

IOAN D. DOROFTEI

BAZELE ROBOTICII
CURS
(revizuit 2016)

*"O lucrare aduce greșeli: greșelile sînt
un îndemn spre a face mai bine; vine o
zi cînd lucrătorul moare zdrobit; dar lumii
i-a folosit și munca lui și durerile ce au
adus o muncă nouă."*

N. Iorga

*"A descoperi lipsurile nu este suficient, dacă
nu propui și mijloacele de îndreptare."*

J. W. Goethe

*Familiei mele, cu dragoste și recu-
noștință, pentru sprijin și răbdare.*

Autorul

PREFAȚĂ

Robotica este un domeniu fascinant, interdisciplinar, ce merită abordat de cei pasionați de tehnică, chiar dacă aceștia nu sunt interesați de a face carieră în acest domeniu. Pe de o parte, există o mare diversitate de aplicații excitante, în permanență fiind posibilă conceperea unor noi sisteme. Pe de altă parte, roboții sunt interesați prin ei înșiși, crearea de oameni artificiali, spre exemplu, constituind preocupările multor cercetători.

Datorită realizărilor în domeniul interdisciplinar numit robotică, astăzi roboții, practic, fac parte integrantă din viața noastră. Dacă la început aceștia erau utilizați doar pentru înlocuirea omului în activitățile industriale grele și murdare, evoluția rapidă a acestui domeniu conduce la o „explozie” a aplicațiilor roboților, în special în sfera serviciilor.

Lucrarea se adresează atât studenților din domeniul Mecatronică și Robotică, studenților de la alte specializări din cadrul Universității Tehnice “Gh. Asachi” Iași, cât și tuturor inginerilor și tehnicienilor, care lucrează în cercetarea, proiectarea și exploatarea roboților industriali și nu numai. Această lucrare acoperă doar categoria roboților de tip manipulator.

Cursul de față este structurat pe 9 capitole și 3 anexe. Primul capitol face o introducere generală în ceea ce înseamnă conceptele de robot și robotică, prezentând și efectele economice și sociale ale robotizării, respectiv o clasificare a roboților și aplicațiile acestora.

Capitolul 2 este destinat structurii sistemului mecanic. După o prezentare generală a arhitecturii acestui sistem și definirea unor elemente de bază, este studiat fiecare mecanism ce intră în componența acestuia.

Pentru determinarea pozițiilor relative ale elementelor cinematice din structura unui manipulator, este necesară efectuarea unor transformări de coordonate. În acest context, capitolul 3 conține principalele aspecte ale acestor transformări: matricea simplă de rotație, matricea simplă de translație, matricea de transformare omogenă, parametrii lui Euler, unghiurile lui Euler, etc.

Bazele roboticii

Capitolul 4, intitulat "Cinematica directă a pozițiilor" prezintă o metodologie simplă de analiză a roboților seriali plani, precum și metodele de analiză a roboților spațiali, pe baza convențiilor Denavit-Hartenberg.

În practica industrială, de cele mai multe ori, se impune traiectoria efectorului final, punându-se problema determinării parametrilor cuplelor cinematice, ceea ce se numește cinematica inversă a pozițiilor, aceasta fiind abordată în capitolul 5.

Capitolul 6 prezintă o metodă recursivă de propagare a vitezelor și accelerațiilor de la un element la altul. De asemenea, sunt definite matricele Jacobiene, geometrică și analitică, metodologia de determinare a acestora și relația de legătură dintre ele, prezentându-se și problemele de singularitate ce apar în funcționarea unui manipulator.

Capitolul 7, intitulat "Statica roboților de tip manipulator" prezintă o metodă recursivă de determinare a forțelor și momentelor statice, care acționează asupra elementelor unui robot de tip manipulator, precum și a cuplului necesar actuatorului unei cuple cinematice.

În capitolul 8, după o scurtă trecere în revistă a unor aspecte privind dinamica unui corp rigid, sunt discutate două metode de determinare a ecuațiilor dinamice de mișcare ale unui manipulator.

Capitolul 9 discută o serie de funcții, ce pot fi utilizate pentru generarea traiectoriei unui robot de tip manipulator, în spațiul cuplelor cinematice sau în spațiul de lucru.

Pentru a ușura înțelegerea teoriei prezentate, fiecare capitol conține exemple sugestive.

În sprijinul modelelor matematice utilizate pe parcursul lucrării, anexele A, B și C reamintesc o serie de aspecte referitoare la calculul vectorial și matriceal, respectiv unele formule necesare efectuarea analizei cinematice a roboților de tip manipulator.

Ioan D. Doroftei
15.03.2016

CUPRINS

Prefață	iii
Cuprins	v
Capitolul 1: Introducere	1
1.1 Generalități	1
1.2 Definiții	2
1.3 Istoric.....	3
1.3.1 Importanța studierii istoriei roboților.....	3
1.3.2 Evenimente cheie în istoria roboților	4
1.4 Piața mondială a roboților industriali.....	8
1.5 Aspecte economice și sociale ale automatizării	10
1.5.1 Generalități	10
1.5.2 Tipuri de automatizare	10
1.5.3 Motive în favoarea automatizării.....	12
1.5.4 Motive împotriva automatizării	13
1.5.5 Justificarea utilizării roboților	14
1.5.5.1 Pași în justificarea utilizării unui robot	14
1.5.5.2 Stabilirea domeniilor unde un robot este necesar	15
1.5.5.3 Justificarea cheltuielilor de instalare a roboților	16
1.5.5.3.2 Calculul rentabilității investiției	17
1.5.5.3.3 Îmbunătățirea securității lucrătorilor prin utilizarea roboților	17
1.5.6 Dezavantajele utilizării roboților	17
1.5.7 Impact social	18
1.5.8 Probleme etice	20
1.6 Clasificarea roboților.....	21
1.6.1 Clasificare după generația tehnologică	21
1.6.2 Clasificarea roboților după tipul acestora	22

Cuprins

1.6.3 Clasificare după domeniul de aplicare	23
1.6.4 Clasificarea roboților industriali	24
1.6.4.1 Clasificare după ramurile industriale în care se utilizează	24
1.6.4.2 Clasificare după aria de aplicație.....	25
1.6.4.3 Clasificare după structura mecanică	26
1.6.5 Clasificarea roboților pentru servicii	27
1.6.6 Clasificarea roboților comandați la distanță	28
1.7 Aplicații ale roboților.....	28
1.7.1 Aplicații industriale	28
1.7.2 Aplicații ale roboților pentru servicii	31
1.7.3 Aplicații ale roboților comandați la distanță	34
1.7.3.1 Roboți comandați prin unde radio	34
1.7.3.2 Teleroboți	35
1.7.4 Interfețe mecanice pentru realitatea virtuală	36
1.8 Arhitectura unui sistem robotizat	36
1.9 Importanța studierii roboticii	38

Capitolul 2: Structura sistemului mecanic 41

2.1 Definiții.....	41
2.2 Componentele sistemului mecanic.....	44
2.3 Parametrii de bază ai unui robot de tip manipulator.....	46
2.4 Structura mecanismului de ghidare	48
2.4.1 Gradul de mobilitate al mecanismului de ghidare.....	48
2.4.1.1 Exemplu de calcul a gradului de mobilitate ...	50
2.4.2 Structura mecanismului de poziționare.....	53
2.4.3 Structura mecanismelor de orientare	62
2.5 Efectorul final	66
2.5.1 Mecanisme de prehensiune.....	68
2.5.1.1 Tipuri de mecanisme de prehensiune	69
2.5.1.2 Mecanisme de prehensiune mecanice	70
2.5.1.2.1 Prehensor tip mecanism cu bare	70
2.5.1.2.2 Prehensor tip pinion-cremalieră	74
2.5.1.2.3 Prehensor tip mecanism cu camă.....	76
2.5.1.2.4 Prehensor tip mecanism șurub- piuliță	76
2.5.1.2.5 Prehensor tip mecanism cu cabluri ..	77

Capitolul 3: Transformări de coordonate 79

3.1 Generalități	79
3.2 Poziția și orientarea unui corp rigid.....	80

Bazele Roboticii

3.3 Matricea de rotație	82
3.3.1 Rotații simple (elementare)	82
3.3.2 Compunerea matricelor de rotație	84
3.4 Matricea de transformare omogenă	87
3.4.1 Forme particulare pentru matricea de transformare omogenă	88
3.5 Operații cu transformări de coordonate	90
3.5.1 Compunerea transformărilor	90
3.5.1.1 Exemplul 3.1.....	91
3.5.2 Inversa unei matrice de transformare	93
3.6 Ecuații de transformare.....	94
3.6.1 Exemplul 3.2	96
3.7 Unghiurile fixe X-Y-Z	97
3.8 Unghiurile Euler Z-Y-X	99
3.9 Alte convenții de unghiuri.....	101
3.10 Reprezentarea unghi-axă echivalentă	104
3.10.1 Exemplul 3.3.....	106
3.10.2 Exemplul 3.4.....	106
3.11 Parametrii lui Euler	108
3.12 Orientări învățate și predefinite	110

Capitolul 4: Cinematica directă a pozițiilor 111

4.1 Generalități	111
4.2 Cinematica directă a pozițiilor roboților cu structură plană.....	111
4.2.1 Introducere	111
4.2.2 Rezolvarea cinematicii directe a pozițiilor	113
4.3 Cinematica directă a pozițiilor roboților cu structură spațială... 114	
4.3.1 Generalități	114
4.3.2 Lanț cinematic deschis	115
4.3.2.1 Parametrii Denavit-Hartenberg standard	117
4.3.2.2 Parametrii Denavit-Hartenberg modificali ...	120
4.3.3 Lanț cinematic închis	123
4.3.4 Exemple privind analiza cinematică directă	124
4.3.4.1 Braț plan cu trei grade de mobilitate	125
4.3.4.2 Braț plan tip paralelogram	129
4.3.4.3 Braț în coordonate sferice.....	132
4.3.4.4 Braț antropomorfic	134
4.3.4.5 Mecanism de orientare sferic.....	135
4.3.4.6 Braț în coordonate sferice cu mecanism de orientare sferic.....	138
4.3.5 Sisteme de axe cu denumiri standard	143

Capitolul 5: Cinematica inversă a pozițiilor..... 147

5.1 Generalități	147
5.2 Posibilități de rezolvare	147
5.2.1 Existența soluțiilor	148
5.2.2 Soluții multiple.....	150
5.2.3 Metode de rezolvare	151
5.3 Algebric versus geometric	152
5.3.1 Considerații matematice preliminare	152
5.3.2 Metodă algebrică de rezolvare.....	153
5.3.3 Metodă geometrică de rezolvare.....	157
5.4 Rezolvare algebrică prin reducere la un polinom.....	160
5.4.1 Exemplul 5.1	160
5.4.2 Exemplul 5.2	161
5.5 Exemple privind analiza cinematică inversă a pozițiilor.....	162
5.5.1 Cinematica inversă a pozițiilor unui manipulator serial plan	162
5.5.2 Cinematica inversă a manipulatoarelor cu mecanism de orientare sferic	164
5.5.3 Cinematica inversă a unui braț în coordonate sferice.	165
5.5.4 Cinematica inversă a unui braț antropomorf	167
5.5.5 Cinematica inversă a unui mecanism de orientare sferic.....	169
5.7 Precizie și exactitate.....	170

**Capitolul 6: Cinematica vitezelor și
accelerațiilor.....173**

6.1 Generalități.....	173
6.2 Mișcarea generală a corpului rigid.....	174
6.2.1 Viteza unghiulară a unui corp rigid.....	174
6.2.1.1 Exemplu.....	176
6.2.2 Viteza liniară a unui punct.....	177
6.2.3 Accelerația liniară a unui punct.....	179
6.3 Propagarea vitezelor și accelerațiilor de la un element la altul..	180
6.3.1 Scrierea ecuațiilor în raport cu sistemul de referință $\{0\}$	181
6.3.1.1 Viteza unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de referință $\{0\}$	181
6.3.1.2 Accelerația unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de referință $\{0\}$	181
6.3.1.3 Viteza liniară, exprimată în raport cu sistemul de referință $\{0\}$	182

Bazele Roboticii

6.3.1.4	Accelerația liniară, exprimată în raport cu sistemul de referință $\{0\}$	182
6.3.2	Scrierea ecuațiilor în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$	182
6.3.2.1	Viteza unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$	182
6.3.2.2	Accelerația unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$	183
6.3.2.3	Viteza liniară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$	183
6.3.2.4	Accelerația liniară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$	185
6.3.3	Scurt rezumat privind vitezele și accelerațiile cuplurilor cinematice.....	186
6.3.4	Calculul vitezelor pentru manipulatorul Stanford.....	188
6.4	Matricea Jacobiană geometrică.....	200
6.4.1	Derivarea unei matrice de rotație.....	201
6.4.2	Calculul matricei Jacobiene geometrice.....	202
6.4.3	Schimbarea sistemului de referință al matricei Jacobiene.....	204
6.4.4	Exemple de calcul a matricei Jacobiene.....	205
6.4.4.1	Manipulator plan cu trei grade de mobilitate.....	205
6.4.4.2	Manipulator antropomorf.....	210
6.5	Singularități.....	214
6.5.1	Decuplarea singularităților.....	216
6.5.2	Singularitățile mecanismului de orientare.....	217
6.5.3	Singularitățile mecanismului de poziționare.....	218
6.6	Cinematica inversă a vitezelor.....	220
6.7	Matricea Jacobiană analitică.....	221
6.7.1	Exemplu de integrare a vitezei unghiulare.....	226
6.7.2	Exemplu de calcul a matricei Jacobiene analitice.....	227

Capitolul 7: Statica roboților de tip manipulator..231

7.1	Generalități.....	231
7.2	Momentele de torsiune din cuple.....	233
7.3	Metoda recursivă.....	234
7.4	Exemplu.....	235

Capitolul 8: Dinamica roboților de tip manipulator.....245

8.1	Dinamica corpului rigid.....	245
-----	------------------------------	-----

8.1.1 Matricea de inerție.....	245
8.1.1.1 Teorema axelor paralele.....	247
8.1.1.2 Momentul de inerție principal.....	248
8.1.2 Impulsul.....	248
8.1.3 Momentul cinetic.....	249
8.1.4 Energia cinetică.....	251
8.1.5 Ecuațiile Newton-Euler.....	251
8.1.5.1 Forțele în centrul de masă.....	253
8.2 Formularea recursivă Newton Euler.....	254
8.2.1 Calculul vitezelor și accelerațiilor.....	256
8.2.2 Calculul forțelor și momentelor.....	257
8.3 Formularea Lagrange.....	259
8.3.1 Generalități.....	259
8.3.1.1 Coordonate generalizate.....	260
8.3.2 Energia cinetică.....	260
8.3.3 Energia potențială.....	263
8.3.4 Forțele generalizate.....	263
8.3.5 Forma generală a ecuațiilor dinamice.....	264
8.3.6 Formularea Lagrange pe scurt.....	266
8.4 Analiza dinamică a unui manipulator serial plan cu 2 grade de mobilitate folosind metoda recursivă Newton-Euler.....	268
8.4.1 Determinarea matricelor de rotație.....	269
8.4.2 Determinarea vectorilor de poziție.....	270
8.4.3 Determinarea matricelor de inerție.....	271
8.4.4 Calculul vitezelor și accelerațiilor.....	272
8.4.4.1 Propagarea vitezelor unghiulare.....	272
8.4.4.2 Propagarea accelerațiilor unghiulare.....	272
8.4.4.3 Propagarea vitezelor liniare.....	273
8.4.4.4 Propagarea accelerațiilor liniare.....	274
8.4.5 Determinarea accelerațiilor centrelor de masă.....	279
8.4.6 Calculul forțelor și momentelor.....	280
8.4.6.1 Determinarea vectorilor gravitaționali.....	280
8.4.6.2 Determinarea forțelor și momentelor.....	281
8.4.7 Ecuațiile dinamice de mișcare.....	288
8.5 Analiza dinamică a unui manipulator de tip SCARA.....	290
8.5.1 Determinarea matricelor de rotație.....	291
8.5.2 Determinarea vectorilor de poziție.....	292
8.5.3 Calculul vitezelor și accelerațiilor.....	293
8.5.3.1 Propagarea vitezelor unghiulare.....	293
8.5.3.2 Propagarea accelerațiilor unghiulare.....	294
8.5.3.3 Propagarea vitezelor liniare.....	294
8.5.3.4 Propagarea accelerațiilor liniare.....	296
8.5.4 Determinarea vectorilor de poziție ai centrelor de masă.....	301

Bazele Roboticii

8.5.5 Calculul accelerațiilor centrelor de masă.....	303
8.5.6 Determinarea forțelor și momentelor.....	304
8.5.7 Ecuatiile dinamice de mișcare.....	316

Capitolul 9: Generarea traiectoriei.....319

9.1 Generalități.....	319
9.2 Generarea în spațiul cuplelor cinematice.....	320
9.2.1 Polinoame de ordinul trei.....	321
9.2.2 Funcții polinomiale cubice pentru o traiectorie cu puncte intermediare.....	323
9.2.3 Polinoame de ordin mai mare ca trei.....	327
9.2.4 Funcții liniare cu segmente parabolice.....	328
9.2.4 Funcții liniare cu segmente parabolice, pentru traiectorii cu puncte intermediare.....	330
9.3 Generarea în spațiul cartezian de lucru.....	333
9.3.1 Mișcare după o dreaptă.....	334
9.4 Probleme geometrice la generarea traiectoriilor în spațiul de lucru.....	334
9.4.1 Probleme de tipul 1: puncte intermediare din afara spațiului de lucru.....	334
9.4.2 Probleme de tipul 2: viteze mari ale cuplelor în vecinătatea singularităților.....	335
9.4.3 Probleme de tipul 3: soluții diferite de atingere a punctului inițial și final.....	336

Anexa A: Algebră liniară 339

A.1 Definiții.....	339
A.2 Operații cu matrice.....	341
A.3 Matricea inversă	343
A.4 Matricea pseudo-inversă	344
A.5 Rangul unei matrice	345
A.6 Operații cu vectori.....	345

Anexa B: Formule trigonometrice 347

Anexa C: Formule utile pentru cinematica Inversă 349

Bibliografie 351

1

INTRODUCERE

1.1 Generalități

Robotica este un domeniu fascinant, interdisciplinar, ce merită abordat de cei pasionați de tehnică. Pe de o parte, există o mare diversitate de aplicații excitante, în permanență fiind posibilă conceperea unor noi sisteme. Pe de altă parte, roboții sunt interesați prin ei înșiși, crearea de oameni artificiali, spre exemplu, constituind preocupările multor cercetători.

În prezent, datorită realizărilor în domeniul interdisciplinar numit robotică, roboții nu mai sunt doar niște "chestii" specifice filmelor științifico-fantastice, ci fac parte integrantă din viața noastră. Dacă la început aceștia erau utilizați doar pentru înlocuirea omului în activitățile industriale grele și murdare, evoluția rapidă a acestui domeniu conduce la o „explozie” a aplicațiilor roboților, în special în sfera serviciilor. Astăzi, roboții vopsesc, sudează caroserii sau montează diverse subansamble în industria de autoturisme, efectuează diverse operații (manipulare, ambalare, etc.) în industria alimentară, dozează și ambalează medicamente într-o unitate de profil, pășesc în cratere de vulcani activi, conduc trenuri, țin companie unor persoane, efectuează operații chirurgicale, asistă persoane handicapate, alimentează autoturismele cu combustibil, efectuează diverse activități pe stațiile orbitale, detectează și dezamorsează bombe, contribuie la educarea studenților în domeniul roboticii, etc. Deoarece roboții devin tot mai tenace, mai ageri și mai inteligenți, aceștia efectuează tot mai multe activități, pe care oamenii nu pot – sau nu vor – să le facă.

