{w1}}$, raportate la pasul de rostogolire, se ajunge la următoarea interpretare. Angrenarea monopară se desfășoară pe un arc egal cu $(2 - \varepsilon)$ din pasul de rostogolire, iar cea bipară pe un arc egal cu $2 \cdot (\varepsilon - 1)$ din pasul de rostogolire. De exemplu, dacă $\varepsilon = 1,23$, angrenarea monopară se

desfășoară pe un arc egal cu $(2 - \varepsilon) \cdot p_w = 0,77 \cdot p_w$ (77% din p_w), iar angrenarea bipară, pe un arc egal cu $2(\varepsilon - 1)p_w = 0,46p_w$ (46% din p_w).

În cazul angrenajului interior (Fig.4.24), intervin aceleași noțiuni legate de formarea și întreruperea contactului și de continuitatea angrenării, cu deosebirea că unele formule de calcul se modifică. Astfel, segmentul de angrenare se determină astfel,

$$g = AE = K_1K_2 + K_1E - K_2A$$

$$g = a \sin \alpha_w + \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (4.63)$$

în care $a = r_{w2} - r_{w1}$.

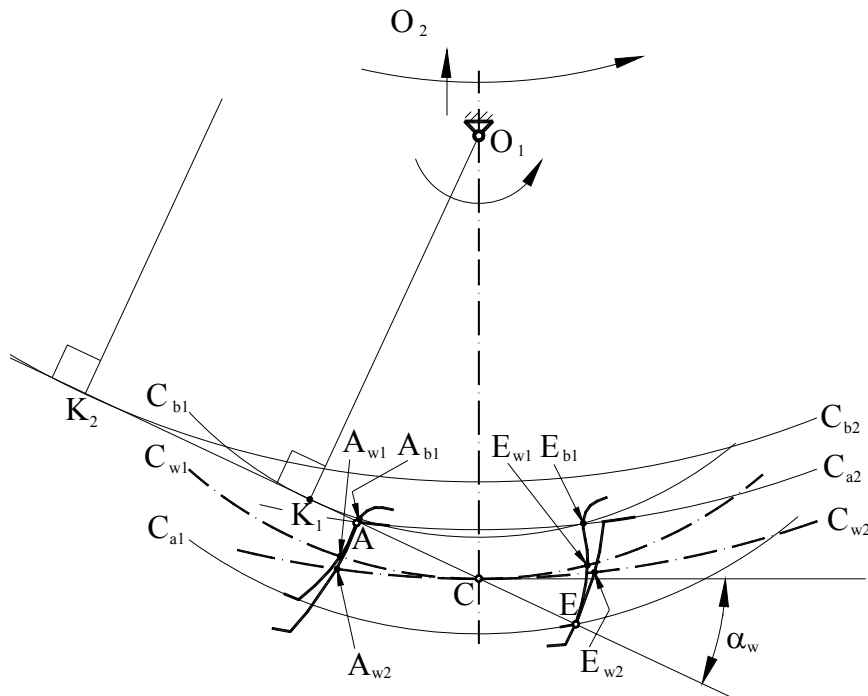


Fig. 4.24

Razele active se calculează cu formulele

$$r_{ac1} = r_A = \sqrt{r_{b1}^2 + K_1A^2} = \sqrt{r_{b1}^2 + (K_2A - K_1K_2)^2}$$

$$r_{ac1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha_w \right)^2} \quad (4.64)$$

$$r_{ac2} = r_E = \sqrt{r_{b2}^2 + K_2 E^2} = \sqrt{r_{b2}^2 + (K_1 K_2 + K_1 E)^2}$$

$$r_{ac2} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(a \sin \alpha_w + \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \right)^2} \quad (4.65)$$

Aspectele legate de gradul de acoperire rămân neschimbate în raport cu angrenajul exterior, atât în ce privește relațiile de calcul, cât și în ce privește interpretarea rezultatelor.

4.1.3.7. Fenomenul de interferență

Interferența în angrenare este fenomenul de pătrundere, teoretică, a unui dinte în dintele conjugat. Deoarece această pătrundere nu este posibilă datorită rigidității flancurilor, se produce o funcționare incorectă, însoțită de vibrații și zgomot, sau chiar blocarea angrenajului, dacă fenomenul este pronunțat.

În cazul angrenajelor exterioare există două tipuri de interferență – **primară și secundară**.

Interferența primară se înregistrează dacă angrenarea tinde să se producă în afara segmentului $K_1 K_2$, limitat pe dreapta de angrenare, de punctele de tangență cu cercurile de bază. Se consideră angrenajul din Fig.4.25, cu evolventele e_1 și e_2 materializate ca profile de dinți. Să presupunem că sensurile

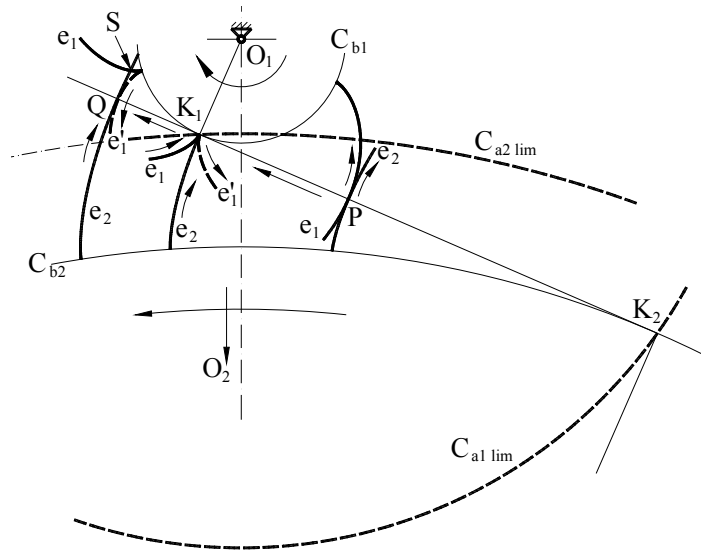


Fig. 4.25

de rotație ale roților sunt ca în Fig. 4.25, astfel încât punctul de contact se deplasează pe dreapta de angrenare în sensul K_2K_1 . Când acest punct se află în P, în interiorul segmentului K_1K_2 , angrenarea se produce corect, iar contactul se deplasează pe profilul e_1 spre cercul de bază. Când punctul de contact ajunge în K_1 , acest punct este pe cercul de bază c_{b1} și constituie punct de întoarcere pentru evolventa e_1 . În această poziție angrenarea profilelor e_1 și e_2 , este totuși posibilă. Dacă angrenarea continuă în afara segmentului K_1K_2 , punctul de contact ajungând în Q, evolventa e_2 înfășoară ramura e'_1 , fiind tangentă cu aceasta, iar profilele materializate e_1 și e_2 se intersectează în punctul S. Astfel are loc fenomenul de interferență, care împiedică angrenarea corectă a profilelor e_1 și e_2 . Pentru evitarea interferenței, cercurile de cap ale roților nu trebuie să depășească punctele K_1 și K_2 , fiind limitate de cercurile c_{a1lim} și c_{a2lim} , (Fig.4.25). După cum am arătat (par. 4.1.3.6), intersecțiile cercurilor de cap cu dreapta de angrenare delimitează segmentul de angrenare AE (Fig.4.23), iar razele punctelor A și E sunt razele active $r_{ac1} = r_A$ și $r_{ac2} = r_E$. Pozițiile limită ale punctelor A și E, pentru evitarea interferenței, sunt K_1 și K_2 , când razele active devin egale cu razele de bază. Deci condițiile pentru evitarea interferenței se pot formula astfel

$$r_{ac1} \geq r_{b1} \quad (4.66)$$

$$r_{ac2} \geq r_{b2} \quad (4.67)$$

Dacă se ține seama de expresiile razelor active (4.58), (4.59), aceste condiții se pot scrie

$$\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \leq a \sin \alpha_w \quad (4.68)$$

$$\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \leq a \sin \alpha_w \quad (4.69)$$

Efectuând substituțiile corespunzătoare, se poate observa că relațiile

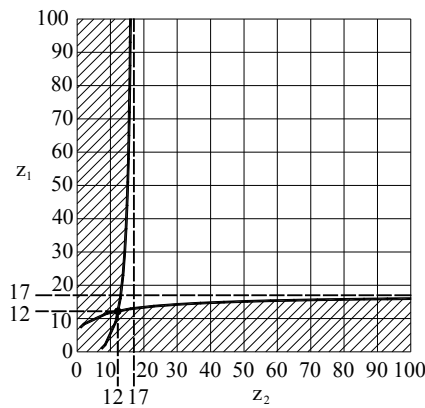


Fig. 4.26

(4.68) și (4.69) nu depind de modul, ci numai de numerele de dinți (z_1, z_2) și de coeficienții de deplasare (x_1, x_2). Astfel, dacă x_1 și x_2 au valori date, se poate stabili un domeniu admisibil în planul de coordonate Oz_1z_2 . În Fig.4.26 se indică acest domeniu (cel nehașurat), pentru cazul $x_1 = x_2 = 0$.

Se observă că numerele de dinți sunt limitate inferior. Numărul minim de dinți ai unei roți depinde de numărul de dinți ai roții conjugate și crește puțin cu acesta. Dacă roțile sunt egale ($z_1 = z_2$), se obține $z_{min} \cong 12$

(punctul de intersecție al celor două curbe). Dacă unul dintre numerele de dinți tinde la infinit, numărul minim de dinți ai roții conjugate este $z_{\min} = 17$. Această valoare se confirmă prin analiza directă a angrenajului roată dințată – cremalieră (Fig.4.27). Evitarea interferenței se obține când dreapta de cap a cremalierii intersectează dreapta de angrenare în interiorul segmentului CK. Pentru aceasta, trebuie satisfăcută condiția,

$$r_{ac} = r_A \geq r_b, \quad (4.70)$$

întâlnită și la angrenarea dintre două roți.

$$r_{ac} = \sqrt{r_b^2 + AK^2},$$

ceea ce conduce la $AK \geq 0$.

Calculând segmentul AK,

$$AK = CK - CA = \frac{d}{2} \sin \alpha_0 - \frac{h_{a0} - X}{\sin \alpha_0} = m \left(\frac{z}{2} \sin \alpha_0 - \frac{h_{a0}^* - x}{\sin \alpha_0} \right),$$

se obține condiția finală

$$z \geq \frac{2(h_{a0}^* - x)}{\sin^2 \alpha_0} = z_{\min}. \quad (4.71)$$

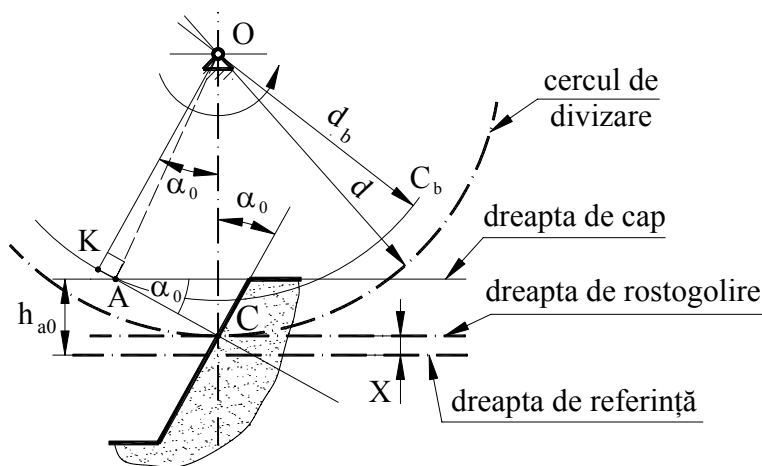


Fig. 4.27

Pentru $h_{a0}^* = 1$, $\alpha_0 = 20^\circ$ și $x = 0$, rezultă $z = 17,097$ adică $z_{\min} = 17$. Dacă roata mică a unui angrenaj are $z \geq 17$, se asigură funcționarea fără interferență, pentru orice număr de dinți ai roții conjugate. Dacă se ține seama de existența, în condiții practice, a jocului dintre flancuri și de faptul că o interferență ușoară se poate admite, numărul minim de dinți se poate reduce la valoarea $z_{\min} = 14$.

Formula (4.71) se poate folosi și pentru calculul coeficientului de deplasare necesar, în condițiile în care numărul de dinți este dat,

$$x \geq 1 - \frac{z \sin^2 \alpha_0}{2}.$$

Deoarece $\frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \cong 17$, această condiție se poate scrie,

$$x \geq \frac{17 - z}{17}. \quad (4.72)$$

În cazul angrenajului interior, interferența se produce atunci când cercul de cap al roții interioare C_{a2} (Fig.4.24), intersectează dreapta de angrenare în interiorul segmentului K_1K_2 . Prin urmare, segmentul de angrenare AE trebuie să fie în afara segmentului K_1K_2 . Acest lucru se obține dacă este respectată condiția,

$$r_{ac1} = r_A \geq r_{b1}. \quad (4.73)$$

Având în vedere expresia razei active r_{ac1} (4.74), această condiție devine,

$$\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \geq a \sin \alpha_w. \quad (4.74)$$

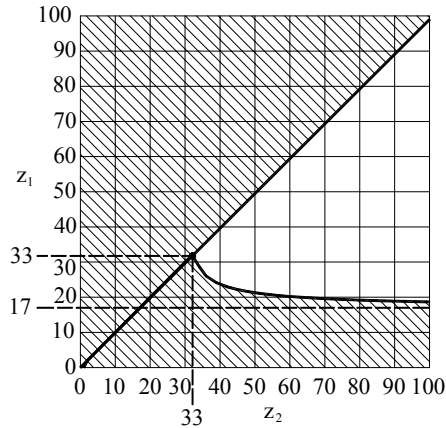


Fig. 4.28

Ca și la angrenajul exterior, se poate stabili un domeniu admisibil pentru condiția (4.74), în sistemul de coordonate Oz_1z_2 , adăugând și condiția, normală pentru angrenajul interior, $z_2 \geq z_1$. În Fig.4.28 este trasat acest domeniu pentru cazul $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Se observă că z_1 este limitat inferior de o curbă care pornește din punctul de coordonate $z_1 = z_2 \cong 33$ și tinde asimptotic la valoarea $z_1 \cong 17$, când z_2 tinde la infinit (roata 2 devine cremalieră).

Interferența primară poate interveni și la prelucrarea roții dințate, care reproduce angrenarea dintre elementul dințat sculă și roata prelucrată. În acest caz, scula pătrunde în dintele roții, eliminând o parte din profilul său. Condițiile de evitare a intrferenței la prelucrare sunt similare cu cele stabilite pentru evitarea interferenței la angrenare. Dacă ne referim la procedeul de prelucrare cu o sculă care provine dintr-o roată dințată (cuțit roată) și notăm roata care se prelucreează cu 1 și scula cu 2, se pot face următoarele observații. Dacă nu este verificată condiția (4.66),

se produce eliminarea unui segment din profilul evolventei, situat la baza dintelui, iar fenomenul se numește **subtăiere** (Fig.4.29). Dacă nu este îndeplinită condiția (4.67), este afectat profilul în zona de cap, iar fenomenul se numește **retezare**. La prelucrarea cu o sculă care provine dintr-o cremalieră (cuțit pieptene), poate interveni numai subtăierea, când nu este verificată condiția (4.70). Trebuie menționat că subtăierea, care este defectul cel mai frecvent, poate influența funcționarea angrenajului. Când raza de început a subtăierii r_s (Fig. 4.28), este mai mare decât raza activă ($r_s > r_{ac}$), aceasta conduce la micșorarea segmentului de angrenare și a gradului de acoperire. În acest caz calculul segmentului de angrenare se face cu formula (4.60), în care r_{ac1} se înlocuiește cu r_{s1} , dacă $r_{s1} > r_{ac1}$, iar r_{ac2} se înlocuiește cu r_{s2} dacă $r_{s2} > r_{ac2}$. De regulă, subtăierea este admisă, dacă nu afectează gradul de acoperire, adică se respectă condițiile $r_{s1} \leq r_{ac1}$ și $r_{s2} \leq r_{ac2}$. Razele r_{s1} și r_{s2} se determină din analiza procesului de prelucrare și depind de tipul și de caracteristicile geometrice ale sculei [26, 35].

Interferența secundară se produce când intervine contactul între capul dintelui unei roți și profilul de racord, neevolventic, de la baza dintelui roții conjugate. Acest fenomen se poate produce numai dacă profilul de racord depășește cercul de bază și afectează evolventa (Fig. 4.30). În felul acesta, profilul dintelui este format din două segmente: **profilul util**, de formă evolventică, și **profilul de racord** – neevolventic. Raza cercului care separă cele două profile se numește **rază utilă** – r_u . Interferența secundară este evitată, dacă este verificată condiția:

$$r_{ac} \geq r_u, \quad (4.75)$$

pentru ambele roți ale angrenajului. Raza utilă se determină de asemenea din studiul procesului de prelucrare a roții.

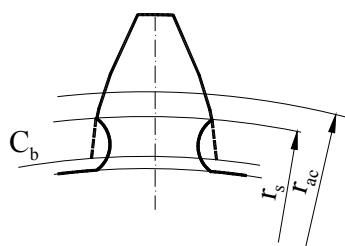


Fig. 4.29

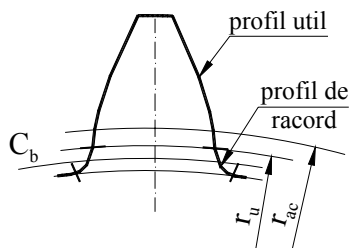


Fig. 4.30

Interferența secundară se poate întâlni și la angrenajele interioare, atât la baza dintelui roții exterioare cât și la baza dintelui roții interioare. La aceste angrenaje, pot apărea și alte tipuri de interferență atunci când diferența ($z_2 - z_1$) este prea mică, [35].

4.1.3.8. Alunecarea relativă a profilelor

Mișcarea relativă a profilelor conjugate este combinată: rostogolire cu alunecare. Viteza relativă de alunecare a profilului roții 1 peste profilul roții 2 (Fig.4.31, 4.32), se definește prin relația

$$\bar{v}_{al1} = \bar{v}_{d1} - \bar{v}_{d2}, \quad (4.76)$$

în care \bar{v}_{d1} și \bar{v}_{d2} sunt vitezele de deplasare a punctului de contact P, pe cele două profile. Desigur, \bar{v}_{al2} definită similar cu \bar{v}_{al1} , are expresia

$$\bar{v}_{al2} = \bar{v}_{d2} - \bar{v}_{d1}, \quad (4.77)$$

Vitezele \bar{v}_{d1} și \bar{v}_{d2} au direcția tangentei comune în punctul de contact, astfel încât relațiile (4.76) și (4.77) pot fi scrise și sub formă scalară. În studiul fenomenelor tribologice interesează **alunecarea specifică** a profilelor, definită pentru cele două roți, astfel

$$\zeta_1 = \frac{v_{al1}}{v_{d1}} = \frac{v_{d1} - v_{d2}}{v_{d1}} \quad (4.78)$$

$$\zeta_2 = \frac{v_{al2}}{v_{d2}} = \frac{v_{d2} - v_{d1}}{v_{d2}} \quad (4.79)$$

Viteza absolută a punctului de contact \bar{v}_P ($// K_1K_2$) se poate exprima cu ajutorul ecuației

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{d1} + \bar{v}_{P1}, \quad (4.80)$$

în care \bar{v}_{d1} ($\perp K_1K_2$) este viteza relativă a punctului P în raport cu roata 1, iar \bar{v}_{P1} este viteza de transport,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{P1} &= \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1P} = \\ &= \bar{\omega}_1 \times (\overline{O_1K_1} + \overline{K_1P}) = \\ &= \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1K_1} + \bar{\omega}_1 \times \overline{K_1P} \end{aligned}$$

Deoarece $(\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1K_1}) // K_1K_2$ și $(\bar{\omega}_1 \times \overline{K_1P}) \perp K_1K_2$, rezultă

$$\bar{v}_{d1} = -\bar{\omega}_1 \times \overline{K_1P}. \quad (4.81)$$

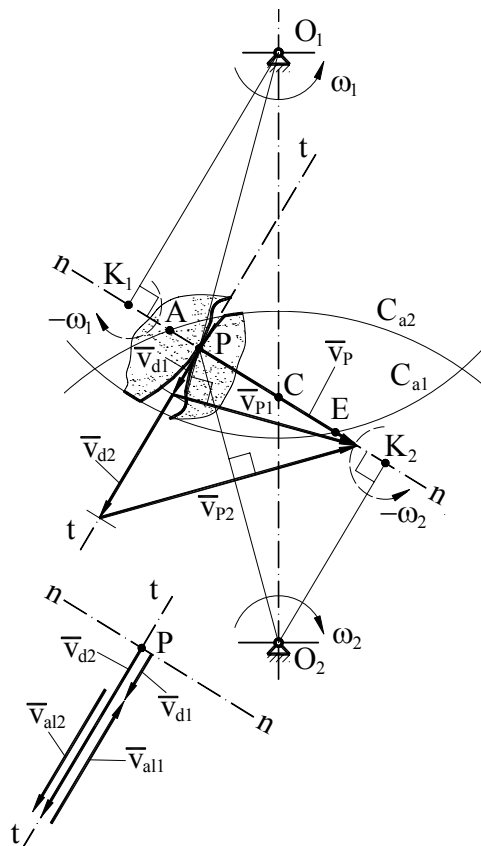


Fig. 4.31

Deci viteza \bar{v}_{d1} este similară cu viteza unui punct care coincide cu P și aparține unei bare care se rotește în jurul punctului K_1 cu viteza unghiulară $-\bar{\omega}_1$. În mod asemănător, pentru determinarea vitezei \bar{v}_{d2} se folosește ecuația

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{d2} + \bar{v}_{P2}, \quad (4.82)$$

și se ajunge la expresia

$$\bar{v}_{d2} = -\bar{\omega}_2 \times \overline{K_2P}. \quad (8.83)$$

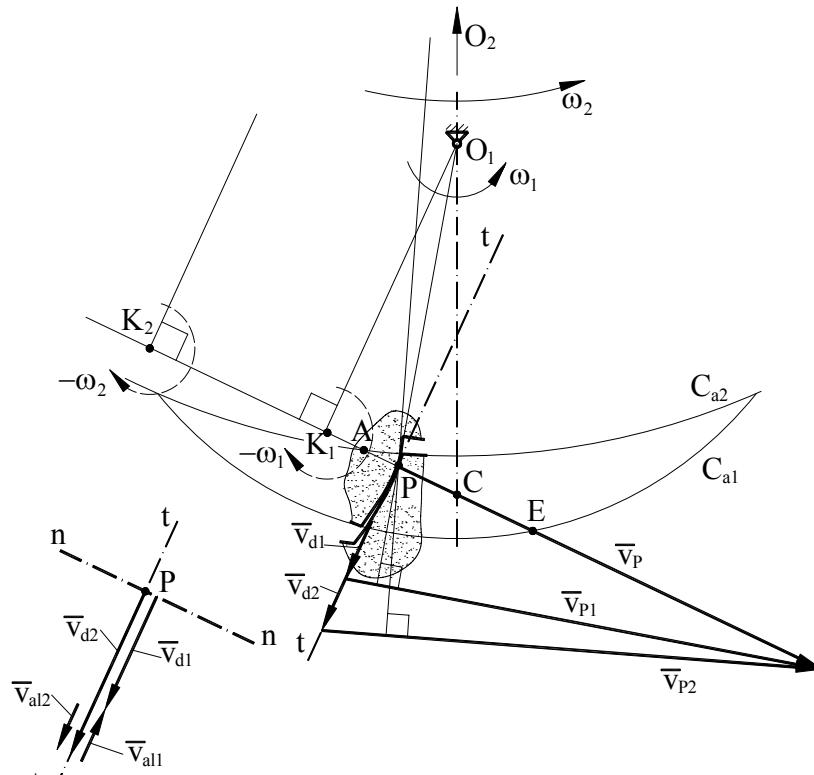


Fig. 4.32

În Fig.4.31și 4.32 sunt reprezentate poligoanele de viteze corespunzătoare ecuațiilor (4.80) și (4.82), pentru un angrenaj exterior și pentru un angrenaj interior.

Distanțele $K_1P = \rho_1$ și $K_2P = \rho_2$ sunt razele de curbură ale profilelor evolventice în punctul de contact P. Introducând vitezele $v_{d1} = \omega_1\rho_1$ și $v_{d2} = \omega_2\rho_2$ în relațiile (4.78) și (4.79), și având în vedere că $\rho_1 + \rho_2 = K_1K_2 = L = a \sin \alpha_w$, se obțin formulele de calcul ale alunecărilor specifice pentru un angrenaj exterior

$$\zeta_1 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(\frac{L}{\rho_1} - 1 \right) \quad (4.84)$$

$$\zeta_2 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(\frac{L}{\rho_2} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(\frac{L}{L - \rho_1} - 1 \right). \quad (4.85)$$

În cazul angrenajului interior $\rho_2 - \rho_1 = K_1 K_2 = L$, iar formulele de calcul sunt

$$\zeta_1 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(1 + \frac{L}{\rho_1} \right) \quad (4.86)$$

$$\zeta_2 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(1 - \frac{L}{\rho_2} \right) = 1 - \frac{1}{i_{12}} \left(1 - \frac{L}{L + \rho_1} \right). \quad (4.87)$$

În Fig.4.33 sunt trasate diagramele $\zeta_1(\rho_1)$ și $\zeta_2(\rho_2)$, pentru angrenajul exterior, iar în Fig.4.34 – pentru cel interior. Aceste diagrame arată variația alunecărilor specifice de-a lungul dreptei de angrenare. Sunt puse în evidență

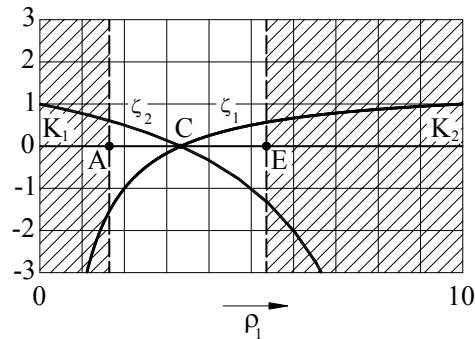


Fig. 4.33

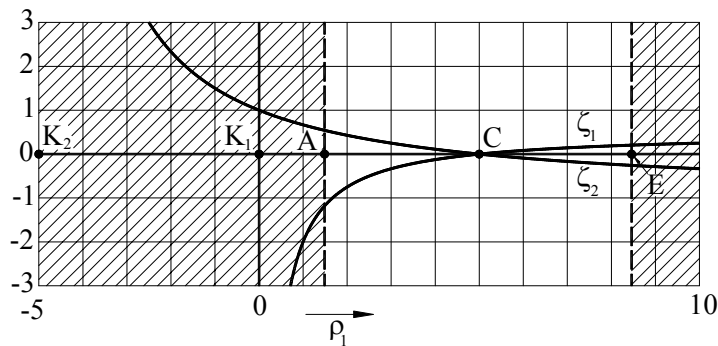


Fig. 4.34

punctele K_1 , K_2 , A , E și C . Desigur, curbele prezintă importanță numai în interiorul segmentului de angrenare AE . Se observă că valorile maxime în modul, ale alunecărilor specifice, se înregistrează în punctele A și E – la intrarea și ieșirea din angrenare.

Deoarece alunecările specifice influențează direct uzura abrazivă a flancurilor, este de dorit ca valorile lor să fie cât mai mici. Această cerință se poate realiza prin alegerea adecvată a deplasărilor de profil, care determină poziția segmentului de angrenare pe dreapta de angrenare, astfel încât valorile alunecărilor de profil, la intrarea și la ieșirea din angrenare, să fie egale.

4.1.3.9. Analiza cinetostatică, randamentul

Se consideră un angrenaj exterior (Fig.4.35), format din roata conducătoare 1 și roata condusă 2, asupra căreia acționează momentul rezistent M_2 – considerat cunoscut.

În cuplele de rotație O_1 și O_2 acționează, așa cum am arătat în par.2.2.1.4, reacțiunile rezultante \bar{R}_{31}^r și \bar{R}_{32}^r , precum și momentele de frecare,

$$|M_{f31}| = r_{O_1} |R_{31}^r| \sin \varphi_{O_1}$$

$$|M_{f32}| = r_{O_2} |R_{32}^r| \sin \varphi_{O_2},$$

orientate în sens opus față de vitezele unghiulare $\tilde{\omega}_1$ și $\tilde{\omega}_2$. În aceste relații r_{O_1} și r_{O_2} sunt razele fusurilor, iar φ_{O_1} și φ_{O_2} sunt unghiurile de frecare din cele două cuple.

În cupla superioară, formată între flancurile dinților, acționează reacțiunea normală \bar{R}_{12} , orientată după normala comună K_1K_2 , în sensul $K_1 \rightarrow K_2$, forța de frecare de alunecare

$$|F_{f12}| = \mu_p \cdot |R_{12}|,$$

și momentul de frecare de rostogolire,

$$|M_{f12}| = f_p \cdot |R_{12}|,$$

în care μ_p este coeficientul de frecare de alunecare iar f_p este coeficientul de frecare de rostogolire.

Forța \bar{F}_{f12} are ca suport tangenta comună la profilele tt , iar sensul este același cu viteza relativă de alunecare \bar{v}_{al2} . Din relațiile (4.80) și (4.82) rezultă

$$\bar{v}_{al2} = \bar{v}_{d2} - \bar{v}_{d1} = \bar{v}_{p1} - \bar{v}_{p2} = \bar{v}_{p12}.$$

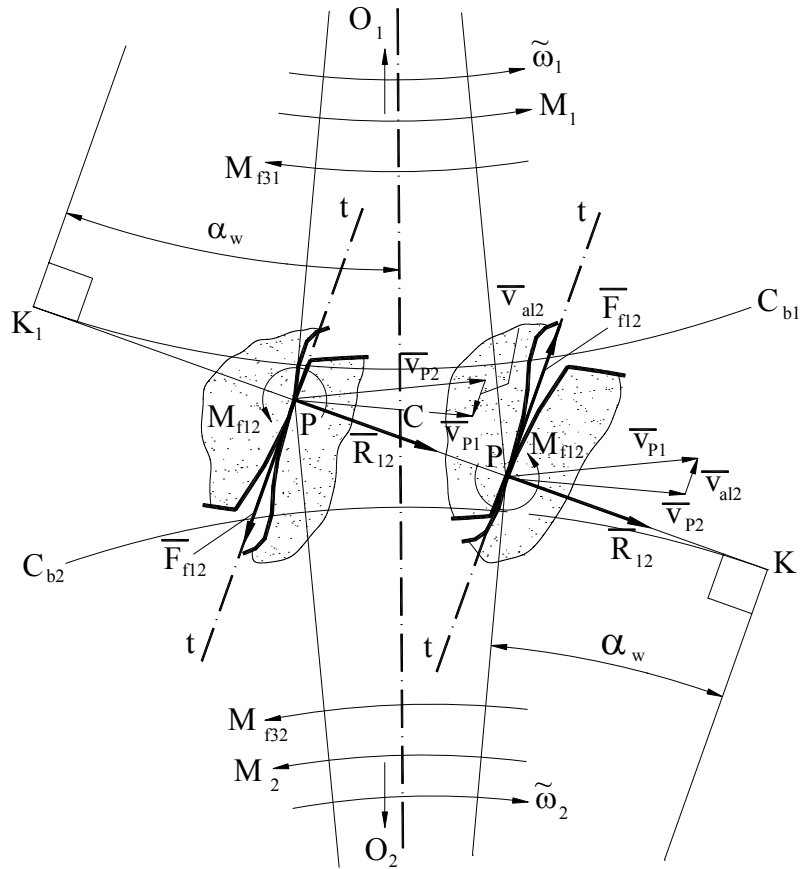


Fig. 4.35

În Fig.4.35 sunt construite triunghiurile de viteze din care se obține \bar{v}_{al2} , conform acestei ecuații. Se observă că în cazul în care punctul P se găsește pe segmentul K_1C , viteza \bar{v}_{al2} este orientată în sensul $K_2 \rightarrow O_2$, iar dacă P se află pe segmentul CK_2 , \bar{v}_{al2} este orientată în sensul $K_1 \rightarrow O_1$. Momentul de frecare M_{f12} este orientat în sensul vitezei unghiulare

$$\tilde{\omega}_{12} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2,$$

care la angrenajul exterior are sensul $\tilde{\omega}_1$.

Ne propunem să determinăm reacțiunile din cuplele cinematice și momentul motor M_1 .

Pentru început, se consideră cazul angrenării monopare, când punctul de contact se află pe segmentul K_1C (faza intrării în angrenare).

Se scrie ecuația forțelor pentru elementul 2

$$\sum \bar{F}(2) = 0; \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_{f12} + \bar{R}_{32}^r = 0.$$

Având în vedere că \bar{R}_{12} și \bar{F}_{f12} sunt perpendiculare, rezultă

$$|\bar{R}_{32}^r| = \sqrt{R_{12}^2 + F_{f12}^2} = |R_{12}| \sqrt{1 + \mu_p^2}. \quad (4.88)$$

Se scrie ecuația scalară de momente, pentru roata 2, în raport cu punctul O_2 ,

$$\sum M_{O_2}(2) = 0; \quad |R_{12}| \cdot O_2 K_2 - |F_{f12}| \cdot K_2 P - |M_{f12}| - |M_{f32}| - |M_2| = 0.$$

Notând $r_{b2} = O_2 K_2$ și $\rho_2 = K_2 P$, și ținând seama de expresiile precizate anterior pentru $|F_{f12}|$, $|M_{f12}|$, $|M_{f32}|$ și $|R_{32}^r|$, se obține

$$|R_{12}| = \frac{|M_2|}{r_{b2} - \mu_p \cdot \rho_2 - f_p - r_{O_2} \sqrt{1 + \mu_B^2} \sin \varphi_{02}}. \quad (4.89)$$

Se scrie în continuare, ecuația de momente pentru elementul 1 în raport cu punctul O_1 , având în vedere că orientările reacțiunilor și ale momentelor de frecare din cupla P se inversează

$$\sum M_{O_1}(1) = 0; \quad |R_{12}| \cdot O_1 K_1 - |F_{f12}| \cdot K_1 P + |M_{f12}| + |M_{f31}| - |M_1| = 0$$

Din această ecuație rezultă $|M_1|$,

$$|M_1| = |R_{12}| \left(r_{b1} - \mu_p \rho_1 + f_p + r_{O_1} \sqrt{1 + \mu_B^2} \sin \varphi_{01} \right) \quad (4.90)$$

Cunoscând $|M_1|$ se poate determina randamentul instantaneu, caracteristic acestei faze

$$\eta_{mi} = \frac{|M_2| \omega_2}{|M_1| \omega_1} = \frac{r_{b2} - \mu_p \rho_2 - f_p - r_{O_2} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_2}}{r_{b1} - \mu_p \rho_1 + f_p + r_{O_1} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_1}} \cdot \frac{1}{i_{12}}. \quad (4.91)$$

În această formulă, razele de bază se înlocuiesc prin expresiile,

$$r_{b1} = \frac{L}{(1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}, \quad r_{b2} = \frac{i_{12} \cdot L}{(1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w},$$

în care $L = K_1 K_2 = a \sin \alpha_w$, iar $\rho_2 = L - \rho_1$.