Roboții au apărut în jurul nostru de mai puțin de 50 de ani, dar ideea realizării unor creaturi care să execute poruncile noastre este mult mai veche. Poetul grec Homer descrie "servitoarele de aur", ajutoare mecanice construite de Hephaistos. În 1495, Leonardo da Vinci concepe planurile unui om mecanic. Dar apariția roboților adevărați nu putea fi posibilă înainte de 1950–1960, când au fost inventați tranzistorii și, apoi, circuitele integrate. Astfel, electronica și

1. Introducere

industria calculatoarelor au adăugat creiere mașinilor deja existente.

Datorită apariției unor procesoare tot mai rapide și cu un cost tot mai scăzut, roboții devin mai inteligenți și mai ieftini. De aceea, cercetătorii depun eforturi pentru a face roboții să se deplaseze și să "gândească" mult mai eficient. În ciuda faptului că cea mai mare parte a roboților aflați astăzi în funcțiune au fost concepuți pentru a efectua operații specifice, scopul este de a construi roboți universali, suficient de flexibili pentru a efectua aproape orice poate face un om.

1.2 Definiții

În prezent, nu există o definiție precisă a robotului dar, în accepțiunea generală a specialiștilor în domeniu, acesta este o *mașină programabilă, care imită acțiunile sau aspectul unei creaturi inteligente – de obicei omul*. Pentru a fi considerată robot, mașina respectivă trebuie să fie capabilă să facă două lucruri: a) să culeagă informații din mediul înconjurător și b) să efectueze o activitate fizică, ca de exemplu, să se deplaseze sau să manipuleze un obiect.

Definițiile existente în literatura de specialitate sunt mult mai restrictive, acestea limitându-se la robotul industrial. În cele ce urmează vor fi exemplificate doar câteva dintre aceste definiții.

- După *Institutul American de Robotică*:

"Robotul este un manipulator multifuncțional reprogramabil, conceput să manipuleze materiale, componente, scule sau dispozitive specializate, prin mișcări variabil programate, în scopul executării unei varietăți de misiuni."

- Atât standardul internațional *ISO 8373*, cât și standardul românesc *STAS R 12928/1-90*, definesc robotul industrial astfel:

"Un manipulator cu comandă automată, cu program flexibil, reprogramabil, multifuncțional, cu mai multe grade de mobilitate, fix sau mobil, destinat utilizării în cadrul proceselor industriale automatizate."

Astăzi, aceste definiții sunt prea restrictive, limitând roboții la aplicațiile industriale și, într-adevăr, unii oameni cred că robotica ar trebui să fie o ramură a tehnologiei de fabricație. Odată cu trecerea timpului, robotica s-a extins și se extinde foarte mult, incluzând: platforme mobile, roboți pentru servicii, telerobotica, etc., ceea ce justifică o definire mai largă a robotului.

O definiție, considerată de V. Kumar (University of Pennsylvania) ca fiind îmbunătățită, poate fi următoarea:

"Robotul este un mecanism controlat de calculator, care

Bazele Roboticii

combină tehnologia calculatoarelor digitale cu tehnologia de control a lanțurilor cinematice articulate. Acesta trebuie să fie ușor reprogramat pentru a executa diverse operații, și trebuie să fie echipat cu senzori, ce-l fac capabil să reacționeze și să se adapteze la modificarea condițiilor mediului.”

În general, roboții sunt utilizați pentru a înlocui omul în medii periculoase pentru acesta, cât și pentru efectuarea unor operații grele, repetitive, plictisitoare. Însă, aceștia pot avea și alte aplicații, în educație, divertisment, etc., așa cum se va vedea în cele ce urmează.

Știința care se ocupă cu studiul roboților este numită *“robotică”*. Unii oameni cred că robotica este un domeniu distinct, însă aceasta este o îmbinare a mai multor domenii, respectiv: mecanic, electric, electronic, domeniul calculatoarelor și cel al informaticii. Aceasta poate fi definită astfel:

“Robotica este disciplina care implică:

- (a) proiectarea, fabricarea, controlul și programarea roboților;*
- (b) utilizarea roboților pentru efectuarea unor activități;*
- (c) studiul metodelor de control, respectiv al senzorilor și algoritmilor de control ai oamenilor, animalelor și mașinilor;*
- (d) aplicarea acestor metode și algoritmi la proiectarea roboților.”*

Trebuie făcută o distincție clară între ingineria robotică și știința roboticii. Ingineria robotică se ocupă cu proiectarea, realizarea și punerea în funcțiune a roboților. Deși roboții sunt rezultatul unor cercetări științifice, scopul roboticii ca știință nu este realizarea de mașini, ci înțelegerea proceselor fizice și informatice de bază. Odată ce sunt stabilite principiile de bază, acestea pot fi utilizate în conceperea roboților.

Deși în primul capitol se vor face referiri la toate tipurile de roboți și aplicațiile acestora, în următoarele capitole vor fi discutați numai roboții de tip manipulator, în general cu aplicații industriale.

1.3 Istoric

1.3.1 Importanța studierii istoriei roboților

Studierea istoriei roboților permite celor interesați să-și facă o idee cu privire la rata și ordinea realizărilor în domeniu. Acest lucru dezvăluie pașii istorici ai dezvoltării roboticii, arată cât de departe au visat oamenii în acest domeniu și permite aflarea unor visuri

1. Introducere

neîndeplinite. Acestea din urmă sugerează direcții viitoare de dezvoltare ale roboticii.

Deși acest paragraf nu acoperă întreaga istorie, în detaliu, a roboților, un studiu complet al acestora ar putea ajuta pentru a prezice unde pot apărea eventuale viitoare eșecuri, pe baza domeniilor unde s-au concentrat eșecurile apărute în trecut.

Cuvântul "robot" își are originea în limba cehă, în care "robotnik" înseamnă muncitor sau sclav. El a fost utilizat pentru prima dată de către scriitorul ceh Karel Capek, în anul 1920, în drama științifico-fantastică "Roboții universali ai lui Rossum". Roboții lui Capek erau „realizați” pentru a fi lucrători perfecți și neobosiți, efectuând operații manuale în locul oamenilor. Mai apoi, cuvântul a fost preluat și popularizat de către scriitorul canadian de origine rusă Isaac Asimov, în povestirile sale științifico-fantastice.

1.3.2 Evenimente cheie în istoria roboților

Deși cuvântul robot este relativ nou, cercetări în domeniul roboticii au fost efectuate cu mult timp în urmă, după cum se poate observa în Tabelul 1.1.

Tabelul 1.1 Evenimente importante în istoria roboților

1920	Scriitorul ceh Karel Capek folosește cuvântul <i>robot</i> în piesa de teatru <i>Roboții universali ai lui Rossum</i> (R.U.R.). Cuvântul provine din limba cehă, în care "robotnik" înseamnă muncitor sau sclav.
1938	Este proiectată prima mașină programabilă de vopsire prin pulverizare, de americanii Willard Pollard și Harold Roselund, DeVilbiss Company.
1942	Scriitorul canadian de origine rusă Isaac Asimov utilizează pentru prima dată cuvântul <i>robotică</i> în povestirile sale științifico-fantastice (publică „ <i>Runaround</i> ”) și formulează <i>cele trei legi fundamentale ale roboticii</i>
1946	Americanul George Devol obține patentul pentru un sistem de înregistrare magnetică a informației, utilizat pentru controlul mașinilor (utilizând un înregistrator magnetic); J. Presper Eckert și John Mauchly au realizat primul calculator electronic (ENIAC) la University of Pennsylvania; La MIT, primul calculator digital Whirlwind rezolvă prima sa problemă.
1948	Norbert Wiener, profesor la MIT, publică „ <i>Cybernetics or Control Communication in the Animal</i> ”, o carte care descrie conceptul de comunicare și control în electronică, mecanică și sisteme biologice.
1951	Raymond Goertz, Franța, proiectează primul manipulator articulat

Bazele Roboticii

- teleoperat, pentru Comisia de Energie Atomică. Proiectul este bazat în totalitate pe legăturile mecanice dintre sistemul „master” și sistemul „slave” (utilizând cabluri de oțel și fulii). Sisteme derivate ale acestui proiect sunt încă întâlnite acolo unde este necesară manipularea de probe nucleare. Acest proiect este în general privit ca o piatră de hotar majoră în tehnologia de control a forțelor.
- 1953 Seiko Corporation utilizează roboți în miniatură pentru asamblare de ceasuri.
- 1954 George Devol proiectează primul robot programabil și inventează termenul *Universal Automation*, pregătind numele pentru viitoarea sa companie – *Unimation*.
- 1958 Joseph F. Engelberger și George C. Devol fondează *Unimation*, prima companie comercială de producere a roboților. Realizează primul lor robot, numit „*Unimate*”. Primul *Unimate* este instalat la fabrica *General Motors*, pentru a deservi o mașină de turnare sub presiune.
- 1959 Marvin Minsky și John McCarthy înființează *Laboratorul de Inteligență Artificială* la MIT.
- 1960 *Condec Corporation* cumpără *Unimation* și începe producerea roboților *Unimate*.
- 1960 *American Machine and Foundry*, mai târziu cunoscută ca *AMF Corporation*, face primul studiu de piață pentru robotul în coordonate cilindrice numit *Versatran*, proiectat de Harry Johnson și Veljko Milenkovic.
- 1961 Ernst (MIT, SUA) realizează mâna mecanică cu senzori, *MH-1*.
- 1962 General Motors cumpără primul robot industrial de la Unimation și îl instalează într-o linie de producție, pentru a deservi o mașină de turnare sub presiune.
- 1963 Robotul industrial *Versatran* devine comercial.
- 1963 John McCarthy conduce noul Laborator de Inteligență Artificială de la Stanford University
- 1964 Este fondată *C&D Robotics*.
- 1965 Carnegie Mellon University înființează *Institutul de Robotică*.
- 1966 Sunt instalați primii roboți de vopsire în fabrici din Byrne, Norvegia.
- 1966 Aterizează pe lună naveta spațială robotizată „*Surveyor*”, trimisă de NASA.
- 1967 Ralph Moser (General Electric, SUA) realizează un robot pășitor patruped, proiectul fiind finanțat de Departamentul de Apărare.
- 1967 Japonia importă robotul *Versatran* de la AMF (primul robot importat în Japonia).
- 1968 La Stanford Reserch Institute, California, este construit primul sistem robotizat complet, *Shakey*, cu vedere artificială, controlat de un calculator de mărimea unei camere.
- 1968 Unimation primește prima comandă de roboți, de la General Motors.
-

1. Introducere

-
- 1969 La Stanford Research Institute se fac demonstrații privind utilizarea vederii artificiale pentru ghidarea roboților mobili.
- 1969 La General Motors, roboți Unimate asamblează caroseria autoturismului Chevrolet Vega.
- 1970 General Motors devine prima companie ce utilizează vederea artificială într-o aplicație industrială. Este instalat sistemul Consight la o turnătorie din St. Catherines, Ontario, Canada.
- 1970 Se desfășoară primul simpozion american de robotică, la Chicago.
- 1970 Profesorul Victor Scheinman, Stanford University, proiectează manipulatorul *Stanford*. Astăzi, cinematica sa rămâne cunoscută ca *manipulatorul Stanford*.
- 1971 Japonia înființează *Asociația Japoneză de Robotică Industrială* (Japanese Industrial Robot Association, JIRA) și devine prima națiune ce are o asemenea organizație.
- 1972 Kawasaki instalează o linie de roboți de asamblare la Nissan, Japonia, utilizând roboți fabricați de Unimation, Inc.
- 1973 Apare prima revistă internațională de robotică, "*The Industrial Robot*".
- 1973 ASEA, Suedia, introduce pe piață roboții *IRb 6* și *IRb 60*, acționați electric, roboți concepuți pentru automatizarea operațiilor de debavurare.
- 1973 Cincinnati Milacron realizează T3, primul robot industrial controlat de minicalculator (proiectat de Richard Hohn).
- 1974 Profesorul Victor Sheinman înființează Vicarm, Inc. pentru comercializarea unei versiuni industriale a manipulatorului *Stanford* (controlat de minicalculator).
- 1974 Este fondată "*The Robotics Industries Association*".
- 1975 Cincinnati Milacron scoate pe piață primul său robot *T3*, pentru aplicații de găurire.
- 1975 Robotul ASEA, cu capacitatea portantă de 60 kg, este primul robot instalat într-o turnătorie de oțel; Robotul T3 (Cincinnati Milacron) devine primul robot utilizat în industria aeronautică.
- 1976 Sunt utilizați doi roboți de tip manipulator pe navele spațiale "*Viking 1*" și "*Viking 2*".
- 1977 ASEA realizează doi roboți controlați de microcalculator.
- 1977 Unimation cumpără Vicarm Inc.
- 1977 Este fondată *Asociația Britanică de Robotică* (British Robotics Association, BRA).
- 1978 Unimation realizează, pentru General Motors, primul robot *PUMA* (Programmable Universal Machine for Assembly). PUMA poate fi găsit și astăzi în multe laboratoare de cercetare.
- 1978 Charles A. Rosen ș.a. înființează Machine Intelligence Company.
-

Bazele Roboticii

-
- 1979 Japonia introduce pe piață robotul *SCARA* (Selective Compliance Assembly Robot Arm), realizat la Yamanashi University; Digital Electronic Automation (DEA), Torino, Italia, scoate pe piață robotul *PRAGMA*, sub licență General Motors.
- 1981 Este fondată *Cognex*.
- 1981 Este fondată *CRS Robotics Corp.*
- 1982 Robotul *Pedesco* (Pedesco, Scarborough, Ontario) este utilizat pentru operații de curățire, în cazul unor scurgeri de combustibil nuclear într-o centrală atomică.
- 1982 Stan Mintz ș.a. (Hewlett-Packard) fondează *Intelledex Corporation*, o companie de fabricare a roboților ușori pentru asamblare, cum ar fi montajul circuitelor integrate.
- 1981-1984 Roboții de reabilitare sunt îmbunătățiți în ceea ce privește mobilitatea, comunicarea prin voce și securitatea. Se pune un accent mai mare pe vederea artificială, senzorii de contact și limbajele de programare. Sunt dezvoltati roboți de luptă și pază.
- 1983 Odetics, Inc. realizează un robot pășitor hexapod, ce poate păși peste obstacole și căra sarcini de până la 2-3 ori greutatea proprie.
- 1983 Westinghouse El. Corp. cumpără Unimation, Inc., care devine o parte a acestei întreprinderi de automatizare, pe care o vinde, mai târziu, companiei AEG din Pennsylvania.
- 1984 Robot Defense Syst. scoate pe piață robotul *Prowler* (Programmable Robot Observer with Local Enemy Response), primul într-o serie de roboți de luptă.
- 1984 Joseph F. Engelberger, „tatăl roboticii”, înființează o nouă companie numită *Transition Research Corp.*, concentrată pe roboți pentru servicii.
- 1985 La Ohio State University a fost realizat primul robot pășitor autonom, robot numit "*Adaptive Suspension vehicle*" (ASV).
- 1986 La expirarea licenței Unimate, Kawasaki dezvoltă și produce propria linie de roboți electrici.
- 1988 Staubli Group cumpără Unimation de la Westinghouse.
- 1989 Este fondată *Computer Motion*.
- 1989 Este fondată *Barrett Technology*.
- 1987-1993 Honda produce roboții umanoizi din seria E (*E1 – E6*).
- 1993-1996 Honda produce roboții umanoizi din seria P (*P1, P2, P3*).
- 1994 Robotul *Dante II* (CMU Robotics Institute), un robot pășitor hexapod, explorează vulcanul Spurr în Alaska.
- 1995 Fred Moll, Rob Younge și John Freud înființează *Intuitive Surgical*, pentru a concepe și comercializa sisteme robotizate chirurgicale.
- 1997 Naveta spațială Pathfinder (NASA) aterizează pe Marte, având la bord robotul mobil *Sejourner*, pentru explorarea planetei.
-

1. Introducere

-
- | | |
|-------|---|
| 1999 | Sony scoate pe piață prima versiune a robotului de companie <i>AIBO</i> (Artificial Intelligence RoBOT). |
| 2000 | Honda realizează primul prototip al robotului umanoid <i>ASIMO</i> , pentru cercetare. |
| 2001 | Sony lansează primul prototip al robotului umanoid <i>SDR – 3X</i> (Sony Dream Robots), la Robodex. |
| 2001 | Sony lansează pe piață a doua versiune a robotului <i>AIBO</i> . |
| 2001 | Fujitsu debutează cu robotul umanoid <i>HOAP-1</i> . |
| 2001 | Construită de MD Robotics, Canada, Stația spațială de sisteme robotizate comandate la distanță (<i>Space Station Remote Manipulator System – SSMRS</i>) este lansată cu succes pe orbită și începe operațiunile de asamblare a Stației spațiale internaționale. |
| 2003 | Sony lansează un alt prototip al robotului umanoid <i>SDR – 4X</i> . |
| 2003 | Sony lansează un prototip îmbunătățit al robotului <i>SDR – 3X</i> și anume, robotul <i>QRIO</i> . |
| | |
| 2004 | NASA, roboții <i>Spirit</i> și <i>Opportunity</i> ajung pe Marte. |
-

1.4 Piața mondială a roboților industriali

Informațiile sunt spicuite din pagina web a *Federației Internaționale de Robotică*, ce prezintă date extrase din publicația *World Robotics 2003*. Conform acestei surse, vânzările mondiale de roboți industriali cu diverse aplicații au atins cote maxime în 1990, când acestea au depășit 80 000 de unități. A urmat o scădere a vânzărilor, în anii 1991-1993, acestea fiind de 53 000 de unități în anul 1993. Apoi vânzările au început să crească puternic, atingând iar valori maxime în 1997, când s-au vândut în jur de 82 000 de unități. În 1998 acestea au scăzut cu cca 15%, ajungând sub 69 000 de unități, după care urcă iar (în 1999) spre 80 000, crescând astfel cu aproximativ 15%. În anul 2000, creșterea vânzărilor atinge o cotă de 24%, relizându-se recordul de 99 000 de unități, după care aceste vânzări scad din nou, cu 21% în 2001 și 12% în 2002, atingând o valoare de 68 600 de unități (vezi Tabelul 1.2). Analizând informațiile din prima jumătate a anului 2003, s-a constatat o creștere cu 26% a vânzărilor mondiale, comparativ cu aceeași perioadă a anului 2002. A fost cea mai ridicată rată a creșterii vânzărilor de roboți industriali. Procentul de creștere, raportat la diferite regiuni ale globului, a fost după cum urmează: 35% în America de Nord, 25% în Europa, 18% în Asia și 19% în celelalte regiuni.