Rezultă o expresie în care randamentul depinde de o singură variabilă, ρ_1

$$\eta_{mi} = \frac{i_{12} L - \left(\mu_p (L - \rho_1) + f_p + r_{O_2} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_2} \right) (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}{i_{12} L + \left(-\mu_p \rho_1 + f_p + r_{O_1} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_1} \right) i_{12} (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}. \quad (4.92)$$

Dacă punctul P se găsește pe segmentul CK₂ (faza ieșirii din angrenare), se schimbă sensul forței de frecare \bar{F}_{f12} și în consecință se modifică semnul care intervine în formule, înaintea acestei forțe. Astfel, randamentul instantaneu pentru angrenarea monopară, în faza ieșirii din angrenare, se calculează cu formula

$$\eta_{mo} = \frac{i_{12}L - \left(-\mu_p(L - \rho_1) + f_p + r_{O_2} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_2}\right) (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}{i_{12}L + \left(\mu_p \rho_1 + f_p + r_{O_1} \sqrt{1 + \mu_p^2} \sin \varphi_{O_1}\right) i_{12} (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}. \quad (4.93)$$

Se consideră, în continuare, cazul angrenării bipare, în ipoteza că reacțiunea \bar{R}_{12} se repartizează egal pe cele două perechi de dinți care angrenează simultan, una pe segmentul K₁C, în punctul P_{bi} iar cealaltă pe segmentul CK₂, în punctul P_{bo} (Fig.4.36). Punctele P_{bi} și P_{bo} sunt separate de distanța p_b – pasul de bază,

$$p_b = \pi m \cos \alpha_0.$$

Se scrie ecuația de forțe pentru elementul 2,

$$\sum \bar{F}(2) = 0; \quad \frac{\bar{R}_{12}}{2} + \bar{F}_{f12} + \frac{\bar{R}_{12}}{2} - \bar{F}_{f12} + \bar{R}_{32}^r = 0,$$

din care rezultă

$$|\bar{R}_{32}^r| = |\bar{R}_{12}|. \quad (4.94)$$

Se scrie ecuația de momente pentru elementul 2 în raport cu punctul O₂,

$$M_{O_2}(2) = 0;$$

$$\frac{|\bar{R}_{12}|}{2} (r_{b2} - \mu_p \rho_{2i} - f_p - r_{O_2} \sin \varphi_{O_2}) + \frac{|\bar{R}_{12}|}{2} (r_{b2} + \mu_p \rho_{2o} - f_p - r_{O_2} \sin \varphi_{O_2}) - |\bar{M}_2| = 0$$

Având în vedere că $\rho_{2i} - \rho_{2o} = p_b$, din această ecuație se obține $|\bar{R}_{12}|$,

$$|\bar{R}_{12}| = \frac{|\bar{M}_2|}{r_{b2} - \mu_p \frac{p_b}{2} - f_p - r_{O_2} \sin \varphi_{O_2}}. \quad (4.95)$$

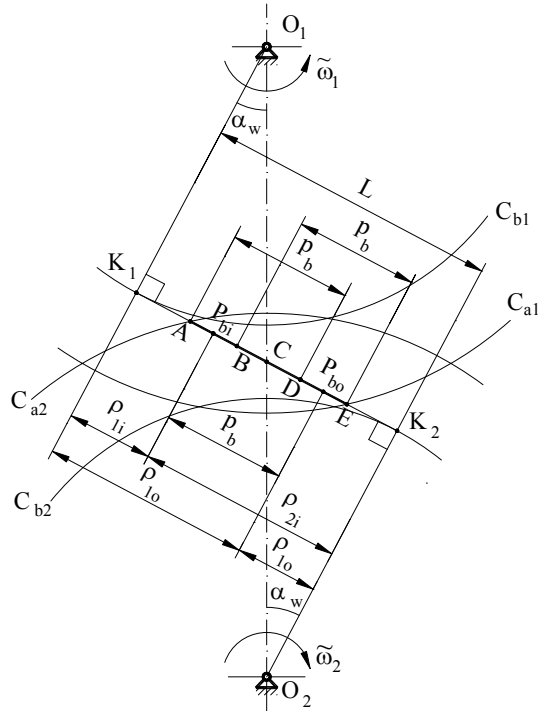


Fig. 4.36

Se scrie ecuația de momente pentru elemntul 1 în raport cu punctul O_1 ,

$$M_{O_1}(1) = 0;$$

$$\frac{|R_{12}|}{2} (r_{b1} - \mu_p \rho_{1i} + f_p + r_{o1} \sin \varphi_{O_1}) + \frac{|R_{12}|}{2} (r_{b1} + \mu_p \rho_{1o} + f_p + r_{o1} \sin \varphi_{O_1}) - |M_1| = 0.$$

Între ρ_{1i} și ρ_{1o} există relația $\rho_{1o} - \rho_{1i} = p_b$, astfel că din această ecuație se obține $|M_1|$,

$$|M_1| = |R_{12}| \left(r_{b1} + \mu_p \frac{p_b}{2} + f_p + r_{o1} \sin \varphi_{O_1} \right). \quad (4.96)$$

Pe baza relațiilor (4.95) și (4.96) se determină randamentul instantaneu pentru angrenarea bipară

$$\eta_b = \frac{|M_2| \omega_2}{|M_1| \omega_1} = \frac{r_{b2} - \mu_p \frac{p_b}{2} - f_p - r_{o2} \sin \varphi_{O_2}}{r_{b1} + \mu_p \frac{p_b}{2} + f_p + r_{o1} \sin \varphi_{O_1}} \cdot \frac{1}{i_{12}}.$$

Înlocuind razele de bază cu expresiile lor, rezultă

$$\eta_b = \frac{i_{12}L - \left(\mu_p \frac{P_b}{2} + f_p + r_{O_2} \sin \varphi_{O_2} \right) (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w}{i_{12}L + \left(\mu_p \frac{P_b}{2} + f_p + r_{O_1} \sin \varphi_{O_1} \right) i_{12} (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha_w} \quad (4.97)$$

Se observă că randamentul angrenajului în faza de angrenare bipară este constant deoarece în expresia sa nu intervine variabila ρ_1 .

Randamentul global, pentru o perioadă de timp $t_b - t_a$, în care randamentul instantaneu are aceeași expresie, se calculează în funcție de puterile $|P_1|$ și $|P_2|$,

$$\eta_g = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |P_2| dt}{\int_{t_a}^{t_b} |P_1| dt} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |P_2| dt}{\int_{t_a}^{t_b} \frac{|P_2|}{\eta} dt}$$

Puterea rezistentă $|P_2| = |M_2| \omega_2$ este constantă iar timpul se exprimă în funcție de viteza punctului de contact pe dreapta de angrenare, $v_p = \omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}$, de asemenea constantă,

$$t = \frac{\rho_1}{v_p}; \quad dt = \frac{1}{v_p} d\rho_1$$

$$\rho_{1a} = t_a v_p; \quad \rho_{1b} = t_b v_p$$

Cu aceste observații, randamentul global devine

$$\eta_g = \frac{\int_{\rho_{1a}}^{\rho_{1b}} d\rho_1}{\int_{\rho_{1a}}^{\rho_{1b}} \frac{d\rho_1}{\eta}} = \frac{\rho_{1b} - \rho_{1a}}{\int_{t_a}^{t_b} \frac{d\rho_1}{\eta}} \quad (4.98)$$

În timpul funcționării angrenajului se repetă alternativ angrenarea bipară, care se desfășoară simultan pe segmentele AB și DE (Fig.4.36) și angrenarea monopară, pe segmentul BD. În aceste condiții, randamentul global pentru un ciclu de funcționare este

$$\eta_g = \frac{AB + BC + CD}{\int_{\rho_{1A}}^{\rho_{1B}} \frac{d\rho_1}{\eta_b} + \int_{\rho_{1B}}^{\rho_{1C}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mi}} + \int_{\rho_{1C}}^{\rho_{1D}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mo}}}$$

Deoarece η_b este constant, această formulă devine

$$\eta_g = \frac{AB + BC + CD}{\frac{AB}{\eta_b} + \int_{\rho_{1B}}^{\rho_{1C}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mi}} + \int_{\rho_{1C}}^{\rho_{1D}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mo}}} \quad (4.99)$$

Parametrii care intervin în această formulă se calculează pe baza schemei din Fig.4.36

$$\rho_{1A} = L - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad \rho_{1E} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}, \quad \rho_{1B} = \rho_{1E} - p_b, \quad \rho_{1D} = \rho_{1A} + p_b$$

$$\rho_{1C} = r_{w1} \sin \alpha_w, \quad AB = \rho_{1B} - \rho_{1A}, \quad BC = \rho_{1C} - \rho_{1B}, \quad CD = \rho_{1D} - \rho_{1C}.$$

Trebuie menționat că valoarea randamentului, obținută prin calcul, este afectată de erorile de apreciere a coeficienților de frecare și de neglijarea unor pierderi de putere. De aceea este util să se confrunte rezultatele calculate cu cele obținute prin măsurători experimentale.

4.1.3.10. Adoptarea coeficienților de deplasare

Proiectarea unui angrenaj presupune determinarea parametrilor de bază pentru cele două roți m, z_1, x_1, z_2, x_2 . Rezolvarea problemei depășește cadrul geometrico-cinematic, implicând aspecte de rezistență, durabilitate, tribologie, transmiterea căldurii etc. Ca orice problemă de proiectare, și aceasta este una de optimizare, în care funcția obiectiv este în general de natură economică. În cadrul acestei probleme intervin o serie de restricții privind adoptarea coeficienților de deplasare. Acestea se referă la evitarea unor fenomene nedorite sau incompatibile cu angrenarea, care în general au fost studiate în paragrafele anterioare, și pe care le reamintim.

- 1) Asigurarea continuității angrenării (par. 4.1.3.6),
- 2) Evitarea interferenței primare și secundare (par. 4.1.3.7),
- 3) Evitarea subtăierii sau menținerea ei în limite admisibile (par. 4.1.3.7),
- 4) Evitarea ascuțirii dinților prin limitarea arcului de cap $s_a \leq (0,2 \div 0,3)m$ (par. 4.1.3.3).

Aceste restricții conduc la formularea unor condiții matematice, de forma

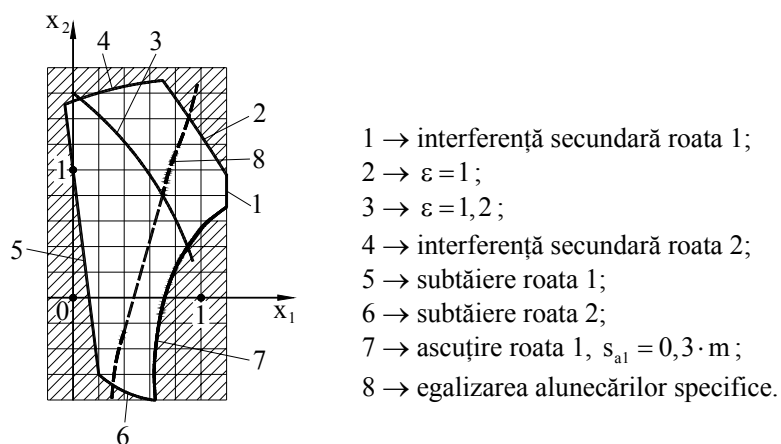
$$f_i(x_1, x_2, z_1, z_2) \leq 0, \quad (i=1, n).$$

În cazul în care z_1 și z_2 au valori precizate, fiecare condiție definește două domenii în planul de coordonate Ox_1x_2 - unul admisibil, în care condiția este respectată, și celălalt - inadmisibil. Cele două domenii sunt separate de curba dată de ecuația,

$$f_i(x_1, x_2, z_1, z_2) = 0.$$

Dacă domeniile admisibile corespunzătoare tuturor condițiilor se intersectează, se obține un domeniu admisibil rezultat, delimitat de un contur

numit **contur de blocare**. În Fig. 4.37 este reprezentat, pentru exemplificare, conturul de blocare construit pentru $z_1=14$, $z_2=38$, și se precizează semnificația curbelor care îl compun. În același sistem de coordonate pot fi trasate și alte curbe care pot oferi date suplimentare privind alegerea coeficienților de deplasare. Astfel, în Fig.4.37 se observă curba pe care se egalizează alunecările specifice.



contur de blocare
 $z_1 = 14, z_2 = 38$

Fig. 4.37

4.1.4. Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți înclinați

4.1.4.1. Definirea roții dințate cilindrice cu dinți înclinați

■ Cremaliera de referință cu dinți înclinați

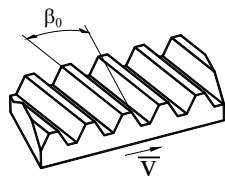


Fig. 4.38

Cremaliera de referință cu dinți înclinați este o cremalieră cu flancuri plane având direcția dinților înclinată față de axa roții cu care angrenează (Fig.4.38). Geometria acestei cremaliere este determinată de profilul său în secțiunea normală nn (perpendiculară pe direcția dinților) și de unghiul de înclinare a dinților β_0 (Fig.4.39). Profilul normal este identic cu profilul

cremalierii de referință cu dinți dreți, iar modulul, m_n - numit **modul normal** este standardizat. Pentru definirea roții dințate este necesar să se cunoască și parametrii geometrice din secțiunea frontală tt , perpendiculară pe axa roții cu care angrenează cremaliera. Acești parametri se exprimă, în funcție de **modulul frontal** m_t , prin relații analoge cu cele existente în cazul secțiunii normale,

$$\begin{aligned}
 p_{0t} &= \pi \cdot m_t \\
 h_{a0} &= h_{a0t}^* \cdot m_t \\
 c_0 &= c_{0t}^* \cdot m_t \\
 h_{f0} &= (h_{f0t}^* + c_{0t}^*) m_t
 \end{aligned}
 \tag{4.100}$$

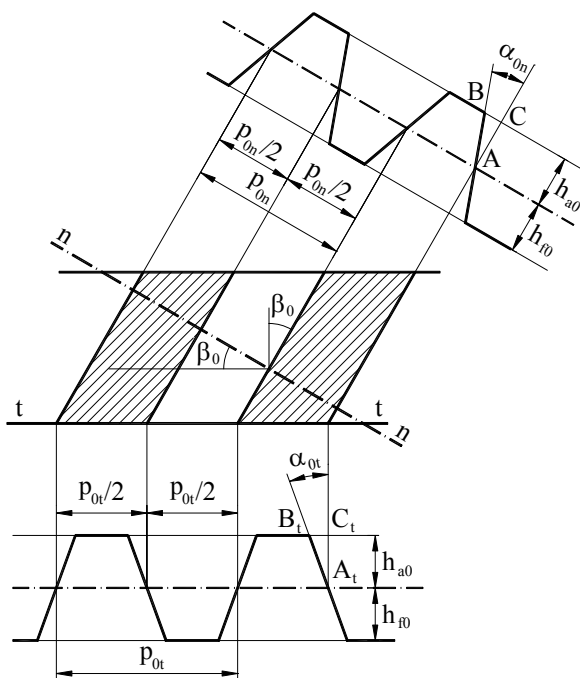


Fig. 4.39

Pentru a face operabile aceste relații trebuie să se facă legătura dintre mărimile m_t , h_{a0t}^* , c_{0t}^* și m_n , h_{a0n}^* , c_{0n}^* . Din Fig.4.39 rezultă

$$\cos \beta_0 = \frac{p_{0n}}{p_{0t}}$$

Ținând seama că $p_{0n} = \pi \cdot m_n$ și $p_{0t} = \pi \cdot m_t$, se ajunge la

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta_0} \quad (4.101)$$

Parametrii h_{a0} , c_0 , h_{f0} sunt aceeași în ambele secțiuni, astfel încât se poate scrie

$$h_{a0} = h_{a0n}^* \cdot m_n = h_{a0t}^* \cdot m_t,$$

de unde rezultă

$$h_{a0t}^* = h_{a0n}^* \frac{m_n}{m_t} = h_{a0n}^* \cdot \cos \beta_0$$

și, în mod, analog

$$c_{0t}^* = c_{0n}^* \cdot \cos \beta_0.$$

Unghiurile de înclinare ale profilurilor α_{0n} și α_{0t} sunt diferite în cele două secțiuni. Din triunghiurile ABC și $A_t B_t C_t$ (Fig.4.39) rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha_{0n} = \frac{BC}{h_{a0}}; \operatorname{tg} \alpha_{0t} = \frac{B_t C_t}{h_{a0}}.$$

Între BC și $B_t C_t$ există relația

$$\cos \beta_0 = \frac{BC}{B_t C_t},$$

care conduce la

$$\operatorname{tg} \alpha_{0t} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{0n}}{\cos \beta_0} \quad (4.102)$$

■ Parametrii geometrici principali ai roții dințate cilindrice cu dinți înclinați

Roțile dințate cilindrice cu dinți înclinați se definesc din condiția de angrenare fictivă cu cremaliera de referință, fără joc între flancuri și cu joc radial standardizat. Într-o secțiune frontală, procesul de definiție este similar cu cel descris la roțile cilindrice cu dinți drepți. Flancurile roții se obțin ca înfășurătoare ale flancurilor plane ale cremalierii în mișcarea relativă dintre cele două elemente. Suprafața flancurilor este **un elicoid evolventic**. Intersecția sa cu un plan frontal reprezintă o evolventă deoarece profilul frontal al cremalierii este rectiliniu, iar intersecția cu un cilindru coaxial cu roata reprezintă o elice cu pas constant (Fig.4.40). Unghiul de înclinare al elicei, în raport cu axa roții, reprezintă unghiul de înclinare al dinților și are valori diferite în funcție de cilindrul pe care se măsoară. Pe cilindrul de divizare se reproduce unghiul de

înclinare al dinților cremalierii β_0 . Unghiul de înclinare β_y , pe un cilindru oarecare, se determină pe baza schemei din Fig.4.41, în care sunt reprezentate desfășuratele plane ale celor doi cilindri: cel de divizare și cel oarecare.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta_0 &= \frac{\pi d}{p_z}; \operatorname{tg}\beta_y = \frac{\pi d_y}{p_z} \\ \operatorname{tg}\beta_y &= \frac{d_y}{d} \operatorname{tg}\beta_0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

În aceste relații p_z este pasul constant al elicei, iar d este diametrul de divizare.

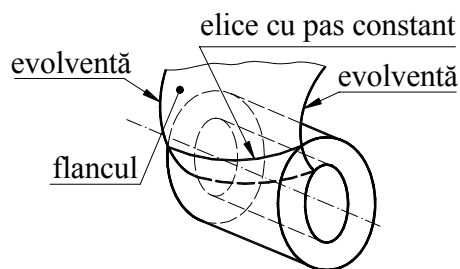


Fig. 4.40

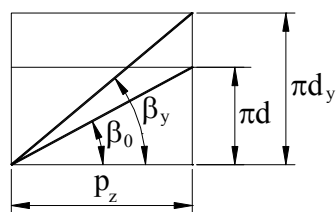


Fig. 4.41

Parametri geometrici în secțiunea frontală a roții se exprimă în funcție de modulul frontal m_t , cu formule analoge cu cele corespunzătoare roții dințate cu dinți drepecți. Acești parametri trebuie exprimați, în final, în funcție de modulul normal m_n . Pentru aceasta se folosesc relațiile, deduse anterior, care fac legătura dintre parametrii celor două secțiuni ale cremalierii de referință.

• **Deplasarea danturii, X**

$$X = x_t \cdot m_t = x_n \cdot m_n \quad (4.104)$$

Relația arată că cei doi coeficienți de deplasare x_n (normal) și x_t (frontal) sunt diferiți,

$$x_t = x_n \frac{m_n}{m_t} = x_n \cdot \cos\beta_0 \quad (4.105)$$

• **Pasul de divizare frontal, p_t**

$$p_t = p_{0t} = \pi \cdot m_t = \frac{\pi \cdot m_n}{\cos\beta_0} \quad (4.106)$$

• **Diametrul de divizare, d**

$$d = m_t \cdot z = \frac{m_n \cdot z}{\cos\beta_0} \quad (4.107)$$

- Înălțimea de divizare a capului dintelui, h_a

$$h_a = (h_{a0t}^* + x_t)m_t = (h_{a0n}^* + x_n)m_n \quad (4.108)$$

- Înălțimea de divizare a piciorului dintelui, h_b

$$h_b = (h_{a0t}^* + c_{0t}^* - x_t)m_t = (h_{a0n}^* + c_{0n}^* - x_n)m_n \quad (4.109)$$

- Diametrul de cap, d_a

$$d_a = (z + 2h_{a0t}^* + 2x_t)m_t = \left(\frac{z}{\cos\beta_0} + 2h_{a0n}^* + 2x_n\right)m_n \quad (4.110)$$

- Diametrul ce picior, d_f

$$d_f = (z - 2h_{a0t}^* - 2c_{0t}^* + 2x_t)m_t = \left(\frac{z}{\cos\beta_0} - 2h_{a0n}^* - 2c_{0n}^* + 2x_n\right)m_n \quad (4.111)$$

- Unghiul de presiune al profilului frontal pe cercul de divizare, α_{0t}

$$\alpha_{0t} = \arctg \frac{\operatorname{tg}\alpha_{0n}}{\cos\beta_0} \quad (4.112)$$

- Arcul frontal al dintelui pe cercul de divizare, s_t

$$s_t = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_t \operatorname{tg}\alpha_{0t}\right)m_t = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_n \cdot \operatorname{tg}\alpha_{0n}\right)\frac{m_n}{\cos\beta_0} \quad (4.113)$$

- Arcul frontal al golului dintre dinți pe cercul de divizare, e_t

$$e_t = \left(\frac{\pi}{2} - 2x_t \operatorname{tg}\alpha_{0t}\right)m_t = \left(\frac{\pi}{2} - 2x_n \cdot \operatorname{tg}\alpha_{0n}\right)\frac{m_n}{\cos\beta_0} \quad (4.114)$$

- Diametrul de bază, d_b

$$d_b = m_t z \cdot \cos\alpha_{0t} = m_n \cdot z \frac{\cos\left(\arctg \frac{\operatorname{tg}\alpha_{0n}}{\cos\beta_0}\right)}{\cos\beta_0} \quad (4.115)$$

- Unghiul de înclinare al dinților pe cilindrul de divizare, β

$$\beta = \beta_0$$

- Unghiul de înclinare al dinților pe cilindrul de bază, β_b

Aplicând formula (4.103) se obține

$$\beta_b = \arctg\left(\frac{d_b}{d} \operatorname{tg}\beta_0\right).$$

În conformitate cu relația (4.115),

$$\frac{d_b}{d} = \cos\alpha_{0t},$$

astfel că

$$\beta_b = \arctg(\cos \alpha_{0t} \cdot \operatorname{tg} \beta_0) = \arctg \left(\operatorname{tg} \beta_0 \cdot \cos \left(\arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha_{0n}}{\cos \beta_0} \right) \right). \quad (4.116)$$

Expresiile menționate arată că roata cilindrică cu dinți înclinați se poate defini complet, din punct de vedere geometric, cu ajutorul parametrilor m_n , z , x_n și β_0 .

4.1.4.2. Angrenajul paralel cu dinți înclinați

■ Parametrii geometrici ai angrenajului

Pentru formarea unui angrenaj paralel, cele două roți trebuie să aibă același modul normal $m_{n1} = m_{n2} = m_n$ și același modul frontal $m_{t1} = m_{t2} = m_t$. Din relația (4.101) rezultă că și unghiul de înclinare a dinților pe cilindrul de divizare trebuie să aibă aceeași valoare $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$. În cazul angrenajului exterior înclinarea dinților are sensuri opuse pentru cele două roți (Fig.4.42.a), pe când în cazul angrenajului interior are același sens (Fig.4.42.b).

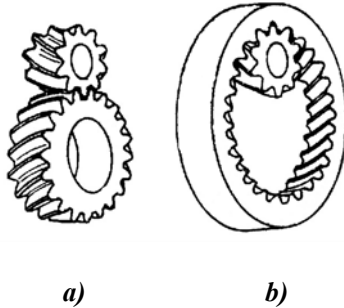


Fig. 4.42

Deoarece profilele frontale sunt evolventice, procesul de angrenare, în secțiunea frontală, se desfășoară în același mod ca în cazul angrenajelor cilindrice cu dinți drepecți. Ca urmare, determinarea parametrilor geometrici ai angrenajului se face luând în considerare angrenarea în secțiunea frontală, folosind relații similare cu cele de la angrenajele cu dinți drepecți. Astfel, unghiul de angrenare α_{wt} , diametrele de rostogolire d_{w1} și d_{w2} și distanța dintre axe a , au expresiile

$$\operatorname{inv} \alpha_{wt} = \operatorname{inv} \alpha_{0t} + 2 \frac{x_{t2} \pm x_{t1}}{z_2 \pm z_1} \operatorname{tg} \alpha_{0t} \quad (4.117)$$

$$d_{w1} = m_t \cdot z_1 \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} = \frac{m_n \cdot z_1}{\cos \beta_0} \cdot \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} \quad (4.118)$$

$$d_{w2} = m_t \cdot z_2 \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} = \frac{m_n \cdot z_2}{\cos \beta_0} \cdot \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}}$$

$$a = m_t \frac{z_2 \pm z_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_t} = \frac{m_n}{\cos \beta_0} \cdot \frac{z_2 \pm z_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} \quad (4.119)$$

Notând

$$a_0 = m_t \frac{z_2 \pm z_1}{2} = \frac{m_n}{\cos \beta_0} \cdot \frac{z_2 \pm z_1}{2} \quad (4.120)$$

distanța dintre axe se exprimă astfel

$$a = a_0 + y_t \cdot m_t = a_0 + y_n \cdot m_n \quad (4.121)$$

în care

$$y_t = \frac{z_2 \pm z_1}{2} \left(\frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} - 1 \right) \quad (4.122)$$

$$y_n = \frac{z_2 \pm z_1}{2 \cos \beta_0} \left(\frac{\cos \alpha_{0t}}{\cos \alpha_{wt}} - 1 \right) \quad (4.123)$$

Între y_t și y_n există relația

$$y_t = y_n \cdot \cos \beta_0 \quad (4.124)$$

În cazul angrenării cu joc radial standardizat, când se practică scurtarea dinților, înălțimea capului și diametrul de cap se calculează astfel

$$\begin{cases} h_{a1} = m_t (h_{a0t}^* - x_{t1} + y_t) = m_n (h_{a0n}^* - x_{n2} + y_n) \\ h_{a2} = m_t (h_{a0t}^* - x_{t2} + y_t) = m_n (h_{a0n}^* - x_{n1} + y_n) \end{cases} \quad (4.125)$$

$$\begin{cases} d_{a1} = m_t (z_1 + 2h_{a0t}^* - 2x_{t2} + 2y_t) = m_n \left(\frac{z_1}{\cos \beta_0} + 2h_{a0n}^* - 2x_{n2} + 2y_n \right) \\ d_{a2} = m_t (z_2 + 2h_{a0t}^* - 2x_{t1} + 2y_t) = m_n \left(\frac{z_2}{\cos \beta_0} + 2h_{a0n}^* - 2x_{n1} + 2y_n \right) \end{cases} \quad (4.126)$$

În formulele anterioare semnul (+) se aplică la angrenajele exterioare, iar (-) la angrenajele interioare.

■ Aspecte specifice ale angrenajelor paralele cu dinți înclinați

Așa cum s-a arătat, cinematica angrenajelor cu dinți înclinați se studiază, în general, în planul frontal. Din această analiză rezultă limitele deplasărilor de profil impuse de interferență, subtăiere și ascuțire. De asemenea, alunecarea specifică se determină pe baza angrenării frontale.

În ceea ce privește interferența și subtăierea, este util de arătat faptul că fenomenul poate fi controlat și prin unghiul de înclinare a dinților β_0 . Numărul minim de dinți la angrenarea cu cremaliera (4.71) este

$$z_{\min} = \frac{2(h_{a0t}^* - x_t)}{\sin^2 \alpha_{0t}} = \frac{2(h_{a0n}^* - x_n) \cos \beta_0}{\sin^2 \alpha_{0t}}. \quad (4.127)$$

Se observă că z_{\min} este influențat de β_0 și scade cu creșterea acestuia. În cazul unei roți nedepasate ($x = 0$) se obține

$$z_{\min} = \frac{2 \cdot \cos \beta_0}{\sin^2 \alpha_{0t}},$$

iar în tabelul de mai jos se indică valorile pentru α_{0t} și z_{\min} în funcție de valorile unghiului β_0 .

β_0	0°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
α_{0t}	20°	$20^\circ 17'$	$20^\circ 39'$	$21^\circ 11'$	$21^\circ 53'$	$22^\circ 48'$	$23^\circ 57'$	$25^\circ 25'$	$27^\circ 41'$
z_{\min}	17	13,39	15,53	14,40	13,05	11,53	9,93	8,32	6,75

Se observă că la $\beta_0 = 45^\circ$ se poate ajunge la o roată cu 7 dinți fără pericol de interferență. Micșorarea numărului minim de dinți constituie un avantaj al acestor angrenaje deoarece permite reducerea substanțială a gabaritelor.

Unul dintre fenomenele care nu se poate studia numai prin analiza angrenării frontale este continuitatea angrenării. Contactul dintre dinții elicoidali se produce după o dreaptă generată de punctele de contact din fiecare secțiune frontală. Dreptele de contact sunt conținute într-un **plan de angrenare**, tangent la cilindrii de bază (Fig.4.43). Zona din planul de angrenare unde se poate situa dreapta de contact este delimitată de cilindrii de cap ai roților. Această zonă, notată AEE'A' (Fig.4.43) se numește **câmp de angrenare**. O pereche de flancuri începe angrenarea în punctul A, când dreapta de contact are lungimea egală cu zero. Această lungime crește progresiv până când acoperă întreaga lățime a roții, trecând prin A'. După aceea își păstrează lungimea constantă până ce ajunge în E, când începe să scadă, iar în E' contactul se întrerupe. Intrarea și ieșirea treptată din angrenare reprezintă un avantaj important al acestor angrenaje deoarece, în felul acesta, se reduc șocurile și zgomotul. Se observă că angrenarea dintre două flancuri are loc în timpul deplasării unui punct de contact de la A la E în secțiunea frontală K_1K_2 și a unui punct de la P la E' în planul frontal $K'_1K'_2$. Ca urmare gradul de acoperire este

$$\varepsilon = \frac{AE + PE'}{p_{bt}} = \frac{g_t}{p_{bt}} + \frac{PE'}{p_{bt}} = \varepsilon_t + \varepsilon_\beta \quad (4.128)$$

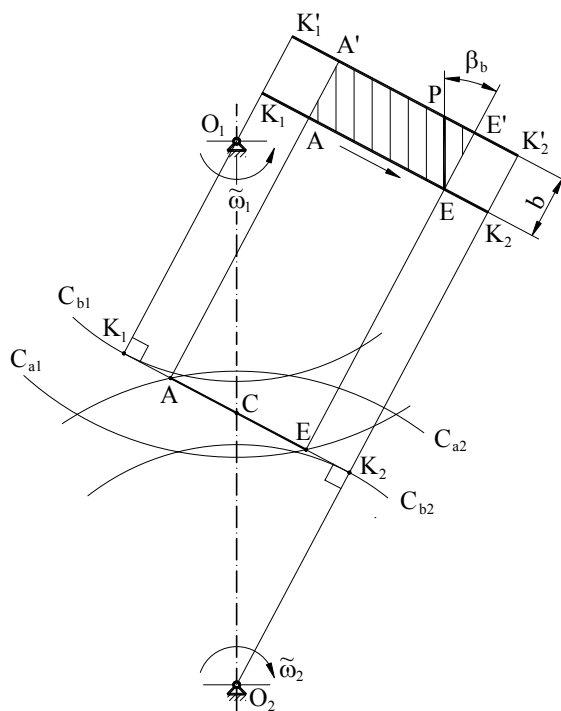


Fig. 4.43

Termenul ε_t este gradul de acoperire corespunzător angrenării frontale și se calculează ca la angrenajele cu dinți drepți. Termenul ε_β - numit **grad de acoperire axial** se determină pe baza schemei din Fig.4.43,

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta_b}{m_t \cdot \pi \cdot \cos \alpha_{0t}}, \quad (4.129)$$

în care b este lățimea roților. Rezultă că gradul de acoperire al angrenajelor cu dinți înclinați este superior celui de la angrenajele cu dinți drepți datorită termenului suplimentar ε_β . Acest fapt constituie un alt avantaj al acestor angrenaje.

4.1.5. Angrenaje concurente

4.1.5.1. Angrenajul analog

Angrenajele concurente sunt mecanisme sferice, iar suprafețele de rostogolire ale roților sunt conuri circulare cu axele suprapuse peste axele de rotație și cu vârful comun situat în punctul de intersecție al acestora, O (Fig.4.44). Suprafețele de cap și de picior sunt, de asemenea, conuri.

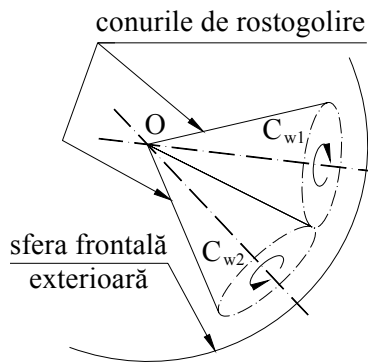


Fig. 4.44

Procesul de angrenare se studiază într-o secțiune sferică, având centrul în punctul O , care constituie suprafața frontală a angrenajului. Să considerăm sfera frontală exterioară, care delimitează roata în zona diametrelor mari. Intersecția acestei sfere cu conurile de rostogolire reprezintă cercurile de rostogolire C_{w1} și C_{w2} . Deoarece suprafața sferică nu este desfășurabilă în plan, studiul angrenării pe sfera frontală este incomod. De aceea, aceasta se înlocuiește cu două conuri frontale (aproximația Tredgold) având generatoarele perpendiculare pe

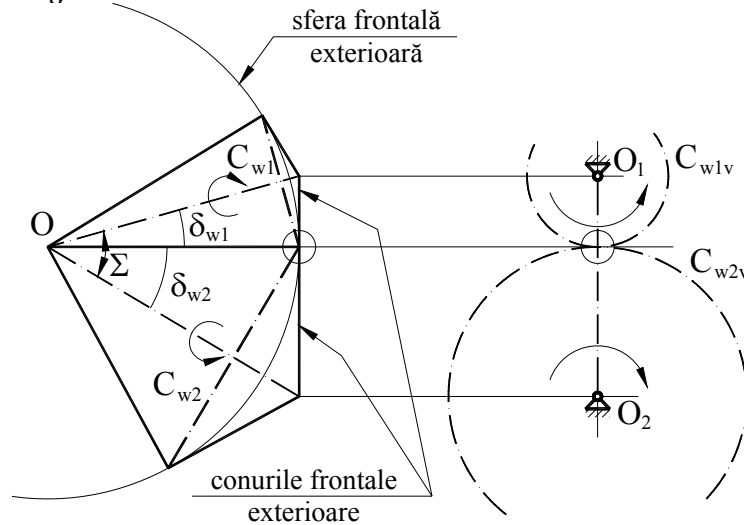


Fig. 4.45

generatoarele conurilor de rostogolire (Fig.4.45). Cele două conuri frontale sunt tangente la sfera frontală după cercurile de rostogolire, iar suprafețele lor sunt foarte apropiate, în această zonă, de suprafața sferică. Prin desfășurarea în plan

a conurilor frontale exterioare, cercurile de rostogolire C_{w1} și C_{w2} se transformă în alte două cercuri tangente C_{w1v} și C_{w2v} . Acestea reprezintă cercurile de rostogolire ale unui angrenaj cu axe paralele, numit **angrenaj analog**.

Dacă unghiul $\delta_{w2} = \frac{\pi}{2}$, conul de rostogolire devine plan și se obține un angrenaj roată conică - roată plană (Fig.4.46). Suprafața frontală a roții plane este un cilindru care conține cercul de rostogolire C_{w2} . Prin desfășurarea plană a cilindrului frontal, cercul de rostogolire se transformă într-o dreaptă. În felul acesta angrenajul analog este format dintr-o roată cilindrică și o cremalieră.

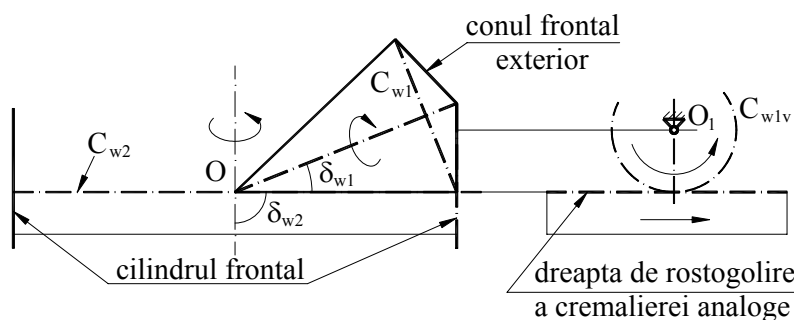


Fig. 4.46

4.1.5.2. Definirea roții dințate conice cu dinți drepți

Elementul de referință al sistemului de roți conice este roata plană de referință. În cazul roților conice cu dinți drepți, roata plană de referință are flancurile plane, iar direcția dinților este radială (Fig.4.47). Roata conică se definește din condiția de angrenare cu roata plană de referință. Angrenajul de definire este asociat unui angrenaj analog format dintr-o roată cilindrică și o cremalieră (Fig.4.48). Cremaliera analogă roții plane de referință este cremaliera de referință cu dinți drepți care permite definirea roții cilindrice analoge cu roata conică. Trebuie precizat că dreapta de rostogolire a cremalierii de referință analoge corespunde întotdeauna unui plan de rostogolire aparținând roții plane, iar dreapta de referință are drept corespondent un con de referință.

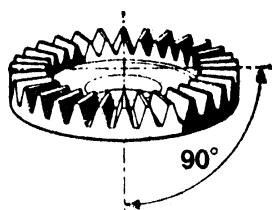


Fig. 4.47

Deoarece unghiul la vârf al conului de referință depinde de deplasarea de profil X, înseamnă că geometria roții plane este determinată de valoarea acestei deplasări.

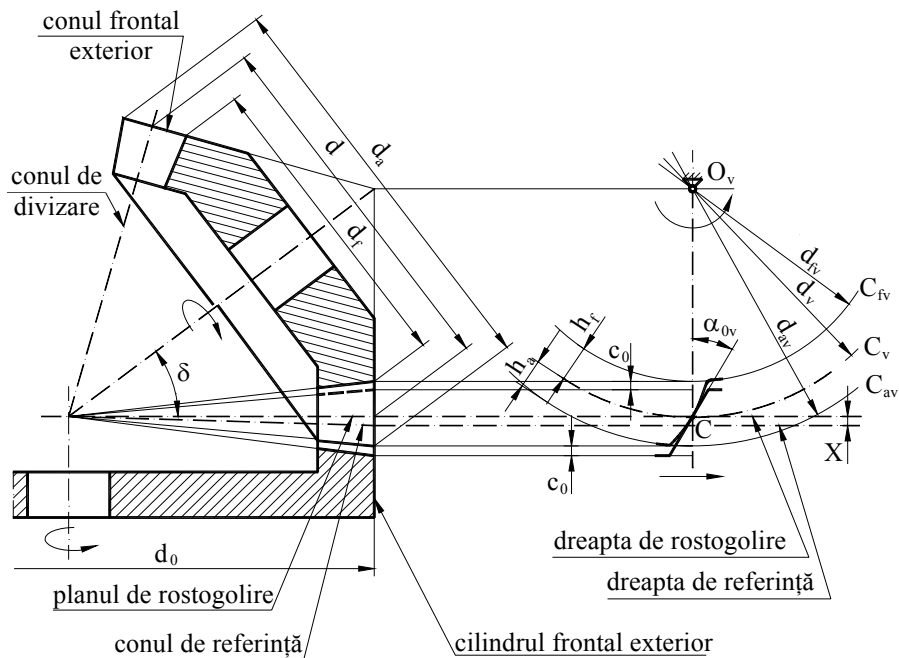


Fig. 4.48

Dantura roții conice, în secțiunea conului frontal, este similară cu dantura roții cilindrice analoge. Parametri X , p , d , h_a , h_f , c_0 se exprimă, în funcție de modulul roții plane de referință, care este și al cremalierii de referință analoge, cu formulele specifice roții cilindrice cu dinți drepți. Diametrele de cap și de picior se deduc pe baza schemei din Fig.4.48,

$$\begin{aligned} d_a &= d + 2h_a \cdot \cos \delta = m(z + 2h_{a0}^* \cdot \cos \delta + 2x \cdot \cos \delta) \\ d_f &= d - 2h_f \cdot \cos \delta = m(z - 2h_{a0}^* \cdot \cos \delta - 2c_0^* \cdot \cos \delta + 2x \cdot \cos \delta), \end{aligned} \quad (4.130)$$

în care δ este semiunghiul la vârf al conului de divizare.

În cazul roților conice se practică și o modificare a cremalierii de referință analoge care constă în schimbarea raportului dintre grosimea dintelui și lățimea golului pe dreapta de referință, care, în mod obișnuit, sunt egale. Această modificare se numește corijare tangențială și are scopul de a realiza o dimensionare mai bună a danturii în raport cu solicitările la care este supusă.

Studiul funcționării unui angrenaj conic reclamă cunoașterea parametrilor ce caracterizează roata cilindrică analogă: d_v - diametrul de divizare, z_v - numărul de dinți, d_{av} , d_{fv} - diametrele de cap și de picior,

$$d_v = \frac{d}{\cos \delta} = \frac{m \cdot z}{\cos \delta} \quad (2.131)$$

$$z_v = \frac{d_v}{m} = \frac{z}{\cos \delta} \quad (2.132)$$

$$\begin{cases} d_{av} = d_v + 2h_a = (z_v + 2h_{a0}^* + 2x)m \\ d_{fv} = d_v - 2h_f = (z_v - 2h_{a0}^* - 2c_0^* + 2x)m \end{cases} \quad (2.133)$$

Interesează, de asemenea, parametrii roții plane de referință: d_0 - diametrul roții plane (a cilindrului frontal exterior), z_0 - numărul de dinți,

$$d_0 = \frac{d}{\sin \delta} = \frac{m \cdot z}{\sin \delta} \quad (2.134)$$

$$z_0 = \frac{d_0}{m} = \frac{z}{\sin \delta} \quad (2.135)$$

Se precizează că numerele de dinți z_v și z_0 , care se referă la elemente dințate fictive, au, de regulă, valori fracționare.

4.1.5.3. Angrenajul concurent format din roți conice cu dinți drepți

Angrenajele formate din roți conice definite cu ajutorul unei roți plane de referință cu flancuri plane se numesc **angrenaje octoidale**. Denumirea se explică prin aceea că linia lor de angrenare, pe o sferă frontală, are forma unei octoide (o curbă în forma cifrei opt). Angrenajele octoidale, care prezintă avantaje tehnologice importante, au raport de transmitere riguros constant numai dacă $x_1 + x_2 = 0$. Ca urmare, în practică, se utilizează angrenaje zero ($x_1 + x_2 = 0$) sau zero deplasate ($x_1 = -x_2$). În consecință cercurile de divizare și de rostogolire ale roților cilindrice analoge coincid, iar conurile de rostogolire se suprapun peste conurile de divizare, astfel încât,

$$\delta_{w1} = \delta_1 \text{ și } \delta_{w2} = \delta_2,$$

iar unghiul dintre axele de rotație este

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2.$$

Raportul de transmitere se poate calcula cu una din expresiile (4.7), (4.9),

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} . \quad (4.136)$$

În cazul angrenajelor ortogonale ($\Sigma = 90^\circ$), care au cea mai mare utilizare practică, raportul de transmitere se poate exprima și în felul următor:

$$i_{12} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_1} .$$

Problematica legată de cinematica angrenării care include gradul de acoperire, fenomenul de interferență și subtăierea, alunecarea relativă și ascuțirea profilelor se rezolvă pe angrenajul cilindric analog. Trebuie precizat că raportul de transmitere al acestui angrenaj i_{12v} este diferit de i_{12} ,

$$i_{12v} = \frac{z_{2v}}{z_{1v}} = \frac{z_2 \cdot \cos \delta_1}{z_1 \cdot \cos \delta_2} = i_{12} \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \quad (4.137)$$

În cazul angrenajelor ortogonale ($\Sigma = 90^\circ$), $i_{12v} = i_{12}^2$.

4.1.5.4. Angrenaje concurente cu dinți înclinați și curbi

Roțile dințate conice cu dinți înclinați se definesc cu ajutorul roții plane de referință cu dinți înclinați. Această roată are flancurile plane, iar liniile flancurilor, în planul de rostogolire, sunt drepte tangente la un cerc, de rază r_0 , cu centrul pe axa roții (Fig.4.49.a). Roțile conice definite astfel sunt octoidale, iar liniile flancurilor, pe conul de divizare, sunt elici conice cu pas constant. Unghiul de înclinare al dinților roții plane β_{0y} , format între linia flancului și rază, este variabil cu raza r_{0y} a cercului pe care se măsoară,

$$\sin \beta_{0y} = \frac{r_0}{r_{0y}} .$$

În felul acesta, fiecare secțiune cilindrică frontală a roții plane este analogă cu o cremalieră de referință cu dinți înclinați. Calculul parametrilor geometrici se face pentru secțiunea conului suplimentar exterior, iar elementele standardizate se consideră modulul frontal m_f și unghiul de presiune al profilului în secțiunea normală α_0 . În mod similar, fiecare secțiune conică frontală a roții conice este analogă cu o roată cilindrică cu dinți înclinați. Geometria acestei roți, în planul frontal, este definită de cremaliera de referință analogă cu roata plană.

Fenomenele de interferență, de subtăiere, de ascuțire și de alunecare a profilelor se studiază pe angrenajul cilindric analog în secțiunea frontală, în care

aceste fenomene se manifestă cel mai nefavorabil. Trebuie subliniat că gradul de acoperire este superior celui obținut la angrenajele cu dinți dreți.

Roțile dințate cu dinți curbi se definesc cu ajutorul unor roți plane de referință având liniile flancurilor în planul de rostogolire - curbe.

În funcție de forma acestor linii există mai multe tipuri de danturi curbe.

- **Dantura în arc de cerc** (Fig.4.49.b). Liniile flancurilor care mărginesc fiecare gol sunt arce de cerc concentrice. Un caz particular al acestei danturi, folosit frecvent în practică, este dantura **zerol**, care are unghiul de înclinare al liniei medii a golului $\beta_{0m} = 0$.

- **Dantura paloidă** (Fig.4.49.c). Liniile flancurilor au forma unor evolvente generate cu ajutorul unui cerc de bază C_b , concentric cu roata plană.

- **Dantura eloidă** (Fig.4.49.d). Liniile flancurilor sunt epicloide alungite, descrise de un punct A solidar cu un cerc generator C_g , care se rostogolește peste un cerc de bază C_b , concentric cu roata.

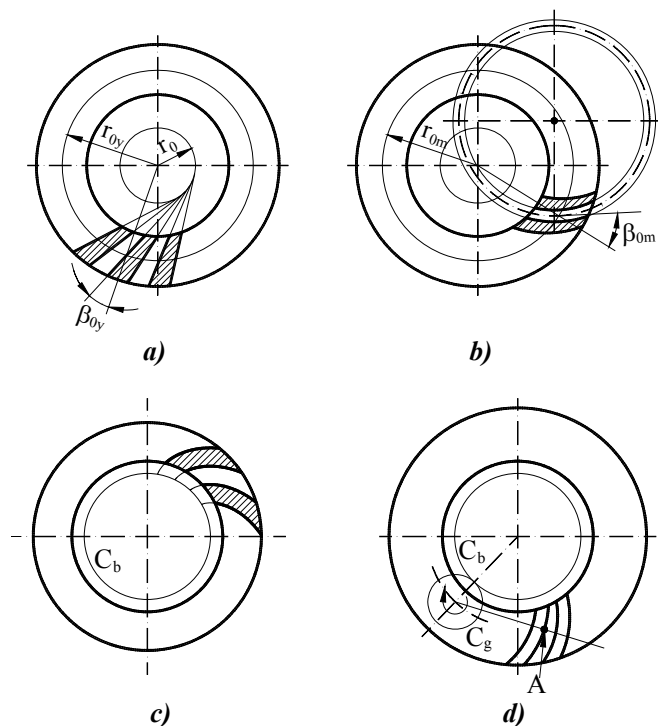


Fig. 4.49

4.1.6. Angrenaje melcate

Angrenajele melcate sunt angrenaje încrucișate, cu unghiul dintre axe $\Sigma = 90^\circ$, formate din două elemente dințate numite **melc** și **roată melcată**.

Melcul este un element dințat cu flancuri elicoidale și cu un număr mic de dinți (1 - 4), constituind elementul de referință pentru roata melcată. El are aspectul unui șurub astfel că numărul de dinți se mai numește număr de spire sau de începuturi, ca în cazul șuruburilor. Melcul poate fi interpretat și ca o roată dințată cilindrică cu dinți înclinați. Melcul poate fi **cilindric**, dacă suprafețele de cap și de picior sunt cilindrice, sau **globoidal** - dacă sunt globoidale.

Elementele geometrice ale melcului de referință cilindric (Fig.4.50) se definesc în raport cu cilindrul de referință. Linia de referință a flancului este o elice de referință. Definierea geometrică a melcului se face în secțiunea axială, iar **modulul axial** m_x , este standardizat. În această secțiune grosimea dintelui pe generatoarea cilindrului de referință este egală cu lățimea golului, iar parametrii danturii p_0 , h_{a0} , h_{f0} , c_0 se exprimă în funcție de modulul axial (m_x) la fel ca în cazul cremalierii de referință cu dinți drepecți. Diametrul de referință d_0 se exprimă prin relația

$$d_0 = q \cdot m_x$$

în care q se numește **coeficient diametral** și are valori întregi, standardizate în funcție de valoarea modulului axial m_x . Unghiul de înclinare al dintelui pe cilindrul de referință β_0 se calculează ca la roțile cilindrice cu dinți înclinați (Fig.4.51)

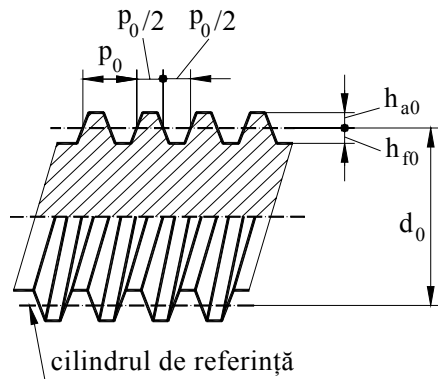


Fig. 4.50

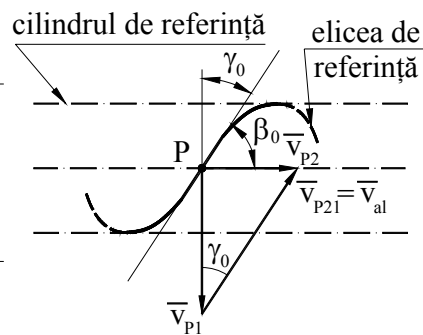


Fig. 4.51

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\pi \cdot d_0}{p_z} = \frac{\pi \cdot q \cdot m_x}{p_0 \cdot z_1} = \frac{q}{z_1} \quad (4.138)$$

în care p_z este pasul elicei de referință iar z_1 este numărul de încheputuri al melcului. Se observă că unghiul β_0 este determinat dacă se cunosc parametrii q și z_1 . Uneori, în locul unghiului β_0 se folosește unghiul $\gamma_0 = \pi/2 - \beta_0$, format de elicea de referință cu un plan perpendicular pe axa melcului (Fig.4.51). Forma flancului și, deci, a profilului axial depinde de tipul melcului care, la rândul său, este legat de procedeul de prelucrare. Melcii se prelucerează prin procedee specifice șuruburilor: semifabricatul execută o mișcare de rotație, iar scula - o mișcare de translație paralelă cu axa de rotație. În felul acesta se obține o suprafață elicoidală având pasul egal cu deplasarea sculei la o rotație a semifabricatului. Geometria melcului depinde de tipul sculei (cuțit sau freză) și de așezarea ei în procesul de prelucrare. Astfel, de exemplu, dacă se folosește un cuțit cu muchiile așchietoare rectilinii poziționate într-un plan axial, se obține un melc de tip ZA (arhimedic) având profilul axial rectiliniu și profilul frontal de forma spiralei lui Arhimede.

Roata melcată se definește din condiția de angrenare cu melcul de referință. Prelucrarea ei se face cu o sculă (freză melc) care are muchiile așchietoare pe o suprafață identică cu flancul melcului de referință conjugat. Ca urmare, flancurile roții și ale melcului sunt suprafețe de înfășurare reciprocă, având contact liniar. În Fig.4.52 este reprezentat angrenajul melcat cilindric în două secțiuni: o secțiune care conține axa melcului și este perpendiculară pe axa roții melcate (axială pentru melc și frontală mediană pentru roată) și altă

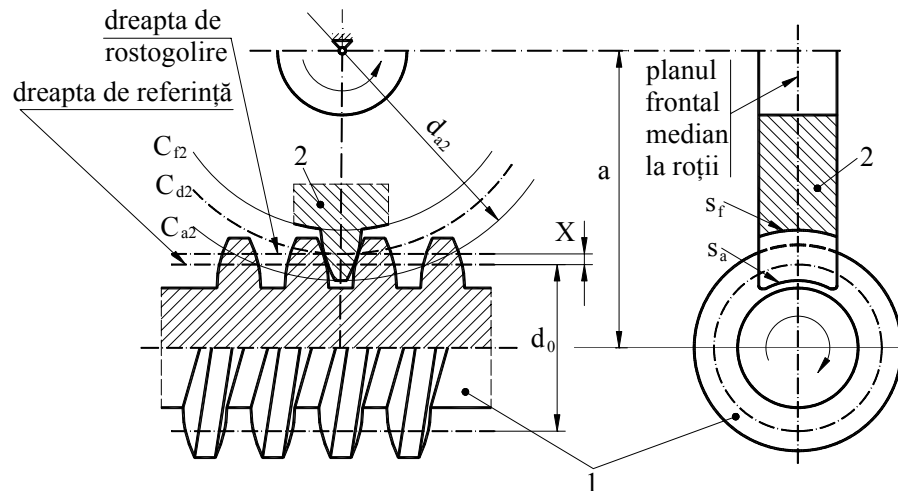


Fig. 4.52

secțiune, care conține axa roții și este perpendiculară pe axa melcului (axială pentru roată și frontală pentru melc). Pentru a majora lungimea liniilor de contact dintre flancuri, suprafețele de cap și de picior ale roții - notate s_a și s_f se construiesc sub formă globoidală (sunt generate de arce de cerc care se rotesc în jurul axei roții). Angrenarea dintre melcul de referință și roata melcată poate fi concepută, în secțiunea frontală medie a roții, ca o angrenare cremalieră - roată dințată cilindrică. Această interpretare pornește de la observația că, odată cu rotația melcului, profilul său axial se deplasează paralel cu axa de rotație. În consecință, parametri geometrici ai roții, în această secțiune, se determină în același mod ca în cazul definirii roții dințate cilindrice cu dinți drepecți cu ajutorul cremalierii de referință.

Mișcarea relativă dintre elementele angrenajului convențional roată dințată - cremalieră este determinată de rostogolirea cercului convențional de divizare al roții C_{d_2} peste dreapta convențională de rostogolire a cremalierii. Distanța dintre dreapta de rostogolire a cremalierii și generatoarea cilindrului de referință a melcului este deplasarea danturii $X = x \cdot m_x$. Trebuie remarcat că numai roata poate avea dantură deplasată, deoarece melcul este element de referință. Distanța dintre axe, atât la definirea roții, cât și la funcționare, este

$$a_0 = \frac{d_0}{2} + \frac{d_2}{2} + X = \left(\frac{q}{2} + \frac{z_2}{2} + x \right) m_x \quad (4.139)$$

în care d_2 este diametrul de divizare al roții.

Raportul de transmitere al angrenajului melcat

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$$

are valori mari în raport cu alte angrenaje deoarece numărul de începuturi ale melcului (z_1) este mic.

Studiul fenomenelor de interferență, subtăiere și ascuțire a dinților se face pe baza asimilării cu un angrenaj cremalieră - roată cilindrică. Deși acest angrenaj nu este, în general, evolventic, relațiile deduse la angrenajele evolventice se pot folosi cu aproximație. Gradul de acoperire al angrenajului melcat este mai mare decât al angrenajului convențional cu cremalieră datorită contactului pe lățimea roții melcate.

Angrenajele melcate au, în general, viteze mari de alunecare între flancuri. Pentru a evalua viteza de alunecare se consideră un punct P situat pe elicea de referință, în secțiunea frontală medie a roții (Fig.4.51). Se scrie ecuația de viteze

$$\bar{v}_{p2} = \bar{v}_{p1} + \bar{v}_{p21},$$

în care $\bar{v}_{P21} = \bar{v}_{al}$ este tangentă la elicea de referință, iar \bar{v}_{P1} și \bar{v}_{P2} sunt perpendiculare pe razele punctului P corespunzătoare melcului și roții melcate. Din triunghiul vitezelor (Fig.4.51) rezultă

$$v_{al} = \frac{v_{P1}}{\cos \gamma_0} = \frac{\omega_1 \cdot d_0}{2 \cos \gamma_0} \quad (4.140)$$

Pentru calculul randamentului se poate folosi, cu apoximație, formula de la mecanismele cu șurub, care, cu notațiile angrenajului melcat, este

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg}(\gamma_0 + \varphi)}, \quad (4.141)$$

în care φ este unghiul de frecare dintre flancuri. Această formulă nu ține seama de pierderile de putere din cuplele de rotație, astfel că, randamentul real este mai mic decât cel calculat cu relația (4.141).

4.1.7. Angrenaje cilindrice cu axe încrucișate (elicoidale)

Angrenajul cilindric cu axe încrucișate este format din două roți cilindrice cu dinți înclinați definite în același fel ca și roțile care formează angrenajele paralele. Pentru a înțelege funcționarea angrenajului să considerăm două cremaliere de referință, cu unghiurile de înclinarea ale dinților $\beta_{01} \neq \beta_{02}$, așezate astfel ca dinții uneia să pătrundă în golurile dintre dinții celeilalte. Astfel, flancurile se suprapun. Desigur, ambele cremaliere trebuie să aibă același modul normal. Se presupune că fiecare cremaliere angrenează, imaginar, cu o roată cu dinți înclinați. În Fig.4.53 sunt reprezentate cele două angrenaje prin suprafețele lor de rostogolire. Dacă se imprimă roții 1 o mișcare de rotație, aceasta se transmite prin intermediul cremalierei 1' - 2', care formează un mecanism de familia $f = 4$ (Fig.4.54), la roata 2. Contactul dintre flancurile

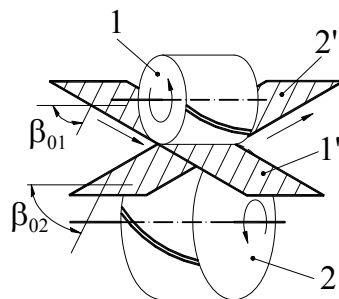


Fig. 4.53

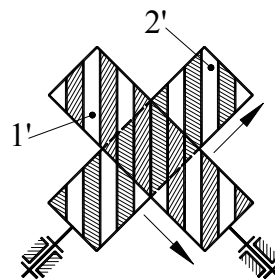


Fig. 4.54

fiecărui angrenaj roată dințată - cremalieră se realizează după o dreaptă. Cele două drepte, conținute în planul care formează flancul comun al cremalierelor se intersectează într-un punct. Rezultă că în acest punct sunt tangente și flancurile roților. Deci, suprimând cremalierile, mișcarea se poate transmite și în mod direct între cele două roți, prin intermediul flancurilor dinților care formează un contact punctual. Trebuie remarcat că, deși transmiterea mișcării se realizează cu raport de transmitere constant, flancurile dinților nu sunt suprafețe de înfășurare reciprocă.

Elementele geometrice ale angrenajului sunt distanța dintre axe a , definită ca lungimea perpendicularei comune pe cele două axe și unghiul dintre axe, Σ .

Angrenajul elicoidal se utilizează cel mai frecvent ca angrenaj zero ($x_1 = x_2 = 0$) și, uneori, ca angrenaj zero deplasat ($x_1 - x_2 = 0$). În ambele cazuri distanța dintre axe este suma razelor de divizare,

$$a = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = m_n \left(\frac{z_1}{\cos \beta_{01}} + \frac{z_2}{\cos \beta_{02}} \right). \quad (4.142)$$

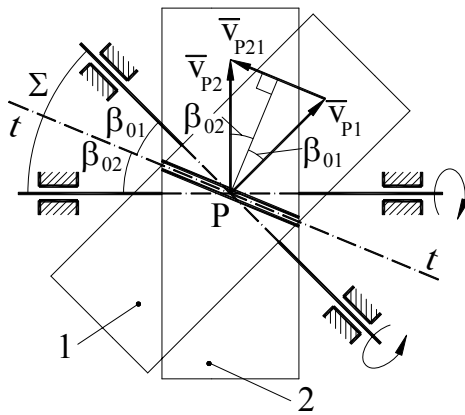


Fig. 4.55

Se consideră cei doi cilindri de divizare tangenți, proiectați pe un plan paralel cu axele roților (Fig.4.55), în care apar unghiurile Σ , β_{01} și β_{02} în adevărata mărime, de unde rezultă

$$\Sigma = \beta_{01} + \beta_{02}.$$

În aplicațiile practice axele sunt, de regulă, perpendiculare,

$$\Sigma = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă exprimăm numerele de dinți în funcție de diametrele de divizare (4.107), raportul de transmitere se poate scrie astfel

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2 \cdot \cos \beta_{02}}{d_1 \cdot \cos \beta_{01}}. \quad (4.143)$$

În cazul $\Sigma = \frac{\pi}{2}$ formula devine

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} \operatorname{tg} \beta_{01}.$$

Pe baza ecuației de viteze pentru un punct de contact P,

$$\bar{v}_{P2} = \bar{v}_{P1} + \bar{v}_{P21},$$

se construiește triunghiul vitezelor (Fig.4.55) în care \bar{v}_{P1} și \bar{v}_{P2} sunt perpendiculare pe axele roților, iar $\bar{v}_{P21} = \bar{v}_{al}$ este paralelă cu direcția comună a dinților, tt. Din acest triunghi rezultă

$$v_{al} = v_{P1} \cdot \sin \beta_{01} + v_{P2} \cdot \sin \beta_{02} = \frac{d_1}{2} \omega_1 \cdot \sin \beta_{01} + \frac{d_2}{2} \omega_2 \cdot \sin \beta_{02}. \quad (4.144)$$

4.1.8. Angrenaje hipoide

Așa cum am arătat la clasificarea generală, angrenajele hipoide au axele încrucișate și sunt formate din roți conice. Formarea angrenajului hipoid, legată de definirea și prelucrarea roților componente, se poate face în două moduri.

În primul caz se consideră două roți plane de referință cu axele paralele, așezate în așa fel ca dinții uneia să pătrundă în golurile dintre dinții celeilalte (Fig.4.56). Se presupune că fiecare roată plană definește o roată conică cu care poate angrena. rotația roții 1 se transmite, prin angrenajele imaginare 1 - 1', 1' - 2', 2' - 2 la roata 2. Trebuie precizat că angrenajul roților plane 2 - 2' este un fel de angrenaj cu axe paralele, astfel încât, liniile flancurilor trebuie să fie profile de înfășurare reciprocă. Dintre roțile plane cu dinți curbi numai cele cu dantură paloidă, care au liniile flancurilor în evolventă, satisfac această condiție. În timp ce angrenajele 1 - 1' și 2 - 2' au contact liniar, flancurile roților 1 și 2 formează

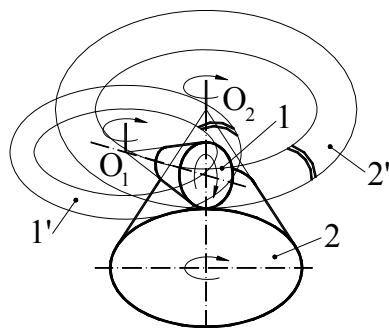


Fig. 4.56

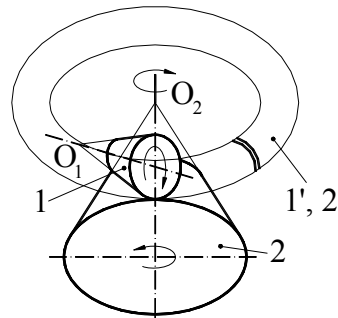


Fig. 4.58



Fig. 4.57

un contact punctual. Astfel, mișcarea se poate transmite și în mod direct, prin angrenarea celor două roți paloide.

Un alt mod de formare al angrenajului hipoid presupune definirea roților componente cu ajutorul unor roți

plane având dinții întrepătrunși, cu flancuri congruente (Fig.4.57). Angrenajele de definire pot fi ambele încrucișate sau unul concurent și unul încrucișat ca în Fig.4.58). Dantura roților poate fi înclinată sau curbă.

Raportul de transmitere al angrenajului hipoid se exprimă în mod similar cu cel al angrenajului elicoidal

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{m2} \cdot \cos \beta_{02}}{d_{m1} \cdot \cos \beta_{01}}, \quad (4.145)$$

în care d_{m1} și d_{m2} sunt diametrele de divizare într-o secțiune frontală medie, iar β_{01} și β_{02} , unghiurile de înclinare ale flancurilor în aceeași secțiune.

4.1.9. Precizia angrenajelor

4.1.9.1. Problema jocului dintre flancuri

Precizia angrenajelor beneficiază de un înalt grad de standardizare ceea ce simplifică problema stabilirii valorilor indicilor de precizie. Indicii de precizie sunt abaterile pentru diverși parametri care, în ansamblul lor, caracterizează precizia roților și a angrenajului.

În cazul angrenajelor cilindrice există 12 trepte de precizie și trei criterii de precizie: criteriul de **precizie cinematică**, criteriul de **funcționare lină** și criteriul de **contact dintre dinți** (STAS 6273-81). Fiecare criteriu este asociat cu un complex de indici de precizie de natură să asigure cerințele unei funcționări corecte după criteriul respectiv. Alegerea treptei de precizie și a criteriului de precizie se face în funcție de destinația angrenajului și de condițiile de funcționare specifice. Cunoscând treapta și criteriul de precizie, se determină, din tabele, toleranțele pentru indicii de precizie care interesează. În felul acesta se elimină necesitatea determinării prin calcul a preciziei funcționale după procedeul utilizat la alte tipuri de mecanisme.

O problemă importantă care intervine la proiectarea unui angrenaj este cea a jocului dintre flancuri. În calculul geometric al angrenajului teoretic, jocul dintre flancuri se consideră nul. Această ipoteză nu poate fi admisă practic, deoarece angrenajul real prezintă abateri geometrice și dimensionale, precum și deformații termice, care pot conduce la blocare. Din această cauză trebuie să se asigure un joc minim garantat. Această cerință se poate rezolva în două moduri: prin modificare deplasărilor de profil și prin mărirea distanței dintre axe.

■ Modificarea deplasărilor de profil

Se consideră un angrenaj cilindric paralel cu dinți dreți fără joc între flancuri (Fig.4.59). Se efectuează o modificare a coeficientului de deplasare a

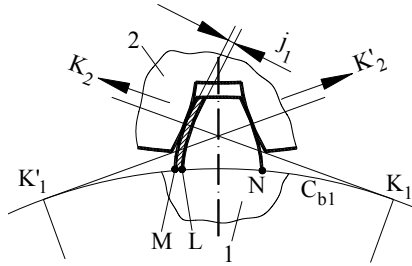


Fig. 4.59

roții 1, de la valoarea x_1 la valoarea $(x_1 + x_{s1})$. Ca urmare, profilul dintelui se modifică, la rândul său. Dacă inițial profilul este mărginit de evolventele care se sprijină pe cercul de bază în M și N, după modificare el este format de evolventele care încep în punctele L și N. În felul acesta se obține jocul între flancuri j_1 măsurat pe dreapta de angrenare K_1K_2 . Procesul de generare a evolventelor din M și L, prin rostogolirea

dreptei de angrenare peste cercul de bază C_{b1} , conduce la egalitatea

$$j_1 = \widehat{ML},$$

în care \widehat{ML} este

$$\widehat{ML} = \widehat{MN} - \widehat{LN} = s_{b1} - s_{b1x}.$$

Arcele de bază ale dintelui s_{b1} și s_{b1x} se exprimă după formula (4.35)

cu $\alpha_y = \alpha_b = 0$,

$$s_{b1} = m \cdot z_1 \cos \alpha_0 \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1} + \operatorname{inv} \alpha_0 \right)$$

$$s_{b1x} = m \cdot z_1 \cos \alpha_0 \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2(x_1 + x_{s1}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1} + \operatorname{inv} \alpha_0 \right)$$

și se calculează j_1 ,

$$j_1 = s_{b1} - s_{b1x} = -2m \cdot x_{s1} \sin \alpha_0. \quad (4.146)$$

În ipoteza că se face o modificare similară pentru roata 2, jocurile j_1 și j_2 se cumulează obținând

$$j = j_1 + j_2 = -2m(x_{s1} + x_{s2}) \sin \alpha_0. \quad (4.147)$$

Dacă jocul j este prestabilit, se calculează $(x_{s1} + x_{s2})$

$$x_{s1} + x_{s2} = -\frac{j}{2m \cdot \sin \alpha_0}. \quad (4.148)$$

Se observă că suma corecțiilor coeficienților de deplasare trebuie să fie negativă. Practic, se operează corecții negative și egale pentru cele două roți.

■ Majorarea distanței dintre axe

Ca și în cazul precedent, se consideră, inițial, un angrenaj fără joc între flancuri caracterizat prin distanța dintre axe a , care se majorează la valoarea a_j . Prin această operație se obține un angrenaj cu joc între flancuri (Fig.4.60), care are unghiul de angrenare α_{wj} diferit de cel inițial, rezultând din formula (4.39),

$$\cos \alpha_{wj} = \frac{a_0}{a_j} \cos \alpha_0.$$

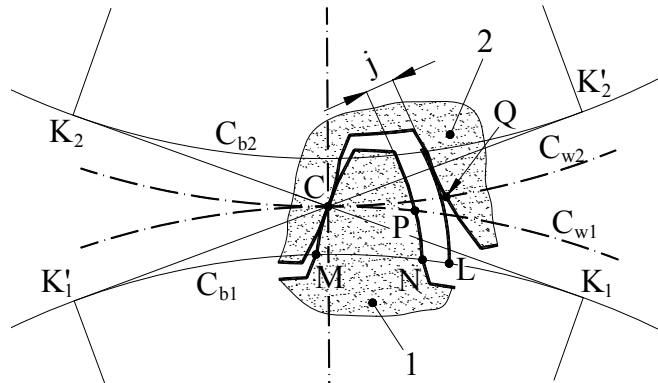


Fig. 4.60

În acest angrenaj arcul de divizare al dintelui roții 1, $s_{w1j} = \widehat{CP}$, este mai mic decât arcul de divizare al golului roții 2, $e_{w2j} = \widehat{CQ}$. Diferența ($e_{w2j} - s_{w1j}$) este arcul descris de un punct de pe cercul de rosogolire al roții 1, pentru a străbate jocul, iar unghiul corespunzător de rotație al roții este

$$\varphi_j = \frac{2(e_{w2j} - s_{w1j})}{d_{w1j}}.$$

Dacă se menține roata 2 fixă și se rotește roata 1 astfel încât profilul care începe în N străbate jocul ajungând tangent la profilul roții 2, unghiul de rotație se poate scrie

$$\varphi_j = \frac{2\widehat{NL}}{d_{b1}} = \frac{2\bar{j}}{d_{b1}}.$$

Egalând cele două expresii ale unghiului φ_j se obține

$$j = \frac{d_{bl}(e_{w2j} - s_{w1j})}{d_{w1j}}. \quad (4.149)$$

Parametrii care intervin în această relație au expresiile

$$\begin{aligned} d_{bl} &= m \cdot z_1 \cos \alpha_0 \\ d_{w1j} &= m \cdot z_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wj}} \\ e_{w2j} &= m \cdot z_2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wj}} \left(\frac{\pi}{2z_2} - \frac{2x_2 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_2} - \operatorname{inv} \alpha_0 + \operatorname{inv} \alpha_{wj} \right) \\ s_{w1j} &= m \cdot z_1 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wj}} \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_{wj} \right). \end{aligned}$$

Înlocuind în formula (4.149) se ajunge la relația

$$j = m \cdot \cos \alpha_0 ((z_1 + z_2)(\operatorname{inv} \alpha_{wj} - \operatorname{inv} \alpha_0) - 2(x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha_0), \quad (2.150)$$

din care se poate determina unghiul de angrenare α_{wj} prin intermediul funcției $\operatorname{inv} \alpha_{wj}$,

$$\operatorname{inv} \alpha_{wj} = \operatorname{inv} \alpha_0 + \frac{2(x_1 + x_2)}{(z_1 + z_2)} \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{j}{(z_1 + z_2) \cdot m \cdot \cos \alpha_0}. \quad (4.151)$$

Cunoscând unghiul de angrenare, se poate calcula distanța dintre axe modificată

$$a_j = a_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wj}}. \quad (4.152)$$

4.1.9.2. Bazele geometrice ale măsurării danturii

În cadrul operației de control a roților dințate unii parametri nu se pot măsura în mod direct datorită specificului lor și al aparatelor de măsură. Ca urmare, se adoptă, în vederea măsurării, anumite cote care nu fac parte dintre parametri principali ai angrenajului, dar abaterile lor reflectă gradul de precizie al acestuia. Pentru a efectua această operație este nevoie să se calculeze valorile nominale ale cotelor de măsurare.