Bazele Roboticii

Tabelul 1.2 Instalările și stocul operațional de roboți industriali din 2001 – 2002 și previziunile pentru 2003-2006 (număr de unități)

Tara	Instalări anuale				Stocul operațional la sfârșitul anului			
	2001	2002	2003	2006	2001	2002	2003	2006
Japonia	28 369	25 373	27 300	33 900	361 232	350 169	344 000	333 400
SUA	10 813	9 955	11 400	14 500	97 257	103 515	111 100	135 200
Uniunea Europeană	30 735	25 866	26 600	31 800	219 515	233 139	248 100	303 500
Germania	12 706	11 867	12 000	13 900	99 195	105 217	111 300	136 400
Italia	6 373	5 470	5 700	6 600	43 911	46 881	50 500	62 000
Franta	3 484	3 012	2 900	3 300	22 753	24 277	25 900	31 700
Marea Britanie	1 941	750	800	1 100	13 411	13 651	13 700	14 400
Austria	330	670			3 153	3 521		
Benelux	620	620			8 590	8 674		
Danemarca	330	249			1 683	1 853		
Finlanda	408	248			2 927	3 023		
Portugalia	100	100			800	844		
Spania	3 584	2 420			16 378	18 352		
Suedia	859	460			6 714	6 846		
Restul Europei	698	744	800	1 100	11 002	11 013	10 500	12 100
Cehia	70	90			985	1 025		
Ungaria	27	64			120	176		
Norvegia	98	80			618	664		
Polonia	20	150			520	644		
Fed. Rusă	150	190			5 000	5 000		
Slovacia								
Slovenia								
Elveția	333	170			3 759	3 504		
Asia/Australia	5 310	5 108	5 600	7 500	56 997	60 412	64 300	73 300
Australia	270	510			2 953	3 310		
Coreea de Sud	4 080	3 998			41 267	44 265		
Singapore	300	100			5 458	5 346		
Taiwan	660	500			7 319	7 491		
Alte țări	2 250	1 520	1 700	2 300	10 374	11 640	12 900	17 800
Subtotal, excluzând Japonia	45 726	39 195	41 800	51 900	353 878	375 454	446 900	541 900
Total, inclusiv Japonia	78 175	68 566	73 400	91 100	756 377	769 888	838 400	875 300

1.5 Aspecte economice și sociale ale automatizării

1.5.1 Generalități

Automatizarea unui anumit proces (unei activități) are atât efecte economice, cât și sociale, efecte care trebuie avute în vedere înainte de a se face investițiile respective.

Automatizarea este tehnologia ce se ocupă cu aplicarea mecatronicii și calculatoarelor, în scopul producerii de bunuri și servicii. Aceasta poate fi, pe scurt, clasificată în:

- Automatizare industrială;
 - Automatizare a serviciilor.
- Exemple de automatizare industrială:

- Mașini automate
 - o Mașini-unelte automate;
 - o Mașini automate de asamblare;
 - o Sisteme automate de transport, manipulare și stocare;
 - o Sisteme automate de inspectare și control.
- Sisteme asistate de calculator, pentru proiectarea produselor și analiza (simularea și testarea) acestora (*computer-aided design*, CAD).
 - Sisteme asistate de calculator pentru transformarea automată a proiectelor în produse (*computer-aided manufacturing*, CAM);
 - Sisteme asistate de calculator pentru planificarea procesului de fabricație și luarea deciziilor în scopul ducerii la bun sfârșit a acestuia (*computer-aided engineering*, CAE).
 - Sisteme asistate de calculator pentru proiectarea, fabricarea, punerea în funcțiune și programarea roboților (*computer-aided robotics*, CAR). CAR este un domeniu mai nou de automatizare, fiind o ramură a CAD și CAM. Acest domeniu de automatizare se va dezvolta pe măsură ce numărul roboților produși va crește. CAR se va desprinde din CAD și CAM, așa cum domeniul calculatoarelor s-a desprins din domeniul electronicii și electronica din domeniul electric.
- Roboți industriali.

1.5.2 Tipuri de automatizare

□ *Automatizare fixă*: utilizarea de echipament special pentru automatizarea unei secvențe fixe a unor procese tehnologice sau a unor operații de asamblare. Se poate aplica la producția de serie

Bazele Roboticii

mare, fiind dificilă adaptarea la modificarea produsului. Se mai numește și *automatizare rigidă*.

Tabelul 1.3 Tipuri de automatizare: avantaje, dezavantaje

Tip de automatizare	Când poate fi aplicată	Avantaje	Dezavantaje
Fixă	<ul style="list-style-type: none"> - Producție de serie mare - Cicluri lungi de fabricație 	<ul style="list-style-type: none"> - Randament maxim - Preț de cost scăzut 	<ul style="list-style-type: none"> - Investiție inițială mare - Inflexibilitate
Programabilă	<ul style="list-style-type: none"> - Producție de serie medie - Produse diferite 	<ul style="list-style-type: none"> - Flexibilitate în ceea ce privește modificarea produsului - Preț de cost scăzut, pentru încărcări mari 	<ul style="list-style-type: none"> - Introducerea unui nou produs necesită un timp mare - Cost unitar ridicat în comparație cu automatizarea fixă
Flexibilă	<ul style="list-style-type: none"> - Producție de serie mică - Produse variate - Cicluri de producție scurte 	<ul style="list-style-type: none"> - Flexibilitate în fabricarea de produse variate - Produse cerute de piață 	<ul style="list-style-type: none"> - Investiție inițială mare - Cost unitar ridicat în comparație cu automatizarea fixă sau programabilă

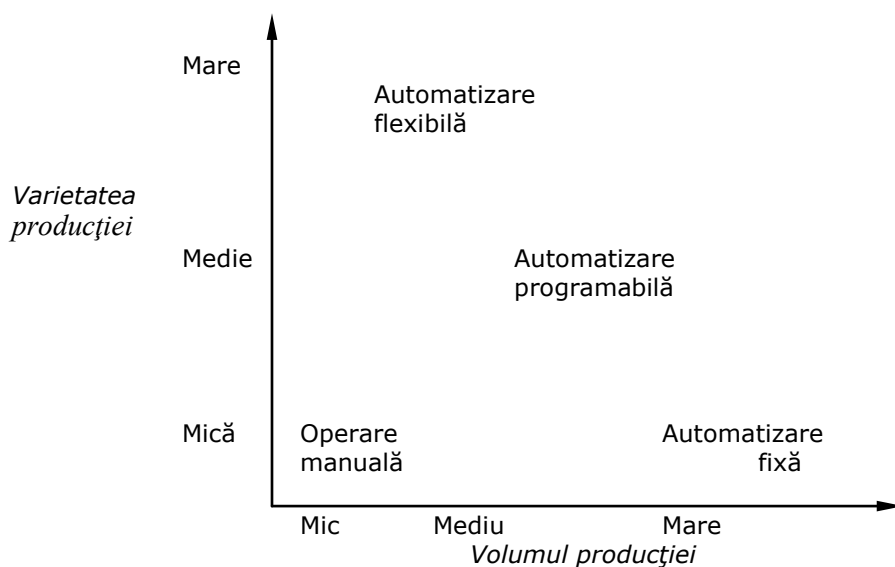


Fig. 1.1 Tipuri de automatizare

1. Introducere

□ *Automatizare programabilă*: utilizarea de echipament, conceput să fie adaptabil la modificări ale produsului. Se poate aplica la producția de serie medie.

□ *Automatizare flexibilă - ROBOTICA*: utilizarea de echipament conceput să poată fi folosit pentru fabricarea unei varietăți de produse sau componente, fiind necesar un timp foarte scurt pentru trecerea de la un produs la altul. De aceea, un sistem de automatizare flexibilă poate fi aplicat la producția de serie mică și de produse variate.

Avantajele și dezavantajele celor trei tipuri de automatizare sunt prezentate în Tabelul 1.3. Situațiile în care se aplică cele trei tipuri de automatizare sunt prezentate, într-o formă schematizată, în Fig. 1.1

1.5.3 Motive în favoarea automatizării

□ *Lipsa mâinii de lucru*

În SUA, raportul număr salariați/număr pensionari era 3/1 în anul 1995 și în jur de 2/1 în 2000. În Japonia, aproape jumătate dintre companiile producătoare au investit în sisteme automate, pentru a contracara reducerea numărului de lucrători.

□ *Costul ridicat al mâinii de lucru*

În țările industrializate, costul mâinii de lucru a cunoscut în permanență o creștere constantă. În Japonia, acest cost este cu 5% mai mare decât în SUA și cu peste 50% mai mare decât în Anglia. Țările mai puțin industrializate se confruntă, însă, cu același fenomen de creștere a costului mâinii de lucru. Spre exemplu, în Taiwan acest cost a crescut de patru ori în perioada 1974-1984, în timp ce în Coreea acesta s-a dublat în perioada 1979-1984 și a crescut de patru ori între anii 1984-1996.

□ *Creșterea productivității*

Producția pe oră, în cazul automatizării, este mai mare decât în cazul utilizării de operatori manuali. Productivitatea muncii este cel mai important factor ce determină standardul de viață al unei națiuni. Dacă valoarea de ieșire pe oră crește, cresc și veniturile populației. Creșterile artificiale ale salariilor conduc la inflație, de aceea productivitatea trebuie să determine aceste creșteri.

□ *Competiția*

Unul din scopurile unei companii este de a-și spori profitul propriu. Automatizarea poate conduce la: reducerea prețurilor, obținerea unor produse superioare calitativ, relații mai bune între

Bazele Roboticii

salariați și o imagine mai bună a companiei.

- ❑ *Securitatea muncii*

Automatizarea permite angajaților să-și asume rolul de supraveghetori, în loc să fie implicați direct în procesul de fabricație. Spre exemplu, turnarea sub presiune se realizează la temperaturi mari și este periculoasă, iar piesele sunt adesea foarte grele. De fapt, primul robot industrial a fost utilizat la General Motors în anul 1961, pentru automatizarea acestui proces tehnologic. Sudarea, vopsirea și alte operații de acest gen pot genera probleme de sănătate.

- ❑ *Reducerea timpului total de fabricație*

Automatizarea permite producătorului să răspundă repede necesităților consumatorilor. De asemenea, automatizarea flexibilă permite companiilor să modifice frecvent produsul fabricat.

- ❑ *Prețuri mai scăzute*

La reducerea costului mâinii de lucru se poate adăuga reducerea ratei rebuturilor, care conduce la scăderea costului materiilor prime utilizate. De asemenea, este posibilă creșterea calității produsului, la un preț mai scăzut.

1.5.4 Motive împotriva automatizării

- ❑ *Rezistență opusă de mâna de lucru*

Oamenii consideră roboții și automatizarea industrială ca fiind o cauză a șomajului. În realitate, utilizarea roboților conduce la creșterea productivității, face compania mai competitivă și păstrează unele locuri de muncă. Dar unele slujbe dispar și apar altele. Cauza reală a șomajului în zilele noastre nu este automatizarea, ci migrarea locurilor de muncă, datorită costului mai scăzut al mâinii de lucru în alte zone (țări).

- ❑ *Cheltuielile necesare perfecționării angajaților*

Operațiile monotone, de rutină, sunt cel mai ușor de automatizat. Operațiile dificil de automatizat necesită o anumită calificare. De aceea, personalul ce efectua munca monotonă trebuie perfecționat după automatizare, pentru a fi capabil să se adapteze noilor condiții de muncă (programarea, supravegherea și întreținerea sistemelor automate).

- ❑ *Investițiile inițiale necesare, al căror cost este ridicat*

Impunerea unor condiții de plată imediată pentru investițiile realizate poate face automatizarea dificilă, chiar dacă rata estimată de recuperare a cheltuielilor este foarte mare.

- ❑ *Managementul procesului de automatizare*

1. Introducere

- Transferul capitalului intelectual către capital tehnologic (forța de muncă intelectuală nu poate fi separată de cea tehnologică). Dacă o parte dintre lucrători nu sunt ingineri (pregătiți în domenii ca: mașini cu comandă numerică, CAD, robotică, etc.), este dificilă utilizarea efectivă a sistemelor flexibile de fabricație.
- Utilizarea corespunzătoare a tehnologiei este un aspect foarte important.
- Lucrătorii slab pregătiți sau nemotivați pot produce pagube (exemplu, accidentul nuclear de la Cernobîl).
- Deși utilizarea unei tehnologii avansate poate îmbunătăți producția, este foarte important a se privi mai departe de optimizarea locală, pentru a nu se pierde din vedere scopul principal, cel de a spori beneficiile. Spre exemplu, automatizarea poate conduce ușor la creșterea producției și a randamentului unei stații de lucru sau al unui centru de prelucrare dar poate cauza o gâtuire a producției în altă parte. Acest lucru poate conduce la scăderea profitului, deși s-au făcut investiții suplimentare.
- Incompatibilitatea echipamentelor (existent și nou, ce se dorește a fi introdus) este un motiv major pentru evitarea automatizării. Spre exemplu, firma a investit foarte mult într-un echipament vechi, care dă rezultate, dar este incompatibil cu noua tehnologie.

1.5.5 Justificarea utilizării roboților

Înainte că un robot să aibă șansa de a demonstra practic faptul ca folosirea lui este benefică, el trebuie să demonstreze acest lucru pe hârtie. Din punct de vedere economic, aceasta presupune efectuarea unor calcule privind perioada de amortizare a cheltuielilor, rentabilitatea investiției, etc.

1.5.5.1 Pași în justificarea utilizării unui robot

Primul pas în justificarea utilizării unui robot este acela de a decide unde și când să fie utilizat acel robot. Aceasta presupune examinarea operațiilor ce ar putea fi efectuate de el. În general, o muncă potrivită pentru a fi executată de un robot este aceea care nu necesită o calificare a forței de muncă. Operațiile de vopsire în

Bazele Roboticii

pulberi, sudare cu arc electric și de sudare electrică prin puncte fac excepție de la această generalizare.

Următorul pas îl constituie studiarea costurilor relative ale operației, în cazul în care aceasta ar fi efectuată de om sau de robot. Pasul final este acela de a ne asigura că au fost verificate toate celelalte variante posibile de efectuare a muncii respective (automatizarea operației, în locul folosirii robotului sau efectuarea unor modificări ale procesului de producție, echipamentului sau subansamblelor). Perioada de amortizarea a cheltuielilor și rata rentabilizării investiției sunt doi indicatori utilizați pentru justificarea utilizării unui robot, din punct de vedere al costului.

Doar simplul fapt că un robot poate efectua o muncă pentru mai puțini bani, nu înseamnă obligatoriu că acesta ar trebui să efectueze munca respectivă. Trebuie luate în considerare și relațiile dintre robot, muncitori, supraveghetori și publicul larg.

1.5.5.2 Stabilirea domeniilor unde un robot este necesar

Pentru a fi potrivită utilizării unui robot, o muncă ar trebui ori să fie repetitivă, ori foarte periculoasă. Dacă o muncă este murdară, monotonă, periculoasă sau dificilă, oamenii nu vor dori să o facă și nu o vor face foarte bine. Dacă doar puțini dintre aceștia vor să facă o asemenea muncă, aceasta poate fi potrivită pentru un robot.

Roboții efectuează munci necalificate aproape în același mod ca și o persoană, excepție făcând faptul că aceștia pot să ridice greutatea mai mari la înălțimi mai mari, se mișcă mai repede (în medie), au o rază de acțiune mai mare și manipulează piese ce sunt prea fierbinți sau prea reci pentru a putea fi atinse de oameni. Roboții au fost introduși în liniile de asamblare a automobilelor, pentru a efectua operații de vopsire, sudare, manipulare sau prelucrare. De asemenea, studiile conduc și la utilizarea cu succes a roboților în asamblarea componentelor mici în industria automobilelor. Alte domenii de succes includ turnarea, asamblarea, debavurarea pieselor turnate, sablarea, inspectarea și prelucrarea prin așchiere. Roboții au cel mai mare succes în efectuarea operațiilor concepute pentru a fi realizate de aceștia. Drept urmare, doar înlocuirea unui om cu un robot probabil că nu va fi cea mai bună aplicație a acestuia din urmă.

1.5.5.3 Justificarea cheltuielilor de instalare a roboților

Există trei motive pentru care o companie ar utiliza un robot: creșterea profitului, efectuarea unei munci inaccesibile unui om sau efectuarea unei munci prea periculoase pentru acesta. În același timp, roboții trebuie să fie eficienți ca și cost; aceștia trebuie să economisească banii companiei. Au fost sugerate următoarele reguli aproximative de care trebuie să țină seama la instalarea roboților:

- *Evitarea extremelor în ceea ce privește complexitatea acestora.*
- *Operațiile trebuie efectuate într-o anumită ordine și sistematic.*
- *Pentru serii mici se recomandă utilizarea oamenilor; pentru serii foarte mari, automatizarea fixă.*
- *Dacă roboții nu aduc bani, nu are nici un sens instalarea lor.*
- *Un singur robot nu înseamnă mai bine decât nici unul.*
- *Dacă oamenii nu vor ca roboții să aibă succes, ei nu vor lăsa să se întâmple acest lucru.*

1.5.5.3.1 Calculul perioadei de amortizare a cheltuielilor

Pentru a sprijini justificarea instalării unui robot, este necesară calcularea timpului de care acesta are nevoie pentru a amortiza cheltuielile făcute cu instalarea lui. Acest timp este cunoscut sub denumirea de perioadă de amortizare. În general, aceasta este în jur de 2 ani și jumătate sau mai puțin. Perioada de amortizare variază mult de la o companie la alta, în funcție de condițiile concrete ale acestora. De asemenea, aceasta este influențată și de tipul de activitate pe care o desfășoară fiecare companie.

Perioada de amortizare poate fi calculată folosind relația:

$$P = \frac{C_r}{S + E + U - (C_i + C_p)} \quad (1.1)$$

unde:

P - perioada de amortizare, în număr de ani;

C_r - cheltuielile totale făcute pentru realizarea robotului, inclusiv cheltuielile de punere în funcțiune;

S - salariul anual al muncitorilor înlocuiți de robot, inclusiv primele;

E - economiile făcute prin instalarea robotului, economii datorate: creșterii productivității, a calității muncii, economiei de materiale, absenței locurilor de parcare și a cantinelor, nevoii mai

Bazele Roboticii

scăzute de lumină și de aer condiționat, etc.;

U – cheltuieli datorate uzurii robotului;

C_i – costurile de întreținere a robotului;

C_p – costurile de personal (programatori, supraveghetori, operatori și personal de întreținere).

1.5.5.3.2 Calculul rentabilității investiției

O altă modalitate matematică de a justifica instalarea unui robot este de a calcula rentabilitatea investiției, ce se poate face cu ajutorul formulei:

$$R = 100 \times \frac{S + E + U - \left(\frac{C_r}{N} + C_i + C_p \right)}{C_r} \quad (1.2)$$

unde:

R – rata anuală a rentabilității investiției;

N – durata de viață utilă, în număr de ani, a robotului (cel puțin 8 ani).

1.5.5.3.3 Îmbunătățirea securității lucrătorilor prin utilizarea roboților

Un motiv foarte important pentru justificarea utilizării roboților este acela că ei pot îmbunătăți securitatea în muncă a lucrătorilor. Unele operații efectuate de muncitori necesită utilizarea unui echipament de protecție suplimentar, iar uneori acesta nu îi protejează în totalitate. Spre exemplu, operația de vopsire efectuată de oameni necesită ventilație specială, îmbrăcăminte și mască de protecție și totuși există pericolul unor explozii. Robotul poate executa operații repetitive de vopsire, eliminând omul din mediul periculos și economisind banii necesari echipamentului suplimentar de protecție. De asemenea, roboții pot fi utilizați să alimenteze sau să descarce presele, manipulând materiale fierbinți, reci sau periculoase din alte puncte de vedere.

1.5.6 Dezavantajele utilizării roboților

Oamenii pot fi puși în șomaj temporar în perioadele de producție scăzută, cheltuielile datorate mâinii de lucru stopându-se în acest timp. Un robot neutilizat acumulează cheltuieli datorate deprecierii sale. Roboții necesită un capital mare pentru instalarea lor, iar investițiile trebuie amortizate în câțiva ani. Pentru forța de muncă

1. Introducere

umană se face o plată pe măsura muncii desfășurate ce poate fi dedusă complet, ca o cheltuială curentă de afaceri.

Doar faptul în sine că un robot este capabil să efectueze o anumită muncă nu înseamnă că acesta ar trebui să facă acea muncă. Utilizarea robotului trebuie să fie justificată din punct de vedere economic.