■ Coarda de divizare și coarda constantă

Arcul de divizare al dintelui este un parametru important pentru aprecierea preciziei roții. El nu se poate măsura direct, fiind vorba de un arc, și

atunci se măsoară coarda de divizare. Valoarea ei s_{cd} , precum și distanța de la coarda de divizare la vârful dintelui, h_{cd} , care interesează în operația de măsurare, se determină pe baza schemei din Fig.4.61,

$$s_{cd} = d \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = d \cdot \sin \left(\frac{s}{d} \right) = m \cdot z \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2z} + 2 \frac{x}{z} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

$$h_{cd} = h_a + \frac{d}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{s}{d} \right) \right) = h_a + \frac{m \cdot z}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2z} + 2 \frac{x}{z} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \right) \quad (4.153)$$

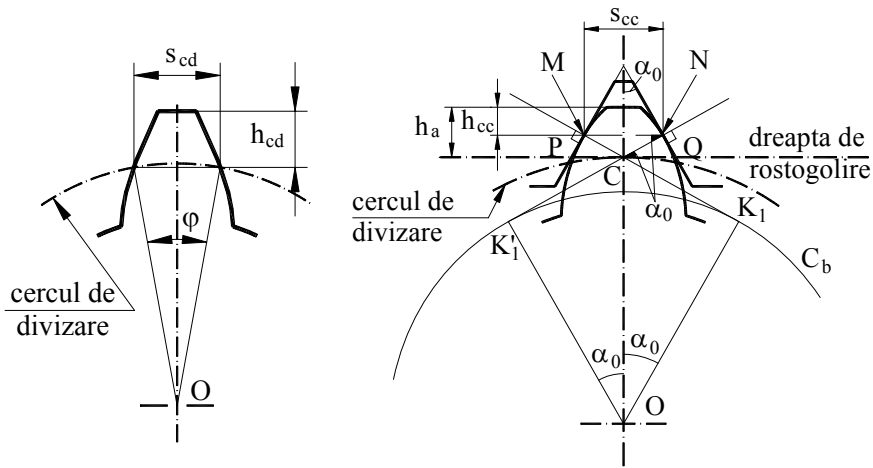


Fig. 4.61

Fig. 4.62

Un alt parametru de control este coarda constantă, care se măsoară între punctele de tangență ale profilelor dintelui cu profilele golului cremalierii de referință, $s_{cc} = MN$ (Fig.4.62). Dreptele K_1M și K'_1N , perpendiculare pe profilele cremalierii în punctele de contact și tangente la cercul de bază al roții, sunt desigur dreptele de angrenare, iar intersecția lor cu axa dintelui este punctul de rostogolire C. Prin acest punct trec cercul de divizare al roții și dreapta de rostogolire a cremalierii. Cu aceste precizări, urmărind Fig.4.62, se poate scrie

$$s_{cc} = 2MC \cos \alpha_0 = 2PC \cos^2 \alpha_0 = PQ \cos^2 \alpha_0.$$

Segmentul PQ este lățimea de rostogolire a golului cremalierii e_{w0} (Fig.4.16), astfel încât rezultă

$$s_{cc} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \cos^2 \alpha_0. \quad (4.154)$$

Segmentul h_{cc} , care precizează poziția coardei constante, este

$$h_{cc} = h_a - \frac{e_{w0}}{2} \cos \alpha_0 \sin \alpha_0. \quad (4.155)$$

Așa cum rezultă din (4.154), coarda constantă nu depinde de numărul de dinți ai roții ci numai de modul și de coeficientul de deplasare, proprietate care explică denumirea.

■ Cota peste dinți

Cota peste dinți este segmentul delimitat de două profile antiomoloage, pe normala lor comună. Această cotă se poate măsura cu ușurință, folosind instrumente cu fălci plane, paralele (șublere, micrometre, etc.) (Fig.4.63). Numărul de dinți (n) peste care se face măsurătoarea, se determină astfel ca

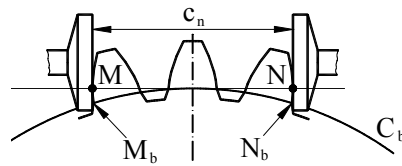


Fig. 4.63

limitele cotei să cadă pe profilele de cap, și este indicat în tabele, în funcție de numărul de dinți [35]. Normala comună MN este tangentă la cercul de bază, fiind egală cu arcul $\widehat{M_b N_b}$ peste care se rulează pentru generarea profilelor. În aceste condiții, cota peste dinți este

$$c_n = (n-1)p_b + s_b,$$

$$c_n = m \cos \alpha_0 \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha_0 + z \cdot \operatorname{inv} \alpha_0 \right). \quad (4.156)$$

■ Cota peste role

Această cotă este distanța dintre generatoarele unor role de diametru cunoscut d_r , dispuse în goluri diametral opuse ale roților (Fig.4.65a, b). Pentru determinarea cotei c_r , se calculează preliminar diametrul cercului pe care se află centrul rolei când este tangentă cu profilele golului (Fig.4.64). Pentru acesta, se consideră o evolventă echidistantă cu profilul NR, care trece prin centrul rolei, notată LQ. Pe baza schemei din Fig.4.64 se determină unghiul α_Q , prin intermediul funcției involuță

$$\operatorname{inv} \alpha_Q = \theta_Q = \frac{2LP}{d_b} = \frac{2(LN - PN)}{d_b} = \frac{2\left(\frac{d_r}{2} - \frac{s_b}{2}\right)}{d_b} = \frac{d_r - s_b}{d_b} =$$

$$= \frac{d_r - s_b}{d_b} = \frac{d_r - \left(\frac{\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \alpha_0 - z \cdot \operatorname{inv} \alpha_0 \right) m \cos \alpha_0}{mz \cos \alpha_0} \quad (4.157)$$

Cunoscând α_Q , se determină d_Q din triunghiul OQK

$$d_Q = \frac{r_b}{\cos \alpha_Q} = mz \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_Q} \quad (4.158)$$

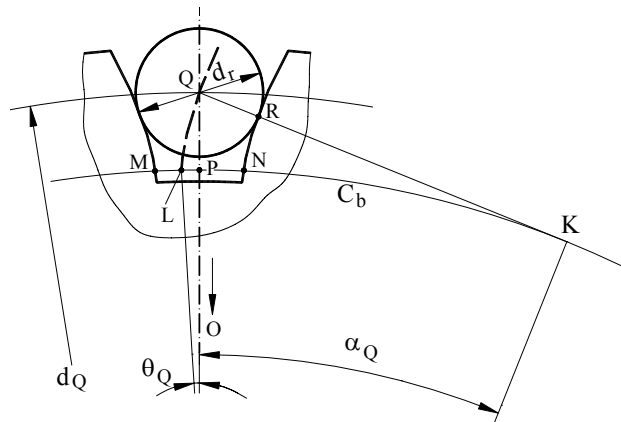


Fig. 4.64

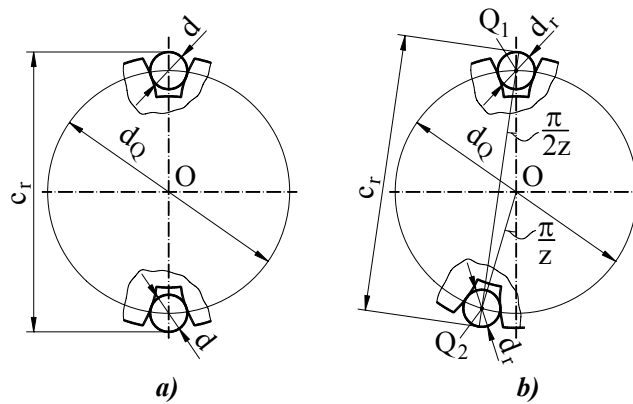


Fig. 4.65

În cazul în care numărul de dinți este par, rolele se așează ca în Fig.4.65a, iar cota c_r este

$$c_r = d_Q + d_r \quad (5.159)$$

Dacă numărul de dinți este impar, intervine situația din Fig.4.65b, iar cota c_r este

$$c_r = Q_1 Q_2 + d_r = d_Q \cos \frac{\pi}{2Z} + d_r. \quad (4.160)$$

4.2. MECANISME COMPLEXE CU ROȚI DINȚATE

4.2.1. Mecanisme complexe cu axe fixe

Mecanismele complexe cu roți dințate cu axe fixe se formează prin legarea în serie a mecanismelor elementare, astfel încât elementul condus al unui angrenaj component este cuplat (solidarizat) cu elementul conducător al angrenajului următor. Mecanismele obținute în felul acesta se mai numesc **trenuri de angrenaje**.

4.2.1.1. Analiza cinematică

Raportul de transmitere al unui mecanism complex se definește cu ajutorul expresiilor^(*)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_n}, \quad (4.161)$$

$$\tilde{i}_{12} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_n}. \quad (4.162)$$

în care cu 1 se notează elementul conducător și cu n – elementul condus.

Expresia (4.161) nu ține seama de sensurile de rotație ale elementelor 1 și n , și are aplicabilitate generală. Expresia (4.162) se aplică numai dacă axele de rotație ale elementelor 1 și n sunt paralele, deci sensurile de rotație sunt comparabile și pot fi asociate convențional cu semnele vitezelor unghiulare. În mod evident, raportul de transmitere \tilde{i}_{1n} este pozitiv când roțile 1 și n se rotesc în același sens și negativ când se rotesc în sensuri opuse.

Raportul de transmitere i_{1n} al unui mecanism complex, se calculează ca produsul rapoartelor de transmitere ale mecanismelor elementare componente, considerate scalari fără semn.

Pentru a verifica această regulă, se consideră un tren de roți dințate format din angrenajele 1-2, 2'-3, 3'-4 ... (n-1)'-n, în care roțile 2 și 2', 3 și

(*) În cadrul acestui capitol, vitezele unghiulare, raportul de transmitere și momentele se notează ω , i_{1n} , M , dacă sunt scalari fără semn, și $\tilde{\omega}$, \tilde{i}_{1n} , \tilde{M} , dacă sunt scalari cu semn.

3',... sunt cuplate, formând un singur element, (Fig.4.66). Făcând produsul rapoartelor de transmitere parțiale, exprimate prin formulele de definiție, se obține

$$i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{1n}.$$

Raportul de transmitere al fiecărui angrenaj component, (k-1)'-k, se calculează cu formula (4.9),

$$i_{k-1,k} = \frac{z_k}{z_{(k-1)'}} \quad (4.163)$$

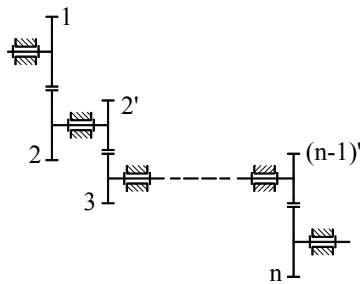


Fig. 4.66

în care z_k și $z_{(k-1)'}$ reprezintă numerele de dinți ale roților. În afară de această formulă generală, valabilă pentru toate tipurile de angrenaje, se pot folosi și formule specifice, exprimate în funcție de alți parametri constructivi.

Raportul de transmitere \tilde{i}_{1n} se calculează în mod diferit în funcție de structura mecanismului complex. Dacă acesta este format numai din angrenaje paralele, se aplică următoarea regulă.

Raportul de transmitere \tilde{i}_{1n} este egal cu produsul rapoartelor parțiale, luate fiecare, cu semnul său. Raportul de transmitere parțial al angrenajului (k-1)'-k, este

$$\tilde{i}_{k-1,k} = \pm \frac{z_k}{z_{(k-1)'}} \quad (4.164)$$

în care semnul (-) corespunde angrenajelor exterioare, iar (+), celor interioare. Pentru exemplificare, raportul de transmitere al mecanismului din Fig.4.67 este

$$\tilde{i}_{14} = \tilde{i}_{12} \cdot \tilde{i}_{23} \cdot \tilde{i}_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(+\frac{z_3}{z_2'} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3'} \right) = \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2' z_3'}.$$

Dacă mecanismul complex este format din angrenaje de tipuri diferite (paralele, concurente, încrucișate), dar elementele 1 și n au axele paralele, raportul de transmitere \tilde{i}_{1n} se determină în două etape. În prima etapă se determină raportul i_{1n} , după regula indicată anterior, iar în etapa a doua se stabilește semnul, prin analiza transmiterii mișcării din aproape în aproape. Se consideră, pentru exemplificare, mecanismul din Fig.4.68. Raportul i_{14} , este

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2' Z_3'}$$

Pentru stabilirea semnului, se consideră un sens de rotație pentru roata 1 (real sau arbitrar), care se pune în evidență pe desen, prin viteza punctului de pe periferia roții, cel mai apropiat de observator. Imaginând transmiterea mișcării în angrenajul 1-2, se stabilește sensul de rotație pentru roata 2. Procedând similar pentru angrenajele 2'-3 și 3'-4, se stabilește sensul de rotație pentru roata 4. Așa cum se observă (Fig.4.68), roțile 1 și 4 se rotesc în sensuri diferite, deci raportul de transmitere global \tilde{i}_{14} este negativ și are expresia

$$\tilde{i}_{14} = -i_{14} = -\frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2' Z_3'}$$

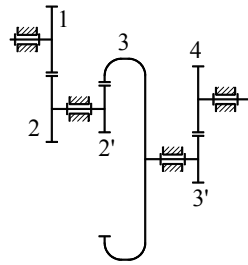


Fig. 4.67

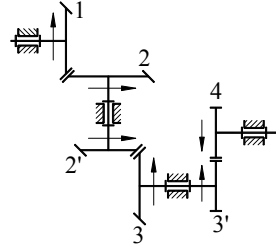


Fig. 4.68

4.2.1.2. Randamentul, transmiterea momentelor

Randamentul unui mecanism complex se definește conform cu (2.107), ca fiind raportul dintre puterea utilă $P_u = P_n$ și puterea motoare $P_m = P_1$,

$$\eta = \frac{P_n}{P_1} \quad (4.165)$$

În cazul legării în serie, randamentul mecanismului complex se determină ca produsul randamentelor mecanismelor componente.

Pentru verificare, se consideră mecanismul din Fig. 4.66, și se face produsul randamentelor parțiale:

$$\eta_{12} \cdot \eta_{23} \cdot \dots \cdot \eta_{n-1,n} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \dots \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_n}{P_1} = \eta$$

Valorile randamentelor parțiale se încadrează, în funcție de tipul angrenajului, între limitele indicate în Tab. 4.1. Aceste valori au în vedere numai pierderile de putere în angrenare, astfel încât valorile globale, care țin seama și de pierderile din lagăre, sunt ceva mai mici.

Relația dintre momentul rezistent (M_n, \tilde{M}_n) și momentul motor (M_1, \tilde{M}_1) , se stabilește având în vedere că

$$P_1 = M_1 \omega_1 = \tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1$$

$$P_n = M_n \omega_n = -\tilde{M}_n \tilde{\omega}_n .$$

Tabelul 4.1

Tipul angrenajului		Randamentul
paralel	cilindric cu dinți drepți	0,98 – 0,995
	cilindric cu dinți înclinați	
	roată cilindrică - cremalieră	
	cilindric interior	
concurent	conic cu dinți drepți	0,98 – 0,99
	conic cu dinți înclinați	
	conic cu dinți curbi în arc de cerc (zerol)	
încrucișat	melcat	0,3 – 0,9
	elicoidal	0,7 - 97

Introducând aceste expresii în formula (4.165) se obțin relațiile

$$M_1 = \frac{1}{\eta \cdot i_{1n}} M_n \quad (4.166)$$

$$\tilde{M}_1 = -\frac{1}{\eta \cdot \tilde{i}_{1n}} \tilde{M}_n . \quad (4.167)$$

Relația (4.166), care nu ia în considerare sensurile momentelor, are aplicabilitate generală, pe când relația (4.167) se aplică numai când elementul 1 și elementul 2 au axe paralele.

4.2.2. Mecanisme planetare

4.2.2.1. Structura mecanismelor planetare

Mecanismele planetare pot fi **simple** sau **complexe**. Un mecanism planetar simplu, se obține pornind de la un mecanism format din roți dințate cu

axe fixe, dacă elementului fix i se imprimă o mișcare de rotație în jurul axei uneia dintre roți. Această transformare este ilustrată în Fig.4.69, în care sunt reprezentate mecanismul cu axe fixe inițial (Fig.4.69.a) și mecanismul planetar simplu (Fig.4.69.b). Roata 1, care se rotește în jurul unei axe fixe, se numește **roată centrală** sau **solară**. Celelalte roți 2-2' și 3, care se rotesc în jurul unor axe mobile, se numesc **sateliți**, iar elementul 4(P) inițial fix, care se rotește în jurul unei axe fixe, care coincide cu axa roții centrale, se numește **portsatelit**. În aplicațiile practice se întâlnesc în special mecanismele planetare simple, cu revenire, care conțin două roți centrale coaxiale. Cele mai reprezentative mecanisme de acest fel, sunt cele din Fig.4.70. În aceste mecanisme roțile centrale sunt notate 1 și 3, sateliții, 2-2', iar portsatelitul, P. Roțile centrale și portsatelitul poartă denumirea de **elemente de bază**.

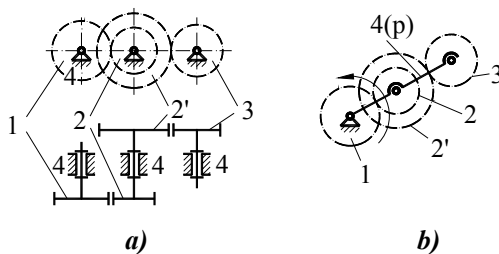


Fig. 4.69

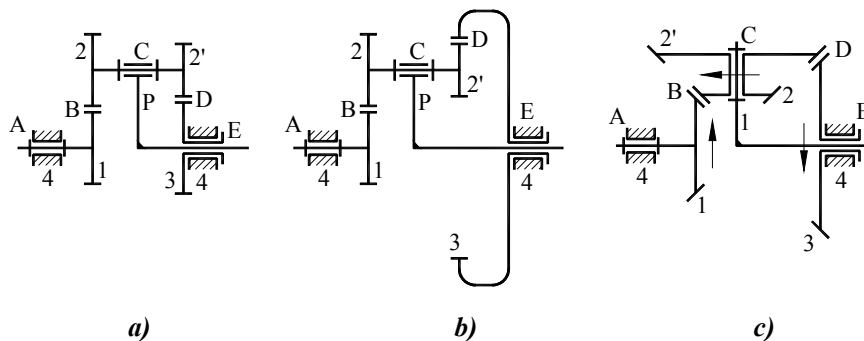


Fig. 4.70

Mecanismele planetare simple pot fi **diferențiale**, atunci când ambele roți centrale sunt mobile (Fig.4.70.a, b, c) sau **planetare propriuzise**, când una dintre roțile centrale este fixă. În Fig.4.71 este reprezentat un mecanism planetar propriuzis, obținut prin fixarea roții centrale 3 a mecanismului diferențial din Fig.4.70.b. Între cele două categorii de mecanisme se înregistrează și o diferență funcțională; mecanismele diferențiale au gradul de mobilitate $M=2$ iar

planetarele propriuzise $M = 1$. Mecanismele din Fig.4.70.a și 4.70.b sunt plane, iar cel din Fig. 4.70.c este sferic, astfel că formula de calcul a gradului de mobilitate este

$$M = 3(n - 1) - 2C_5 - C_4.$$

Pentru mecanismele diferențiale (Fig.4.70.a, b, c),

$$n = 5(1, 2-2', 3, 4, P)$$

$$C_5 = 4(A, C, E\text{-dublă})$$

$$C_4 = 2(B, D),$$

rezultând $M = 2$.

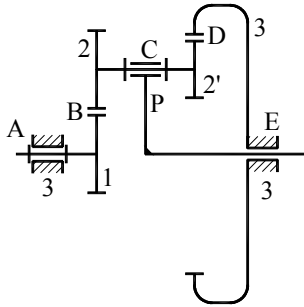


Fig. 4.71

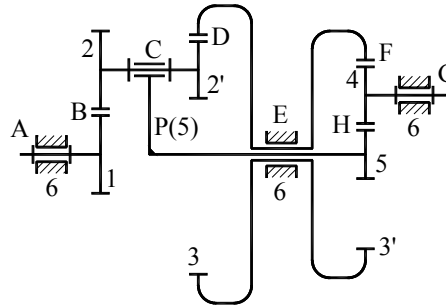


Fig. 4.72

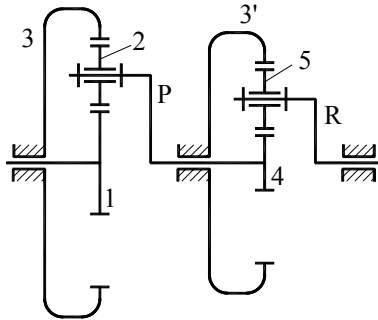


Fig. 4.73

Pentru mecanismele planetare (Fig.4.71),

$$n = 4(1, 2-2', 3, P(4))$$

$$C_5 = 3(A, C, E)$$

$$C_4 = 2(B, D),$$

rezultând $M = 1$.

Dacă între două elemente de bază ale unui mecanism diferențial se interpune un tren de roți dințate cu axe fixe, se obține un diferențial cu închidere, care are gradul de mobilitate $M = 1$. În cazul diferențialului cu închidere din Fig.4.72,

$$\begin{aligned} n &= 6(1, 2, 3, 4, 5(P), 6) \\ C_5 &= 5(A, C, E\text{-dublă}, G) \\ C_4 &= 4(B, D, F, H), \end{aligned}$$

rezultând $M = 1$.

Mecanismele planetare complexe se obțin prin legarea în diverse moduri, a unor mecanisme planetare simple. În Fig.4.73 este reprezentat un mecanism planetar complex, obținut prin legarea în serie, a două planetare simple propriuzise.

4.2.2.2. Analiza cinematică

Analiza cinematică a unui mecanism planetar simplu, se bazează pe observația că în ipoteza adoptării portsatelitului ca element de referință, mecanismul planetar se transformă într-un mecanism cu axe fixe. În această ipoteză se poate scrie expresia de definiție a raportului de transmitere \tilde{i}_{13}^P al mecanismului cu axe fixe, format din angrenajele 1-2, 2'-3 (Fig.4.70),

$$\tilde{i}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_{1P}}{\tilde{\omega}_{3P}}$$

în care $\tilde{\omega}_{1P}$ și $\tilde{\omega}_{3P}$ sunt vitezele relative ale roților 1 și 3 față de portsatelit,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1P} &= \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P \\ \tilde{\omega}_{3P} &= \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P. \end{aligned}$$

Introducând aceste relații în expresia raportului de transmitere \tilde{i}_{13}^P , se obține

$$\tilde{i}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P}. \quad (4.168)$$

Relația (4.168), numită formula lui Willis, descrie comportarea cinematică a mecanismului planetar. Pentru a face aplicabilă această formulă, valoarea raportului \tilde{i}_{13}^P trebuie determinată în funcție de tipul angrenajelor și de numerele de dinți ale roților. Astfel, pentru mecanismele din Fig.4.70, \tilde{i}_{13}^P se determină după regulile de la par. 4.2.1.1, așa cum se arată în continuare.

• **mecanismul din Fig. 4.70.a**

$$\tilde{i}_{13}^P = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right) = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

• **mecanismul din Fig. 4.70.b**

$$\tilde{i}_{13}^P = \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \left(\frac{z_3}{z_2'} \right) = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

• **mecanismul din Fig. 4.70.c**

$$\tilde{i}_{13}^P = -i_{13}^P = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

Se observă că formula lui Willis conține vitezele unghiulare ale elementelor de bază $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_3$ și $\tilde{\omega}_p$. Dacă mecanismul este diferențial ($M = 2$), două dintre aceste viteze (corespunzătoare elementelor conducătoare), sunt cunoscute, iar cea de a treia (corespunzătoare elementului condus), se calculează folosind formula lui Willis. Dacă mecanismul este planetar propriuzis ($M = 1$), una dintre viteze (corespunzătoare roții centrale fixe) este zero, una (corespunzătoare elementului conducător) este cunoscută, iar cea de a treia (corespunzătoare elementului condus), se obține din formulă. Mecanismul planetar propriuzis, având un element conducător și un element condus, are un raport de transmitere propriu. Dacă ne referim la mecanismul din Fig.4.71, care are roata centrală 3 – fixă ($\tilde{\omega}_3 = 0$), mișcarea se poate transmite în sensul $1 \rightarrow P$ sau în sensul $P \rightarrow 1$, cu rapoartele de transmitere

$$\tilde{i}_{1P} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_p} \quad \text{sau} \quad \tilde{i}_{P1} = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_1}$$

Aplicând formula lui Willis în condițiile date, rezultă

$$\tilde{i}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p}{-\tilde{\omega}_p},$$

$$\tilde{i}_{1P} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_p} = 1 - \tilde{i}_{13}^P, \quad (4.169)$$

$$\tilde{i}_{P1} = \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_1} = \frac{1}{1 - \tilde{i}_{13}^P}. \quad (4.170)$$

În cazul mecanismului diferențial cu închidere, din Fig.4.72, se scrie formula lui Willis pentru mecanismul diferențial, și expresia de definiție a raportului de transmitere pentru mecanismul cu axe fixe, având în vedere că portsatelitul P este solidar cu roata 5

$$\begin{cases} \tilde{i}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P} \\ \tilde{i}_{53} = \frac{\tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3} \end{cases} \quad (4.171)$$

Raportul \tilde{i}_{13}^P se calculează cu formula indicată la mecanismul din Fig.4.70.b, iar raportul \tilde{i}_{53} este

$$\tilde{i}_{53} = \begin{pmatrix} -Z_4 \\ Z_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3' \\ Z_4 \end{pmatrix} = -\frac{Z_3'}{Z_5}.$$

În cazul mecanismului complex din Fig.4.73, se scrie formula lui Willis pentru fiecare mecanism planetar component

$$\tilde{\omega}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P}, \quad \tilde{\omega}_{43}^R = \frac{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_R}{\tilde{\omega}_3' - \tilde{\omega}_R}.$$

Având în vedere că roțile 3 și 3' sunt fixe ($\tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_3' = 0$), iar elementele 4 și P sunt solidare ($\tilde{\omega}_4 = \tilde{\omega}_P$), formulele devin

$$\begin{cases} \tilde{i}_{13}^P = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{-\tilde{\omega}_P} \\ \tilde{i}_{43}^R = \frac{\tilde{\omega}_P - \tilde{\omega}_R}{-\tilde{\omega}_R} \end{cases} \quad (4.172)$$

Rapoartele de transmitere \tilde{i}_{13}^P și \tilde{i}_{43}^R se calculează astfel

$$\tilde{i}_{13}^P = \begin{pmatrix} -Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$

$$\tilde{i}_{43}^R = \begin{pmatrix} -Z_5 \\ Z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3' \\ Z_5 \end{pmatrix} = -\frac{Z_3'}{Z_4}.$$

În sistemul (4.172) figurează parametrii $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_P$ și $\tilde{\omega}_R$. Dacă se cunoaște unul dintre ei, - corespunzător elementului conducător, ceilalți doi se pot determina. Dacă mișcarea se transmite, de exemplu, de la elementul 1 la portsatelitul R, se calculează raportul de transmitere al mecanismului complex \tilde{i}_{1R}

$$\tilde{i}_{1R} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_R} = (1 - \tilde{i}_{13}^P)(1 - \tilde{i}_{43}^R). \quad (4.173)$$

4.2.2.3. Transmiterea momentelor, randamentul

Se consideră un mecanism planetar simplu, de tipul celor din Fig.4.70, cu roțile centrale 1 și 3 și portsatelitul P. În cazul în care roata 3 devine fixă, se obține un planetar propriuzis, cu un grad de mobilitate, care poate transmite mișcarea de rotație în sensul $1 \rightarrow P$ sau $P \rightarrow 1$.

• **Cazul $1 \rightarrow P$.**

Se scrie ecuația de echilibru de momente pentru întreg mecanismul și ecuația specifică trenului de roți dințate cu axe fixe (4.167), dintre roțile 1 și 3,

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 + \tilde{M}_p = 0 \\ \tilde{M}_1 = -\frac{1}{\eta_0 i_{13}^{k;P}} \tilde{M}_3. \end{cases} \quad (4.174)$$

În aceste ecuații \tilde{M}_1 este momentul motor, \tilde{M}_p este momentul util (rezistent), iar \tilde{M}_3 este momentul de reacțiune din legătura rigidă, formată între elementele 3 și batiu. Parametrul η_0 este randamentul mecanismului cu axe fixe și se calculează, așa cum s-a arătat, ca produs al randamentelor angrenajelor componente. Exponentul k are valoarea +1, dacă în mecanismul cu axe fixe elementul 1 este conducător iar elementul 3 este condus și -1 în caz contrar. Elementul 1 este conducător, dacă momentul \tilde{M}_1 și viteza unghiulară relativă în raport cu portsatelitul $\tilde{\omega}_{1p} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p$, au același sens. Pe de altă parte, momentul \tilde{M}_1 are același sens cu $\tilde{\omega}_1$, deoarece elementul 1 este element conducător în mecanismul planetar. Prin urmare, $k = +1$ dacă $\tilde{\omega}_1$ și $(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p)$ au același sens, adică

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_1} > 0$$

sau:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_1} = 1 - \frac{1}{\tilde{i}_{1p}} = 1 - \frac{1}{1 - \tilde{i}_{13}^P} = \frac{\tilde{i}_{13}^P}{\tilde{i}_{13}^P - 1} > 0.$$

Soluțiile acestei inecuații sunt:

$$\tilde{i}_{13}^P < 0 \text{ sau } \tilde{i}_{13}^P > 1.$$

În mod similar, $k = -1$ dacă este verificată inecuația

$$\frac{\tilde{i}_{13}^P}{\tilde{i}_{13}^P - 1} < 0,$$

care are soluțiile

$$0 < \tilde{i}_{13}^P < 1.$$

Rezultatele acestei analize sunt date în tabelul următor

k	\tilde{i}_{13}^P
+1	$\tilde{i}_{13}^P < 0$ sau $\tilde{i}_{13}^P > 1$
-1	$0 < \tilde{i}_{13}^P < 1$

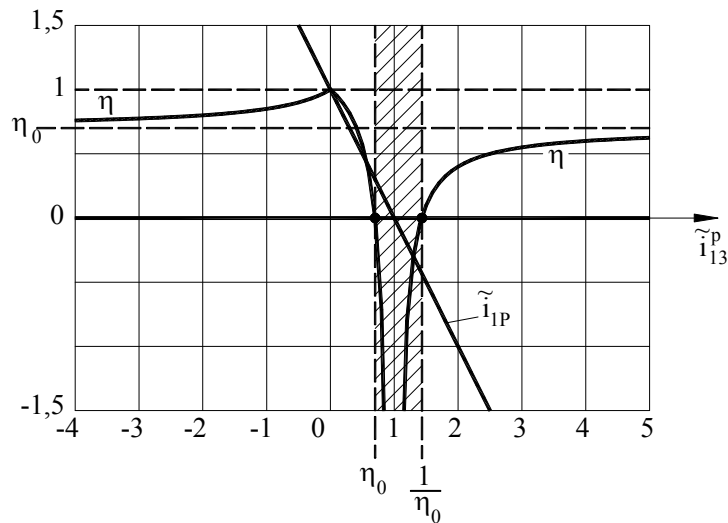


Fig. 4.74

Cu aceste precizări, din sistemul (4.174) se poate determina momentul motor \tilde{M}_1 în funcție de momentul rezistent \tilde{M}_p

$$\tilde{M}_1 = -\frac{1}{1 - \eta_0^{k;P}} \tilde{M}_p. \quad (4.175)$$

Se poate determina de asemenea, randamentul mecanismului planetar

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = -\frac{\tilde{M}_p \tilde{\omega}_p}{\tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1}.$$

Introducând în această formulă, \tilde{M}_1 (4.175) și expresia raportului de transmitere \tilde{i}_{1p} (4.169), se obține

$$\eta = \frac{1 - \eta_0^{k;P}}{1 - i_{13}^P}. \quad (4.176)$$

În Fig.4.74 sunt reprezentate diagramele $\eta(\tilde{i}_{13}^P)$ (4.176) și $\tilde{i}_{1P}(\tilde{i}_{13}^P)$ (4.169). Din studiul acestor diagrame se pot desprinde câteva observații interesante.

1) Randamentul rezultă negativ în intervalul $\tilde{i}_{13}^P \in \left[\eta_0, \frac{1}{\eta_0} \right]$, ceea ce arată că mecanismul se autoblochează, iar în apropierea acestui interval randamentul este foarte mic.

2) Randamentul mecanismului planetar este superior valorii η_0 pentru $\tilde{i}_{13}^P < 0$ și inferior pentru $\tilde{i}_{13}^P > \frac{1}{\eta_0}$, iar când $|\tilde{i}_{13}^P|$ tinde la infinit, randamentul tinde la η_0 .

3) În punctul $\tilde{i}_{13}^P = 0$, $\eta = 1$, dar raportul de transmitere $\tilde{i}_{13}^P = 0$ nu poate fi obținut practic.

• **Cazul $P \rightarrow 1$**

Se utilizează același sistem de ecuații (4.174), în care \tilde{M}_p este momentul motor iar \tilde{M}_1 este momentul rezistent. Printr-un raționament similar cu cel expus la cazul precedent, se ajunge la următoarele valori pentru exponentul k,

k	\tilde{i}_{13}^P
+1	$0 < \tilde{i}_{13}^P < 1$
-1	$\tilde{i}_{13}^P < 0$ sau $\tilde{i}_{13}^P > 1$

Momentul motor \tilde{M}_p se exprimă în funcție de momentul \tilde{M}_1

$$\tilde{M}_p = -(1 - \eta_0^k \tilde{i}_{13}^P) \tilde{M}_1, \quad (4.177)$$

iar randamentul este

$$\eta = -\frac{\tilde{M}_p \tilde{\omega}_p}{\tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1} \quad (4.178)$$

$$\eta = \frac{1 - \tilde{i}_{13}^P}{1 - \eta_0^k \tilde{i}_{13}^P}. \quad (4.179)$$

În Fig.4.75 sunt reprezentate diagramele $\eta(\tilde{i}_{13}^P)$ - (4.179) și $\tilde{i}_{1P}(\tilde{i}_{13}^P)$ - (4.170), din care rezultă că în punctul $\tilde{i}_{13}^P = 1$, $\eta = 0$, ceea ce înseamnă că mecanismul este la limita autoblocării, iar în apropierea acestui punct, randamentul este foarte mic. Observațiile 2) și 3) de la cazul precedent sunt valabile și aici.

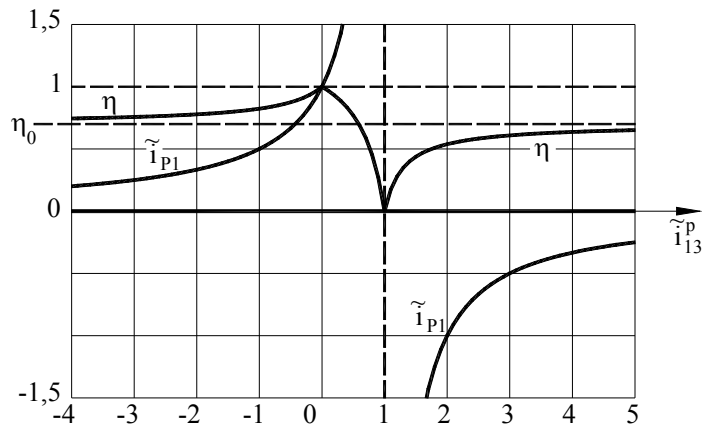


Fig. 4.75

4.2.2.4. Diferențialul de automobil

O aplicație consacrată a mecanismelor planetare este reprezentată de diferențialul de automobil (Fig.4.76). Portsatelitul P, construit sub forma unei carcase, primește mișcarea de la motor printr-un angrenaj hipoid, prin intermediul cutiei de viteze. Viteza unghiulară a portsatelitului este repartizată la cele două roți centrale 1 și 3, cuplate cu roțile de rulare ale autovehiculului. Mecanismul în ansamblu, poate fi interpretat ca un diferențial cu închidere, prin intermediul roților de rulare și a șoselei. În felul acesta, se pune de acord gradul

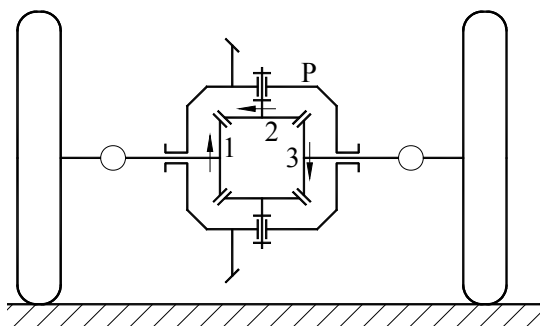


Fig. 4.76

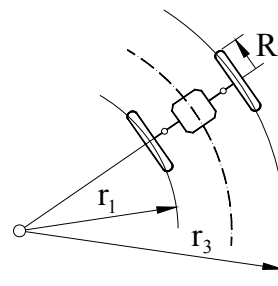


Fig. 4.77

de mobilitate ($M=1$) cu faptul că există un singur element conducător – portsatelitul. Vom studia funcționarea diferențialului în regim de deplasare în curbă și pe o traiectorie rectilinie a mașinii.

• **Deplasarea în curbă**

În cazul acestui mecanism, care are $z_1 = z_3$, raportul de transmitere \tilde{i}_{13}^p este

$$\tilde{i}_{13}^p = -\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1} = -1,$$

iar formula lui Willis (4.168) capătă forma

$$\tilde{\omega}_p = \frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_3}{2}. \quad (4.180)$$

Roțile de rulare se deplasează pe două curbe, asimilate cu niște cercuri de raze r_1 și r_3 (Fig.4.77). Datorită existenței lanțului cinematic de închidere prin șosea, vitezele unghiulare ale roților de rulare sunt proporționale cu aceste raze

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3} = \frac{r_1}{r_3}. \quad (4.181)$$

Din sistemul (4.180), (4.181) se determină vitezele unghiulare ale roților de rulare $\tilde{\omega}_1$ și $\tilde{\omega}_3$, în funcție de viteza unghiulară a portsatelitului

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{2\tilde{\omega}_p r_1}{r_1 + r_3}; \quad \tilde{\omega}_3 = \frac{2\tilde{\omega}_p r_3}{r_1 + r_3}.$$

Trebuie remarcat că viteza unghiulară a portsatelitului, fiind egală cu viteza medie a roților de rulare, intervine direct în calculul vitezei de rulare a vehicolului v_r ,

$$v_r = \omega_p \cdot R,$$

în care R este raza roților de rulare.

Pentru analiza transmiterii momentelor, se folosește sistemul de ecuații (4.174), care în ipoteza $\tilde{i}_{13}^p = -1$, are forma

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 + \tilde{M}_p = 0 \\ \tilde{M}_1 = \frac{\tilde{M}_3}{\eta_0^k} \end{cases} \quad (4.182)$$

Exponentul $k = +1$, dacă în mecanismul cu axe fixe 1-2, 2-3, roata 1 este conducătoare și roata 3 – condusă, adică \tilde{M}_1 și $\tilde{\omega}_{1p} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p$ au același sens, iar \tilde{M}_3 și $\tilde{\omega}_{3p} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_p$ au sensuri opuse. Pe de altă parte, roțile 1 și 3

sunt conduse în mecanismul diferențial, deci $\tilde{\omega}_1$ și \tilde{M}_1 au sensuri opuse ca și $\tilde{\omega}_3$ și \tilde{M}_3 . Rezultă că valoarea $k = +1$ corespunde condițiilor,

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_3}{r_1} \right) < 1$$

$$\frac{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_p} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_3} \right) > 1,$$

care sunt satisfăcute când $r_1 < r_3$, adică virajul se execută cu roata 1 la interior și cu roata 3 la exterior. Desigur, $k = -1$ când $r_1 > r_3$, iar virajul se execută în partea opusă.

Din sistemul (4.182) se determină \tilde{M}_p ,

$$\tilde{M}_p = -\tilde{M}_1 - \tilde{M}_3 = -\tilde{M}_1 (1 + \eta_0^k) = -\tilde{M}_3 \left(1 + \frac{1}{\eta_0^k} \right). \quad (4.183)$$

Randamentul mecanismului, fără a ține seama de pierderile de putere dintre roțile de rulare și șosea, este

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{\tilde{M}_1 \omega_1 + \tilde{M}_3 \omega_3}{\tilde{M}_p \omega_p}.$$

Având în vedere relațiile vitezelor unghiulare (4.180), (4.181) și a momentelor (4.182), se ajunge la formula,

$$\eta = \frac{2(r_1 + r_3 \eta_0^k)}{(1 + \eta_0^k)(r_1 + r_3)} \quad (4.184)$$

în care $\eta_0 = \eta_{12} \cdot \eta_{23}$.

• Deplasarea rectilinie

În această ipoteză, lanțul cinematic de închidere impune condiția,

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_3,$$

care împreună cu formula lui Willis (4.180) conduce la relațiile

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_p. \quad (4.185)$$

Prin urmare, diferențialul se comportă ca un cuplaj (legătură rigidă) iar între elementele sale nu există mișcări relative. În consecință $\eta_0 = 1$, iar din relațiile (4.183) și (4.184) rezultă

$$\tilde{M}_p = -\tilde{M}_1 - \tilde{M}_3 = -2\tilde{M}_1 = -2\tilde{M}_3, \quad (4.186)$$

$$\eta = 1.$$

Observație

Pentru a realiza deplasarea autovehiculului din poziția statică, momentele M_1 și M_3 trebuie să îndeplinească condiția,

$$M_1 + M_3 > M_{tr}, \quad (4.187)$$

în care M_{tr} este momentul de tracțiune, care însumează toate rezistențele la deplasare, între care este importantă cea generată de forța de greutate, dacă mașina se află în pantă. Dacă una dintre roți, de exemplu roata 1, patinează, momentul M_1 este limitat de momentul de patinare M_{pat} . Din (4.186) rezultă $M_1 = M_3$ și deci

$$M_1 + M_3 = 2M_{pat}.$$

Deoarece momentul de patinare este redus ca valoare, condiția (4.187) nu este îndeplinită. În acest caz roata 1 se rotește în gol iar roata 3 rămâne fixă, având ca rezultat staționarea mașinii. Pentru a evita această situație, unele autovehicule sunt prevăzute cu un sistem de cuplare a roților centrale. În acest caz, momentele M_1 și M_3 pot avea valori diferite, iar dacă roata 3 are aderență, momentul M_3 nu este limitat, astfel încât condiția (4.187) este satisfăcută.

Capitolul 5

DINAMICA MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR

5.1. ANALIZA DINAMICĂ

5.1.1. Modele dinamice

Analiza dinamică studiază mișcarea mecanismelor ca rezultat al acțiunii forțelor aplicate, dintre care cele mai importante sunt forțele de acționare (motoare) și cele tehnologice (rezistente). În acest context mecanismul trebuie considerat în conexiune cu motorul și cu procesul de lucru, formând un ansamblu care se numește **mașină**. În structura unei mașini, pe lângă motor (M)

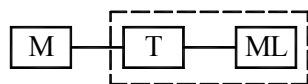


Fig. 5.1

și mecanismul de lucru (ML), intervine, uneori, și o transmisie (T) (Fig.5.1) care modifică viteza motorului în raport cu cerințele mecanismului de lucru. Pentru simplificare, transmisia poate fi înglobată în mecanismul de lucru, astfel încât, în cele ce urmează, mașina este concepută ca fiind formată din două componente.

Desigur, cunoscând starea de mișcare a mașinii, determinată prin analiza dinamică, se pot calcula forțele de inerție și forțele de legătură cu o precizie superioară în raport cu valorile obținute prin analiza cinetostatică.

Analiza comportării mașinii se poate simplifica dacă aceasta se înlocuiește printr-un model dinamic. Modelul este format dintr-un element al mecanismului de lucru, în mișcare de rotație sau de translație, numit **element de reducere** sau chiar dintr-un punct material (**punct de reducere**). Modelului i se atribuie proprietăți masice (mase, momente de inerție) și dinamice (forțe aplicate) determinate, astfel încât, elementul de reducere să aibă aceeași mișcare ca în cadrul mecanismului.

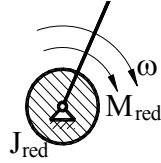


Fig. 5.2

În cele ce urmează se prezintă modelul dinamic cu element de reducere în mișcare de rotație, care are cea mai mare aplicabilitate. De regulă, ca element de reducere se adoptă elementul conducător al mecanismului de lucru.

Momentul de inerție al modelului numit **moment de inerție redus** (J_{red}) se determină din condiția de egalitate a energiei cinetice a modelului cu energia cinetică a mașinii

$$E_{c \text{ model}} = E_{c \text{ mașină}}$$

în care termenul $E_{c \text{ mașină}}$ se calculează prin însumarea energiilor cinetice corespunzătoare elementelor mobile, astfel încât, în cazul unui mecanism plan, se obține

$$\frac{1}{2} J_{red} \omega^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} (m_i v_{G_i}^2 + J_{G_i} \omega_i^2). \quad (5.1)$$

În această relație ω este viteza unghiulară a elementului de reducere, iar m_i este masa elementului de ordin i , v_{G_i} - viteza centrului de masă, J_{G_i} - momentul de inerție al elementului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă și este perpendiculară pe planul mișcării și ω_i - viteza unghiulară a elementului. Din egalitatea (5.1) rezultă J_{red} ,

$$J_{red} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(m_i \left(\frac{v_{G_i}}{\omega} \right)^2 + J_{G_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right). \quad (5.2)$$

Mărimile m_i și J_{G_i} sunt constante, iar rapoartele $\frac{v_{G_i}}{\omega}$ și $\frac{\omega_i}{\omega}$ sunt funcții de transmitere de ordinul 1, care depind de parametrul de poziție al elementului de reducere – unghiul φ . Prin urmare, momentul de inerție redus este funcție de parametrul φ și are caracter periodic, deoarece și funcțiile de transmitere sunt periodice. Formula (5.2) arată, de asemenea, că J_{red} este strict pozitiv, $J_{red} > 0$, așa cum se observă din diagrama $J_{red}(\varphi)$ din Fig.5.3. Perioada

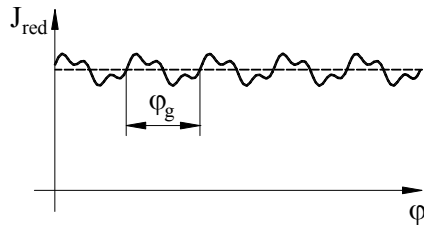


Fig. 5.3

funcției $J_{red}(\varphi)$ se numește ciclu geometric și este notată φ_g (Fig.5.3).

În unele cazuri particulare momentul de inerție redus poate fi constant. Astfel, în cazul unui mecanism complex format din roți dințate cu axe fixe, J_{red} are expresia

$$J_{red} = \sum_{i=1}^{n-1} J_{G_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right).$$

deoarece centrele de masă se găsesc pe axele de rotație, iar $v_{G_i} = 0$. Fiecare raport $\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)$ reprezintă inversul unui raport de transmitere și este constant, astfel că $J_{red} = ct.$

Forțele aplicate care acționează asupra mecanismului de lucru se înlocuiesc, în cadrul modelului, cu un **moment redus (M_{red})** care se determină din egalitatea puterilor

$$P_{model} = P_{mecanism},$$

sau

$$M_{red}\omega = \sum_{j=1}^{n-1} (\bar{F}_j \bar{v}_j + M_j \omega_j), \quad (5.3)$$

în care \bar{F}_j și M_j sunt componentele tursorului rezultat care acționează asupra elementului j , iar \bar{v}_j și ω_j sunt viteza punctului de reducere al tursorului și viteza unghiulară a elementului. Din relația (5.3) se deduce

$$M_{red} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\bar{F}_j \frac{\bar{v}_j}{\omega} + M_j \frac{\omega_j}{\omega} \right). \quad (5.4)$$

Expresia momentului redus (5.4) arată că acesta depinde de parametrul de poziție φ , prin intermediul funcțiilor de transmitere $\frac{\bar{v}_j}{\omega}$ și $\frac{\omega_j}{\omega}$, dar poate depinde și de viteza unghiulară (ω) sau de timp (t) prin intermediul parametrilor \bar{F}_j și M_j . În procesul de analiză dinamică este util să se cunoască, separat, momentul redus al forțelor motoare M_{red}^m , în care componenta principală este momentul dezvoltat de motor și momentul redus al forțelor rezistente M_{red}^r , în care componenta principală este dată de forța tehnologică.

În cazul modelului cu element de reducere în mișcare de translație intervin parametrii m_{red} (masa redusă) și F_{red} (forța redusă) care se determină similar cu J_{red} și M_{red} .

5.1.2. Fazele funcționării mașinii

Funcționarea unei mașini se desfășoară în trei faze: pornire, regim și oprire, care se pun în evidență pe o diagramă $\omega(\varphi)$ sau $\omega(t)$ (Fig.5.4). Fazele de pornire și de oprire sunt tranzitorii, pe când în faza de regim se execută operația

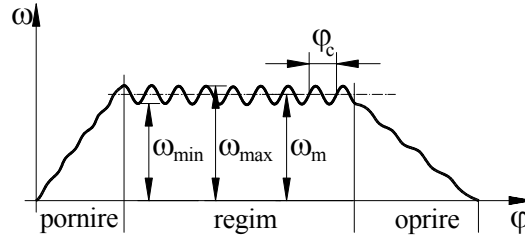


Fig. 5.4

tehnologică specifică mașinii respective. În această fază viteza unghiulară are o variație periodică între două valori extreme ω_{\max} și ω_{\min} . Faza de regim este caracterizată prin următorii parametri:

- **Ciclul cinematic φ_c** - perioada funcției $\omega(\varphi)$ care, de regulă, este egal cu ciclul geometric.

- **Viteza unghiulară medie ω_m** - media aritmetică între ω_{\max} și ω_{\min} .

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \quad (5.5)$$

- **Gradul de neuniformitate δ** - definit cu formula

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m} \quad (5.6)$$

Ne propunem să analizăm condițiile de instalare a fiecărei faze. Pentru aceasta se scrie ecuația energiei cinetice sub formă finită

$$E_C - E_{C_0} = L, \quad (5.7)$$

în care E_C și E_{C_0} reprezintă energia cinetică a mașinii la un moment dat și la un moment anterior numit moment inițial, iar L este lucrul mecanic dezvoltat de forțele aplicate în perioada dintre cele două momente. Lucrul mecanic L se poate exprima

$$L = L_m - L_r,$$

în care L_m este lucrul mecanic motor (al forțelor motoare) și L_r este lucrul mecanic rezistent (al forțelor rezistente). Aplicând modelul dinamic cu element de reducere în mișcare de rotație, ecuația (5.7) devine

$$\frac{1}{2} J_{\text{red}} \omega^2 - \frac{1}{2} J_{\text{red}0} \omega_0^2 = L_m - L_r, \quad (5.8)$$

în care ω și J_{red} caracterizează modelul la un moment dat, iar ω_0 și $J_{\text{red}0}$ corespund momentului inițial. Dacă perioada pentru care se scrie ecuația

energiei cinetice se adoptă egală cu ciclul geometric, $J_{\text{red}} = J_{\text{red}0}$, iar ecuația se particularizează astfel

$$\frac{1}{2} J_{\text{red}} (\omega^2 - \omega_0^2) = L_m - L_r. \quad (5.9)$$

În faza de pornire, viteza unghiulară crește astfel încât $\omega > \omega_0$. În această ipoteză, din ecuația (5.9) rezultă $L_m > L_r$. Deci, pentru a realiza pornirea mașinii, lucrul mecanic motor trebuie să fie mai mare decât lucrul mecanic rezistent. De regulă mașina se pornește în gol, cu mecanismul de lucru decuplat ($L_r = 0$), iar apoi se cuplează în sarcină treptat, cu ajutorul unui cuplaj de fricțiune.

În faza de oprire $\omega < \omega_0$, iar $L_m < L_r$. Rezultă că, pentru a realiza oprirea, lucrul mecanic rezistent trebuie să fie mai mare decât lucrul mecanic motor. Practic, oprirea mașinii se efectuează prin oprirea motorului ($L_m = 0$) și prin introducerea unor dispozitive de frânare care majorează lucrul mecanic rezistent.

În faza de regim viteza unghiulară are o variație periodică, deci $\omega = \omega_0$ ceea ce conduce la $L_m = L_r$. Înseamnă că, pentru instalarea fazei de regim, lucrul mecanic motor și lucrul mecanic rezistent trebuie să se echilibreze periodic.

5.1.3. Ecuațiile mișcării mașinii

Se consideră ecuația energiei cinetice (5.8) în care L_m și L_r se determină cu ajutorul relațiilor

$$L_m = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\text{red}}^m d\varphi, \quad L_r = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\text{red}}^r d\varphi. \quad (5.10)$$

Astfel, ecuația (5.8) devine

$$\frac{1}{2} J_{\text{red}} \omega^2 - \frac{1}{2} J_{\text{red}0} \omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{\text{red}}^m - M_{\text{red}}^r) d\varphi \quad (5.11)$$

și reprezintă ecuația mișcării mașinii sub formă finită.

Ecuația energiei cinetice, sub formă diferențială, este

$$dE_C = dL. \quad (5.12)$$

Exprimând dL sub forma $dL = M_{\text{red}} d\varphi$, se poate scrie

$$dE_C = M_{\text{red}} d\varphi.$$

sau

$$\frac{d}{d\varphi}(E_C) = M_{\text{red}}$$

Având în vedere expresia energiei cinetice,

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \omega^2$$

se obține, prin derivare, ecuația diferențială a mișcării mașinii,

$$\omega J_{\text{red}} \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dJ_{\text{red}}}{d\varphi} = M_{\text{red}}^m - M_{\text{red}}^r \quad (5.13)$$

Dacă derivata $\frac{d\omega}{d\varphi}$ se exprimă astfel,

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{1}{\omega}$$

rezultă o altă formă a ecuației de mișcare,

$$J_{\text{red}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dJ_{\text{red}}}{d\varphi} = M_{\text{red}}^m - M_{\text{red}}^r \quad (5.14)$$

În expresiile ecuațiilor de mișcare figurează trei funcții $J_{\text{red}}(\varphi)$, $M_{\text{red}}^m(\varphi, \omega, t)$, $M_{\text{red}}^r(\varphi, \omega, t)$ care trebuie cunoscute în vederea rezolvării ecuațiilor. Determinarea și caracterizarea funcției $J_{\text{red}}(\varphi)$ au fost prezentate în paragraful precedent (5.1.1). Funcția $M_{\text{red}}^m(\varphi, \omega, t)$ se numește **caracteristica mecanică a motorului**, iar funcția $M_{\text{red}}^r(\varphi, \omega, t)$ - **caracteristica mecanică a mecanismului de lucru sau a procesului tehnologic**. Caracteristicile mecanice se determină, de regulă, pe cale experimentală și sunt cunoscute sub forma unor diagrame. Ele sunt specifice fiecărei mașini, atât în ce privește tipul variabilei (φ , ω sau t), cât și forma lor. În Fig.5.5 se prezintă caracteristicile mecanice pentru cele mai uzuale motoare, iar în Fig.5.6 se arată câteva caracteristici mecanice specifice unor procese de lucru.

Se observă că motoarele uzuale (electrice și termice) au caracteristici care depind de parametrul ω . Numai motorul cu element elastic are caracteristica funcție de poziție (φ). Caracteristicile mecanismelor de lucru depind, de regulă, de poziție (φ). Fac excepție mașinile de tip pompă centrifugă, ventilator, la care caracteristica depinde de viteză (ω). În cazul mașinilor de ridicat $M_{\text{red}}^r = ct$, iar parametrul independent poate fi considerat oricare dintre variabilele φ sau ω .

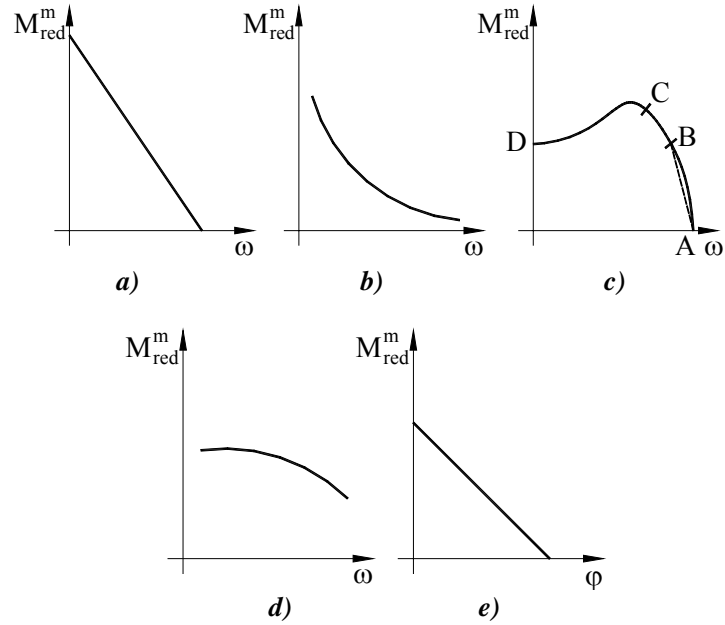


Fig. 5.5

a) motor electric de curent continuu cu excitație în paralel; **b)** motor electric de curent continuu cu excitație în serie; **c)** motor electric asincron; **d)** motor cu ardere internă; **e)** motor cu element elastic.

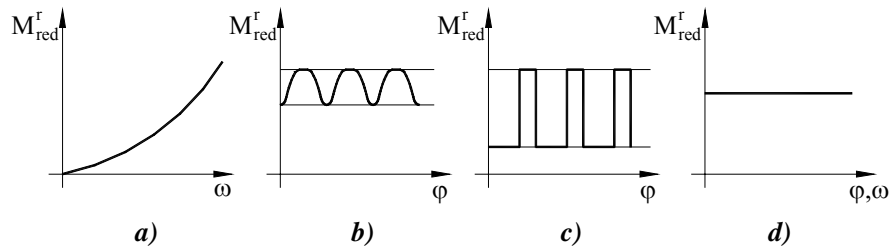


Fig. 5.6

a) pompă centrifugă, ventilator; **b)** mecanism de lucru cu cuple inferioare sau cu camă; **c)** mașină cu efect de lovire (ciocan); **d)** mașină de ridicat.

5.1.4. Rezolvarea ecuațiilor de mișcare

Prin rezolvarea ecuațiilor de mișcare se determină legea de mișcare a elementului de reducere, exprimată sub una din formele $\varphi(t)$, $\omega(t)$ sau $\omega(\varphi)$. Caracterul matematic al ecuațiilor de mișcare, care determină modul de rezolvare, depinde de tipul parametrilor independenți (φ, ω sau t) care intervin în cele două caracteristici. Este important, de asemenea, dacă momentul de inerție redus este constant sau variabil. În aplicațiile tehnice se întâlnesc trei grupe tipice de mașini, care vor fi studiate în continuare.

- $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\omega)$, $J_{red} = ct$
- $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\varphi)$
- $M_{red}^m(\varphi)$, $M_{red}^r(\varphi)$.

5.1.4.1. Cazul $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\omega)$, $J_{red} = ct$

Mașinile din această grupă sunt formate din motoare electrice sau termice care acționează pompe centrifugale, ventilatoare, generatoare electrice, mașini de ridicat, etc. Pentru analiza dinamică se folosește ecuația (5.14) scrisă

în ipoteza $J_{red} = ct$, $\frac{dJ_{red}}{d\varphi} = 0$,

$$J_{red} \frac{d\omega}{dt} = M_{red}^m(\omega) - M_{red}^r(\omega). \quad (5.15)$$

Această ecuație diferențială se rezolvă prin separarea variabilelor

$$dt = J_{red} \frac{d\omega}{M_{red}^m(\omega) - M_{red}^r(\omega)}$$

$$t - t_0 = J_{red} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M_{red}^m(\omega) - M_{red}^r(\omega)}. \quad (5.16)$$

În felul acesta se obține funcția $t(\omega)$ și, implicit, funcția $\omega(t)$. Dacă interesează funcția $\varphi(t)$ se scrie ecuația

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt},$$

care se integrează prin separarea variabilelor

$$d\varphi = \omega(t)dt$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega(t) dt. \quad (5.17)$$

Se poate obține, de asemenea, funcția $\omega(\varphi)$ prin eliminarea parametrului t între ecuațiile

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(t) \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pentru rezolvarea practică a problemei, caracteristicile mecanice se aproximează, prin interpolare, cu funcții analitice. Operațiile de integrare ((5.16), (5.17)), de inversare a funcției $t(\omega)$ sau de eliminare a parametrului t , menționate anterior, se efectuează analitic – dacă acest lucru este posibil sau, mai comod, pe cale numerică.

Din relația (5.16) se observă că atunci când t tinde la infinit, viteza unghiulară tinde la o valoare care rezultă din ecuația

$$M_{\text{red}}^m(\omega) - M_{\text{red}}^r(\omega) = 0 \quad (5.19)$$

Soluția se obține, grafic, prin intersecția curbelor care reprezintă caracteristicile mecanice (Fig.5.7) și se numește viteză unghiulară **nominală** (ω_n). Teoretic, viteza unghiulară nominală este atinsă după un timp infinit, dar practic viteza unghiulară tinde asimptotic la valoarea nominală și se apropie foarte mult de aceasta într-un timp scurt.

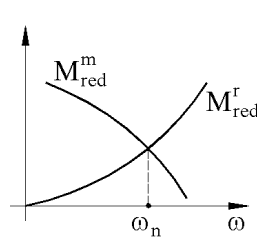


Fig. 5.7

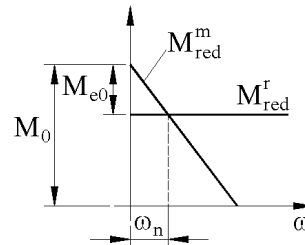


Fig. 5.8

Pentru exemplificare, se consideră cazul unei mașini de ridicat acționată cu un motor electric de curent continuu cu excitație în paralel. Caracteristica motorului se aproximează cu o dreaptă (Fig.5.8) de ecuație

$$M_{\text{red}}^m = M_0 - m \cdot \omega, \quad (5.20)$$

în care M_0 este momentul de pornire, iar m – panta dreptei. Caracteristica mecanismului de lucru este o dreaptă paralelă cu abscisa, $M_{\text{red}}^r = ct$. Viteza nominală rezultă din ecuația

$$M_0 - m \cdot \omega = M_{\text{red}}^f,$$

și are valoarea

$$\omega_n = \frac{M_0 - M_{\text{red}}^f}{m} = \frac{M_{e0}}{m}, \quad (5.21)$$

în care M_{e0} este momentul excedentar la pornire (Fig.5.8). Aplicând formula (5.16) se obține

$$\begin{aligned} t - t_0 &= J_{\text{red}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M_0 - m \cdot \omega - M_{\text{red}}^m} = J_{\text{red}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M_{e0} - m \cdot \omega} = \\ &= \frac{J_{\text{red}}}{M_{e0}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}} = -\frac{\omega_n J_{\text{red}}}{M_{e0}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}}. \end{aligned}$$

Astfel, ecuația se poate rezolva analitic, ajungând la soluția $t = t(\omega)$,

$$t - t_0 = -\frac{\omega_n \cdot J_{\text{red}}}{M_{e0}} \left(\ln \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n} \right) - \ln \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_n} \right) \right). \quad (5.22)$$

Funcția $t(\omega)$ se poate inversa analitic, după cum urmează,

$$\ln \left(\frac{1 - \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega_0}{\omega_n}} \right) = -\frac{M_{e0}(t - t_0)}{\omega_n \cdot J_{\text{red}}} = a$$

$$\frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_0} = e^a$$

$$\omega = \omega_n - (\omega_n - \omega_0)e^a. \quad (5.23)$$

Dacă momentul inițial coincide cu momentul pornirii ($t_0 = 0, \omega_0 = 0$) se obține

$$\omega = \omega_n (1 - e^{-b}), \quad (5.24)$$

în care

$$b = -\frac{M_{e0} \cdot t}{\omega_n J_{red}}$$

Funcția $\varphi(t)$ se obține prin integrarea funcției $\omega(t)$. În ipoteza $t_0 = 0, \varphi_0 = 0$ rezultă

$$\varphi = \int_0^t \omega_n (1 - e^{-b}) = \omega_n t + \frac{\omega_n^2 J_{red}}{M_{e0}} (e^{-b} - 1). \quad (5.25)$$

Funcția $\varepsilon(t)$ se obține prin derivarea funcției $\omega(t)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{M_{e0}}{J_{red}} \cdot e^{-b}. \quad (5.26)$$

În Fig.5.9 se prezintă diagramele $\varphi(t)$, $\omega(t)$ și $\varepsilon(t)$ obținute pentru un caz numeric, iar în Fig.5.10 se arată diagramele $\omega(\varphi)$ și $\varepsilon(\varphi)$. Pentru a compara forma curbelor s-au folosit aceleași scări în ambele diagrame. Se remarcă faptul că, viteza de regim, pentru mașinile din această grupă, este, practic, constantă, $\omega \cong \omega_n = ct$. Ecuațiile legii de mișcare permit determinări utile privitoare la faza de pornire. Astfel, dacă se consideră că faza de pornire este terminată când este îndeplinită condiția

$$\frac{\omega}{\omega_n} = q$$

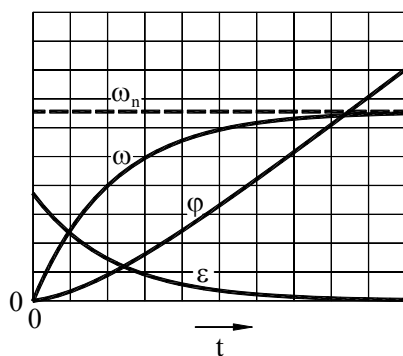


Fig. 5.9

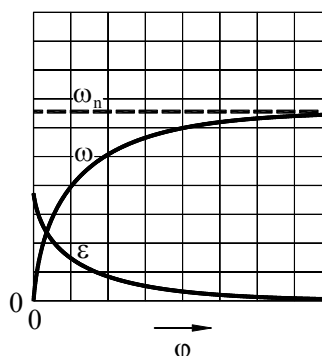


Fig. 5.10

în care q are o valoare apropiată de unitate, se poate calcula timpul de pornire t_p . Se aplică formula (5.22) cu $t_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, obținând

$$t_p = -\frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}} \ln\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) = -\frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}} \ln(1 - q). \quad (5.27)$$

Dacă, de exemplu, $q = 0,99$ se obține

$$t_p = 4,6 \frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}}$$

În cazul în care timpul de pornire este limitat se poate calcula, din formula (5.27), parametrul M_{e0} în vederea alegerii unui motor corespunzător.

5.1.4.2. Cazul $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\varphi)$

În această categorie intră mașinile cu motoare electrice sau termice asociate cu mecanisme de lucru cu cuple inferioare sau cu came, cum sunt compresoarele și pompele cu piston, presele cu excentric, mașinile din industria textilă și din industria de prelucrare a produselor alimentare, etc. Pentru analiza dinamică se folosește ecuația (5.13),

$$\omega J_{red}(\varphi) \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{dJ_{red}(\varphi)}{d\varphi} = M_{red}^m(\omega) - M_{red}^r(\varphi). \quad (5.28)$$

Caracteristicile $M_{red}^m(\omega)$ și $M_{red}^r(\varphi)$ se aproximează prin funcții analitice sau prin funcții de interpolare puse la dispoziție de programe utilitare. Menționăm că $M_{red}^r(\varphi)$ este o funcție periodică așa cum rezultă din Fig.5.6.b,c. Ecuația (5.28) se poate pune sub formă generală

$$\frac{d\omega}{d\varphi} + f(\varphi, \omega) = 0, \quad (5.29)$$

și se rezolvă numai prin metode numerice, determinând funcția $\omega = \omega(\varphi)$. Pentru rezolvare este necesară cunoașterea unei perechi de valori inițiale (φ_0, ω_0) . Prin derivare numerică, se determină funcția $\varepsilon(\varphi)$,

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} \cdot \omega(\varphi). \quad (5.30)$$

În Fig.5.11 se prezintă un exemplu numeric de integrare a ecuației de mișcare pentru o mașină care lucrează prin efect de lovire, acționată electric. Caracteristica motoare $M_{red}^m(\omega)$ este de tipul celei din Fig.5.5.a, aproximată printr-o dreaptă. Funcțiile $M_{red}^r(\varphi)$ și $J_{red}(\varphi)$ sunt reprezentate prin graficele

din Fig.5.11 împreună cu funcția $\omega(\varphi)$ obținută prin rezolvarea ecuației de mișcare și cu graficul $\varepsilon(\varphi)$ obținut prin derivare numerică. Ca valori inițiale s-au luat $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, astfel încât curbele $\omega(\varphi)$ și $\varepsilon(\varphi)$ sunt trasate atât pentru faza de pornire, cât și pentru cea de regim.

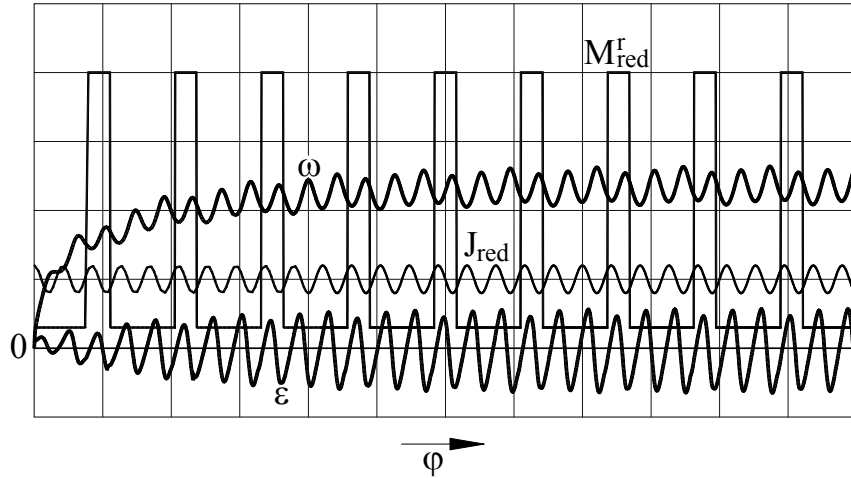


Fig. 5.11

5.1.4.3. Cazul $M_{red}^m(\varphi)$, $M_{red}^r(\varphi)$

Acest caz se întâlnește la mecanismele acționate de motoare cu elemente elastice (arcuri) și are aplicații tehnice limitate. Un domeniu reprezentativ în care intervine această acționare este cel al aparatelor electrice de conectare.