Dacă roboții sunt instalați în condiții nefavorabile sau în condiții favorabile dar fără o pregătire și publicitate pe măsură, muncitorii se pot simți amenințați și își pot reduce randamentul propriu. Introducerea roboților poate conduce la dispariția unor slujbe, forțând personalul să treacă pe alte poziții sau chiar în șomaj. Companiile ce instalează roboți trebuie să aibă un program clar, uman și la vedere pentru redistribuirea personalului afectat. Un posibil program poate include reinstruire, asistență pentru găsirea unei alte slujbe sau (în unele cazuri) acordare de beneficii suplimentare pentru pensionare înainte de limita de vârstă. Ori de câte ori este posibil, muncitorilor disponibilizați ar trebui să li se ofere posibilitatea alegerii noii slujbe, din mai multe alternative existente.

Chiar dacă roboții pot fi programați să efectueze și alte operații, unele companii îi cumpără pentru un anumit proiect particular, ceea ce înseamnă că, atunci când proiectul ia sfârșit, roboții devin un surplus de echipament. Această abordare a problemei ar semăna cu cea în care s-ar considera că la terminarea oricărui proiect, angajații sunt disponibilizați și se angajează alții pentru noul proiect. De aceea, companiile trebuie să planifice noi activități, pentru care vor folosi roboții după terminarea unui anume proiect, în care aceștia au fost implicați.

1.5.7 Impact social

Muncitorii amenințați de pierderea locului de muncă, prin instalarea unui robot, îl consideră nemilos și răuvoitor pe acesta. Muncitorii ce se așteaptă ca robotul să îi ajute în munca lor, îl consideră prietenos și util.

Copiii reacționează în fața roboților ca și în fața calculatoarelor, sunt fascinați de aceștia. Adulții (în general cei mai în vârstă), de asemenea, vor reacționa așa cum reacționează și față de calculatoare, cu teamă, reținere și suspiciune.

Angajaților implicați în activitatea de producție, cel mai adesea, nu le plac modificările și suspectează conducătorii că le subestimează inteligența și bunul simț. Iar când un om va fi înlocuit de un robot, conducerea tinde să subestimeze inteligența și bunul

Bazele Roboticii

simț, ce sunt necesare pentru a efectua o anumită sarcină de producție. Muncitorilor le place să fie consultați și să ajute la planificarea introducerii unui robot în activitatea de producție, atunci când conducerea se gândește la acest lucru.

Cu cât numărul angajaților care știu despre instalarea unui robot pe linia lor de producție este mai mic, cu atât mai mult lor le va dispăcea acest lucru și le va fi frică de pierderea locului de muncă. Muncitorii ce nu vor fi incluși în activitatea de planificare privind introducerea robotului, nu vor crede promisiunile conducerii, că nu își vor pierde slujba. Dacă cineva își va pierde locul de muncă, oriunde în companie, într-o lună sau două de la instalarea robotului, angajații vor da vina pe acesta. Este foarte util dacă managerii le pot spune lucrătorilor disponibilizați care vor fi noile lor slujbe (de preferat cu responsabilitate mai mare), înainte de instalarea robotului.

Pe de altă parte, angajații privesc uneori robotul ca un membru al echipei și chiar îi trimit urări de „însănătoșire”, atunci când acesta are probleme tehnice. Roboții nu trebuie utilizați pentru a înlocui lucrătorii ocupând deja un loc de muncă, mai degrabă ei ar trebui să fie folosiți pentru munci necalificate, în timp ce oamenilor să le revină muncile atractive.

Oamenilor le e teamă de posibilitatea înlocuirii lor cu roboți. Mișcarea personalului poate lua forma trecerii în șomaj, a mutării la un loc de muncă mai plăcut sau a diminuării de salarii. În cazul trecerii unui fost operator de mașină pe o poziție de operator sau supraveghetor de robot, noul loc de muncă presupune mai mult urmărire decât acțiune și muncitorul (obișnuit cu manipularea pieselor) se poate simți acum plictisit, stresat și chiar stingher, datorită lipsei interacțiunii cu ceilalți colegi. Alți muncitori, dimpotrivă, se adaptează foarte bine la noul loc de muncă. De aceea, reacția muncitorilor vis-a-vis de schimbarea locului de muncă trebuie considerată în funcție de fiecare individ în parte.

Sindicatul acceptă automatizarea și utilizarea roboților pentru creșterea productivității companiei dacă se garantează că angajații nu sunt amenințați cu pierderea locului de muncă. Noile locuri de muncă, ale persoanelor înlocuite de roboți, ar trebui să fie în domeniul sindicatului respectiv. În unele țări, angajatorilor li se cere să plătească (sindicatului) taxe pentru roboții lor. De asemenea, în unele cazuri, angajatorilor li se cere să plătească sindicatului sume pentru fondul de pensionare, pe baza activităților efectuate de roboți.

O altă metodă pentru învingerea teamei față de roboți este de a informa comunitatea despre planurile privind utilizarea roboților și despre progresul făcut pe măsură ce aceștia sunt implementați. Înainte de implementarea lor în procesul de producție, compania

1. Introducere

trebuie să organizeze expoziții și demonstrații cu privire la ceea ce roboții vor face.

Neale W. Clapp, de la *Block Petrella Associates*, SUA, a propus (în 1982) trei legi de bază, care ar putea governa instalarea roboților industriali:

- *Companiile nu pot instala roboți în detrimentul economic, social sau fizic al angajaților.*
- *Companiile nu pot instala roboți prin strategii ocolite, manifestând neîncredere sau desconsiderare față de forța de muncă, deoarece acestea sigur vor „culege” tot neîncredere și desconsiderare din partea angajaților.*
- *Companiile pot instala roboți numai pentru acele activități care, deși sunt efectuate curent de oameni, sunt activități ce necesită ca omul să acționeze ca un robot și nu robotul ca un om.*

1.5.8 Probleme etice

Asimov, ce poate fi considerat cel mai mare fan al roboticii, a propus "cele trei legi fundamentale", legi ce descriu regulile pe care trebuie să le respecte roboții, astfel încât să nu creeze prejudicii oamenilor:

- 1) *Un robot nu are voie să pricinuiască ceva rău omului sau să permită, prin neintervenția lui, să i se întâmple ceva unei ființe umane.*
- 2) *Un robot trebuie să execute ordinele (comenzile) primite de la o ființă umană, exceptând cazurile când acestea ar contraveni primei legi.*
- 3) *Un robot trebuie să-și conserve propria existență, atât timp cât aceasta nu contravine primelor două legi.*

Profesorul Gerald Norman, de la *Oregon Institute of Technology*, a sugerat poate fi adoptată următoarea lege ca fiind o a patra lege a roboticii:

- 4) *Un robot poate lua locul unui om. Dar nu poate lăsa acea persoană fără slujbă.*

Se poate spune că legile lui Asimov preîntâmpină uciderea oamenilor de către roboți, aceștia din urmă trebuind să se sacrifice pentru salvarea oamenilor.

Se încearcă respectarea legilor menționate anterior, dar nu

Bazele Roboticii

există o cale de implementare automată a acestora. Spre exemplu, unii roboți militari, prin însăși destinația lor, sunt proiectați cu intenția de a încălca legile lui Asimov.

Conducătorii militari moderni nu au asemenea idealuri, dimpotrivă, roboții sunt văzuți ca având o contribuție importantă pentru arsenalele viitorului. În mod curent, principala aplicație militară a roboților o constituie neutralizarea bombelor și distrugerea minelor submarine. O mare parte a cercetărilor constau în realizarea de vehicule controlate la distanță, în scopul îndepărtării oamenilor de pe linia frontului.

Dezvoltarea de sisteme de luptă ridică un număr de probleme etice, ce necesită decizii morale în ceea ce privește societatea civilă. În teoria războiului "drept", acesta este considerat a fi un rău necesar, pentru a ține națiunile combative "în frâu" și pentru a proteja libertatea popoarelor. Acest punct de vedere este contrazis atunci când efectele armelor realizate nu se limitează la țintele militare (spre exemplu, bomba cu neutroni). Astfel, în accepțiunea celor ce propun această teorie, armele de distrugere în masă nu ar trebui produse. De asemenea, armele robotizate autonome pot deveni o scuză pentru distrugerile provocate de război, respectiv prin atribuirea responsabilității provocării acestor distrugeri mașinilor și nu oamenilor ce le controlează. În sfârșit, s-a descoperit cel puțin o alertă falsă privind un atac nuclear, datorită defectării unui circuit electronic. Referitor la acest aspect, întrebarea ce se poate pune este: am îndrăzni să ne încredințăm viitorul unor mașini automate, aflate sub controlul unui conducător rău intenționat? Este o întrebare, care ar pune în dificultate chiar și pe cel mai pasionat cercetător în domeniul roboticii.

1.6 Clasificarea roboților

1.6.1 Clasificare după generația tehnologică

Există cinci *generații* de roboți, după cum urmează:

- Roboți care reproduc o secvență a unor instrucțiuni înregistrate, cum ar fi vopsirea și sudarea prin puncte. Acești roboți au adesea un control în buclă deschisă, spre exemplu roboții "pick-and-place", care utilizează limitatori de cursă.
- Roboți controlați prin senzori, care au un control în buclă închisă iar deciziile se iau pe baza informațiilor primite de la senzori.
- Roboți controlați prin sistem video.
- Roboți adaptivi, ce-și pot reprograma automat propriile

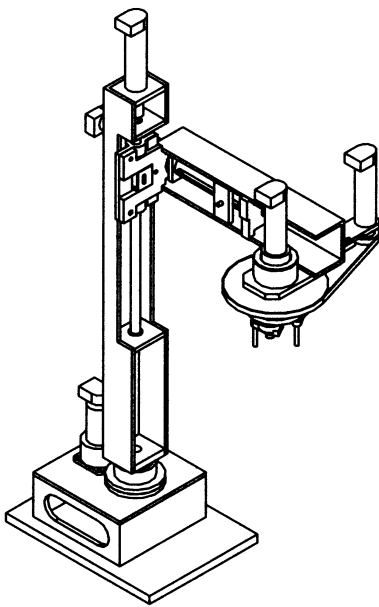
1. Introducere

acțiuni, pe baza informațiilor primite de la senzori.

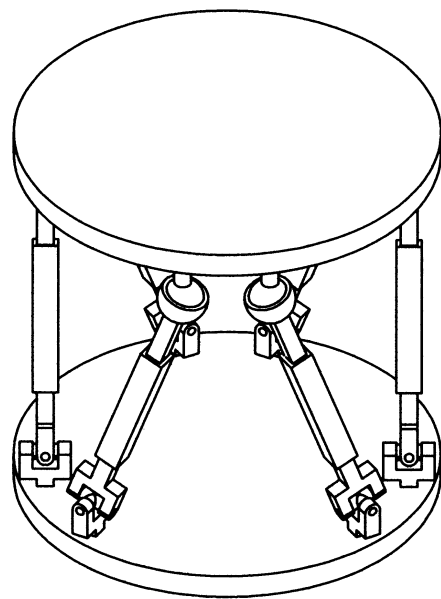
□ Roboți inteligenți, sunt roboții ce utilizează tehnici de inteligență artificială pentru luarea deciziilor și rezolvarea problemelor.

1.6.2 Clasificarea roboților după tipul acestora

- Roboți de tip manipulator
 - Roboți seriali
 - Roboți paraleli
- Roboți mobili
 - Roboți mobili cu roți sau șenile
 - Roboți pășitori (dintre aceștia, o categorie aparte o constituie roboții umanoizi)
 - Roboți mobili cu locomoție hibridă, etc.
- Roboți de tip hibrid (manipulator montat pe o platformă mobilă)



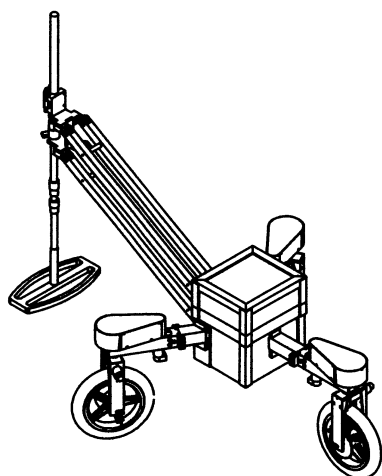
(a)



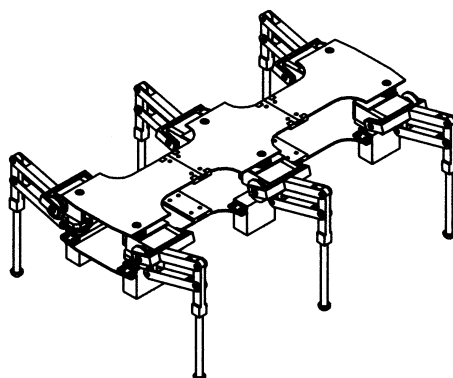
(b)

Fig. 1.2 Roboți de tip manipulator: a) robot serial; b) robot paralel

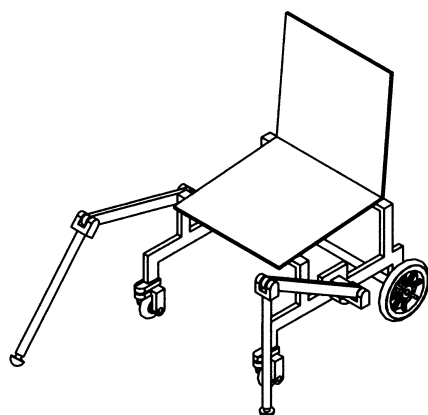
Bazele Roboticii



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 1.3 Roboți mobili: a) robot cu roți; b) robot pășitor; c) robot cu locomoție hibridă; d) robot umanoid

1.6.3 Clasificare după domeniul de aplicare

- ☐ Roboți industriali
- ☐ Roboți pentru servicii
- ☐ Roboți comandați la distanță
- ☐ Interfețe mecanice pentru realitatea virtuală



Fig. 1.4 Robot cu arhitectură hibridă, pentru asistarea persoanelor handicapate

1.6.4 Clasificarea roboților industriali

1.6.4.1 Clasificare după ramurile industriale în care se utilizează

- ❑ Roboți pentru agricultură, vânat, pescuit și industria forestieră;
- ❑ Roboți pentru industria de minerit și cariere de piatră;
- ❑ Roboți pentru industria alimentară și a băuturilor;
- ❑ Roboți pentru industria tutunului;
- ❑ Roboți pentru industria textilă;
- ❑ Roboți pentru industria cauciucului și produselor din plastic;
- ❑ Roboți pentru fabricarea altor produse minerale nemetalice;
- ❑ Roboți pentru fabricarea produselor din metal, exceptând utilajele și echipamentele;
- ❑ Roboți pentru industria metalelor de bază;
- ❑ Roboți pentru fabricarea mașinilor și echipamentelor neclasificate în altă parte;
- ❑ Roboți pentru fabricarea mașinilor de calcul și de birou;
- ❑ Roboți pentru fabricarea mașinilor și aparatelor electrice, neclasificate în altă parte;
- ❑ Roboți pentru fabricarea echipamentelor și aparatelor de radio, televiziune și comunicație;

Bazele Roboticii

- ❑ Roboți pentru fabricarea instrumentelor medicale, de precizie și optice, respectiv pentru industria de ceasornicărie;
- ❑ Roboți pentru fabricarea motoarelor de vehicule;
- ❑ Roboți pentru fabricarea caroseriei vehiculelor, a trailerelor și semi - trailerelor;
- ❑ Roboți pentru fabricarea componentelor și accesoriilor motoarelor vehiculelor;
- ❑ Roboți pentru fabricarea altor echipamente de transport;
- ❑ Roboți pentru industria mobilei;
- ❑ Roboți pentru industria de alimentare cu electricitate, gaz și apă;
- ❑ Roboți pentru construcții;
- ❑ Roboți pentru cercetare;
- ❑ Roboți pentru educație;
- ❑ Roboți pentru alte sectoare ale industriei.

1.6.4.2 Clasificare după aria de aplicație

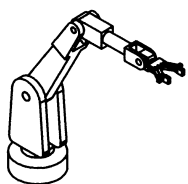
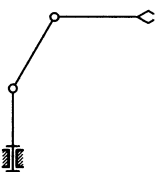
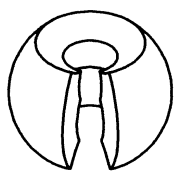
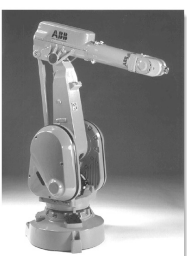
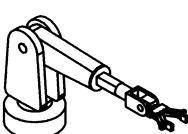
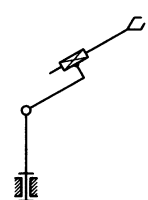
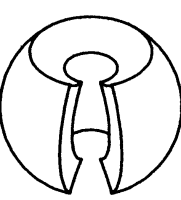
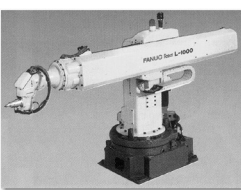
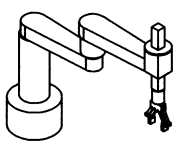
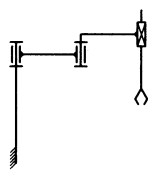
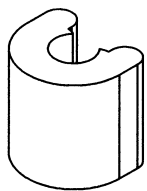
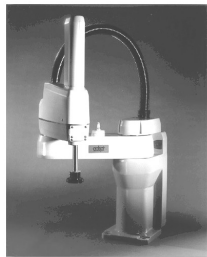
- ❑ Roboți pentru extragerea pieselor turnate;
- ❑ Roboți pentru operații de turnare sub presiune;
- ❑ Roboți pentru operații de tratament termic;
- ❑ Roboți pentru forjare/matrițare;
- ❑ Roboți pentru sudură:
 - sudură cu arc electric;
 - sudură în puncte;
 - sudură cu gaz;
 - sudură cu laser;
 - alte tipuri de sudură;
- ❑ Roboți pentru dozare/distribuire:
 - vopsire;
 - etanșare / lipire;
 - altele;
- ❑ Roboți pentru prelucrare mecanică:
 - alimentarea/descărcarea mașinilor;
 - debitare/rectificare/debavurare/polizare;
 - altele;
- ❑ Roboți pentru operații speciale:
 - tăiere cu laser;
 - tăiere cu jet de apă;
 - altele;
- ❑ Roboți pentru asamblare:
 - asamblare mecanică;
 - inserție/montare/tăiere;

1. Introducere

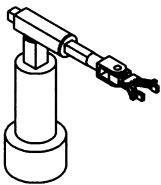
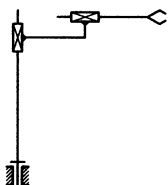
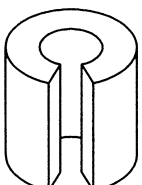

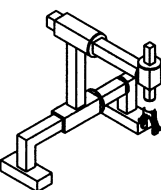
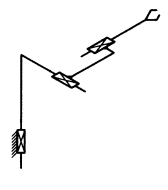
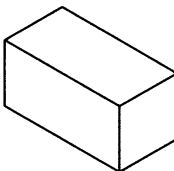

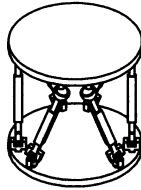
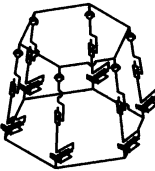
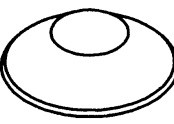

- îmbinare;
- lipire;
- manipulare pentru operații de asamblare;
- altele;
- Roboți pentru operații de manipulare în vederea paletizării/ambalării;
- Roboți pentru măsurare/inspecție/testare;
- Roboți pentru manipularea de materiale;
- Roboți pentru antrenament/educație/cercetare;
- Alte tipuri de roboți.