Analiza dinamică se efectuează pe baza ecuației de mișcare scrisă sub formă finită (5.11),

$$\frac{1}{2} J_{red}(\varphi) \omega^2 - \frac{1}{2} J_{red0} \omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{red}^m(\varphi) - M_{red}^r(\varphi)) d\varphi.$$

Din această ecuație se determină funcția $\omega(\varphi)$,

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{red}^m(\varphi) - M_{red}^r(\varphi)) + J_{red0} \omega_0^2}{J_{red}(\varphi)}}. \quad (5.31)$$

Ca și în celelalte cazuri studiate, funcțiile inițiale $M_{red}^m(\varphi)$, $M_{red}^r(\varphi)$ și $J_{red}(\varphi)$ se cunosc. Caracteristica motorului cu arc $M_{red}^m(\varphi)$ este liniară dacă elementul de reducere este elementul motor (asupra căruia acționează direct arcul). Altfel, funcția $M_{red}^m(\varphi)$ își pierde liniaritatea datorită rapoartelor de viteze care intervin în formula (5.4) și care nu sunt constante. Pentru aplicarea formulei (5.31) trebuie să se mai cunoască valorile J_{red0} și ω_0 corespunzătoare poziției inițiale $\varphi = \varphi_0$. Dacă poziția inițială este cea de staționare, $\omega_0 = 0$, iar formula (5.31) devine

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{red}^m(\varphi) - M_{red}^r(\varphi))}{J_{red}(\varphi)}}. \quad (5.32)$$

Integrala care intervine în formulele (5.31) și (5.32) se calculează, de regulă, prin metode numerice. Accelerația unghiulară, ca funcție de parametrul φ , se determină cu ajutorul relației (5.30). Dacă interesează exprimarea legii de mișcare în funcție de timp, se scrie ecuația

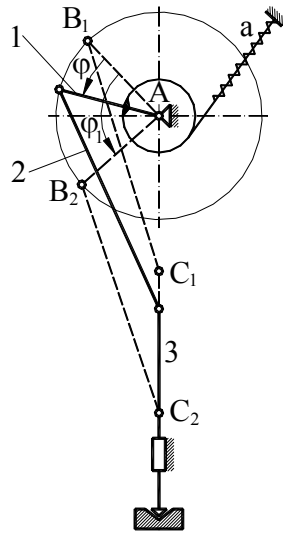


Fig. 5.12

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

care se rezolvă prin separarea variabilelor

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (5.33)$$

În felul acesta se obține funcția $t(\varphi)$ și implicit funcția $\varphi(t)$ cu ajutorul căreia se determină funcțiile $\omega(t)$ și $\varepsilon(t)$.

Pentru exemplificare, se consideră mecanismul manivelă – piston (Fig.5.12) utilizat în construcția unui întrerupător de înaltă tensiune. Elementul conducător 1 este acționat de arcul a și transmite mișcarea la elementul 3 solidar cu contactul mobil al întrerupătorului. Mecanismul se blochează în poziția “deschis” AB_1C_1 cu arcul

tensionat. Pentru închiderea contactului se eliberează sistemul de blocare, iar arcul rotește elementul 1 cu unghiul φ_1 , până ce mecanismul ajunge în poziția AB_2C_2 . Caracteristica arcului este liniară, astfel încât, momentul motor are expresia

$$M_{red}^m = M_0 - k\varphi, \quad (5.34)$$

în care M_0 este momentul inițial corespunzător contactului deschis, iar k este o constantă care depinde de rigiditatea arcului. Dacă se neglijează frecarea, momentul rezistent se consideră nul. Momentul de inerție redus se determină conform cu relația (5.2) aplicată mecanismului manivelă – piston. Introducând expresia (5.34) în formula (5.32) și calculând analitic integrala din această formulă, se obține $\omega(\varphi)$

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2M_0\varphi - k\varphi^2}{J(\varphi)}}. \quad (5.35)$$

În Fig.5.13 sunt reprezentate funcțiile inițiale $M_{red}^m(\varphi)$ și $J_{red}(\varphi)$ precum și diagramele rezultate $\omega(\varphi)$ și $\varepsilon(\varphi)$ pentru un caz numeric. Trecând la variabila t , pe baza relației (5.33), s-au obținut funcțiile $\varphi(t)$, $\omega(t)$ și $\varepsilon(t)$ reprezentate în Fig.5.14. În această aplicație interesează și timpul de comutare, în care mecanismul se deplasează între cele două poziții. Acest parametru se determină folosind relația (5.33) cu limitele de integrare $\varphi_0 = 0$ și $\varphi = \varphi_1$,

$$t = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (5.36)$$

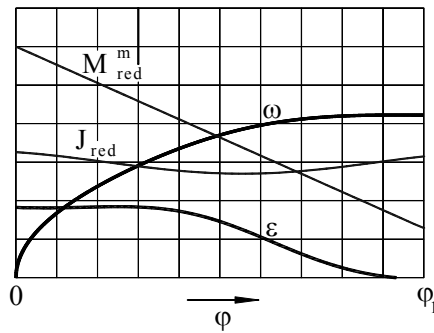


Fig. 5.13

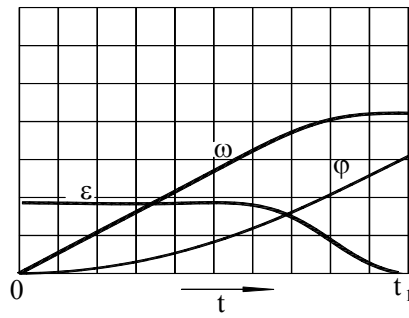


Fig. 5.14

5.1.5. Uniformizarea mișcării mașinii

Mișcarea neuniformă a elementului conducător, care este specifică mașinilor cu $M_{red}^m(\omega)$, $M_{red}^r(\varphi)$ (par. 5.1.4.2), constituie un neajuns deoarece este o sursă de suprasolicitări, de vibrații și poate aduce prejudicii calității procesului tehnologic. Caracterul neuniform al mișcării mașinii se apreciază prin valoarea gradului de neuniformitate δ (5.6). Cu cât δ este mai mic, mișcarea se consideră mai uniformă. De aceea gradul de neuniformitate are un interval de valori recomandate, stabilit în funcție de tipul mașinii așa cum rezultă din tabelul următor.

Tipul mașinii	δ
Pompe	0,2 – 0,033
Mașini agricole	0,2 – 0,02
Mașini unelte	0,05 – 0,002
Mașini textile	0,1 – 0,01
Prese, ștanțe	0,1 – 0,25
Motoare auto	0,01 – 0,001
Generatoare c.a.	0,005 – 0,003
Motoare aviație	< 0,005

Asigurarea gradului de neuniformitate necesar poate fi interpretată ca o problemă de sinteză dinamică, iar rezolvarea sa trebuie integrată în procesul de proiectare al mașinii.

Se consideră ecuația energiei cinetice, aplicată unei mașini, scrisă pentru perioada corespunzătoare pozițiilor în care viteza unghiulară a elementului de reducere trece prin valori extreme,

$$\frac{1}{2} J_{red1} \omega_{max}^2 - \frac{1}{2} J_{red2} \omega_{min}^2 = L, \quad (5.37)$$

în care J_{red1} și J_{red2} sunt valorile momentului de inerție redus în pozițiile menționate. Din relațiile (5.5) și (5.6) se deduce

$$\omega_{max}^2 = \omega_m^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 \cong \omega_m^2 (1 + \delta)$$

$$\omega_{min}^2 = \omega_m^2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 \cong \omega_m^2 (1 - \delta).$$

Introducând aceste expresii în ecuația (5.37) se obține

$$\delta = \frac{L - \frac{1}{2}\omega_m^2 (J_{red1} - J_{red2})}{\frac{1}{2}\omega_m^2 (J_{red1} + J_{red2})}. \quad (5.38)$$

Să presupunem, acum, că momentul de inerție redus se majorează cu o cantitate constantă J_C . În această ipoteză J_{red1} devine $(J_{red1} + J_C)$, iar J_{red2} devine $(J_{red2} + J_C)$. Dacă introducem aceste valori în formula (5.38), aceasta devine

$$\delta = \frac{L - \frac{1}{2}\omega_m^2 (J_{red1} - J_{red2})}{\frac{1}{2}\omega_m^2 (J_{red1} + J_{red2} + 2J_C)}. \quad (5.39)$$

Se observă că efectul majorării momentului de inerție redus este micșorarea parametrului δ , deci îmbunătățirea uniformității. Soluția practică pentru a majora momentul de inerție redus constă în montarea, pe unul dintre arborii mașinii, a unei piese în formă de disc, numită **volant**. Prin urmare, problema uniformizării mișcării se reduce la determinarea momentului de inerție al volantului.

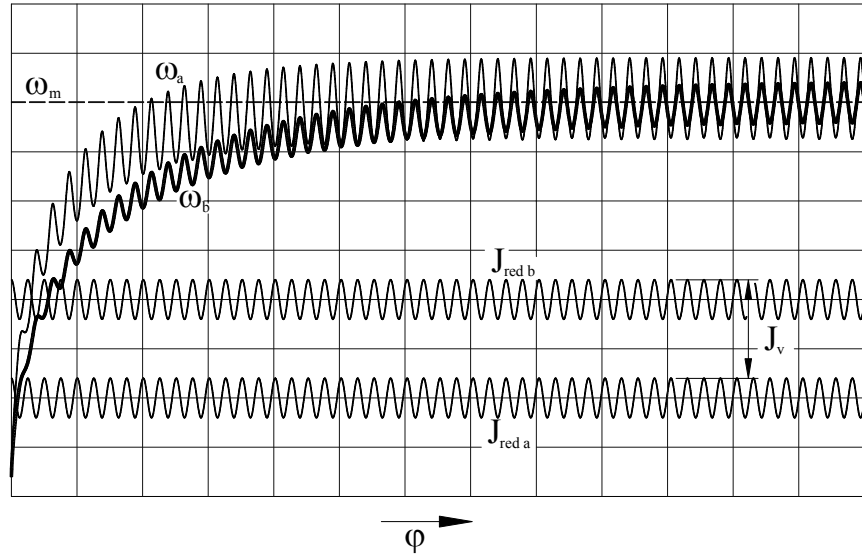


Fig. 5.15

Influența volantului asupra funcționării unei mașini rezultă, sugestiv, din Fig.5.15. În această figură sunt trasate diagramele $\omega_a(\varphi)$ și $\omega_b(\varphi)$ obținute prin integrarea ecuației de mișcare (par. 5.1.4.2), considerând aceleași caracteristici mecanice $M_{red}^m(\omega)$ și $M_{red}^r(\varphi)$, dar momente de inerție reduse diferite $J_{red a}(\varphi)$ și $J_{red b}(\varphi) = J_{red a}(\varphi) + J_V$ (J_V - momentul de inerție al volantului).

Din analiza celor două diagrame se pot trage următoarele concluzii.

1) În cazul mașinii prevăzută cu volant, amplitudinea oscilațiilor vitezei unghiulare $\omega_b(\varphi)$ este mai mică decât în cazul mașinii fără volant $\omega_a(\varphi)$. În consecință și gradul de neuniformitate se reduce.

2) Viteza unghiulară medie ω_m se menține aceeași pentru cele două cazuri.

3) Timpul de pornire, considerat până în momentul în care oscilațiile vitezei unghiulare se stabilizează, instalându-se faza de regim, este mai mare la mașina prevăzută cu volant în raport cu cea fără volant.

Pentru determinarea momentului de inerție al volantului se cunosc mai multe metode, elaborate în condițiile în care tehnica de calcul modernă era necunoscută. Aceste metode, având caracter preponderent grafic, apelează la multe ipoteze aproximative, iar utilizarea lor nu se mai justifică astăzi. Considerăm că cea mai simplă cale de rezolvare a problemei constă în integrarea numerică a ecuației de mișcare, în mod repetat, pentru diverse valori atribuite momentului de inerție J_V . În felul acesta se obține funcția $\delta(J_V)$ și,

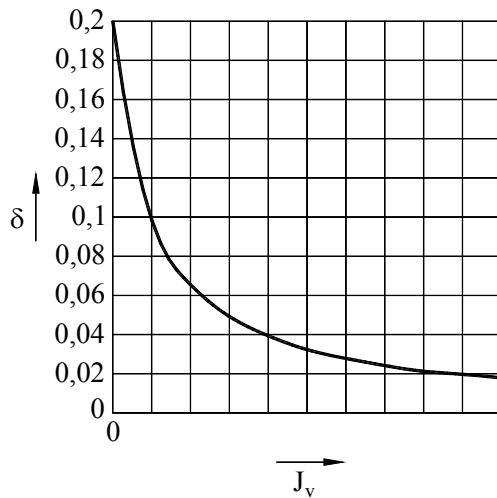


Fig. 5.16

implicit, $J_V(\delta)$ care permite determinarea valorii J_V pentru orice δ impus. În Fig.5.16 se reprezintă diagrama $J_V(\delta)$ trasată pentru mașina analizată în Fig.5.15. Această diagramă arată că eficiența montării volantului pentru reducerea gradului de neuniformitate este determinată de ordinul de mărime al momentului de inerție J_V . Se observă că, în partea a doua a diagramei δ scade foarte puțin cu creșterea lui J_V . De altfel odată cu creșterea lui J_V se măresc timpul și momentul necesar de pornire, cu consecințe nefavorabile asupra funcționării

motorului. În aceste condiții nu este judicios să se adopte un volant cu moment de inerție foarte mare, ci să se înlocuiască motorul cu un altul mai puternic.

5.1.6. Comportarea energetică a mașinii

Se scrie ecuația energiei cinetice, sub formă finită, aplicată unei mașini

$$E_C - E_{C_0} = L, \quad (5.7)$$

care arată că variația energiei cinetice într-un interval de timp finit este egală cu lucrul mecanic dezvoltat de forțele care acționează asupra mașinii în același interval. Variația energiei cinetice se exprimă utilizând modelul dinamic cu element de reducere în mișcare de rotație,

$$E_C - E_{C_0} = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \omega^2 - \frac{1}{2} J_{\text{red}0} \omega_0^2,$$

iar lucrul mecanic are forma

$$L = L_m - L_r$$

$$L_r = L_u + L_f,$$

în care L_m este lucrul mecanic motor, L_r - lucrul mecanic rezistent, L_u - lucrul mecanic util (al forțelor tehnologice) și L_f - lucrul mecanic al forțelor de frecare. Cu aceste precizări ecuația energiei cinetice devine

$$L_m = L_u + L_f + (E_C - E_{C_0}). \quad (5.40)$$

Relația (5.40) se numește ecuația bilanțului energetic, deoarece arată modul în care este folosit în mașină lucrul mecanic motor, care se transformă în trei componente: lucrul mecanic util, lucrul mecanic de frecare și variația energiei cinetice. Dacă $L_m > L_u + L_f$, variația energiei cinetice este pozitivă și mișcarea mașinii se accelerează iar dacă $L_m < L_u + L_f$, variația energiei cinetice este negativă, iar mișcarea este decelerată. Variația energiei cinetice poate fi interpretată ca lucrul mecanic al forțelor de inerție, L_i , astfel că ecuația (5.40) se poate scrie

$$L_m = L_u + L_f \pm L_i. \quad (5.41)$$

Ecuația bilanțului energetic se poate exprima și în funcție de puteri. Prin derivarea ecuației (5.41), în raport cu timpul, se obține expresia

$$P_m = P_u + P_f \pm P_i. \quad (5.42)$$

Dacă intervalul pentru care se scrie ecuația energiei cinetice corespunde unui ciclu cinematic, variația energiei cinetice este nulă, iar ecuația (5.40) devine

$$L_m = L_u + L_f. \quad (5.43)$$

Așa cum am arătat (subcap. 2.2.4.), eficiența energetică a mașinii se apreciază cu ajutorul **randamentului mecanic** definit ca **raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic motor pentru un ciclu al mișcării de regim**,

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \quad (5.44)$$

În mod similar se definește randamentul instantaneu în funcție de puteri

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} \quad (5.45)$$

Aprecieri privitoare la domeniul de variație al randamentului și la modalitățile de îmbunătățire a valorii sale, sunt prezentate în subcap. 2.2.4. Procedeele de calcul al randamentului sunt arătate pentru fiecare categorie de mecanisme, în subcap. 2.2.4. (pentru mecanismele cu bare), 2.2.5. (pentru mecanismele cu șurub), 3.5.2., 3.5.3., 3.5.4. (pentru mecanismele cu came), 4.1.3.9. (pentru mecanismele elementare cu roți dințate), 4.2.1.2. (pentru mecanismele complexe formate din roți dințate cu axe fixe) și 4.2.2.3. (pentru mecanismele planetare).

5.2. ECHILIBRAREA FORȚELOR DE INERȚIE

Forțele de inerție, generate ca urmare a mișcării elementelor, au o influență negativă asupra funcționării mașinilor. Aceste forțe intervin în cadrul echilibrului cinetostatic, conform principiului lui d'Alambert, împreună cu forțele aplicate și cu forțele de legătură. Ca urmare, în cuplele cinematice apar componente ale reacțiunilor cauzate, în exclusivitate, de forțele de inerție, numite reacțiuni dinamice. Aceste reacțiuni provoacă solicitări suplimentare, majorează forțele de frecare și intensifică uzura suprafețelor care formează cuplele cinematice. Sistemul forțelor de inerție este variabil ca mărime și direcție, având un caracter ciclic. Oscilațiile acestor forțe generează vibrații care diminuează calitatea procesului tehnologic și reduc siguranța în exploatare. Forțele de inerție sunt proporționale cu pătratul vitezei unghiulare a elementului conducător. Prin urmare, efectele negative semnalate sunt cu atât mai pronunțate cu cât viteza de funcționare este mai mare. Datorită majorării continue a vitezelor de funcționare, în vederea creșterii productivității,

preocuparea pentru reducerea consecințelor provocate de forțele de inerție constituie o problemă de mare importanță.

Operația prin care componentele torsorului rezultat al forțelor de inerție se anulează sau se micșorează, ca rezultat al repartizării judicioase a maselor, se numește **echilibrare**. Denumirea se explică prin aceea că forțele de inerție corespunzătoare diverselor mase se echilibrează reciproc, astfel încât, torsorul rezultat să fie nul. Echilibrarea prin care se anulează numai forța de inerție rezultantă se numește **echilibrare statică**. Dacă se anulează atât forța de inerție cât și momentul forțelor de inerție, **echilibrarea este dinamică**.

5.2.1. Echilibrarea rotoarelor

5.2.1.1. Condițiile de echilibrare

Prin **rotor** se înțelege un element cu mișcare de rotație în jurul unei axe fixe.

Se consideră un rotor și un sistem de coordonate solidar cu el $Oxyz$, cu axa Oz suprapusă peste axa de rotație (Fig.5.17). Torsorul forțelor de inerție, redus în O , are componentele

$$\begin{cases} \bar{F}_i = -m \cdot \bar{a}_G \\ \bar{M}_i = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)\bar{j} - J_z\varepsilon\bar{k} \end{cases} \quad (5.46)$$

în care m este masa elementului, a_G este accelerația centrului de masă, ω și ε - viteza și accelerația unghiulară, iar J_{xz} , J_{yz} și J_z sunt momentele de inerție raportate la axele sistemului de coordonate. Condiția echilibrării statice este $\bar{F}_i = 0$, ceea ce conduce la $\bar{a}_G = 0$, deci centrul de masă G trebuie să se afle pe axa de rotație care, în acest caz, este axă centrală de inerție.

Condiția de echilibrare statică ($\bar{F}_i = 0$): axa de rotație trebuie să fie axă centrală de inerție.

Pentru anularea momentului \bar{M}_i trebuie anulate proiecțiile sale pe axele de coordonate. Proiecția $M_{iz} = -J_z\varepsilon$ se poate anula numai dacă $\varepsilon = 0$, deoarece $J_z \neq 0$. Această condiție nu depinde, însă, de distribuția masei rotorului. De altfel componenta $\bar{M}_z = -J_z\varepsilon\bar{k}$ nu provoacă reacțiuni dinamice în lagărele rotorului, iar anularea sau reducerea ei nu constituie

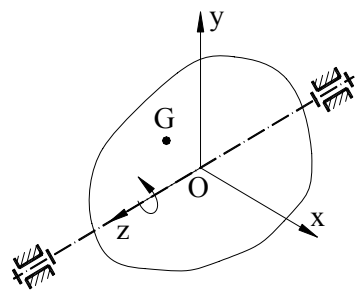


Fig. 5.17

obiectul echilibrării. În aceste condiții echilibrarea momentului \bar{M}_i se reduce la anularea proiecțiilor sale pe axele Ox și Oy,

$$\begin{aligned} M_{ix} &= J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0 \\ M_{iy} &= J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

În ipoteza $\omega \neq 0$, soluțiile sistemului (5.47) sunt $J_{xz} = 0$ și $J_{yz} = 0$, ceea ce înseamnă că axa de rotație este axă principală de inerție.

Condiția de echilibrare dinamică ($\bar{F}_i = 0$, $\bar{M}_i = 0$): axa de rotație trebuie să fie axă principală, centrală de inerție.

Observație

Dacă axa de rotație nu este axă centrală de inerție, iar condițiile $J_{xz} = 0$ și $J_{yz} = 0$ sunt îndeplinite pentru un punct de reducere aparținând axei de rotație, ele nu sunt îndeplinite și pentru celelalte puncte ale axei de rotație. Prin urmare, numai în punctul respectiv, sistemul forțelor de inerție se reduce la o forță de inerție rezultantă. Dacă axa de rotație este axă centrală de inerție, iar condițiile $J_{xz} = 0$ și $J_{yz} = 0$ sunt îndeplinite într-un punct al axei de rotație, ele sunt îndeplinite în toate punctele, astfel încât $\bar{F}_i = 0$ și $\bar{M}_i = 0$.

*

În vederea proiectării unor rotoți echilibrați este util să se cunoască unele cazuri în care anumite axe ale corpurilor sunt axe principale sau axe principale centrale de inerție.

- Dacă un corp are o axă de simetrie în repartiția masei, această axă este axă principală centrală de inerție.

- Dacă un corp prezintă simetrie de revoluție în repartiția masei, axa de rotație este axă principală centrală de inerție, iar orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie este axă principală de inerție.

- Dacă un corp are un plan de simetrie în repartiția masei, orice axă perpendiculară pe planul de simetrie este axă principală pentru punctul situat în planul de simetrie. Centrul de masă este situat, de asemenea, în planul de simetrie. Prin urmare, axa care trece prin centrul de masă și este perpendiculară pe planul de simetrie este axă principală centrală de inerție.

Pentru a ilustra cele arătate, se consideră un rotor de forma unei plăci dreptunghiulare omogene care se rotește în jurul unei axe situate în planul său (Fig.5.18). În funcție de poziția axei de rotație, pot interveni patru cazuri privind echilibrarea unui astfel de rotor, arătate în Fig.5.18.

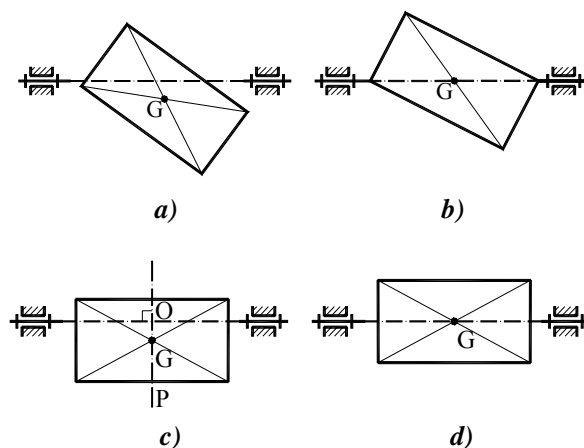


Fig. 5.18

a) Rotor neechilibrat, $\bar{F}_i \neq 0, \bar{M}_i \neq 0$; **b)** Rotor echilibrat static, $\bar{F}_i = 0, \bar{M}_i \neq 0$; **c)** Rotor neechilibrat. Deoarece planul P este plan de simetrie, axa de rotație, perpendiculară pe planul P, este axă principală numai în raport cu punctul O, în care $\bar{F}_i \neq 0, \bar{M}_i = 0$. În orice alt punct al axei de rotație, $\bar{F}_i \neq 0, \bar{M}_i \neq 0$; **d)** Rotor echilibrat dinamic, $\bar{F}_i = 0, \bar{M}_i = 0$, deoarece axa de rotație este axă de simetrie

5.2.1.2. Reducerea forțelor de inerție în două plane. Echilibrarea experimentală

Sistemul forțelor de inerție generate de un rotor se poate reduce la două forțe de inerție, dezvoltate de două mase concentrate, situate în două plane arbitrare perpendiculare pe axa de rotație. Pentru a demonstra acest principiu se consideră un rotor și un sistem de axe de coordonate Oxyz, având axa Oz suprapusă peste axa de rotație (Fig.5.19). Se consideră, de asemenea, două plane perpendiculare pe axa de rotație, notate S și T, în care se adoptă două mase concentrate $m_s(x_s, y_s, z_s)$ și $m_t(x_t, y_t, z_t)$, care generează forțele

de inerție \bar{F}_{is} și \bar{F}_{it} . Se scrie condiția de echivalență între sistemul forțelor de inerție ale rotorului, redus în O, (\bar{F}_i, \bar{M}_i) și sistemul $(\bar{F}_{is}, \bar{F}_{it})$,

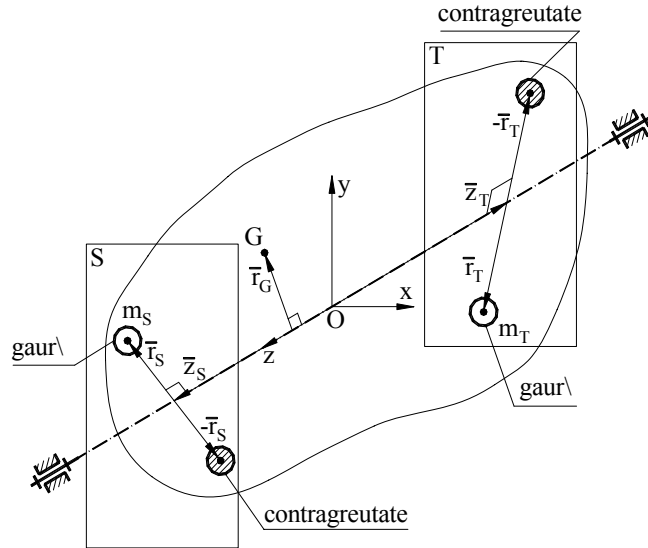


Fig. 5.19

$$\begin{aligned} \bar{F}_{is} + \bar{F}_{it} &= \bar{F}_i \\ \bar{z}_s \times \bar{F}_{is} + \bar{z}_t \times \bar{F}_{it} &= \bar{M}_i \end{aligned} \quad (5.48)$$

În ipoteza $\omega = ct$, $\varepsilon = 0$, vectorii \bar{F}_i , \bar{M}_i , \bar{F}_{is} și \bar{F}_{it} au expresiile

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -m \cdot \bar{a}_G = m \cdot \bar{r}_G \cdot \omega^2 \\ \bar{M}_i &= -J_{yz} \cdot \omega^2 \cdot \bar{i} + J_{xz} \cdot \omega^2 \cdot \bar{j} \\ \bar{F}_{is} &= -m \cdot \bar{a}_s = m \cdot \bar{r}_s \cdot \omega^2 \\ \bar{F}_{it} &= -m \cdot \bar{a}_t = m \cdot \bar{r}_t \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

în care \bar{r}_G este vectorul de poziție al centrului de masă G în planul său de rotație, iar \bar{r}_s și \bar{r}_t sunt vectorii de poziție ai maselor concentrate, în planele S și T. Introducând aceste expresii în relațiile (5.48) și simplificând prin ω^2 se obțin ecuațiile

$$\begin{cases} m_s \bar{r}_s + m_t \bar{r}_t = m \bar{r}_G \\ \bar{z}_s \times m_s \bar{r}_s + \bar{z}_t \times m_t \bar{r}_t = -J_{yz} \bar{i} + J_{xz} \bar{j} \end{cases} \quad (5.49)$$

Vectorii $\bar{u}_s = m_s \bar{r}_s$ și $\bar{u}_t = m_t \bar{r}_t$, care sunt necunoscutele sistemului (5.49), se numesc **vectorii dezechilibrului** raportați la planele S și T. Pentru determinarea lor, ecuațiile (5.43) se proiectează pe axele de coordonate, obținând un sistem scalar în necunoscutele $u_{sx}, u_{sy}, u_{tx}, u_{ty}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & z_s & 0 & z_t \\ z_s & 0 & z_t & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{tx} \\ u_{ty} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mx_G \\ my_G \\ J_{yz} \\ J_{xz} \end{vmatrix} \quad (5.50)$$

Determinantul sistemului are valoarea

$$D = -(z_s - z_t)^2,$$

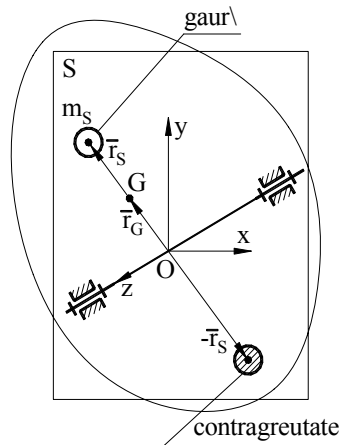


Fig. 5.20

iar sistemul este compatibil determinat dacă $D \neq 0$, iar $z_s \neq z_t$. Prin urmare principiul reducerii forțelor de inerție în două plane distincte este demonstrat.

În cazul rotoarelor cu dimensiuni reduse pe direcția axei de rotație (discuri, plăci), se poate considera, prin aproximație, că masa rotorului este repartizată într-un singur plan. În acest caz axa de rotație este axă principală de inerție pentru punctul O de intersecție cu planul rotorului deoarece $J_{xz} = 0$ și $J_{yz} = 0$ ($z = 0$ pentru toate punctele rotorului) (Fig. 5.20). Ca urmare $\bar{M}_i = 0$, iar sistemul forțelor de inerție se reduce, în punctul O, la o rezultantă unică. Este evident atunci că rotorul se poate

înlocui, din punctul de vedere al forțelor de inerție, cu o masă concentrată situată în planul său (S), conform ecuației de echivalență

$$\bar{F}_{is} = \bar{F}_i,$$

din care rezultă vectorul dezechilibrului

$$\bar{u}_s = m_s \bar{r}_s = m \bar{r}_G \quad (5.51)$$

*

Cu toate că, în faza de proiectare, rotoarele se concep echilibrate, după prelucrare se constată, de multe ori, dezechilibrări. Fenomenul este cauzat de erorile de prelucrare și de montare precum și de caracterul neomogen al materialului, mai ales în cazul pieselor turnate. Pentru a elimina aceste

dezechilibrări, în cadrul procesului tehnologic se prevede operația de echilibrare experimentală. Se pot da numeroase exemple de rotoare pentru care se execută aceste operații: arborii cotiți, arborii principali ai mașinilor unelte, rotoarele de turbine, rotoarele de motoare și generatoare electrice, ventilatoarele, tamburii de cardă, etc. Echilibrarea experimentală se efectuează modificând distribuția masei rotorului, fie prin eliminarea de material, fie prin adăugarea unor piese suplimentare numite **contragreutăți**. Se consideră, în acest scop, două plane perpendiculare pe axa de rotație, numite plane de corecție, notate, ca înainte, S și T. În cadrul operației de echilibrare experimentală, vectorii dezechilibrului \bar{u}_s și \bar{u}_t se determină cu ajutorul mașinilor de echilibrat sau a echipamentelor mobile de echilibrat în situ (pe lagărele proprii) prin măsurarea caracteristicilor vibrațiilor, care reprezintă consecința stării de dezechilibru. Având în vedere că $\bar{u}_s = m_s \bar{r}_s$ și $\bar{u}_t = m_t \bar{r}_t$, parametrii m_s , r_s , m_t , r_t se pot alege convenabil. De regulă r_s și r_t se adoptă, iar masele m_s și m_t se calculează,

$$m_s = \frac{u_s}{r_s}, m_t = \frac{u_t}{r_t}.$$

Cunoscând pozițiile ($z_s, \bar{r}_s, z_t, \bar{r}_t$) și valorile maselor (m_s, m_t) care provoacă dezechilibrul în cele două plane, se poate efectua operația de echilibrare. Dacă se adoptă metoda îndepărtării de material, se execută două găuri, în pozițiile indicate ($z_s, \bar{r}_s; z_t, \bar{r}_t$) astfel încât să se elimine cantitățile de material având masele m_s și m_t . În felul acesta, sistemul forțelor ($\bar{F}_{is}, \bar{F}_{it}$), generate de aceste mase, dispare, iar componentele torsorului rezultat al forțelor de inerție devin nule.

Dacă se adoptă metoda adăugării de material se montează două contragreutăți de mase m_s și m_t și de dimensiuni neglijabile, în două puncte de coordonate ($z_s, -\bar{r}_s$) și ($z_t, -\bar{r}_t$). Contragreutățile generează două forțe de inerție ($-\bar{F}_{is}, -\bar{F}_{it}$) care anihilează sistemul ($\bar{F}_{is}, \bar{F}_{it}$) echivalent cu torsorul (\bar{F}_i, \bar{M}_i).

În cazul rotoarelor în formă de discuri sau plăci care se rotesc în jurul unor axe perpendiculare pe planul lor, se poate adopta un singur plan de corecție care coincide cu planul rotorului.

*

Menționăm că prezentarea anterioară se referă la echilibrarea **rotoarelor rigide**, adică acelea care nu prezintă deformații de încovoiere importante, determinate de forțele de inerție centrifugale, la viteza de funcționare. În cazul echilibrării **rotoarelor elastice (flexibile)** trebuie să se țină seama de modificarea distribuției maselor datorită deformațiilor. În general, echilibrarea rotoarelor flexibile reclamă mai mult de două plane de corecție.

5.2.2. Echilibrarea mecanismelor

5.2.2.1. Condițiile de echilibrare

Un mecanism se consideră echilibrat dacă torsiul rezultat al forțelor de inerție, corespunzătoare sistemului format din elementele mobile, este nul. În felul acesta, reacțiunile dinamice (cauzate de forțele de inerție) din cuplele cinematice formate de elementul fix cu elementele mobile, sunt, de asemenea, nule.

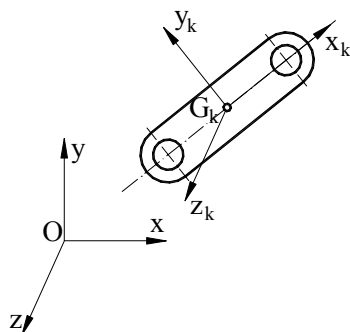


Fig. 5.21

Se consideră un element, k , în mișcare plan paralelă, aparținând unui mecanism plan (Fig.5.21) și un sistem de axe de coordonate $G_k x_k y_k z_k$, solidar cu elementul, având originea în centrul de masă (G_k) și axa Gz_k orientată perpendicular pe planul mișcării. Torsiul forțelor de inerție, aferent elementului k , redus în centrul de masă G_k este

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ik} &= -m_k \bar{a}_{G_k} \\ \bar{M}_{ik} &= (J_{xz}^k \varepsilon_k - J_{yz}^k \omega_k^2) \bar{i}_k + (J_{yz}^k \varepsilon_k + J_{xz}^k \omega_k^2) \bar{j}_k - J_z^k \varepsilon_k \bar{k}_k \end{aligned} \quad (5.52)$$

în care \bar{a}_{G_k} , $\bar{\omega}_k$ și ε_k sunt accelerația centrului de masă, viteza și accelerația unghiulară, m_k este masa elementului, iar J_{xz}^k , J_{yz}^k și J_z^k sunt momentele de inerție ale elementului raportate la sistemul de coordonate.

Se consideră, în continuare, un sistem de coordonate fix $Oxyz$ cu axa Oz perpendiculară pe planul mișcării mecanismului. Torsiul forțelor de inerție, pentru sistemul format din toate elementele mobile, în număr de $n-1$, redus în punctul O , este

$$\bar{F}_{im} = \sum_1^{n-1} \bar{F}_{ik} = -m_m \bar{a}_{G_m} \quad (5.53)$$

$$\bar{M}_{im} = \sum_1^{n-1} \bar{M}_{ik} + \sum_1^{n-1} \bar{M}_O(\bar{F}_{ik}) \quad (5.54)$$

În formula (5.53), m_m este masa elementelor mobile obținută prin însumare

$$m_m = \sum_1^{n-1} m_k, \quad (5.55)$$

iar \bar{a}_{G_m} este accelerația centrului de masă G_m al sistemului format din elementele mobile. Poziția punctului G_m se determină ca în cazul în care elementele sunt legate rigid în poziția considerată,

$$\bar{r}_{G_m} = \frac{\sum_1^{n-1} m_k \bar{r}_k}{\sum_1^{n-1} m_k} = \frac{\sum_1^{n-1} m_k \bar{r}_k}{m_m}, \quad (5.56)$$

în care \bar{r}_{G_m} și \bar{r}_k sunt vectorii de poziție ai punctelor G_m și G_k în raport cu punctul O.

Echilibrarea statică a mecanismului, adică anularea forței de inerție \bar{F}_{im} , se obține dacă $\bar{a}_{G_m} = 0$. Așa cum se observă din formula (5.56), centrul de masă G_m are o poziție variabilă deoarece vectorii \bar{r}_k sunt variabili. Punctul G_m descrie, în general, o curbă închisă situată într-un plan paralel cu planul Oxy. Printr-o poziționare corespunzătoare a centrelor de masă G_k , în raport cu fiecare element mobil, se poate ajunge la situația în care vectorul \bar{r}_{G_m} să fie constant pentru întreg ciclul cinematic al mecanismului. În acest caz punctul G_m este fix, iar $\bar{a}_{G_m} = 0$.

Condiția de echilibrare statică a unui mecanism: centrul de masă al sistemului format din elementele mobile trebuie să fie fix.

Momentul \bar{M}_{im} devine egal cu zero dacă se anulează cele două componente ale sale,

$$\bar{M}_{im1} = \sum_1^{n-1} \bar{M}_{ik}, \quad \bar{M}_{im2} = \sum_1^{n-1} \bar{M}_O(\bar{F}_{ik}) \quad (5.57)$$

în care $\bar{M}_O(\bar{F}_{ik})$ este momentul forței \bar{F}_{ik} în raport cu punctul O. Având în vedere formula (5.52) momentul \bar{M}_{im1} se poate scrie

$$\bar{M}_{im1} = \sum_1^{n-1} \left((J_{xz}^k \varepsilon_k - J_{yz}^k \omega_k^2) \bar{i}_k + (J_{yz}^k \varepsilon_k + J_{xz}^k \omega_k^2) \bar{j}_k \right) + \sum_1^{n-1} \left(-J_z^k \varepsilon_k \bar{k}_k \right) \quad (5.58)$$

Proiecția momentului \bar{M}_{im1} pe axa $Oz \parallel G_k z_k$ nu se poate anula deoarece $J_z^k \neq 0$, iar accelerațiile unghiulare ε_k nu pot fi constant nule pentru toate elementele. Aceste accelerații pot fi egale cu zero numai în cazul elementelor în mișcare de translație sau pentru anumite poziții discrete ale mecanismului, în cazul celorlalte elemente. În consecință, anularea acestei proiecții nu se poate înscrie ca un obiectiv al operației de echilibrare.

Proiecțiile momentului \bar{M}_{im1} pe planul $Oxy \parallel G_k x_k z_k$ se anulează dacă

$$J_{zz}^k = 0 \text{ și } J_{yz}^k = 0 \quad (k=1, n-1). \quad (5.59)$$

Cea mai simplă soluție constructivă, pentru a satisface aceste condiții, este de a proiecta elementele astfel încât să aibă un plan de simetrie paralel cu planul de mișcare. Această măsură nu este necesară în cazul elementelor cu mișcare de translație ($\omega_k = 0, \varepsilon_k = 0$) care au, oricum, proiecțiile momentului \bar{M}_{ik} , pe planul $G_k x_k y_k$, egale cu zero.

Pentru a studia componenta \bar{M}_{im2} , se exprimă momentul $\bar{M}_O(\bar{F}_{ik})$ prin proiecțiile sale pe axele reperului Oxyz. Având în vedere că mișcarea este plan paralelă, iar

$$\bar{F}_{ik} = F_{ikx} \bar{i} + F_{iky} \bar{j},$$

se poate scrie

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{F}_{ik}) = \bar{r}_{G_k} \times \bar{F}_{ik} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{G_k} & y_{G_k} & z_{G_k} \\ F_{ikx} & F_{iky} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -z_{G_k} F_{iky} \bar{i} + z_{G_k} F_{ikx} \bar{j} + (x_{G_k} F_{iky} - y_{G_k} F_{ikx}) \bar{k}. \end{aligned}$$

Momentul \bar{M}_{im2} se poate scrie, atunci, astfel

$$\bar{M}_{im2} = \sum_1^{n-1} z_{G_k} (-F_{iky} \bar{i} + F_{ikx} \bar{j}) + \sum_1^{n-1} (x_{G_k} F_{iky} - y_{G_k} F_{ikx}) \bar{k} \quad (5.60)$$

Ca și în situația precedentă, proiecția momentului \bar{M}_{im2} pe axa Oz nu se poate anula și nu face obiectul echilibrării. Pentru anularea proiecțiilor din planul Oxy se recomandă proiectarea mecanismului astfel încât să aibă un plan de simetrie, în repartiția maselor, paralel cu planul mișcării. O primă soluție, în acest sens constă în conceperea mecanismului astfel încât centrele de masă să se deplaseze în același plan. Dacă punctul O se adoptă în planul centrelor de masă,

$$z_{G_k} = 0 \quad (k=1, n-1),$$

ceea ce conduce la anularea proiecțiilor momentului \bar{M}_{im2} pe planul Oxy. O altă soluție se referă la mecanismele formate din lanțuri cinematice care funcționează în plane paralele, având un element conducător unic. Un exemplu, în acest sens, este arătat în Fig.5.22 în care este reprezentat un mecanism din construcția unui motor cu patru cilindri. Se observă că elementele sunt dispuse simetric față de planul Oxy. Elementele simetrice au coordonatele z_{G_k} egale și de semne contrare: $z_{G_2} = -z_{G_8}, z_{G_3} = -z_{G_9}, z_{G_4} = -z_{G_6}, z_{G_5} = -z_{G_7}$, iar $z_{G_1} = 0$.

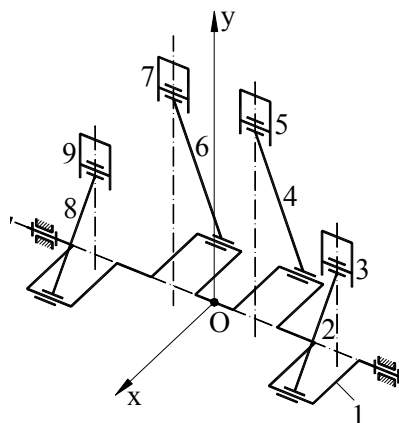


Fig. 5.22

mișcării. Dacă mecanismul are un singur lanț cinematic, centrele de masă ale elementelor trebuie să se deplaseze în același plan.

Menționăm că respectarea acestor recomandări nu asigură anularea componentei momentului forțelor de inerție perpendiculară pe planul mișcării.

Introducând aceste date în formula (5.54) se ajunge la concluzia că proiecțiile din planul Oxy ale momentului \bar{M}_{im2} sunt egale cu zero.

În concluzie, pentru echilibrarea momentului forțelor de inerție, se recomandă utilizarea cumulativă a următoarelor soluții practice.

1) Fiecare element să aibă un plan de simetrie paralel cu planul mișcării.

2) În cazul în care mecanismul este format din mai multe lanțuri cinemate dispuse în plane paralele, elementele trebuie amplasate simetric față de un plan paralel cu planul

5.2.2.2. Echilibrarea statică. Metoda punctelor principale

■ Determinarea poziției centrului de masă al mecanismului

Condiția echilibrării statice impune menținerea centrului de masă al sistemului format din elementele mobile, numit, pentru simplificare, centrul de masă al mecanismului, într-o poziție fixă. Metoda punctelor principale se bazează pe aplicarea unui procedeu specific de determinare a poziției centrului de masă al mecanismului.

Se consideră un mecanism, format dintr-un lanț simplu închis, cu $n - 1$ elemente mobile și un element fix (Fig.5.23). Se atașează fiecărui element mobil câte un vector \bar{l}_k având punctul de aplicație și extremitatea în articulațiile elementului k . Orientarea vectorului \bar{l}_k se face, în așa fel, ca lanțul cinematic să fie parcurs în același sens. Se consideră, de asemenea, vectorii $\bar{\rho}_k$, care determină poziția centrului de masă G_k în raport cu originea vectorilor \bar{l}_k . Poziția centrului de masă al mecanismului se determină cu formula (5.56), în care vectorii de poziție ai centrelor de masă \bar{r}_k , raportați la punctul A, se pot scrie sub forma

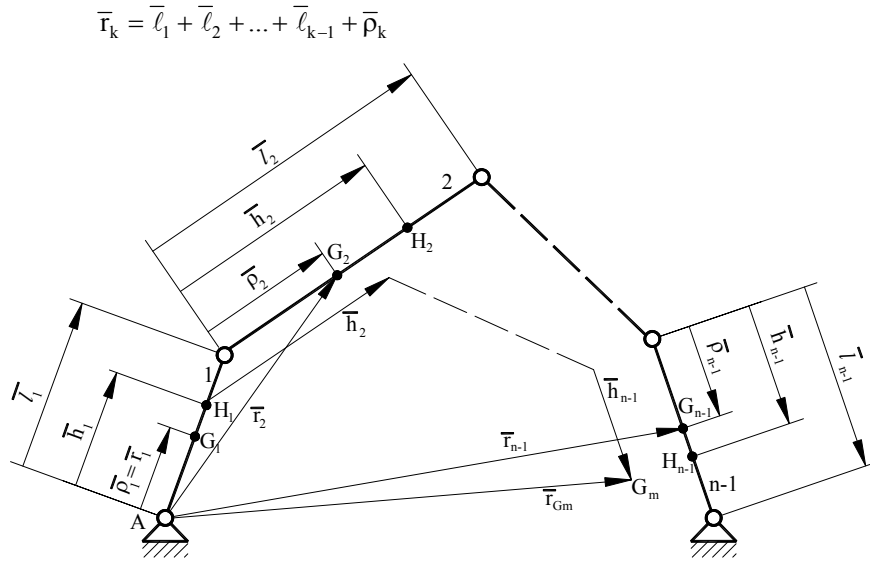


Fig. 5.23

Înlocuind în formula (5.56) expresiile vectorilor \bar{r}_k se obține

$$\bar{r}_{G_m} = \frac{m_1 \bar{\rho}_1 + m_2 (\bar{\ell}_1 + \bar{\rho}_2) + \dots + m_{n-1} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \dots + \bar{\ell}_{n-2} + \bar{\rho}_{n-1})}{m_m}$$

Printr-o reordonare a termenilor se ajunge la expresia

$$\begin{aligned} \bar{r}_{G_m} = & \frac{m_1 \bar{\rho}_1 + \bar{\ell}_1 (m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1})}{m_m} + \frac{m_2 \bar{\rho}_2 + \bar{\ell}_2 (m_3 + m_4 + \dots + m_{n-1})}{m_m} + \\ & + \dots + \frac{m_{n-1} \bar{\rho}_{n-1}}{m_m}. \end{aligned}$$

Făcând notația

$$\bar{h}_k = \frac{m_k \bar{\rho}_k + \bar{\ell}_k (m_{k+1} + \dots + m_{n-1})}{m_m}, \quad (5.61)$$

se obține următoarea formulă pentru calculul poziției centrului de masă al mecanismului

$$\bar{r}_{G_m} = \sum_1^{n-1} \bar{h}_k. \quad (5.62)$$

Vectorul \bar{h}_k , având aceeași direcție cu $\bar{\ell}_k$ și $\bar{\rho}_k$, determină, în raport cu articulația inițială a elementului k, poziția unui punct H_k , invariabil pe element, numit **punct principal**. Acest punct are următoarea semnificație fizică: reprezintă centrul de masă al corpului care se obține dacă în articulația inițială se concentrează masa tuturor elementelor anterioare lui k, în G_k se concentrează masa elementului k, iar în articulația finală se concentrează masa tuturor elementelor care urmează lui k. Prin însumarea grafică a vectorilor \bar{h}_k , în vederea determinării vectorului \bar{r}_{G_m} , se formează un poligon care are laturile paralele cu elementele mobile ale mecanismului, cum se observă în Fig.5.23. Metoda se poate aplica, prin modificări și dezvoltări corespunzătoare, și pentru mecanisme formate din lanțuri cinematice complexe sau în cazul în care centrele de masă ale elementelor nu sunt coliniare cu articulațiile acestuia [24].

■ Echilibrarea statică a mecanismului patruleter articulată

Mecanismul are trei elemente mobile (Fig.5.24) astfel încât condiția de echilibrare statică se poate scrie sub forma

$$\bar{r}_{G_m} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 = \bar{c} \quad (5.63)$$

în care \bar{c} este un vector constant. Această condiție este îndeplinită numai dacă vectorii punctelor principale au modulele proporționale cu lungimile elementelor,

$$\frac{h_1}{\ell_1} = \frac{h_2}{\ell_2} = \frac{h_3}{\ell_3} = k \quad (5.64)$$

În această ipoteză, vectorul \bar{r}_{G_m} capătă expresia

$$\bar{r}_{G_m} = k(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_3) = k\bar{\ell}_4.$$

Cum $\bar{\ell}_4$ este un vector constant, înseamnă că și \bar{r}_{G_m} este constant, coliniar cu $\bar{\ell}_4$. Prin urmare, punctul G_m se găsește pe dreapta AD, așa cum rezultă din Fig.5.24. Introducând expresiile parametrilor h_1 , h_2 și h_3 , așa cum rezultă din formula (5.61) în proporțiile (5.64), se obțin relațiile

$$\frac{m_1\rho_1 + \ell_1(m_2 + m_3)}{\ell_1} = \frac{m_2\rho_2 + \ell_2 m_3}{\ell_2} = \frac{m_3\rho_3}{\ell_3}, \quad (5.65)$$

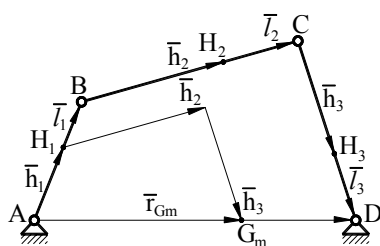


Fig. 5.24

care constituie condițiile ce trebuie satisfăcute de parametrii $m_1, m_2, m_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ pentru ca mecanismul să fie echilibrat. Analiza ecuațiilor (5.65) conduce la concluzii importante privind repartizarea maselor elementelor. În mod normal, un element cu două articulații are forma unei bare, cu centrul de masă situat între cele două articulații. Să presupunem că G_2 se află între articulațiile B și C (Fig.5.25.a), deci $0 < \rho_2 < \ell_2$. Din egalitățile (5.65) rezultă

$$m_1 \rho_1 = -m_2 (\ell_2 - \rho_2) \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (5.66)$$

$$m_3 \rho_3 = m_3 \ell_3 + m_2 \rho_2 \frac{\ell_3}{\ell_2} \quad (5.67)$$

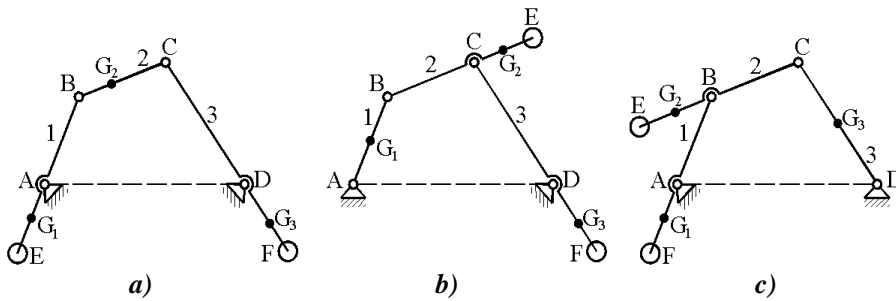


Fig.5.25

care arată că $\rho_1 < 0$ și $\rho_3 > \ell_3$. Aceasta înseamnă că centrele de masă ale elementelor 1 și 3 trebuie să se afle în afara articulațiilor. Pentru a le deplasa în aceste poziții, pe elementele 1 și 3 se montează două contragreutăți, în punctele E și F, ca în Fig.5.25.a. Pentru a determina masa (m_E) și poziția (ρ_E) ale contragreutății din E, presupunem că inițial, înainte de montarea contragreutății, elementul 1 este caracterizat de parametrii m'_1 și ρ'_1 . În această ipoteză se poate scrie

$$m_1 \rho_1 = m'_1 \rho'_1 + m_E \rho_E,$$

de unde rezultă

$$m_E \rho_E = m_1 \rho_1 - m'_1 \rho'_1$$

în care produsul $m_1 \rho_1$ are valoarea calculată cu formula (5.66). Cunoscând produsul $m_E \rho_E$, fiecare dintre parametrii m_E și ρ_E se adoptă convenabil, ținând seama de condițiile constructiv-funcționale. Produsul $m_F \rho_F$ se determină în mod similar.

Dacă se adoptă G_1 între articulații ($0 < \rho_1 < \ell_1$), din ecuațiile (5.65) rezultă

$$m_2 \rho_2 = m_2 \ell_2 + m_1 \rho_1 \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$m_3 \rho_3 = m_3 \ell_3 + m_1 \rho_1 \frac{\ell_3}{\ell_1},$$

care arată că $\rho_2 > \ell_2$ și $\rho_3 > \ell_3$. Prin urmare centrele de masă ale elementelor 2 și 3 trebuie deplasate în afara articulațiilor cu ajutorul unor contragreutăți ca în Fig.5.25.b.

În fine, dacă G_3 se adoptă între articulații ($0 < \rho_3 < \ell_3$), relațiile (5.65) scrise sub forma

$$m_1 \rho_1 = m_3 \frac{\ell_1}{\ell_3} (\rho_3 - \ell_3) - m_2 \ell_1$$

$$m_2 \rho_2 = m_3 \frac{\ell_2}{\ell_3} (\rho_3 - \ell_3)$$

conduc la inegalitățile $\rho_1 < 0$ și $\rho_2 < 0$. Prin urmare, centrele de greutate ale elementelor 1 și 2 trebuie deplasate în afara articulațiilor folosind două contragreutăți montate ca în Fig.5.25.c. Dintre cele trei soluții de echilibrare, cea mai recomandabilă este prima (Fig.5.25.a) deoarece montarea unei contragreutăți pe bielă este dificilă și mărește gabaritul mecanismului.

■ Echilibrarea statică a mecanismului manivelă - piston

Condiția echilibrării statice are aceeași formă (5.63) ca la mecanismul patrulater articulată. Întrucât \bar{h}_3 este un vector constant (elementul 3 are mișcare de translație, deci direcția lui \bar{h}_3 este invariabilă), condiția de echilibrare (5.63) devine

$$\bar{h}_1 + \bar{h}_2 = \bar{c} \quad (5.68)$$

Egalitatea (5.68) este satisfăcută pentru orice poziție a mecanismului numai dacă $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0$, iar $\bar{r}_{G_m} = \bar{h}_3$ (Fig.5.26.a). Având în vedere expresiile vectorilor \bar{h}_1 și \bar{h}_2 (5.61), rezultă

$$m_1 \rho_1 + \ell_1 (m_2 + m_3) = 0$$

$$m_2 \rho_2 + \ell_2 m_3 = 0$$

sau

$$m_1 \rho_1 = -\ell_1 (m_2 + m_3)$$

$$m_2 \rho_2 = -\ell_2 m_3.$$

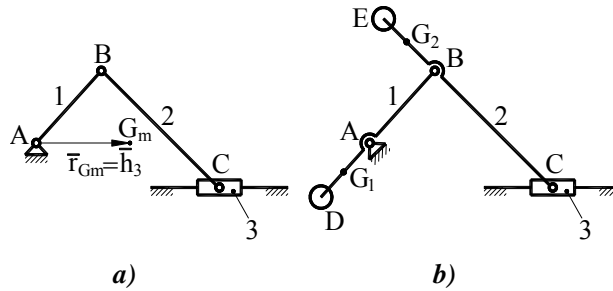


Fig. 5.26

Aceste relații arată că, pentru echilibrarea mecanismului, centrele de masă ale elementelor 1 și 2 trebuie să se afle în afara articulațiilor ($\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$). Pentru aceasta trebuie să se monteze două contragreutăți ca în Fig.5.26.b. Această soluție nu are o largă aplicație practică datorită dezavantajelor legate de montarea unei contragreutăți pe bielă. Mai frecvent se practică o echilibrare parțială urmărind numai anularea componentei perpendiculare pe axa de translație a forței de inerție rezultante. Pentru aceasta centrul de masă al mecanismului trebuie să aibă o traiectorie rectilinie paralelă cu axa de translație. În această situație, atât accelerația centrului de masă cât și forța de inerție au aceeași direcție – paralelă cu axa de translație, iar forța de inerție perpendiculară pe această axă este nulă. Se poate arăta că situația descrisă se înregistrează când modulele vectorilor \bar{h}_1 și \bar{h}_2 sunt proporționale cu lungimile ℓ_1 și ℓ_2 ,

$$\frac{h_1}{\ell_1} = \frac{h_2}{\ell_2} = k. \quad (5.69)$$

În acest caz vectorul \bar{r}_{G_m} se poate scrie

$$\bar{r}_{G_m} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 = k(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) + \bar{h}_3 = k\bar{r}_C + \bar{h}_3,$$

în care $\bar{r}_C = \overline{AC}$. Dacă se adoptă un sistem de coordonate cu originea în A (Fig.5.27.a), proiecția pe axa Ay a vectorului \bar{r}_{G_m} este

$$y_{G_m} = k \cdot y_C.$$

Deoarece y_C este constant, rezultă că și y_{G_m} este constant, ceea ce arată că traiectoria punctului G_m este o dreaptă paralelă cu axa Ax. Introducând expresiile vectorilor \bar{h}_1 și \bar{h}_2 (5.61) în relația (5.69) se obține

$$\frac{m_1 \rho_1 + \ell_1 (m_2 + m_3)}{\ell_1} = \frac{m_2 \rho_2 + \ell_2 m_3}{\ell_2}$$

sau

$$m_1 \rho_1 = -m_2 (\ell_2 - \rho_2) \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

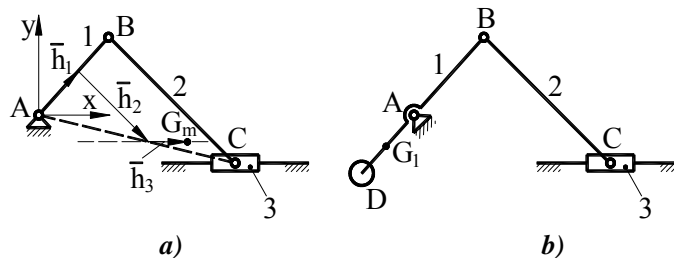


Fig. 5.27

Dacă G_2 se adoptă între articulațiile B și C ($0 < \rho_2 < \ell_2$), rezultă $\rho_1 < 0$, deci trebuie amplasată o contragreutate pe manivelă (Fig.5.27.b) pentru a deplasa centrul de greutate în afara articulațiilor.

5.2.2.3. Metoda analizei armonice

Această metodă este utilizată, ca și metoda punctelor principale, pentru echilibrarea statică a mecanismelor și se bazează pe dezvoltarea în serie Fourier a forțelor de inerție. Apoi, fiecare armonică se echilibrează separat cu ajutorul contragreutăților. Pentru exemplificare, se va arăta modul de aplicare a metodei în cazul unui mecanism manivelă – piston axial (Fig.5.28).

În vederea echilibrării, masa bielei se concentrează static în punctele B și C (par. 2.1.2.3)

$$m_{B_2} = m_2 \frac{\ell_2 - \rho_2}{\ell_2}, \quad m_{C_2} = m_2 \frac{\rho_2}{\ell_2}.$$

Masele în mișcare de rotație, concentrate în B (m_{B_2}) și $G_1(m_1)$ se echilibrează, ca în cazul unui rotor, printr-o contragreutate montată în punctul D,

$$m_D \rho_D = -m_1 \rho_1 - m_2 \frac{\ell_2 - \rho_2}{\ell_2} \ell_1.$$

Masele aflate în mișcare de translație, concentrate în punctul C,

$$m_C = m_3 + m_{C_2} = m_3 + m_2 \frac{\rho_2}{\ell_2},$$

rămân dezechilibrate. Forța de inerție generată de aceste mase este

$$F_{iC} = -m_C a_C.$$

Poziția punctului C este definită prin coordonata x_C care, în ipoteza $\ell_4 = 0$, are expresia (par. 2.1.4.3)

$$x_C = \ell_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1} \right),$$

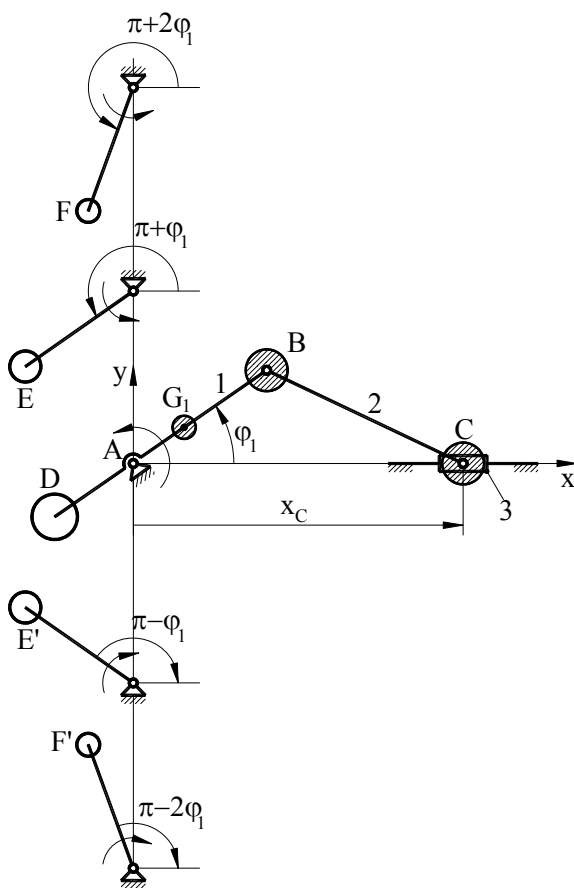


Fig. 5.28

în care $\lambda = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. Funcția $f(\varphi_1) = \cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1}$ este periodică în raport cu φ_1 și se poate dezvolta în serie Fourier,

$$f(\varphi_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\varphi_1 + b_j \sin j\varphi_1).$$

Deoarece funcția este pară, $f(-\varphi_1) = f(\varphi_1)$, coeficienții sinusurilor sunt nuli, $b_j = 0$. Coeficienții a_j se calculează cu formulele

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(\varphi_1) \cos j\varphi_1) d\varphi_1 \quad (j=0, 1, 2, \dots, n).$$

Aplicând aceste formule rezultă că toți coeficienții de ordin impar, cu excepția $j=1$, sunt nuli. Prin derivarea coordonatei $x_C = \ell_1 \cdot f(\varphi_1)$, de două ori în raport cu timpul, în ipoteza dezvoltării funcției $f(\varphi_1)$ în serie Fourier, se obține accelerația punctului C,

$$\begin{aligned} a_C &= -\ell_1 \omega_1^2 (a_1 \cos \varphi_1 + 2^2 a_2 \cos 2\varphi_1 + 4^2 a_4 \cos 4\varphi_1 + \dots) = \\ &= -\ell_1 \omega_1^2 \sum j^2 a_j \cos j\varphi_1 \quad (j=1, 2, 4, \dots, 2n). \end{aligned}$$

Notând $A_j = j^2 a_j$ ($j=1, 2, 4, \dots, 2n$) și înlocuind accelerația a_C în expresia forței de inerție F_{iC} , se obține

$$\begin{aligned} F_{iC} &= m_C \ell_1 \omega_1^2 (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos 2\varphi_1 + A_4 \cos 4\varphi_1 + \dots) = \\ &= m_C \ell_1 \omega_1^2 \sum A_j \cos j\varphi_1 \quad (j=1, 2, 4, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Valorile coeficienților A_j ($j=1, 2, 4, \dots, 2n$) sunt indicate în Tab.5.1 în funcție de valorile uzuale ale raportului λ .

Expresia forței de inerție (5.70) arată că aceasta se compune dintr-un număr de termeni, numiți **armonice**. Primul termen – **armonica fundamentală** are frecvența egală cu frecvența de rotație a elementului conducător, iar armonicile superioare au frecvențe egale cu multiplii pari ai armonice fundamentale.

Pentru a echilibra forța de inerție \bar{F}_{iC} , se echilibrează, separat, fiecare dintre armonicile sale. Deoarece forțele de inerție scad foarte mult cu creșterea ordinului armonice, așa cum rezultă din Tab.5.1, echilibrarea se limitează la armonicile de ordine inferioare.

Tabelul 5.1

λ	1/2,5	1/3	1/3,5	1/4	1/4,5	1/5	1/5,5	1/6
A_1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2	0,417325	0,343109	0,29178	0,254025	0,225031	0,202038	0,183345	0,167839
A_4	-0,18175	-0,010099	-0,006211	-0,004098	-0,002849	-0,002062	-0,001541	-0,001182
A_6	0,000891	0,000334	0,000149	0,000074	0,000041	0,000024	0,000015	0,000009
A_8	0,000043	0,000011	0,000004	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000

Armonica fundamentală

$$F_{iC1} = m_C \ell_1 \omega_1^2 A_1 \cos \varphi_1 \quad (5.71)$$

se echilibrează prin montarea a două contragreutăți E și E' (Fig.5.28) care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară ω_1 . Razele lor formează cu axa Ax unghiurile $(\pi - \varphi_1)$ și $(\pi + \varphi_1)$. Pentru echilibrare, este necesar ca suma proiecțiilor, pe direcția ghidajului, ale forțelor de inerție generate de contragreutăți, să fie egală și de sens contrar cu F_{iC1} ,

$$m_E \rho_E \omega_1^2 \cos(\pi - \varphi_1) + m_E \rho_E \omega_1^2 \cos(\pi + \varphi_1) = -m_C \ell_1 \omega_1^2 A_1 \cos \varphi_1$$

Din această ecuație se calculează valoarea produsului $m_E \rho_E$, în funcție de care se adoptă m_E și ρ_E ,

$$m_E \rho_E = \frac{m_C \ell_1 A_1}{2}. \quad (5.72)$$

Se observă că proiecțiile forțelor de inerție ale contragreutăților, pe direcție perpendiculară pe ghidaj, se echilibrează reciproc,

$$m_E \rho_E \omega_1^2 \sin(\pi - \varphi_1) + m_E \rho_E \omega_1^2 \sin(\pi + \varphi_1) = 0.$$

Antrenarea în rotație a contragreutăților se face prin transmiterea mișcării de la elementul conducător al mecanismului, cu ajutorul unor mecanisme cu roți dințate cu raportul de transmitere (+1) pentru o contragreutate și (-1) pentru cealaltă contragreutate.

Pentru a echilibra armonica de ordin doi,

$$F_{iC2} = m_C \ell_1 \omega_1^2 A_2 \cos 2\varphi_1 \quad (5.73)$$

se procedează în mod similar, utilizând contragreutățile F și F' (Fig.5.28), care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară $2\omega_1$ și care formează, cu axa Ax, unghiurile $(\pi - 2\varphi_1)$ și $(\pi + 2\varphi_1)$. Condiția de echilibrare este

$$m_F \rho_F (2\omega_1)^2 \cos(\pi - 2\varphi_1) + m_F \rho_F (2\omega_1)^2 \cos(\pi + 2\varphi_1) = -m_C \ell_1 \omega_1^2 A_2 \cos 2\varphi_1$$

din care rezultă

$$m_F \rho_F = \frac{m_C \ell_1 A_2}{8}. \quad (5.74)$$

Ca și la armonica fundamentală, proiecțiile forțelor de inerție ale contragreutăților F și F' , pe direcția perpendiculară pe ghidaj, se echilibrează reciproc.

5.2.2.4. Noțiuni privind echilibrarea motoarelor policilindrice

Motoarele policilindrice sunt compuse din mai multe mecanisme manivelă – piston care funcționează în plane paralele având o manivelă comună (arborele cotit). Recomandarea privitoare la simetria lanțurilor cinematice componente față de un plan paralel cu planul mișcării (par. 5.2.2.1) nu poate fi respectată întotdeauna, astfel încât, echilibrarea trebuie privită atât sub aspect static, cât și dinamic. Așa cum se va vedea, echilibrarea motoarelor policilindrice se realizează atât prin montarea unor contragreutăți, cât și prin decalarea judicioasă a manivelor mecanismelor componente, astfel ca forțele de inerție să se echilibreze reciproc.

■ Motorul cu doi cilindri

Cele două mecanisme, având manivelele decalate cu 180° , se notează ABC și ADE (Fig.5.29). Forțele de inerție cauzate de masele în mișcare de rotație, concentrate în punctele $B(\bar{F}_{iB})$ și $D(\bar{F}_{iD})$ se echilibrează reciproc datorită decalajului manivelor (Fig.5.29.b). Vom analiza, în continuare, modul în care acționează forțele de inerție de diferite ordine, obținute prin dezvoltarea Fourier, corespunzătoare maselor în mișcare de translație. Notând, pentru simplificare, unghiul și viteza unghiulară ale manivelei cu φ și ω , forțele de inerție, pentru cele două mecanisme, sunt

$$F_{iC1} = m_C \ell_1 \omega^2 A_1 \cos \varphi$$

$$F_{iE1} = m_E \ell_1 \omega^2 A_1 \cos(\pi + \varphi) = -m_E \ell_1 \omega^2 A_1 \cos \varphi.$$

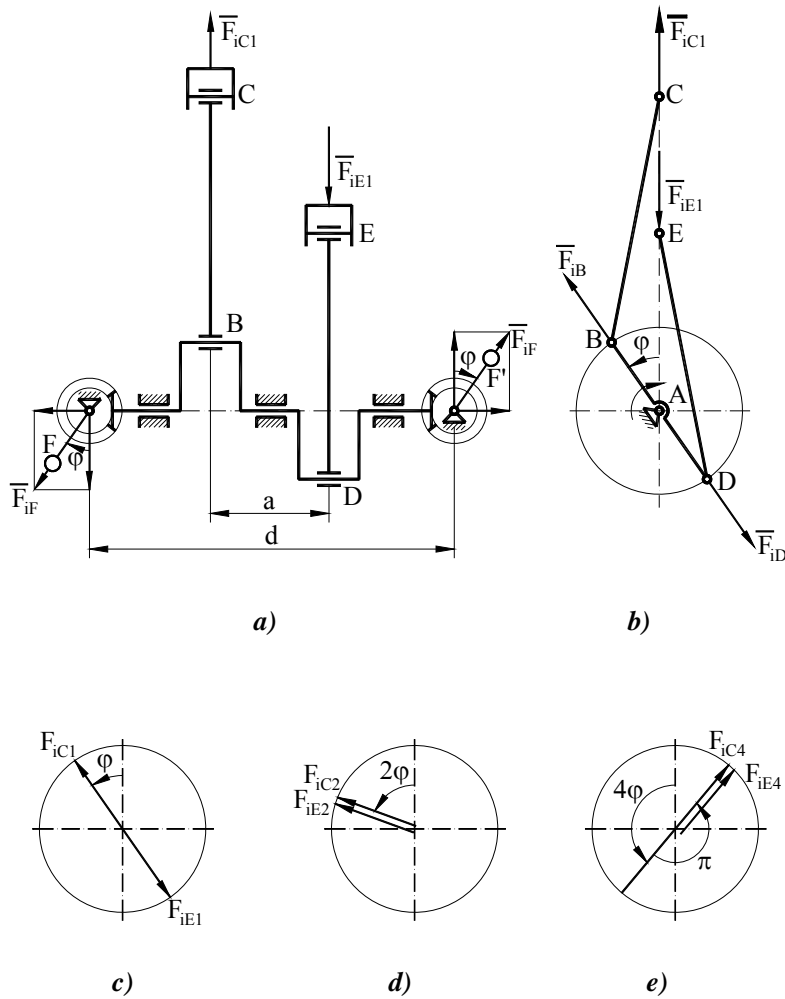


Fig. 5.29

Deoarece mecanismele sunt identice, $m_C = m_E$, iar $F_{iC1} = -F_{iE1}$ rezultă că forțele de inerție de ordinul 1 se echilibrează reciproc fără a fi nevoie de contragreutăți.