1.6.4.3 Clasificare după structura mecanică (Tabelul 1.4)

Tabelul 1.4 Clasificare după structura mecanică

Denumire robot	Soluție constructivă	Schemă structurală	Spațiu de lucru	Exemplu
Robot articulat sau antropomorf				
Robot în coordonate sferice sau polare				
Robot tip SCARA (Selected Compliance Articulated Robot Arm)				

Bazele Roboticii

Robot în coordonate cilindrice				
Robot în coordonate carteziane				
Robot paralel				

1.6.5 Clasificarea roboților pentru servicii

Robotul pentru servicii este un robot autonom sau semi-autonom, care efectuează servicii utile omului sau echipamentelor, excluzând operațiile industriale.

Roboții pentru servicii pot fi clasificați astfel:

- ❑ Roboți ce deservesc oamenii (roboți casnici; roboți pentru: securitate personală, amuzament, chirurgie, asistarea persoanelor handicapate, etc.)
- ❑ Roboți ce deservesc echipamente (roboți pentru: alimentarea autoturismelor cu combustibil, spălarea geamurilor avioanelor; inspecția, curățarea și întreținerea unor echipamente, etc.)
- ❑ Alți roboți pentru servicii, ce efectuează o activitate autonomă (robot mobil pentru servicii de tip „curier” în spitale; roboți pentru curățenie în aeroporturi, gări, etc.; roboți pentru tăierea gazonului; roboți de pază; etc.)

1.6.6 Clasificarea roboților comandați la distanță

- Roboți comandați prin unde radio
 - Roboți subacvatici
 - Roboți militari
 - Roboți spațiali
 - Roboți pentru medii nucleare, etc.
- Sisteme master-slave (teleroboți)

1.7 Aplicații ale roboților

1.7.1 Aplicații industriale

Din punct de vedere comercial, aplicațiile industriale ale roboților sunt încă predominante. Industria de automobile a avut cea mai mare contribuție în dezvoltarea roboților industriali. Liniile tradiționale de producție erau concepute numai pentru un singur model de automobil și trebuiau să fie reproiectate și reconstruite, înainte ca un nou model de automobil să fie fabricat. De asemenea, sudura manuală a fost una din operațiile cu probleme, deoarece pistoalele de sudură prin puncte erau grele și dificil de manipulat. Nu era ceva neobișnuit ca o linie de sudură a caroseriei, ce lucra la întreaga capacitate, să nu facă față cererii pentru un nou model, în timp ce o a doua linie să lucreze într-un ritm foarte scăzut, datorită cererii reduse pentru modelul vechi.

Introducând tehnologii robotizate în aceste fabrici, s-au rezolvat problemele menționate anterior. O linie de sudură robotizată poate fi modificată, la trecerea de la un model la altul, prin simpla reprogramare a roboților. În consecință, este posibil să se fabrice modele diferite, utilizând aceeași linie tehnologică, respectiv modele cerute de comenzi speciale. De asemenea, calitatea sudurii este mult mai bună, deoarece roboții nu obosec, așa cum este cazul cu operatorii umani. Astfel, noile linii sunt mult mai flexibile, produsele au o calitate superioară, reprezentând o investiție mai bună.

Inițial, multe companii au abordat procesul de robotizare cumpărând un robot, pentru a vedea ce se poate face cu el. Această abordare este înlocuită acum cu o abordare mult mai inginerască. Drept urmare, mulți producători de roboți oferă soluții multiple problemelor de fabricație. Un prim pas îl constituie definirea clară a aplicației și specificarea scopului ce trebuie atins.

Bazele Roboticii

Experiența industrială a demonstrat că angajații acceptă mai ușor robotizarea dacă managerii lor sunt onești în ceea ce privește intențiile lor. Companiile ce își ascund intențiile de robotizare vor avea mai apoi probleme. Managerii ce încearcă să înșele personalul lor în acest mod, arată clar că pun profitul mai presus de grija față de angajați. O persoană ce a desfășurat o activitate pentru o anumită perioadă capătă anumite deprinderi, ce o face capabilă să lucreze cu o precizie ridicată și de calitate. Dacă această persoană este implicată în exploatarea unui sistem robotizat atunci ea va face totul, utilizând cunoștințele acumulate, pentru a contribui la funcționarea în cele mai bune condiții a sistemului respectiv. Dimpotrivă, dacă această persoană se opune robotizării, ea poate face ca instalația să se defecteze.

În continuare, vor fi trecute în revistă principalele aplicații industriale ale roboților:

- Alimentare cu semifabricate a mașinilor-unelte;
- Ambalare;



Fig. 1.5 Alimentarea M-U



Fig. 1.6 Montaj, autoturisme



Fig. 1.7 Debavurare piese injectate

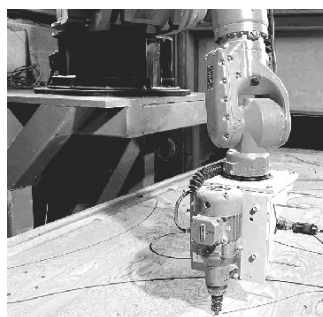


Fig. 1.8 Decupare prin așchiere

1. Introducere

- Asamblare;
- Debavurare;
- Decupare;
- Manipulare;
- Măsurare-control;
- Paletizare;

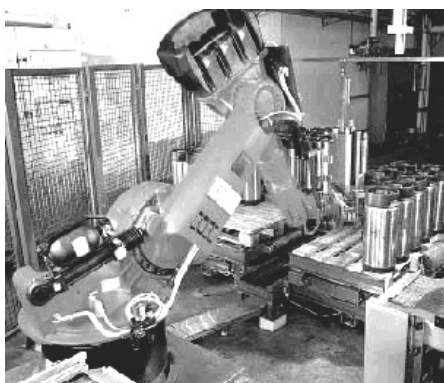


Fig. 1.9 Manipulare recipiente cu bere



Fig. 1.10 Paletizare și manipulare

- Sudare:
 - prin puncte;
 - cu arc electric;
 - cu gaz;
 - cu laser;
- Tăiere cu plasmă;

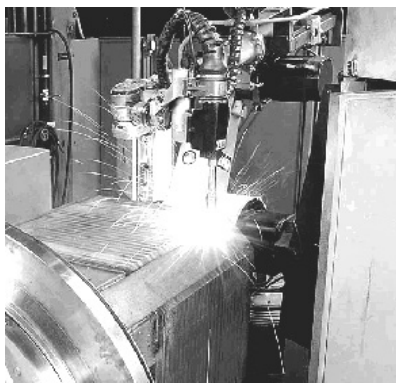


Fig. 1.11 Sudare cu arc electric
- Vopsire, etc.

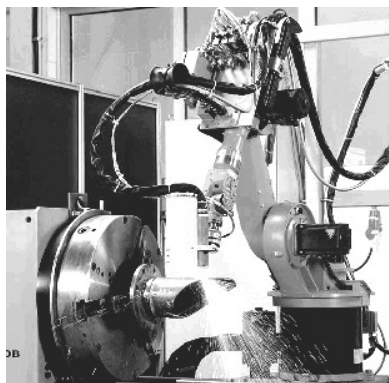


Fig. 1.12 Tăiere cu plasmă

1.7.2 Aplicații ale roboților pentru servicii

În ultimii ani a avut loc o dezvoltare în continuă creștere a roboților pentru servicii. Aceștia reprezintă, de fapt, roboții ce nu sunt utilizați în aplicații industriale, făcându-se astfel o distincție între sectoarele industriale și cele de servicii ale economiei. În consecință, roboții pentru servicii sunt foarte diversificați și pot fi date exemple în acest sens.

Roboții mobili au multiple aplicații, cum ar fi roboți de pază sau de transport a unor obiecte. Camioanele sunt automatizate, pentru aplicații miniere sau pentru transportul containerelor de depozitare. Proiectul privind realizarea de autostrăzi inteligente transformă autoturismul într-un robot mobil. Navele de călători și vapoarele de mare tonaj sunt deja substanțial sub control automat. Submersibilele sunt implicate în operații de explorare și recuperare a petrolului. Există roboți ce colectează mostre de pe Marte și efectuează analiza acestora, etc.

Recent, roboții au avut un mare impact și în medicină. Precizia lor permite ca operația chirurgicală să fie făcută mult mai precis decât ar fi capabile mâinile umane. Exemplele includ operațiile pentru înlocuirea articulației șoldului, reconstrucția craniofacială și neurochirurgia. Recuperarea și asistarea persoanelor handicapate reprezintă alte aplicații ale roboților în medicină.



Fig. 1.13 Robot forestier (robotul Plustech)



Fig. 1.14 Robot pentru alimentare cu combustibil

1. Introducere

Automatizarea domestică se prevede a fi o arie foarte largă de aplicare a roboților. Prețul de cost este încă o problemă, dar va veni o zi când în casele noastre vor exista roboți pentru aspirarea prafului, spălarea vaselor, tăierea gazonului, etc. O altă aplicație pentru roboții domestici este cea de a asigura companie (de a asigura îngrijire) persoanelor în vârstă.

Roboții sofisticăți de divertisment, ce imită omul sau animalele, se regăsesc acum în câteva parcuri mari de acest gen.

Iată și principalele aplicații neindustriale ale roboților:

- Roboți pentru educație;
- Roboți pentru agricultură (fig. 1.13);
- Roboți pentru alimentare cu combustibil (Fig. 1.14);
- Roboți pentru construcții (Fig. 1.15);
- Roboți pentru curățenie (Fig. 1.16);



Fig. 1.15 Robot pentru construcții



Fig. 1.16 Robot pentru curățenie



Fig. 1.17 Robot de companie

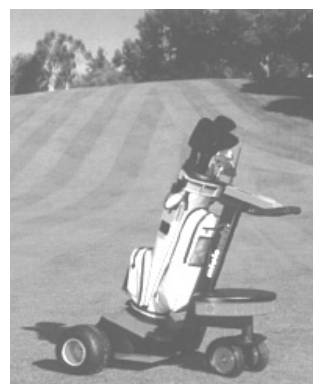


Fig. 1.18 Robot insotitor al jucatorului de golf

Bazele Roboticii

- Roboți pentru divertisment (Fig. 1.17);
- Hobby (Fig. 1.18);
- Roboți pentru hotel/restaurant (fig. 1.19);
- Roboți pentru marketing (Fig. 1.20);



Fig. 1.19 Robot pentru prăjit cartofi



Fig. 1.20 Bar automat

- Roboți pentru operații chirurgicale (Fig. 1.21);
- Roboți pentru asistarea persoanelor handicapate (reabilitare, hrănire, etc., Fig. 1.22);



Fig. 1.21 Robot pentru operații chirurgicale



Fig. 1.22 Robot pentru reabilitare

1. Introducere

- Roboți pentru stingerea incendiilor (Fig. 1.23);
- Roboți pentru mină;
- Roboți pentru pază (Fig. 1.24);
- Roboți pentru reconstrucție, etc.



Fig. 1.23 Robot pentru stingere incendii



Fig. 1.24 Robot pentru pază

1.7.3 Aplicații ale roboților comandați la distanță

1.7.3.1 Roboți comandați prin unde radio

- Roboți pentru aplicații spațiale (Fig. 1.25);
- Roboți pentru aplicații subacvatice (Fig. 1.26);



Fig. 1.25 Robot cu aplicații spațiale



Fig. 1.26 Robot subacvatic

Bazele Roboticii

- Roboți pentru deminaj umanitar;
- Roboți cu aplicații în medii nucleare, etc.

1.7.3.2 Teleroboți

Teleroboții sunt sisteme *master-slave*, în care un robot aflat la o anumită distanță (*slave*) este comandat direct, de către operatorul uman, prin intermediul unui controler manual (*master*). Sistemul master trimite sistemului slave semnale privind poziția pe care acesta trebuie să o ia. În cazul când se efectuează și un control al forței, sistemul master este acționat de actuatori, iar informațiile privind valoarea forței sunt trimise de la sistemul slave la sistemul master. Scopul este de a da operatorului senzația de *pipăit*, cumulată reacției vizuale.

Cele mai importante realizări ale teleroboticii au fost cele care au permis efectuarea unor operații periculoase, cum ar fi: depozitarea deșeurilor periculoase, manipularea la distanță a organelor de mașină grele, întreținerea de la distanță a liniilor de alimentare cu energie, operații forestiere, inspectarea conductelor, stingerea incendiilor, securitate, transport de marfă, operații în medii oceanice și spațiale.

Unele sisteme master pot fi considerate roboți comandați de operatorul uman (Fig.1.27.b). Actuatorii hidraulici ai sistemului master în cauză exercită forțe asupra operatorului, ca un răspuns la forțele detectate de sistemul slave. Alteori, sistemele master nu sunt acționate de actuatori, dar servesc drept surse de poziționare (Fig. 1.27.a,c). Deși, din punct de vedere tehnic, acestea din urmă nu sunt roboți, asemenea sisteme master sunt totuși analizate din punct de vedere cinematic, prin metode dezvoltate pentru robotică.

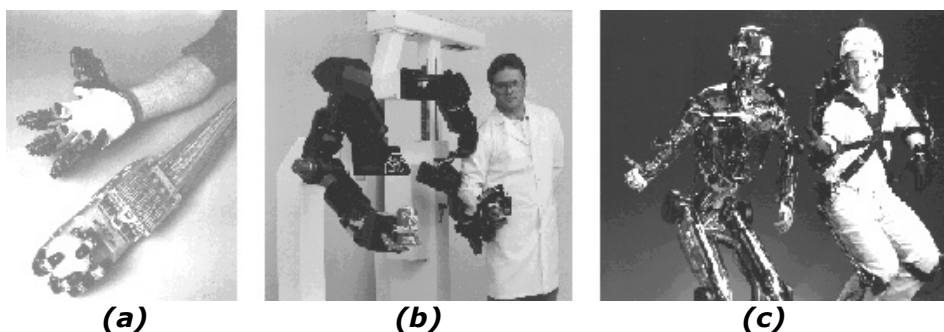


Fig. 1.27 Sisteme master-slave: a) Mână master Utah; b) Braț master Sarcos; c) Sistem master Sensuit

1.7.4 Interfețe mecanice pentru realitatea virtuală

Interfețele mecanice pentru sistemele de realitate virtuală sunt adevărate sisteme master, utilizate pentru a controla și interacționa cu medii virtuale, mai precis decât cu sistemele slave. De fapt, realitatea virtuală și comanda la distanță (teleoperarea) sunt foarte apropiate.

Conceptele din robotică se aplică la interfețele pentru realitatea virtuală, deoarece acestea din urmă sunt sisteme robotice, care interacționează cu oamenii în anumite moduri particulare.

1.8 Arhitectura unui sistem robotizat

Componentele de bază ale unui sistem robotizat (Fig. 1.28) pot fi grupate în patru sisteme distincte, fiecare având importanța sa și meritând atenția cuvenită. Aceste sisteme sunt:

- **Sistemul mecanic 1**, ce conține lanțuri cinematice (închise sau deschise), în cazul unui robot de tip manipulator, sau un corp și roți (picioare), în cazul unui robot mobil (pășitor). În cazul roboților cu structură mixtă, acest sistem conține un lanț cinematic (închis sau deschis), montat pe o platformă mobilă. Elementele lanțurilor cinematice sunt conectate prin cuple, care determină gradul de mobilitate al robotului. Cuplele cinematice sunt, de regulă, de rotație sau translație.
- **Sistemul de acționare** (format din: sursă de energie și amplificator, notate cu 6; motoare 3 și transmisii mecanice 2) contribuie la punerea în mișcare a robotului. În mod curent, se utilizează actuatori electrici, hidraulici sau pneumatici, dar pot fi utilizați și actuatori neconvenționali, după cum se va vedea pe parcursul acestei lucrări. Transmisiiile mecanice fac legătura dintre actuator (motor) și elementele cinematice conducătoare ale sistemului mecanic. Aceste transmisii sunt, în general, utilizate din trei motive:
 - Cel mai adesea deoarece caracteristicile actuatorului (turație, cuplu, etc.) nu sunt corespunzătoare pentru acționarea directă a robotului (reductoare obișnuite cu roți dințate, reductoare armonice, etc.).
 - Al doilea motiv ar fi acela că tipul mișcării la ieșirea din actuator nu corespunde tipului cuplei cinematice conducătoare, adică pentru transformarea mișcării de rotație

Bazele Roboticii

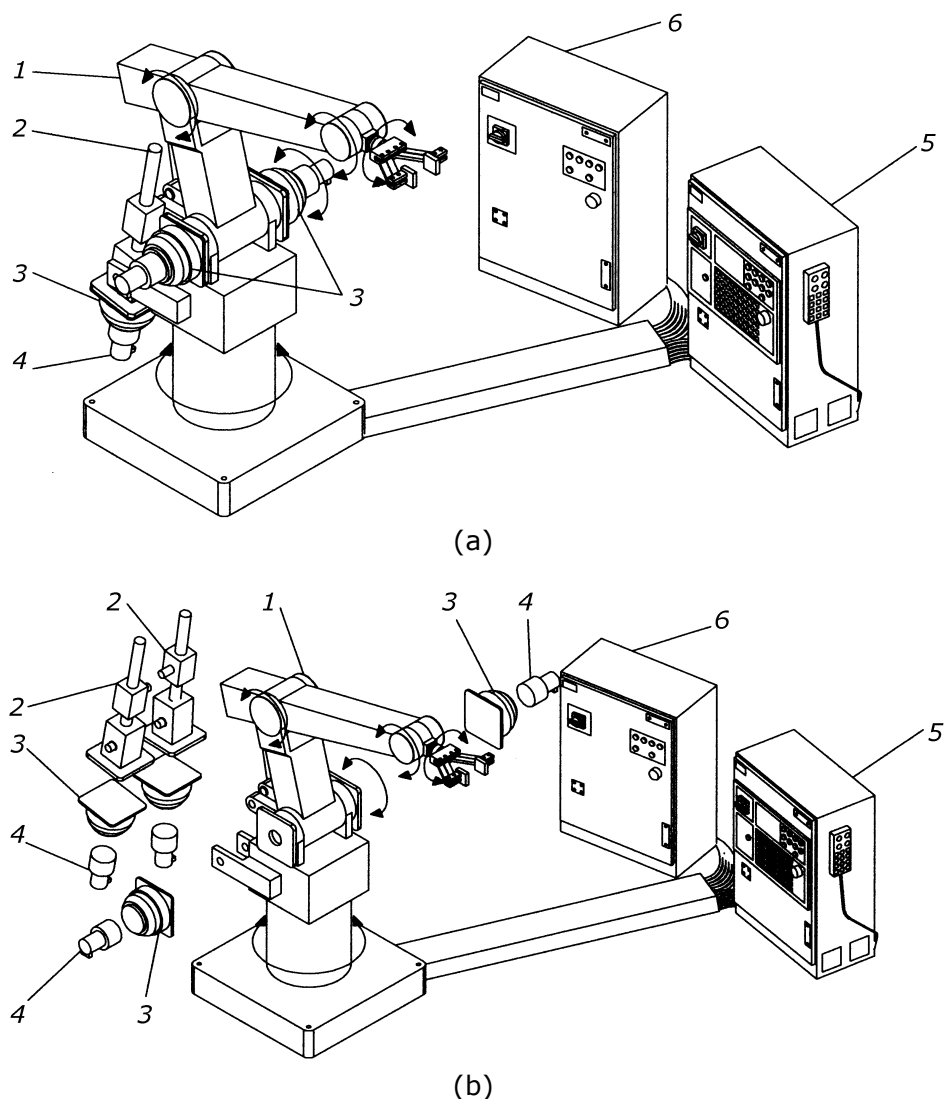


Fig. 1.28 Arhitectura unui robot industrial: (a) ansamblu general; (b) vedere explodată

în mișcare de translație sau invers (transmisii șurub-piuliță, de reglă cu bile, transmisii pinion-cremalieră).

- Al treilea motiv este acela că actuatorii au adesea o masă mare și nu este practică localizarea lor în imediata vecinătate a cuplei cinematice. În acest caz, actuatorii se montează la baza robotului și se folosesc transmisii (cu

1. Introducere

bare, cabluri, curele, etc.) pentru a face legătura dintre actuator și cupla cinematică acționată de acesta.

- **Sistemul senzorial** (în cazul de față, traductoarele de poziție și de viteză, 4) măsoară poziția și sensul de deplasare al elementelor cinematice (robotului în ansamblu). Pot fi plasate traductoare de poziție și de forță în cuplurile cinematice, senzori tactili pe degetele de apucare, camere video pe o platformă mobilă, etc.
- **Sistemul de comandă** (control), 5, citește informațiile de la senzori și transmite semnale de control către actuatori, pentru realizarea obiectivelor specificate în program.

Aceste elemente arată că *robotica* este un domeniu cu înaltă interdisciplinaritate, în care se îmbină cunoștințele din domenii ca: *inginerie mecanică, inginerie electrică, electronică, știința calculatoarelor* și chiar *biomecanică*. Această diversitate de cunoștințe face ca robotica să fie foarte interesantă și provocatoare.

1.9 Importanța studierii roboticii

Robotica este o disciplină fascinantă, ce merită abordată de cei pasionați de tehnică. Pe de o parte, există o mare diversitate de aplicații excitante, existând mereu loc pentru ceva nou. Pe de altă parte, roboții sunt interesați prin ei înșiși, crearea de oameni artificiali constituind preocupările multor cercetători.

Chiar dacă cineva nu este interesat să facă o carieră în robotică, există multe motive pentru a fi familiar cu aceasta, deoarece cunoștințele dobândite în cadrul acestei discipline sunt răspândite în multe alte domenii. Unele dintre aceste motive pot fi următoarele:

- Conceptul de robotică "penetrantă", scos în evidență recent, arată că există aspecte ale roboticii ce se regăsesc la multe alte sisteme, deși acestea nu sunt numite roboți. Aspectele menționate pot fi aspecte cinematice ale acestor sisteme sau aspecte privind controlul mașinilor-unelte cu comandă numerică.

- Interdisciplinaritatea roboticii este un bun antrenament general deoarece robotica necesită cunoștințe privind senzorii, actuarii, electronica, calculatoarele, controlerele, cunoștințe utile pentru realizarea și controlul unor alte sisteme.

- Conceptele roboticii sunt importante în animația grafică și realitatea virtuală. Considerațiile teoretice sunt aceleași, indiferent dacă vom controla figuri simulate sau roboți reali.

Bazele Roboticii

- Conceptele roboticii pot, adesea, ajuta la înțelegerea posibilităților sistemelor biologice corespondente. Spre exemplu, brațul uman îndeplinește multe funcții, pe care noi vrem să le implementăm brațului unui robot. Conceptele dezvoltate pentru brațul robotului pot să ne ofere mai multă intuiție în rezolvarea problemelor confruntate de brațul uman. Aceasta nu înseamnă că soluțiile roboticii sunt și candidate pentru soluțiile biologice, ci doar că, încercând să copiem funcțiile umane, putem să le apreciem mai bine.

1. Introdúcere

2

STRUCTURA SISTEMULUI MECANIC

2.1 Definiții

Elementul cinematic este un corp solid, format dintr-o singură piesă mecanică sau din mai multe piese îmbinate rigid între ele. Elementele cinematice pot fi *rigide* sau *flexibile* (cabluri, curele). În lucrarea de față, elementele cinematice vor fi considerate corpuri rigide.

Legătura directă și mobilă dintre două elemente cinematice poartă numele de *cuplă cinematică*. Numărul de parametri independenți care determină complet poziția relativă a celor două elemente reprezintă *gradul de mobilitate al cuplei*, m , acesta fiind egal și cu numărul mișcărilor elementare pe care le poate executa un element cinematic al cuplei în raport cu celălalt.

Principalele tipuri de cuple cinematice întâlnite în structura roboților sunt prezentate în Tabelul 2.1. Pentru comparație, în Fig. 2.1 sunt prezentate tipurile de articulații întâlnite în anatomia umană, exemplificându-se și zonele corpului omenesc unde apar aceste legături.

Lanțul cinematic este o înșiruire de elemente cinematice, legate între ele prin cuple cinematice.

Mecanismul este un lanț cinematic, care are următoarele proprietăți:

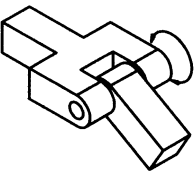
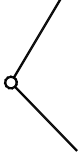
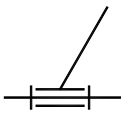
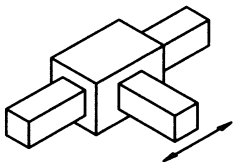
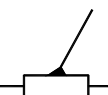
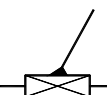
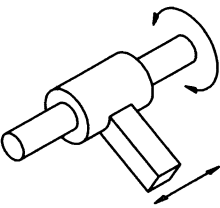
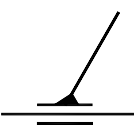
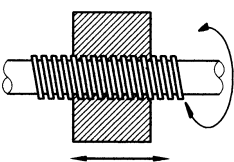
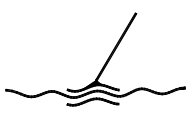
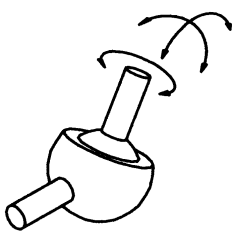

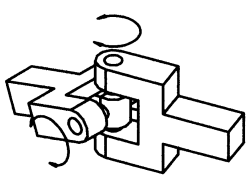
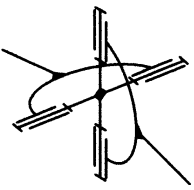
- Conține un element de referință, considerat fix, numit bază sau batiu, în raport cu care are loc mișcarea celorlalte elemente;
- Are un număr de cuple cinematice conducătoare, stabilit astfel încât mișcarea tuturor elementelor să fie determinată.

Mecanismul poate fi constituit din lanțuri cinematice: *deschise* (Fig. 2.2.a și 2.2.b) sau *închise* (Fig. 2.2.c și 2.2.d), *seriale* (Fig. 2.2.a și 2.2.b) sau *paralele* (Fig. 2.2.c și 2.2.d), *plane* (Fig. 2.2.a și 2.2.c) sau *spațiale* (Fig. 2.2.b și 2.2.d).

Un lanț cinematic este denumit *închis* dacă acesta formează o

2. Structura sistemului mecanic

Tabelul 2.1 Principalele tipuri de cuple cinematice

Tipul cuplei cinematice	Forma fizică	Simbol	Grade de mobilitate
Rotație (R)		<div>-plană</div>  <div>-spațială</div> 	1
Translație (T)		<div>-plană</div>  <div>-spațială</div> 	1
Cilindrică (C)			2
Elicoidală (E)			1
Sferică (S)			3
Universală (U)			2

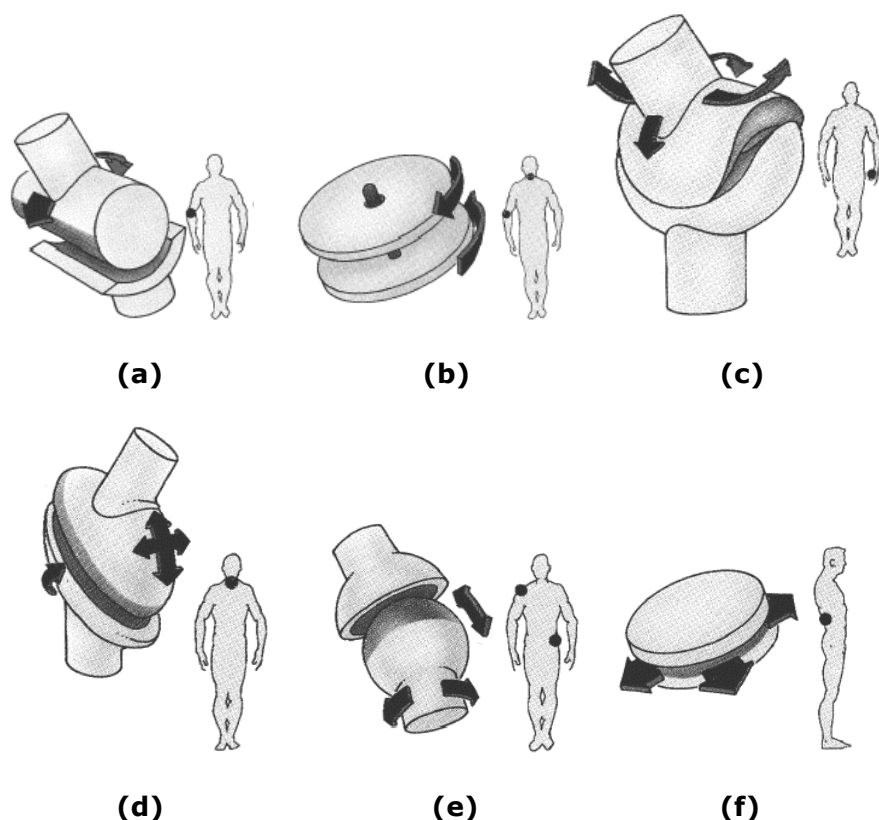


Fig. 2.1 Tipuri de articulații anatomice: a) articulație tip balama; b) articulație tip pivot; c) articulație tip șa; d) articulație condiloidă; e) articulație sferică; f) articulație plană

bucă închisă, în caz contrar acesta este *deschis*.

Dacă fiecare element al lanțului cinematic, exceptând primul și ultimul, este legat de alte două elemente, atunci lanțul cinematic respectiv se numește *serial*.

Un lanț cinematic este *paralel* dacă primul și ultimul element sunt legate între ele prin intermediul a cel puțin două lanțuri cinematice independente.

Lanțul cinematic ale cărui elemente efectuează mișcări în același plan sau în planuri paralele este numit lanț cinematic *plan*. Dacă mișcările elementelor au loc în cel puțin două planuri neparalele, acesta se numește lanț cinematic *spațial*.

2. Structura sistemului mecanic

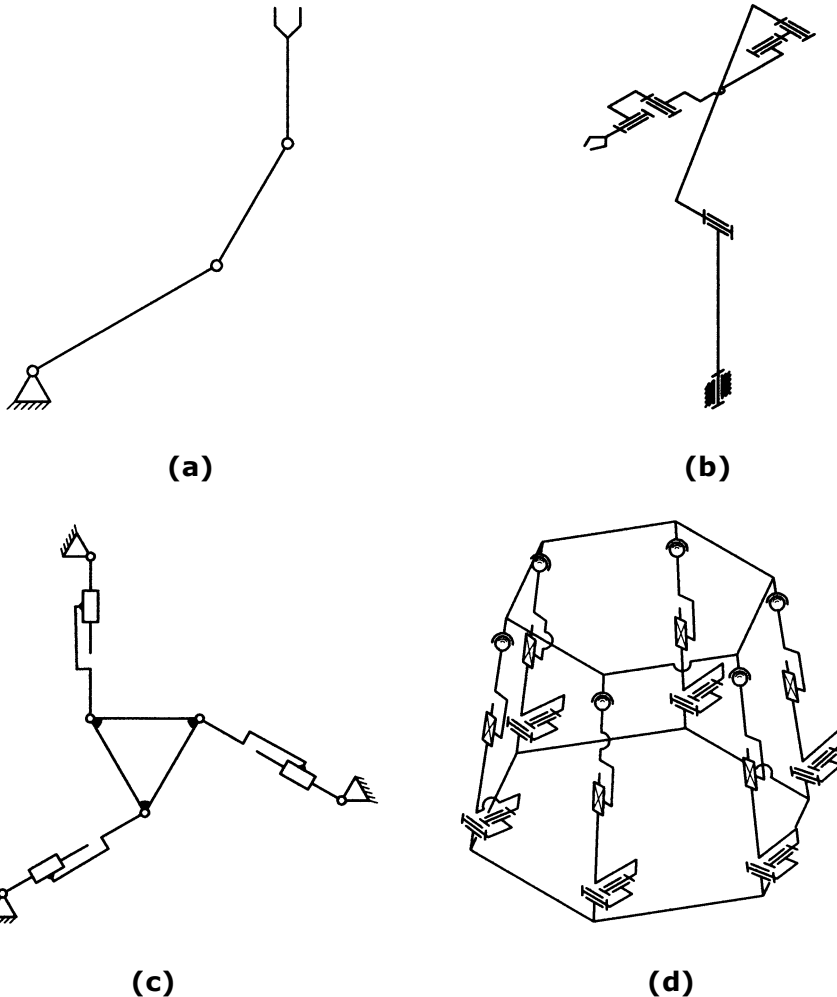


Fig. 2.2 Tipuri de lanțuri cinematice: a) deschis, serial, plan; b) deschis, serial, spațial; c) închis, paralel, plan; d) închis, paralel, spațial

2.2 Componentele sistemului mecanic

Sistemul mecanic al unui robot de tip manipulator are în structura sa o serie de mecanisme și dispozitive (Fig. 2.3), care asigură apucarea obiectului manipulat, respectiv poziționarea și orientarea în spațiu a acestuia (sau a unei scule).

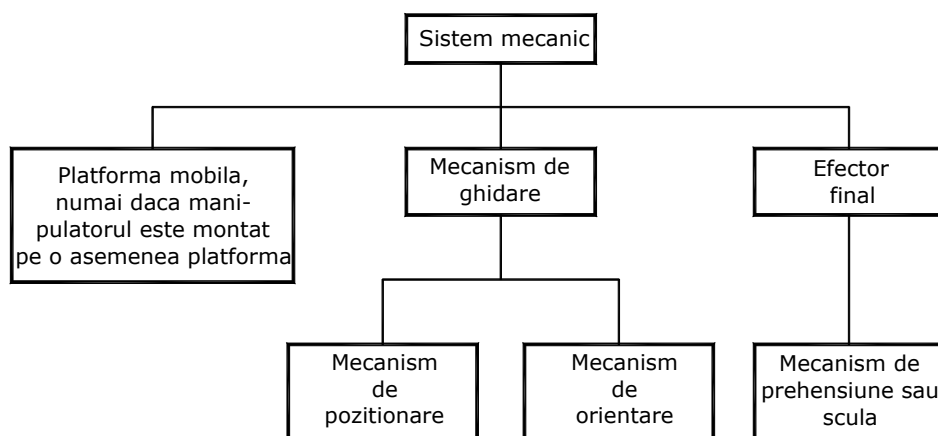


Fig. 2.3 Structura sistemului mecanic

Mecanismul de ghidare are rolul de a conferi efectorului final mișcările necesare situării (poziționării și orientării) în spațiu a obiectului manipulat, precum și energia mecanică necesară efectuării acestor mișcări.

Situarea (poziționarea și orientarea) obiectului manipulat în spațiul tridimensional se poate defini cu ajutorul poziției punctului caracteristic și a orientărilor a două drepte numite caracteristică și auxiliară (Fig. 2.4).

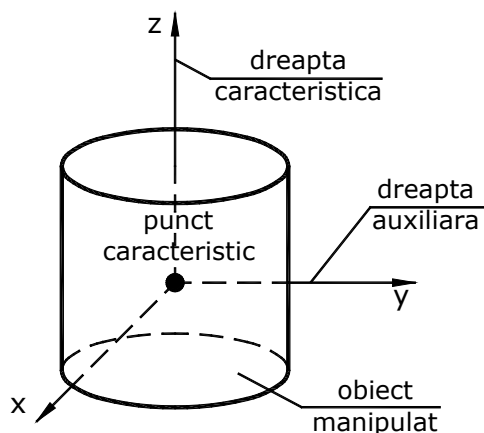


Fig. 2.4 Elementele obiectului manipulat

Prin *punct caracteristic* se înțelege un punct al obiectului manipulat, folosit pentru definirea poziției acestuia.

Dreapta caracteristică este dreapta ce trece prin punctul caracteristic, iar *dreapta auxiliară* este dreapta perpendiculară, în punctul caracteristic, pe dreapta caracteristică.

Poziționarea (deplasa-rea) în spațiu a obiectului manipulat o realizează *mecanismul de poziționare* (*generator de traiectorie*), iar orientarea acestui obiect este asigurată de *mecanismul de orientare* (acesta din urmă conține numai cuple cinematice de rotație). De multe ori,

2. Structura sistemului mecanic

mecanismul de poziționare este numit *braț*, iar mecanismul de orientare este numit *articulație carpiană* sau *mecanism carpian*.

Efactorul final poate fi un *mecanism de prehensiune* - cu rolul de a fixa obiectul manipulat de ultimul element al mecanismului de ghidare - sau o *sculă* (spre exemplu, un bisturiu).

2.3 Parametrii de bază ai unui robot de tip manipulator

Înainte de a efectua analiza structurală a roboților de tip manipulator, este importantă definirea parametrilor de bază ai acestora, care sunt, mai mult sau mai puțin, asociați unei anumite structuri mecanice. O listă a unor asemenea parametri include:

- *Sarcina utilă*
- *Mobilitatea* (numărul gradelor de mobilitate ale sistemului mecanic)
- *Spațiul de lucru*
- *Agilitatea* (viteza efectivă de execuție a mișcărilor prescrise)
- *Precizia și repetabilitatea* de poziționare
- *Rigiditatea structurală* (compliance), *masele*, *coeficienții de amortizare* și *frecvențele naturale*
- *Eficiența economică* (cost, fiabilitate, mentenabilitate, etc.)

Mulți dintre acești parametri sunt interdependenți (spre exemplu, sarcina utilă maximă, vitezele, accelerațiile și precizia depind de punctul din spațiul de lucru în care se face măsurarea).

Valoarea nominală a *sarcinii utile* a unui robot este masa maximă a corpului ce poate fi manipulat în orice configurație a sistemului mecanic. Desigur, în unele configurații sarcina utilă poate fi mai mare decât cea nominală.

Deoarece sarcina utilă nu este limitată numai de cuplurile (forțele) actuatorilor ci și de tensiunile din elementele cinematice, aceasta poate să difere în funcție de mediul de lucru și de parametrii de mișcare (mărimile și/sau sensurile vitezelor sau accelerațiilor).

Mobilitatea unui robot este determinată de numărul total de mișcări independente ce pot fi efectuate de toate elementele acestuia. Numărul gradelor de libertate ale punctului final al manipulatorului este egal cu suma gradelor de libertate independente ale elementelor intermediare.

Spațiul de lucru al unui manipulator este spațiul ce conține toate punctele ce pot fi atinse de extremitatea finală a ultimului

Bazele Roboticii

element cinematic al mecanismului de poziționare sau de un punct al mecanismului de orientare dar nu de efectorul final sau de extremitatea sculei. Motivul pentru care spațiul de lucru standard este definit astfel este acela că acesta este o caracteristică a robotului, în timp ce efectorii finali, sculele, etc., pot avea diferite forme și mărimi, care uneori influențează semnificativ dimensiunile și forma spațiului de lucru efectiv. Specificațiile producătorului pot exclude anumite zone ale spațiului de lucru, dacă performanța robotului în ceea ce privește viteza cerută, sarcina utilă, etc., nu este asigurată în zonele respective.

Volumul și forma spațiului de lucru sunt foarte importante pentru aplicația robotului, deoarece acestea determină posibilitățile acestuia. Poate fi limitată utilizarea unui robot pentru anumite aplicații datorită faptului că spațiul de lucru al acestuia are „zone moarte”, ce nu pot fi atinse. Frecvent, mărimea reală și forma spațiului de lucru depind mult și de alți parametri decât cei cinematici de bază, cum ar fi: toleranțele constructive, condițiile termice, masa obiectului manipulat, viteze și accelerații, etc.