Forțele de inerție de ordinul 2 au expresiile

$$F_{iC2} = m_C \ell_1 \omega^2 A_2 \cos 2\varphi$$

$$F_{iE2} = m_E \ell_1 \omega^2 A_2 \cos 2(\pi + \varphi) = F_{iC2}.$$

Se observă că cele două forțe de inerție nu se echilibrează reciproc. În aceeași situație se află și forțele de inerție de ordinul 4. Echilibrarea lor se poate face cu contragreutăți în modul arătat la mecanismul manivelă – piston.

Forțele de inerție de diferite ordine pot fi interpretate ca fiind proiecțiile pe axa de translație a unor vectori care se rotesc cu viteza $n \cdot \omega$ (n – ordinul armonice). Unghiurile acestor vectori sunt argumentele funcției cosinus din expresia forței de inerție și se calculează cu formula

$$\varphi_k = n(\varphi + \alpha_k), \quad (5.75)$$

în care k este numărul de ordine al cilindrului, φ este unghiul de poziție al manivelei având $k=1$, iar α_k unghiul dintre manivela k și manivela $k=1$. Această formulă este valabilă pentru forțele de inerție de ordinul 1, 2, 6, 8. Pentru forțele de inerție de ordinul 4, care au coeficienții A_4 negativi, se utilizează formula

$$\varphi_k = 4(\varphi + \alpha_k) + \pi. \quad (5.76)$$

Valorile unghiurilor vectorilor rotitori, pentru motorul cu doi cilindri, sunt date în tabelul următor.

n	Cilindrul 1, mecanismul ABC $\alpha_1 = 0$	Cilindrul 2, mecanismul ADE $\alpha_2 = \pi$
1	φ	$\varphi + \pi$
2	2φ	$2\varphi + (2\pi)$
4	$4\varphi + \pi$	$4\varphi + \pi + (4\pi)$
6	6φ	$6\varphi + (6\pi)$

Folosind aceste valori s-au reprezentat diagramele vectorilor rotitori pentru forțele de inerție de ordinele 1 (Fig.5.29.c), 2 (Fig.5.29.d) și 4 (Fig.5.29.e). În aceste diagrame se observă, în mod sugestiv, faptul că forțele de inerție de ordinul 1 se autoechilibrează, iar cele de ordinul 2 și de ordinul 4 nu se bucură de această proprietate.

Trebuie remarcat că forțele de inerție de ordinul 1 (F_{iC1} și F_{iE1}), acționând în plane diferite, produc un cuplu (Fig.5.29.a). Momentul acestui cuplu, numit moment de răsturnare, poate fi echilibrat prin montarea a două contragreutăți, F și F' , care se rotesc în jurul unor axe perpendiculare pe axa de rotație a manivelor, așa cum se arată în Fig.5.29.a. Contragreutățile sunt acționate cu ajutorul unor angrenaje conice prin care se transmite mișcarea de la arborele cotit. Deoarece momentul care trebuie echilibrat este provocat de armonica fundamentală, viteza unghiulară a contragreutăților trebuie să fie egală cu cea a manivelei, deci raportul de transmitere al angrenajelor conice trebuie să

fie egal cu unitatea. Masa și raza contragreutăților rezultă din condiția de echilibrare a cuplului creat de forțele F_{IC1} și $F_{IE1} = -F_{IC1}$,

$$\begin{aligned} F_{IF} \cdot \cos \varphi \cdot d &= F_{IC1} \cdot a \\ (m_F \rho_F \omega^2 \cos \varphi) d &= (m_C \ell_1 \omega^2 A_1 \cos \varphi) a \\ m_F \rho_F &= m_C \ell_1 A_1 \frac{a}{d}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

în care a și d sunt distanțe puse în evidență pe desen (Fig.5.29.a).

■ Motorul cu trei cilindri

În cazul motoarelor cu trei cilindri, având manivelele decalate cu 120° , forțele de inerție ale maselor în mișcare de rotație \bar{F}_{iB} , \bar{F}_{iD} și \bar{F}_{iF} se echilibrează reciproc, așa cum reiese din Fig.5.30.a. Analiza echilibrării forțelor de inerție cauzate de masele în mișcare de translație se face pe baza diagramelor vectorilor rotitori trasate cu ajutorul unghiurilor calculate cu formulele (5.75), (5.76) și indicate în tabelul următor.

n	Cilindrul 1, mecanismul ABC $\alpha_1 = 0$	Cilindrul 2, mecanismul ADE $\alpha_2 = 120^\circ$	Cilindrul 3, mecanismul AFG $\alpha_3 = 240^\circ$
1	φ	$\varphi + 120^\circ$	$\varphi + 240^\circ$
2	2φ	$2\varphi + 240^\circ$	$2\varphi + 480^\circ =$ $= 2\varphi + 120^\circ + (2\pi)$
4	$4\varphi + \pi$	$4\varphi + 480^\circ + \pi =$ $= 4\varphi + 300^\circ + (2\pi)$	$4\varphi + 960^\circ + \pi =$ $= 4\varphi + 60^\circ + (6\pi)$
6	6φ	$6\varphi + 720^\circ =$ $= 6\varphi + (4\pi)$	$6\varphi + 1440^\circ =$ $= 6\varphi + (8\pi)$

Forțele de inerție de ordinele 1, 2 și 4 se autoechilibrează așa cum se observă în diagramele din Fig.5.30.b, c, și d.

Forțele de inerție de ordinul 6 nu se echilibrează reciproc (Fig.5.30.e) dar ele sunt foarte mici, așa încât pot rămâne neechilibrate fără ca funcționarea motorului să fie influențată vizibil. Forțele de inerție de ordinele 1, 2 și 4 provoacă, însă, momente de răsturnare care se echilibrează cu contragreutăți așa cum s-a arătat la motorul cu doi cilindri. Este important să fie echilibrat momentul de răsturnare cauzat de forțele de inerție de ordinul 1. Momentele provocate de forțele de inerție de ordinele 2 și 4 sunt mai mici, dar și dificil de echilibrat deoarece contragreutățile trebuie să se rotească cu viteze de două și de patru ori mai mari decât viteza arborelui cotit.

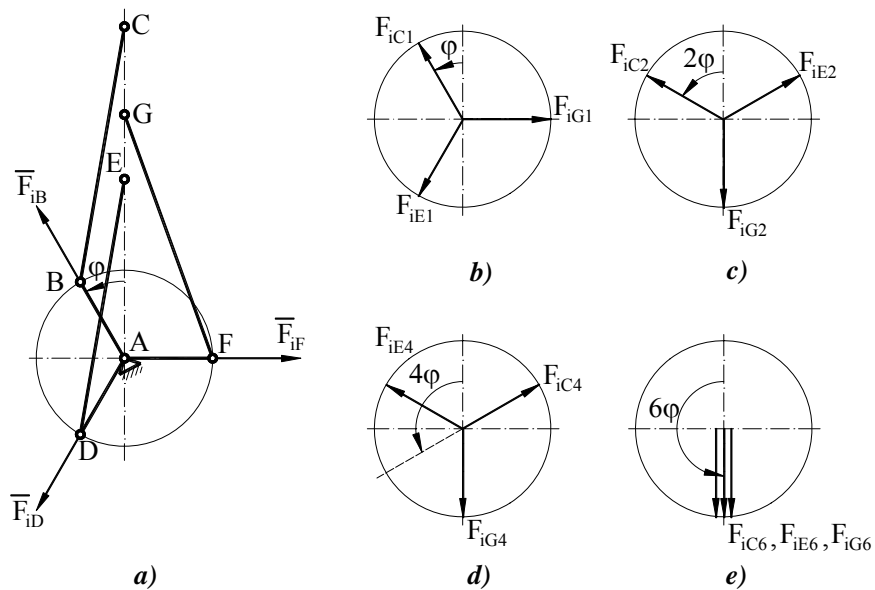


Fig. 5.30

■ Motorul cu patru cilindri

Motorul cu patru cilindri, cu manivelele decalate la 180° ca în Fig.5.31, poate fi considerat ca fiind format din două motoare cu doi cilindri alăturate. Ca și la motoarele cu doi cilindri, forțele de inerție ale maselor în mișcare de rotație \vec{F}_{IB} , \vec{F}_{ID} , \vec{F}_{IF} , \vec{F}_{IH} (Fig.5.31.b), precum și forțele de inerție ale maselor în mișcare de translație, de ordinul 1, \vec{F}_{IC1} , \vec{F}_{IE1} , \vec{F}_{IG1} , \vec{F}_{IH} (Fig.5.31.c) se autoechilibrează. Rămân neechilibrate forțele de inerție de ordine superioare

(Fig.5.31.d,e). Trebuie menționat că forțele de inerție de ordinul 1, corespunzătoare celor 4 mecanisme, formează două cupluri egale cu $F_{iC1} \cdot b$, care se autoechilibrează având sensuri contrare. Rezultă că, la acest motor, nu acționează un moment de răsturnare.

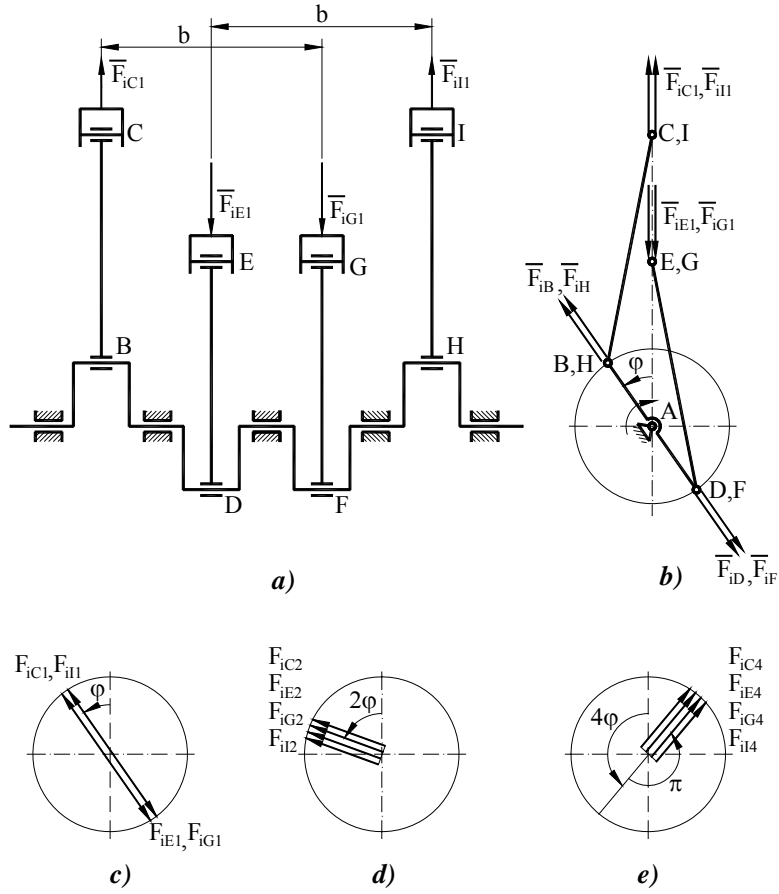


Fig. 5.31

Anexe

ANEXA 1

NOȚIUNI DE GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

1.1. Transformări de coordonate

- Transformări între două sisteme carteziane plane (Fig.A.1)

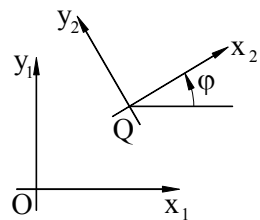


Fig.A.1

Poziția sistemului Qx_2y_2 în raport cu sistemul Ox_1y_1 este dată prin unghiul φ și prin coordonatele punctului Q : x_{1Q} și y_{1Q} .

Transformarea $Qx_2y_2 \rightarrow Ox_1y_1$

$$\begin{cases} x_1 = x_{1Q} + x_2 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi \\ y_1 = y_{1Q} + x_2 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Dacă $O \equiv Q$ se obține

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi \\ y_1 = x_2 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Dacă $\varphi = 0$ se obține

$$\begin{cases} x_1 = x_{1Q} + x_2 \\ y_1 = y_{1Q} + y_2 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Transformarea $Ox_1y_1 \rightarrow Qx_2y_2$

$$\begin{cases} x_2 = -x_{1Q} \cos \varphi - y_{1Q} \sin \varphi + x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ y_2 = x_{1Q} \sin \varphi - y_{1Q} \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Dacă $O \equiv Q$ se obține

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ y_2 = -x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Dacă $\varphi = 0$ se obține

$$\begin{cases} x_2 = -x_{1Q} + x_1 \\ y_2 = -y_{1Q} + y_1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

■ **Transformări dintr-un sistem cartezien într-un sistem polar (Fig.A.2)**

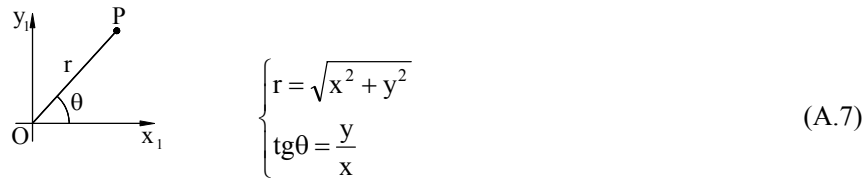


Fig.A.2

1.2. Tangenta și normala la o curbă

Fie o curbă dată prin ecuațiile parametrice în coordonate carteziene

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Ecuațiile tangentei într-un punct $P(x_p, y_p)$ este

$$\frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{y'_p}{x'_p}, \quad (\text{A.9})$$

în care x'_p și y'_p sunt derivatele $x'(t)$ și $y'(t)$ în punctul P.

Ecuația normalei în P este

$$\frac{y - y_p}{x - x_p} = -\frac{x'_p}{y'_p}. \quad (\text{A.10})$$

1. 3. Raza de curbură, convexitatea, concavitătea

Raza de curbură într-un punct $P(x, y)$, a unei curbe dată sub forma (A.8), este

$$|R_c| = \frac{(x_p'^2 + y_p'^2)^{3/2}}{|x_p'y'' - y_p'x''|}. \quad (A.11)$$

Această formulă nu oferă informații cu privire la orientarea concavității (convexității) curbei în P.

În terminologia camelor plane de rotație, se spune că un profil este **convex** într-un punct P, când centrul de rotație O și centrul de curbură C se găsesc de aceeași parte a tangentei la curbă în P (Fig.A.3.a). Desigur, profilul este **concav** când cele două puncte O și C se află de o parte și de cealaltă parte a tangentei (Fig.A.3.b).

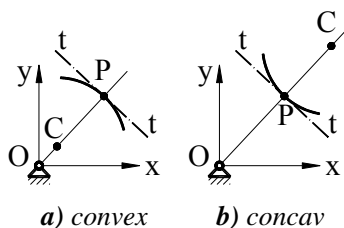


Fig. A.3

Tangenta la profil în P are ecuația

$$f(x, y) = (y - y_p)x'_p - (x - x_p)y'_p = 0.$$

În cazul profilului convex există inegalitatea

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) > 0,$$

iar în cazul profilului concav,

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) < 0.$$

Având în vedere că $x_0 = y_0 = 0$, iar x_C și y_C au expresiile [11]

$$x_C = x_p - \frac{y'_p(x_p'^2 + y_p'^2)}{x'_p y''_p - y'_p x''_p}; \quad y_C = y_p + \frac{x'_p(x_p'^2 + y_p'^2)}{x'_p y''_p - y'_p x''_p}$$

se obține

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) = \frac{(x_p'^2 + y_p'^2)(x_p y'_p - y_p x'_p)}{x_p'^2 y_p''(x'_p y''_p - y'_p x''_p)}.$$

Eliminând factorii pozitivi, rezultă că semnul produsului $f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C)$ depinde numai de semnul expresiei

$$E_{sl} = \frac{x_p y'_p - y_p x'_p}{x'_p y''_p - y'_p x''_p}.$$

În felul acesta, raza de curbură R_c , pentru un punct curent al profilului, de coordonate (x, y) , se calculează cu formula

$$R_C = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} \cdot \text{SGN}\left(\frac{xy' - yx'}{x'y'' - y'x''}\right)$$

sau, mai simplu,

$$R_C = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot \text{SGN}(xy' - yx'), \quad (\text{A.12})$$

în care funcția $\text{SGN} = \pm 1$ după cum expresia din paranteză este pozitivă sau negativă.

Dacă R_C rezultă, din formula (A.12), cu semnul (+) profilul este convex, iar dacă rezultă cu semnul (-) este concav.

În cazul camelor în mișcare de translație paralelă cu axa Ox , se spune că profilul este convex într-un punct P dacă $y_P - y_C > 0$ (Fig.A.4.a) și concav dacă $y_P - y_C < 0$ (Fig.A.4.b). Diferența $y_P - y_C$ are expresia

$$y_P - y_C = -\frac{x'_P (x_P'^2 + y_P'^2)}{x'_P y''_P - y'_P x''_P},$$

iar semnul său depinde numai de semnul expresiei

$$E_{s2} = \frac{-x'_P}{x'_P y''_P - y'_P x''_P}.$$

Astfel, raza de curbură într-un punct curent se calculează cu formula

$$R_C = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} \cdot \text{SGN}\left(\frac{-x'}{x'y'' - y'x''}\right)$$

sau, mai simplu,

$$R_C = \frac{-(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot \text{SGN}(x'). \quad (\text{A.13})$$

Dacă R_C rezultă, din formula (A.13), cu semnul (+) profilul este convex, iar dacă rezultă cu semnul (-) este concav.

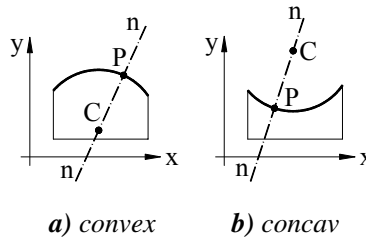


Fig. A.4

1.4. Unghiul de poziție al unui vector

Se consideră vectorul $\vec{r} = \overline{AB}$ (Fig.A.4.1) exprimat în funcție de proiecțiile sale pe axele unui sistem de coordonate

$$\vec{r} = \overline{AB} = \vec{i}(x_B - x_A) + \vec{j}(y_B - y_A).$$

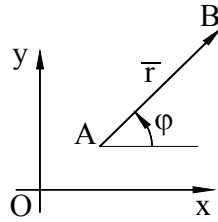


Fig. A.4.1

Unghiul de poziție φ al acestui vector, măsurat în sens trigonometric, de la semiaxa pozitivă Ox este

$$\varphi = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad (\text{A.13.1})$$

Cadrantul în care se înscrie unghiul se stabilește din tabelul următor, în funcție de semnele proiecțiilor vectorului \vec{r} .

$x_B - x_A$	+	-	-	+
$y_B - y_A$	+	+	-	-
$\varphi \in$	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$

Precizăm că limbajele de programare și sistemele de programe (MATHCAD, MATLAB) au funcții speciale pentru calculul acestui unghi. Astfel în MATHCAD există funcția

`angle(x, y)`

care calculează unghiul φ și în care

$$x = x_B - x_A$$

$$y = y_B - y_A.$$

ANEXA 2

NOȚIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.1. Derivatele funcțiilor inverse

$$y = f(x) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^3} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \quad (\text{A.16})$$

2.2. Derivatele funcțiilor implicite

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} \quad (\text{A.19})$$

2.3. Derivatele funcțiilor date parametric

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3} \quad (\text{A.22})$$

ANEXA 3

MIȘCAREA RELATIVĂ DINTRE DOUĂ CORPURI (ROȚI DINȚATE) CARE EXECUTĂ MIȘCĂRI ABSOLUTE DE ROTAȚIE ÎN JURUL A DOUĂ AXE FIXE

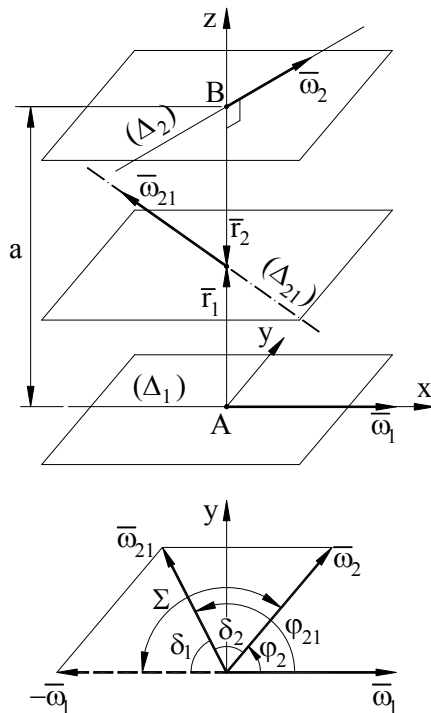


Fig. A.5

Se consideră două corpuri (roți dințate) care se rotesc cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ în jurul axelor fixe (Δ_1) și (Δ_2) (Fig.A.5).

Se definesc următorii parametri:

a – distanța dintre axele (Δ_1) și (Δ_2) măsurată pe perpendiculara comună ;

Σ - cel mai mic unghi cu care trebuie rotit vectorul $\bar{\omega}_1$ pentru a fi adus în poziția de paralelism cu vectorul $\bar{\omega}_2$, în așa fel ca sensurile să fie opuse ;

i_{12} - raportul de transmitere definit prin relația

$$i_{12} = \frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|}.$$

3.1. Axa instantanee a mișcării relative

Direcția axei instantanee a mișcării relative este indicată de suportul vectorului $\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$.

$$\bar{\omega}_{21} = \bar{i} \cdot |\omega_2| \cos \varphi_2 + \bar{j} \cdot |\omega_2| \sin \varphi_2 - \bar{i} \cdot |\omega_1| = \bar{i} \cdot (|\omega_2| \cos \varphi_2 - |\omega_1|) + \bar{j} \cdot |\omega_2| \sin \varphi_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = \frac{|\omega_2| \sin \varphi_2}{|\omega_2| \cos \varphi_2 - |\omega_1|} = \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - i_{12}}$$

Se determină direcția vectorului $\bar{\omega}_{21}$ cu ajutorul unghiurilor δ_1 și δ_2 formate de acest vector cu $-\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$, având în vedere că $\delta_1 = \pi - \varphi_{21}$, $\delta_2 = \varphi_{21} - \varphi_2$ și $\varphi_2 = \pi - \Sigma$,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{i_{12} + \cos \Sigma} \quad (\text{A.24})$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{i_{12} \sin \Sigma}{1 + i_{12} \cos \Sigma} \quad (\text{A.25})$$

Poziția axei instantanee a mișcării relative este determinată de vectorii \bar{r}_1 și \bar{r}_2 (Fig.A.5). Vectorul $\bar{r}_2 = \overline{BC}$ rezultă din relația [12]:

$$\begin{aligned} \bar{r}_2 = \overline{BC} &= \frac{\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B21}}{\omega_{21}^2} = \frac{\bar{\omega}_{21} \times (-\bar{\omega}_1 \times \overline{AB})}{\omega_{21}^2} = \frac{\overline{AB} \cdot \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)}{\omega_{21}^2} \\ &= \overline{AB} \cdot \frac{|\omega_1| \cdot |\omega_2| \cos \varphi_2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2|\omega_1| \cdot |\omega_2| \cos \varphi_2} = \overline{AB} \cdot \frac{i_{12} (\cos \varphi_2 - i_{12})}{1 + i_{12}^2 - 2i_{12} \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

$$\bar{r}_1 = \overline{AB} + \bar{r}_2 = \overline{AB} \cdot \frac{1 - i_{12} \cos \varphi_2}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos \varphi_2}$$

$$r_1 = a \frac{1 + i_{12} \cos \Sigma}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos \Sigma} \quad (\text{A.26})$$

$$r_2 = a \frac{-i_{12} (\cos \Sigma + i_{12})}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos \Sigma} \quad (\text{A.27})$$

Din relațiile (A.24) – (A.27) se deduc următoarele formule utile pentru calculul raportului de transmitere,

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad (\text{A.28})$$

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1}. \quad (\text{A.29})$$

3.2. Axoidele mișcării relative

Axoidele mișcării relative sunt generate prin rotirea axei instantanee (Δ_{21}) în jurul axelor (Δ_1) și (Δ_2). Axoida solidară cu roata 1 se obține prin rotirea dreptei (Δ_{21}) de ecuații

$$\begin{aligned} y &= -z \cdot \operatorname{tg} \delta_1 \\ z &= r_1 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

în jurul dreptei (Δ_1) de ecuație

$$y = z = 0.$$

Cercul generator [28] are ecuațiile

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y^2 + z^2 &= \mu^2. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Din sistemul format de ecuațiile (A.30) și (A.31) rezultă o relație între parametrii λ și μ ,

$$\lambda^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_1 + r_1^2 = \mu^2. \quad (\text{A.32})$$

Axoida căutată se obține eliminând parametrii λ și μ între relațiile (A.32) și ecuațiile cercului generator (A.31), rezultând

$$x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_1 - y^2 - z^2 + r_1^2 = 0$$

sau

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \delta_1}{r_1^2} - 1 = 0. \quad (\text{A.33})$$

Ecuația (A.33) reprezintă un hiperboloid de rotație cu o pânză. Intersecțiile sale cu planele Axz ($y = 0$) și Ayz ($x = 0$) reprezintă o hiperbolă,

$$\frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \delta_1}{r_1^2} - 1 = 0$$

și un cerc,

$$x^2 + z^2 = r_1^2.$$

Desigur, axoïda solidară cu roata 2 este tot un hiperboloid de rotație în jurul axei (Δ_2). În Fig.A.6 se reprezintă cei doi hiperboloizi în ipoteza uzuală $\Sigma = \frac{\pi}{2}$ și $i = 1,5$ ($\delta_1 = 33,69^\circ$, $\delta_2 = 56,31^\circ$).

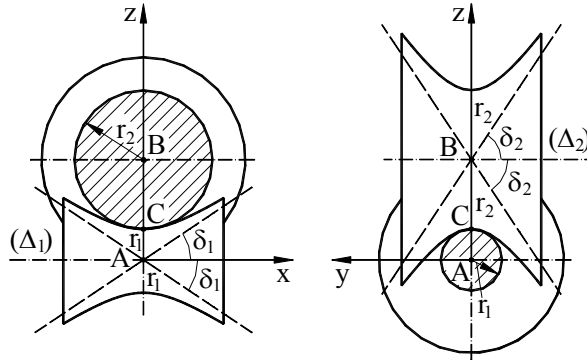


Fig. A.6

ANEXA 4

DEMONSTRAȚIA RELAȚIEI $a_x \geq a$

a , α_w - distanța dintre axe și unghiul de angrenare la un angrenaj paralel, în ipoteza absenței jocului dintre profile.

a_w , α_{wx} - distanța dintre axe și unghiul de angrenare în ipoteza obținerii jocului radial standardizat.

Distanța a se calculează cu relația

$$a = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_w} \quad (4.39)$$

în care α_w se determină din relația

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_0 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (4.37)$$

Distanța a_x se calculează cu relația

$$a_x = m \frac{z_1 + z_2}{2} + m(x_1 + x_2), \quad (4.43)$$

iar unghiul de angrenare α_{wx} rezultă, în funcție de a_x , dintr-o relație similară cu (4.39),

$$a_x = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wx}}. \quad (\text{A.34})$$

În ipoteza

$$a_x \geq a, \quad (\text{A.35})$$

din (4.39) și (A.34) se obține

$$\cos \alpha_{wx} \leq \cos \alpha_w \quad (\text{A.36})$$

sau

$$\alpha_{wx} \geq \alpha_w, \quad \alpha_w \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{A.37})$$

Deci, pentru a arăta că relația (A.35) este adevărată este suficient să demonstrăm relația (A.36).

Din (4.37) rezultă

$$2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} = \frac{\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (\text{A.38})$$

iar din (4.43) și (A.34) se obține

$$2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{wx}} - 1. \quad (\text{A.39})$$

Egalitățile (A.38) și (A.39) conduc la o relație între α_{wx} și α_w ,

$$\cos \alpha_{wx} = \frac{\sin \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w + \alpha_0}. \quad (\text{A.40})$$

Introducând $\cos \alpha_{wx}$ (A.40) în (A.36) se obține relația

$$\frac{\sin \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w + \alpha_0} \leq \cos \alpha_w \quad (\text{A.41})$$

care trebuie demonstrată. Deoarece $\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w + \alpha_0 > 0$, se poate scrie

$$\begin{aligned} \cos \alpha_w \cdot (\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w + \alpha_0) - \sin \alpha_0 &\geq 0 \\ f(\alpha_w) = \sin \alpha_w - (\alpha_w - \alpha_0) \cdot \cos \alpha_w - \sin \alpha_0 &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Se derivează funcția $f(\alpha_w)$ și se egalează cu zero, pentru a determina valorile extreme,

$$f'(\alpha_w) = (\alpha_w - \alpha_0) \sin \alpha_w = 0.$$

Rezultă că în punctul $\alpha_w = \alpha_0$ se înregistrează un minim global pentru funcția $f(\alpha_w)$, având valoarea $f(\alpha_0) = 0$ deoarece $f''(\alpha_0) = \sin \alpha_0 > 0$. Aceasta înseamnă că $f(\alpha_w) \geq 0$ și, deci, relațiile (A.42), (A.41), (A.37), (A.36) și, în final, (A.35) sunt adevărate.

Diagrama $\alpha_{wx}(\alpha_w)$ (Fig.A.7) trasată după formula (A.40) confirmă relația (A.37) și arată că $\alpha_{wx} = \alpha_w$ în punctul $\alpha_w = \alpha_0$.

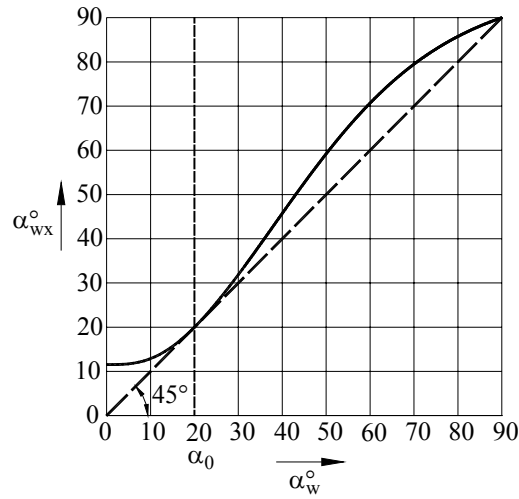


Fig. A.7

BIBLIOGRAFIE

1. **Alexandru, P., ș.a.**, Proiectarea funcțională a mecanismelor, Ed. Lux. Libris, Brașov.
2. **Antonescu P., ș.a.**, Mecanisme, Teme de proiect, Ed. PRINTECH, București, 2000.
3. **Artobolevskii, I.I.**, Mehanizmi v Sovremennoi Tehnike, I-V, Izd. NAUKA, 1979-1981.
4. **Duca, C., Popovici A., Oprișan, C.**, Bazele Proiectării Mecanismelor cu came, Ed. Gh. Asachi, Iași, 1999.
5. **Duca, Cezar**, Mecanisme, institutul Politehnic Iași, 1983.
6. **Dudiță, Fl., Diaconescu, D.** Optimizarea Structurală a Mecanismelor, Ed. Tehnică, București, 1997.
7. **Dudiță, Fl.**, Transmisii Cardanice, Ed. Tehnică, București, 1966.
8. **Dudiță, Fl., ș.a.**, Mecanisme Articulate, Inventica, Cinematica, Ed. Tehnică, Bucurști, 1989.
9. **Frolov, K.V., ș.a.**, Teoria Mehanizmov i mașin, Vîșșaiia Șkola, Moskva, 1987.
10. **Handra-Luca, V., Stoica, A.V.**, Introducere în Teoria Mecanismelor, Ed. Dacia, Cluj-Napoca,
11. **Ionescu, Gh., D.**, Teoria Diferențială a Curbelor și Suprafețelor cu Aplicații Tehnice, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1984.
12. **Irimiciuc, N.**, Mecanica, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1965.
13. **Jensen, P.W.**, Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors, Marcel Dekker, Inc., New-York, 1991.
14. **Jula, A., ș.a.**, Proiectarea Angrenajelor evolventice, ed. Scrisul Romanesc, Craiova, 1989.
15. **Krainev, A.F.**, Slovări - Spravocinîh po Mehanizmam, Mașinostroenie, Moskva, 1987.
16. **Kreinin, G.V., ș.a.**, Dinamika mașin i upravlenie mașinami, Mașinostroenie, 1988.
17. **Kreinin, G.V., ș.a.**, Kinematika, Dinamika i Tocinosti Mehanizmov, Spravocinik, Mașinostroenie, Moskva, 1984
18. **Lebedev, P.A.**, Kinematika prostranstvennîh Mehanizmov, Mașinostroenie, Moskva, Leningrad, 1966.
19. **Levițkii, N.I.**, Kolebania v Mehanizmah, NAUKA, Moskva, 1988.
20. **Levițkii, N.I.**, Teoria Mehanizmov i Mașin, NAUKA, Moskva, 1979.
21. **Manafu, V.**, Teoria mecanismelor și a Mașinilor, Cinematica și Structura Mecanismelor, Ed. Tehnică, București, 1959.
22. **Mangeron, D., Irimiciuc, N.**, Mecanica Rigidelor cu Aplicații în Inginerie, Mecanica Sistemelor de Rigide, Ed. Tehnică, București, 1980.

23. **Manolescu, N., Kovacs, Fr., Orănescu, A.**, Teoria Mecanismelor și a Mașinilor, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1972.
24. **Manolescu, N.I., Maros, D.**, Teoria Mecanismelor și a Mașinilor, Cinetostatica și Dinamica, Ed. Tehnică, București, 1958.
25. **Maros, D.**, Mecanisme (I), Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1980.
26. **Maros, Desideriu**, Teoria Mecanismelor și a Mașinilor, Cinematica Roților Dințate, Ed. Tehnică, București, 1958.
27. **Moise, V., ș.a.**, Analiza mecanismelor plane cu bare articulate, Ed. BREN, București, 2001.
28. **Murgulescu, E., ș.a.**, Geometrie Analitică și Diferențială, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1965.
29. **Pelecudi, Chr.**, Bazele Analizei Mecanismelor, Ed. Academiei R.S.R., București, 1967.
30. **Pelecudi, Chr.**, Precizia Mecanismelor, Ed. Academiei R.S.R., București, 1975.
31. **Pelecudi, Chr., ș.a.**, Mecanisme, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985.
32. **Pelecudi, Chr.**, Teoria Mecanismelor Spațiale, Ed. Academiei R.S.R., București, 1972.
33. **Perju, D.**, Mecanisme de mecanică fină, vol.1-2, Litografia Universității Tehnice Timișoara, 1986/1990.
34. **Reshetov, L.**, Self-aligning mechanisms, Mir Publishers, Moscow, 1979.
35. **Sauer, L., ș.a.**, Angrenaje, vol. 1,2, Ed. Tehnică, București, 1970.
36. **Simionescu, I., Dranga, M., Moise, V.**, Metode numerice în tehnică, Ed. Tehnică, București, 1995.
37. **Simionescu, I., Moise, V.**, Mecanisme, Ed. Tehnică, București, 1999.
38. **Suh, C.H., Radcliffe, C.W.**, Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons, New-York, 1978.
39. **Szekely, I.**, Teoria Mecanismelor și Organe de Mașini, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968.
40. **Voinea, R., ș.a.**, Mecanica, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975.

Data aparitiei: SEPTEMBRIE 2003
Comanda nr. 109, Tiraj: 290
Coli tipar: 27,8



Str. Lascăr Catargi nr. 38
Tel./Fax: 0232- 21 59 49

UTI

1213
LEI 90000