Un parametru important al spațiului de lucru este redundanța acestuia. Un om poate atinge cea mai mare parte a spațiului de lucru a brațului său din diferite direcții, ocolind astfel posibilele obstacole. Unii roboți pot, de asemenea, avea această abilitate datorită gradelor de mobilitate redundante. Deși gradele de mobilitate redundante complică mult programarea și strategiile de control, ca și proiectarea structurală, uneori acestea sunt cerute de aplicația robotului.

Vitezele, respectiv accelerațiile și decelerațiile maxime ale elementelor sunt limitate, pentru o structură dată a robotului, de cuplul (forța) actuatorilor cuplelor cinematice. Acestea variază în interiorul spațiului de lucru.

Precizia poate fi importantă atât pentru operații de poziționare „punct cu punct”, cât și pentru generarea unei traiectorii. Aceasta poate fi definită ca fiind diferența dintre poziția cerută și centrul zonei de distribuție a poziției reale a punctului extrem al brațului. *Repetabilitatea* poate fi caracterizată ca fiind lățimea zonei respective de distribuție. Pot exista trei situații: precizie rezonabilă și repetabilitate bună; precizie bună și repetabilitate scăzută; precizie scăzută și repetabilitate rezonabilă.

Atât precizia cât și repetabilitatea pot fi influențate de frecare, histerezis, jocuri, complianța elementelor, cuplelor cinematice sau a elementelor de acționare.

„*Dinamica structurală*”, caracterizată de mase și momente de inerție, rigiditate, constante de amortizare, frecvențe și moduri naturale de vibrație, este de o importanță critică din diverse motive. Valori mari ale forțelor și momentelor de inerție conduc la necesitatea

2. Structura sistemului mecanic

unor cupluri (forțe) mari ale motoarelor, în scopul efectuării unei mișcări cu viteză și accelerația cerută, adică performanțe scăzute. Rigiditatea scăzută conduce la frecvențe naturale scăzute, adică durată mare de stabilizare, respectiv precizie și repetabilitate scăzute. Constantele de amortizare trebuie să fie mari, pentru a reduce suprasolicitățile și a mări stabilitatea dinamică. Frecvențele naturale ale structurii mecanice trebuie să fie cât mai mari posibil, pentru a reduce suprasolicitățile.

Parametrii dinamici structurali ai robotului depind atât de poziția efectorului final în spațiul de lucru, cât și de direcția de mișcare.

Parametrii economici de bază ai roboților, ce determină costul efectiv al acestora, includ costul de realizare și costurile de menținere în funcțiune. Primul depinde de o serie întreagă de aspecte constructive (greutate, dimensiuni, actuatori, sursă de alimentare, etc., pentru o sarcină utilă și viteză date). Ultimele costuri includ cheltuielile privind energia consumată, cheltuielile de întreținere, etc., care de asemenea depind de structura mecanică.

2.4 Structura mecanismului de ghidare

Mecanismele de ghidare pot fi formate din lanțuri cinematice deschise sau închise, plane sau spațiale, seriale sau paralele (vezi Fig. 2.2).

Reprezentarea mecanismelor de ghidare se face cu ajutorul schemelor cinematice. O *schemă cinematică* (Fig. 2.4.b) este definită ca fiind o reprezentare grafică a mecanismului, folosind simboluri pentru cuplele cinematice (vezi Tabelul 2.1) și elementele acestuia.

2.4.1 Gradul de mobilitate al mecanismului de ghidare

Gradul de mobilitate al unui mecanism este dat de numărul minim de parametri independenți necesari pentru a specifica poziția tuturor elementelor mobile ale acestuia. De asemenea, gradul de mobilitate al mecanismului este egal și cu numărul cuplelor cinematice conducătoare din structura acestuia.

Presupunem că sistemul mecanic al unui robot este constituit dintr-un lanț cinematic având n elemente. În cazul în care toate aceste elemente cinematice sunt libere (să se miște independent în

Bazele Roboticii

spațiu), gradul de mobilitate al sistemului va fi $6n$ (știind că un corp liber în spațiul tridimensional poate avea trei rotații și trei translații). Dacă unul dintre aceste elemente este fixat, pentru ca lanțul cinematic să fie mecanism, acest element își va pierde gradele sale de libertate. De aceea, gradul de mobilitate al sistemului va deveni $6 \cdot (n - 1)$, atâta vreme cât elementele acestuia nu sunt legate între ele prin cuple cinematice. Dacă două elemente cinematice ale sistemului formează o cuplă cu gradul de mobilitate m_i , gradul de mobilitate al sistemului se diminuează, datorită faptului că cele două elemente (care aveau fiecare câte 6 grade de libertate) au mai pierdut din numărul gradelor de libertate, prin conectarea lor. Aceasta înseamnă că gradul de mobilitate al sistemului se reduce cu $6 - m_i$ (cele două elemente cinematice au acum, împreună, 6 grade de libertate în spațiu, la care se adaugă mișcările relative m_i dintre acestea, permise de cupla; inițial ele aveau împreună 12 grade de libertate). Dacă se va continua cu legarea elementelor până se obțin k cuple cinematice, gradele de mobilitate pierdute de sistem pot fi calculate astfel:

$$(6 - m_1) + (6 - m_2) + \dots + (6 - m_k) = \sum_{i=1}^k (6 - m_i) = 6 \cdot k - \sum_{i=1}^k m_i$$

În aceste condiții gradul de mobilitate al mecanismului va fi dat de relația:

$$M = 6 \cdot (n - 1) - \left(6 \cdot k - \sum_{i=1}^k m_i \right) = 6 \cdot (n - k - 1) + \sum_{i=1}^k m_i \quad (2.1)$$

unde: n - numărul total de elemente cinematice; k - numărul total de cuple cinematice; m_i - gradul de mobilitate al cuplei i .

Această modalitate de calcul a gradului de mobilitate este numită *principiul lui Kutzbach*. Dacă manipulatorul are numai cuple cinematice inferioare, cu gradul de mobilitate $m = 1$ (cuple de rotație, translație sau elicoidale), relația (2.1) devine:

$$M = 6 \cdot (n - k - 1) + k = 6 \cdot (n - 1) - 5k \quad (2.2)$$

Pentru un manipulator serial (deschis), numărul cuplelor cinematice este $k = n - 1$, relația (2.1) scriindu-se sub forma:

$$M = 6 \cdot [n - (n - 1) - 1] + \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k m_i \quad (2.3)$$

2. Structura sistemului mecanic

Dacă manipulatorul serial are numai cuple cinematice inferioare, cu gradul de mobilitate $m = 1$, relația (2.3) devine:

$$M = k = n - 1 \quad (2.4)$$

Pentru un mecanism plan, aplicând aceeași metodă, se obține următoarea relație pentru calculul gradului de mobilitate:

$$M = 3 \cdot (n - k - 1) + \sum_{i=1}^k m_i \quad (2.5)$$

Dacă manipulatorul plan conține un lanț cinematic serial, atunci $k = n - 1$, relația (2.5) devenind identică cu (2.3). Dacă toate cuplele cinematice sunt inferioare, calculul gradului de mobilitate se va face utilizând relația (2.4).

Pentru a deplasa și orienta un obiect în spațiul tridimensional, mecanismul de ghidare trebuie să aibă cel puțin 6 grade de mobilitate: trei grade de mobilitate asigurate de mecanismul de poziționare, pentru deplasarea obiectului manipulat în lungul celor trei axe de coordonate; trei grade de mobilitate asigurate de mecanismul de orientare, pentru orientarea obiectului manipulat în raport cu cele trei axe de coordonate. În cazul în care efectorul final este un mecanism de prehensiune, apare al 7-lea grad de mobilitate, necesar strângerii și fixării obiectului manipulat.

În funcție de sarcina pe care o are de îndeplinit robotul, pot exista și următoarele situații:

- dacă operația de manipulare este mai simplă, gradul de mobilitate poate fi mai mic decât 6, respectiv $M < 6$;
- pentru operații mai complexe, când obiectul manipulat trebuie să evite anumite obstacole, gradul de mobilitate trebuie să fie mai mare decât 6, $M > 6$.

Diferența $M - 6$ ne dă gradul de manevrabilitate al robotului:

$$M_m = M - 6 \quad (2.6)$$

Roboții ale căror mecanisme de ghidare se caracterizează prin $M_m < 0$ se numesc *roboți deficitari*, iar cei ale căror mecanisme de ghidare au $M_m > 0$ se numesc *roboți redundanți*.

2.4.1.1 Exemplu de calcul a gradului de mobilitate

Considerăm un robot serial de tip manipulator, al cărui model CAD este prezentat în Fig. 2.5.a.

Bazele Roboticii

Se analizează foarte atent sistemul mecanic al robotului, astfel încât să se determine tipul și numărul cuplelor cinematice din structura acestuia. Transmisiile mecanice auxiliare, utilizate pentru transmiterea mișcării de la motoare la elementele de bază ale sistemului mecanic, respectiv dispozitivul de prehensiune, nu se iau în considerare la reprezentarea schematică.

Se reprezintă schema cinematică a robotului, pentru exemplul nostru aceasta fiind prezentată în Fig. 2.5.b. Se notează elementele robotului cu cifre și cuplele cinematice cu litere mari, plecând de la elementul fix către efectorul final.

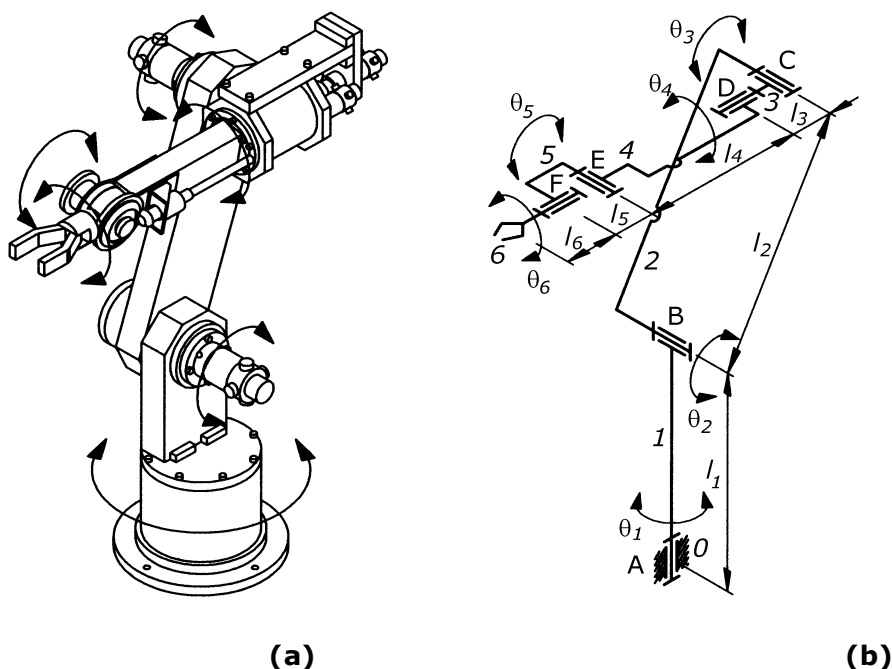


Fig. 2.5 Robot serial spațial de tip manipulator: a) model CAD; b) schemă cinematică

Pentru exemplul considerat, numărul total al elementelor cinematice este $n = 7$, iar numărul total al cuplelor cinematice pentru mecanismul de ghidare este $k = 6$ (3 cuple cinematice în structura mecanismului de poziționare – A, B, C – și 3 cuple în structura mecanismului de orientare – D, E, F). Toate cuplele cinematice sunt inferioare de rotație, având gradul de mobilitate $m = 1$. Folosind relația (2.1), vom calcula gradul de mobilitate M al robotului:

2. Structura sistemului mecanic

$$M = 6 \cdot (7 - 6 - 1) + \sum_{i=1}^6 m_i = 0 + 6 = 6$$

Acest lucru înseamnă că numărul parametrilor cinematici independenți necesari pentru a determina mișcarea celor șase elemente mobile este 6 (numărul motoarelor necesare pentru acționarea robotului va fi 6).

În cazul în care lanțul cinematic al robotului conține bucle închise, este mult mai dificilă determinarea directă a gradului de mobilitate al acestuia. Aplicând metodologia prezentată anterior problema se simplifică. Considerăm în acest sens un robot paralel plan, al arui schemă cinematică este prezentată în Fig. 2.6.

Numărul total de elemente ale robotului paralel este $n = 8$, iar numărul de cuple cinematice $k = 9$ (6 cuple de rotație și 3 cuple de translație). Toate cele 9 cuple au gradul de mobilitate $m = 1$. În aceste condiții, fiind vorba de un robot plan, vom utiliza relația (2.5) pentru a calcula gradul de mobilitate al robotului:

$$M = 3 \cdot (8 - 9 - 1) + \sum_{i=1}^9 m_i = -6 + 9 = 3$$

ceea ce înseamnă că, pentru funcționarea mecanismului, doar 3 din cele 9 cuple cinematice trebuie acționate, în cazul nostru acestea fiind cuplele de translație.

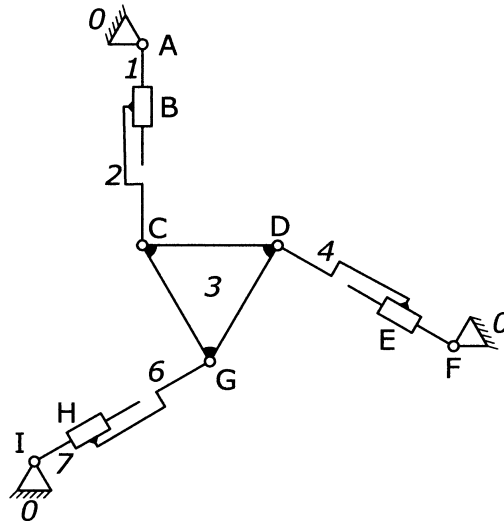


Fig. 2.6 Robot paralel plan, schemă cinematică

2.4.2 Structura mecanismului de poziționare

Așa cum s-a menționat anterior, pentru poziționarea completă a unui obiect în spațiul tridimensional, mecanismul de poziționare trebuie să aibă 3 grade de mobilitate.

Există însă situații când robotul trebuie să execute operații mai simple, cazuri în care acest mecanism poate avea gradul de mobilitate 1 sau 2. Pentru mecanismele de poziționare deschise, acest lucru conduce la următoarea clasificare a acestora (Tab. 2.2).

Tabelul 2.2 Variantele structurale ale mecanismului de poziționare

Nr. crt.	Gradul de mobilitate, M	Numărul elementelor, n și al cuplelor cinematice conducătoare, k	Varianta structurală a mecanismului de poziționare
1	1	$n = 2$ $k = 1$	R
2			T
3	2	$n = 3$ $k = 2$	RR
4			RT
5			TR
6			TT
7	3	$n = 4$ $k = 3$	RRR
8			RRT
9			RTR
10			TRR
11			RTT
12			TTR
13			TRT
14			TTT

Considerând variantele structurale din Tabelul 2.2, spațiul de lucru al unui manipulator poate fi: *liniar* (Fig. 2.7), *plan* (Fig. 2.8) sau *spațial* (Fig. 2.9).

Coordonatele punctului caracteristic pentru cele patru situații din Fig. 2.7 sunt:

(a) - RR

$$\begin{cases} x_M = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \\ y_M = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

unde: $l_1 = AB$; $l_2 = BM$

2. Structura sistemului mecanic

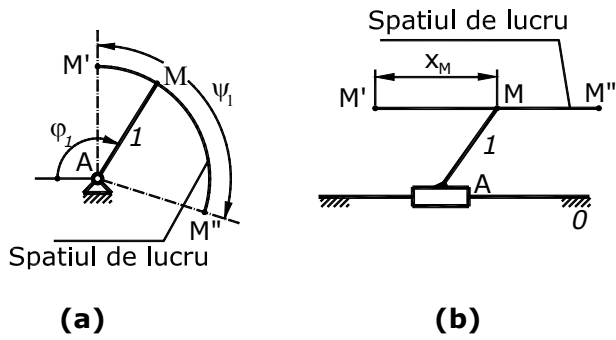


Fig. 2.7 Spatii de lucru liniare: a) R; b) T

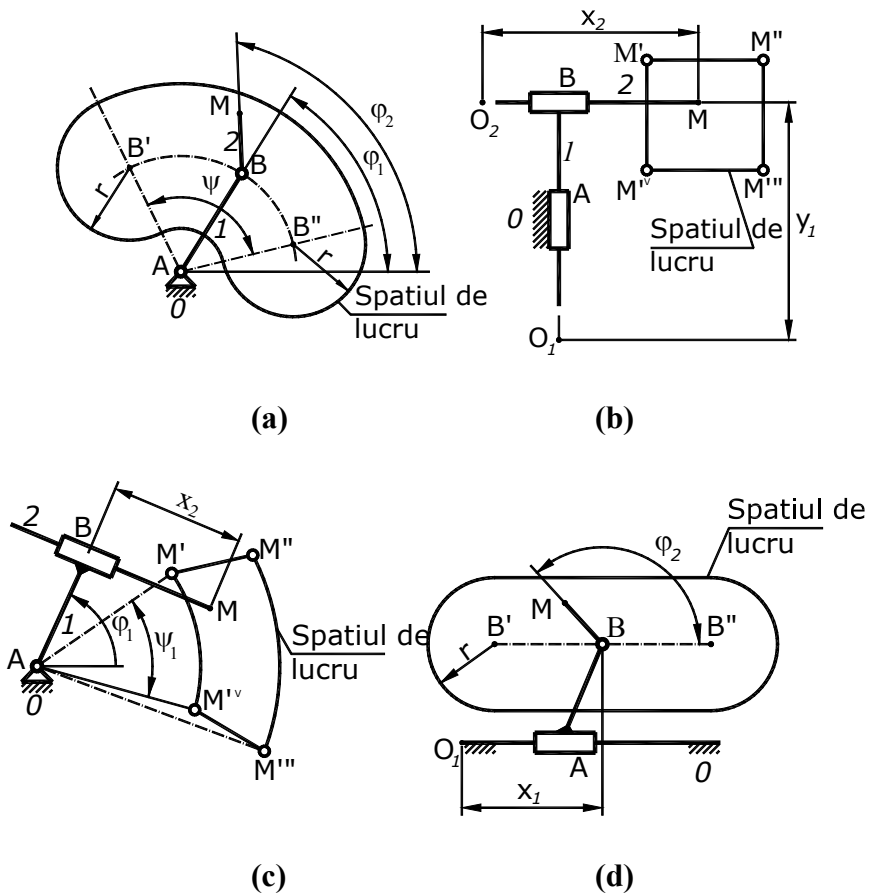


Fig. 2.8 Spatii de lucru plane: a) RR; b) TT; c) RT; d) TT
(b) – TT

Bazele Roboticii

$$\begin{cases} x_M = x_1 \\ y_M = y_1 \end{cases} \quad (2.8)$$

(c) - RT

$$\begin{cases} x_M = l_1 \cos \varphi_1 + x_2 \cos \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) \\ y_M = l_1 \sin \varphi_1 + x_2 \sin \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

unde: $l_1 = OB$; $l_2 = BM$

(d) - TT

$$\begin{cases} x_M = x_1 + l_2 \cos \varphi_2 \\ y_M = y_1 + l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

unde: $l_1 = AB$; $l_2 = BM$.

Cunoscând coordonatele x_M, y_M ale punctului caracteristic, se pot determina suprafețele spațiilor de lucru generate de mecanismul de poziționare. Aici s-au discutat doar variantele structurale ale unui mecanism de poziționare format dintr-un lanț cinematic deschis. Însă, așa cum s-a menționat anterior, acesta poate fi conține în structura sa și bucle închise.

Configurațiile posibile de mecanisme de poziționare cu spațiu de lucru tridimensional sunt prezentate în Fig. 2.9. Se poate observa că, la creșterea numărului de cuple cinematice de rotație, crește numărul configurațiilor de mecanisme de poziționare. Numărul configurațiilor devine maxim atunci când toate cuplele cinematice sunt de rotație.

Forma spațiilor de lucru pentru configurațiile din Fig. 2.9 sunt prezentate în Fig. 2.10. Dintre aceste configurații de mecanisme de poziționare se desprind câteva, foarte întâlnite în practică, ce intră în structura următoarelor tipuri de roboți:

- *robot articulat sau antropomorf*, asemenea brațului uman – RRR;
- *robot în coordonate sferice sau polare* – RRT;
- *robot tip SCARA (Selected Compliance Articulated Robot Arm)*, cu toate axele cuplelor pe direcție verticală – RRT;
- *robot în coordonate cilindrice* – RTT;
- *robot în coordonate carteziane* - TTT.

2. Structura sistemului mecanic

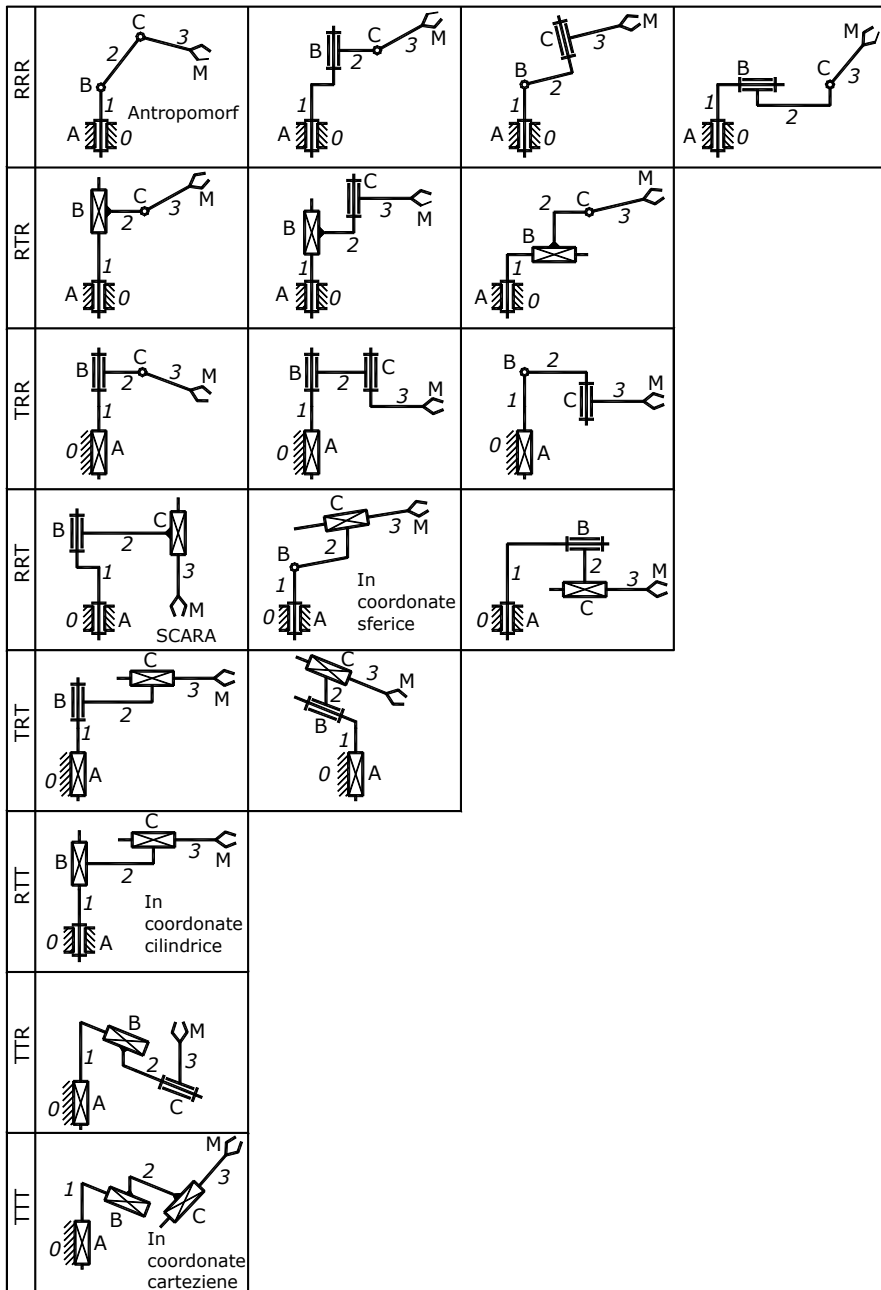


Fig. 2.9 Configurațiile posibile de mecanisme de poziționare cu gradul de mobilitate $M = 3$

Bazele Roboticii

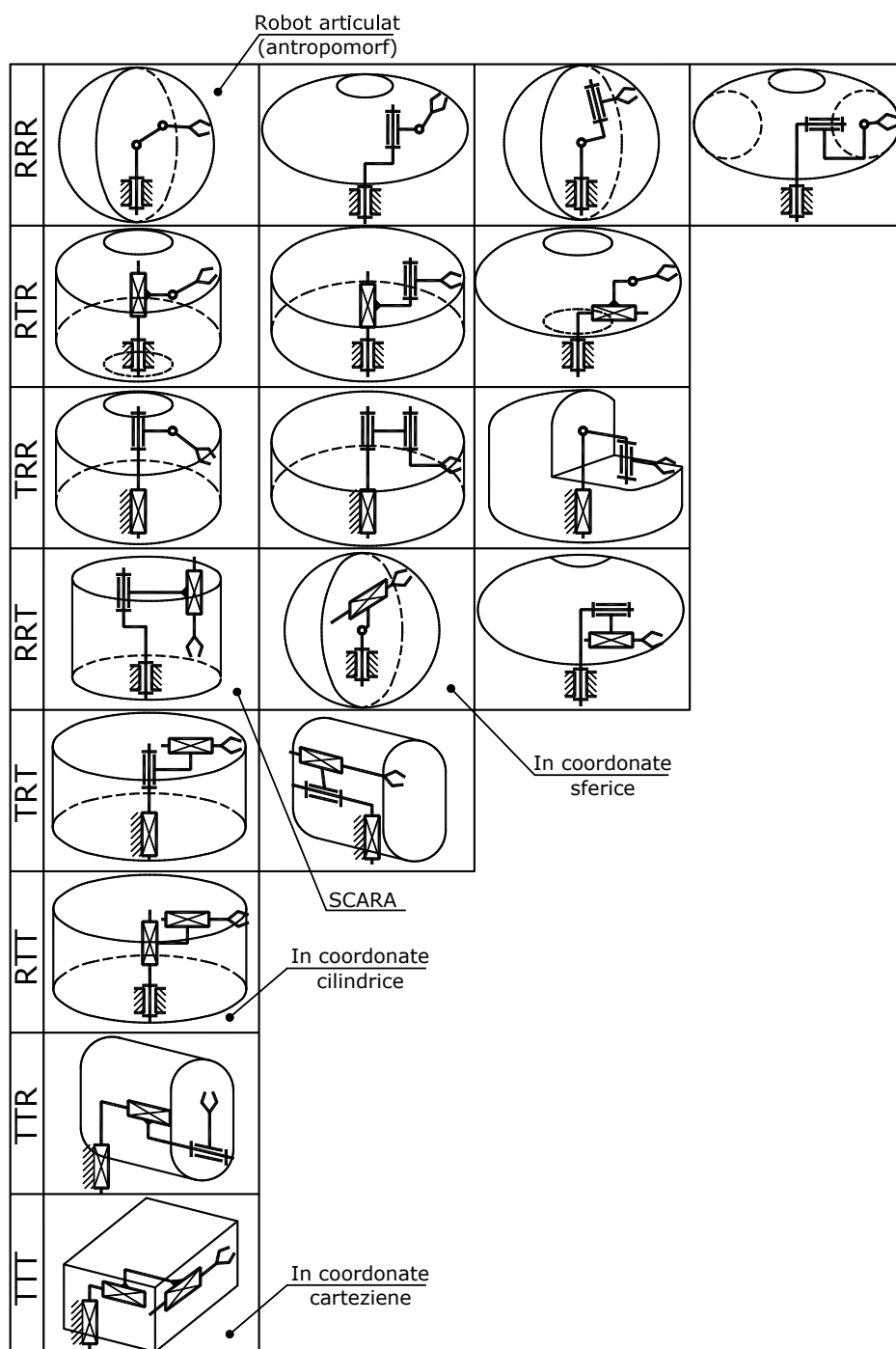


Fig. 2.10 Spații de lucru tridimensionale

2. Structura sistemului mecanic

Schemele structurale, soluțiile constructive și forma spațiilor de lucru pentru cele cinci configurații de bază pot fi vizualizate în Tabelul 1.4, respectiv Fig. 2.9 și Fig. 2.10.

Robotul articulat sau antropomorf (Fig. 2.11) are mobilitatea cea mai ridicată, toate cuplele cinematice fiind de rotație, și asigură un spațiu de lucru mare la dimensiuni reduse. Ca dezavantaje, pot fi menționate următoarele: este cel mai complex manipulator; există două sau patru căi de a obține o anumită poziție a efectorului final; este dificil de controlat; are momente de inerție mari și instabilitate dinamică. Prin asemănarea cu brațul uman, a doua cuplă cinematică se numește "umăr", iar a treia "cot". Aplicațiile acestui tip de manipulator sunt diverse. Cuplele cinematice sunt, în general, acționate cu motoare electrice.

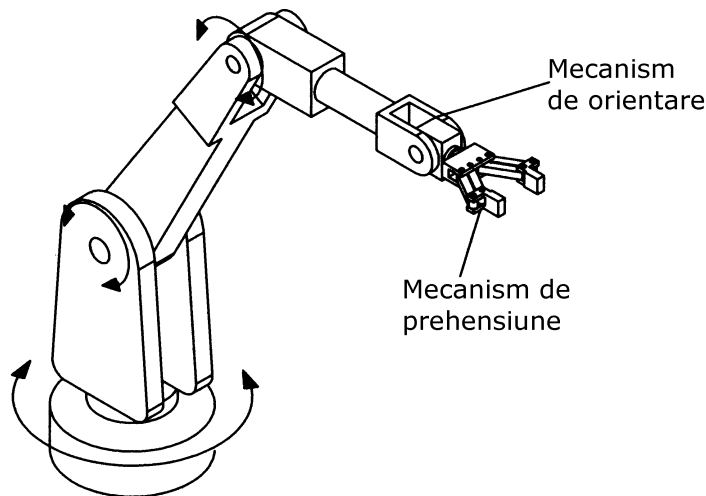


Fig. 2.11 Robot articulat sau antropomorf

Robotul în coordonate sferice sau polare (Fig. 2.12) are două cuple cinematice de rotație și una de translație. Acest tip de robot are greutatea cea mai scăzută și o complexitate structurală minimă. În schimb, acesta beneficiază de o rigiditate mai scăzută, iar precizia de poziționare a efectorului final scade odată cu creșterea cursei radiale a cuplei cinematice de translație. În general, dimensiunea spațiului de lucru pe verticală este redusă iar robotul nu poate evita eventualele obstacolele din zona de acțiune a acestuia. Acești roboți sunt în principal implicați în operații de prelucrare mecanică. De obicei, sunt utilizate motoare electrice pentru acționarea cuplelor cinematice conducătoare.

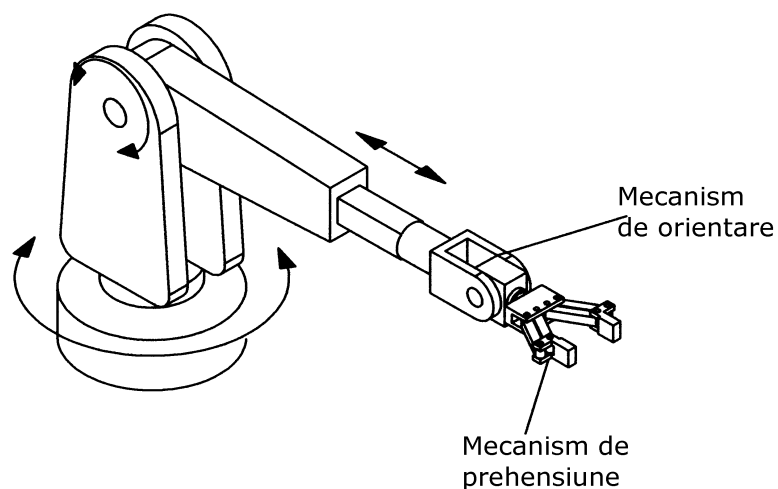


Fig. 2.12 Robot în coordonate sferice sau polare

Structura robotului tip SCARA (Fig. 2.13) permite descărcarea cuplelor cinematice de rotație de forțele de greutate ale elementelor acționate. Permite curse orizontale mari, poate evita obstacolele, dar este un manipulator destul de complex, poate atinge poziția cerută utilizând două căi diferite și este dificil de programat off-line. Se pretează bine la operații de asamblare. Se utilizează acționare electrică.

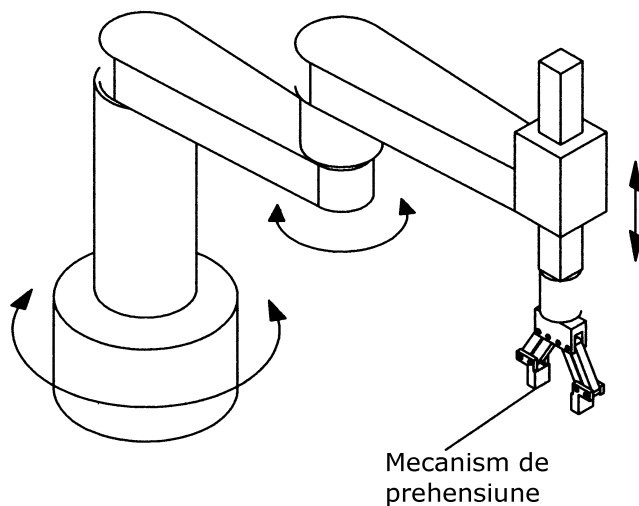


Fig. 2.13 Robot tip SCARA

2. Structura sistemului mecanic

Robotul în coordonate cilindrice (Fig. 2.14) constă din două cuple cinematice de translație și una de rotație. Acest tip de robot are o rigiditate mecanică bună, cuplele de translație sunt mai ușor de controlat decât cele de rotație, dar acest tip de cuple este mai dificil de etanșat. De asemenea, gabaritul structurii este destul de mare, iar precizia de poziționare a efectorului final scade la creșterea cursei orizontale a celei de a doua cuple cinematice de translație. Se utilizează pentru operații de manipulare, chiar și a pieselor de dimensiuni mari, caz în care se preferă acționarea hidraulică.

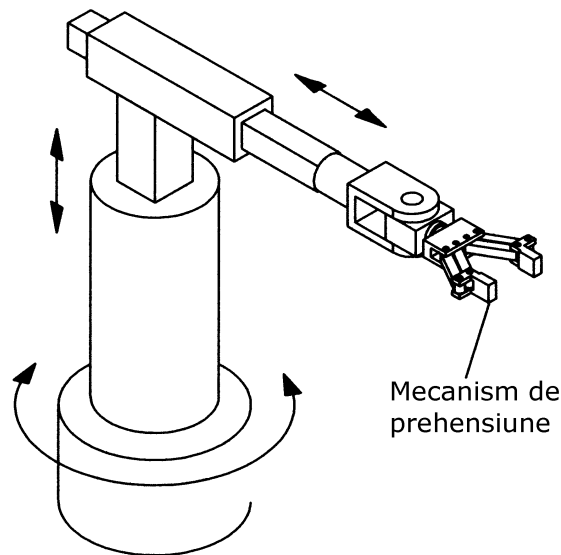


Fig. 2.14 Robot în coordonate cilindrice

Robotul în coordonate carteziene are în structura sa trei cuple cinematice de translație, pe trei direcții neparalele. Existența cuplelor de translație simplifică structura sistemului mecanic. Acest tip de robot are o structură rigidă, sistemul mecanic este ușor de vizualizat, cuplele de translație pot fi ușor limitate mecanic, este ușor de controlat. În schimb, gabaritul structurii este mare, spațiul de lucru este limitat, iar cuplele cinematice de translație sunt dificil de etanșat. Aceste tipuri de roboți se utilizează pentru operații de manipulare și asamblare. Acționarea este de obicei electrică, iar uneori pneumatică. Acest tip de robot poate avea o structură deschisă (Fig. 2.15) sau *gantry* (atunci când este necesară apucarea de sus a obiectului de manipulat - Fig. 2.16).

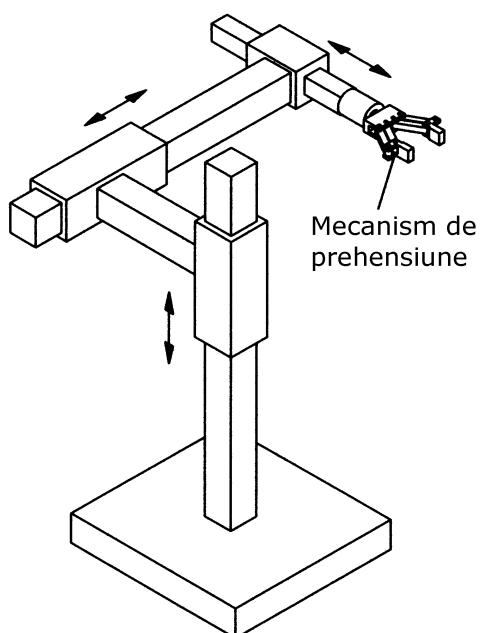


Fig. 2.15 Robot în coordonate carteziene, cu structură deschisă

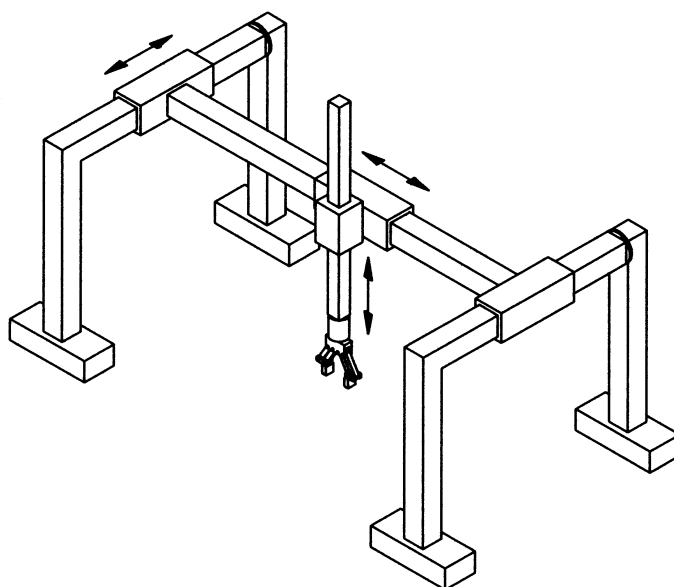


Fig. 2.16 Robot în coordonate carteziene, structură tip Gantry

2. Structura sistemului mecanic

Reamintim faptul că au fost exemplificate doar structurile cel mai frecvent utilizate ale roboților de tip manipulator. Aceste structuri pot fi combinate în vederea obținerii unei configurații noi (vezi Fig. 2.17). De fapt, orice lanț cinematic având în structura sa cuple cinematice de rotație sau translație, un element fix și un efector final, poate constitui structura unui robot. Robotul tip trompă de elefant este un exemplu de structură cu mai multe cuple cinematice de rotație.

De asemenea, pe lângă manipulatoarele cu structură serială există și roboți ce au în structura lor lanțuri cinematice închise, așa cum s-a mai specificat anterior.

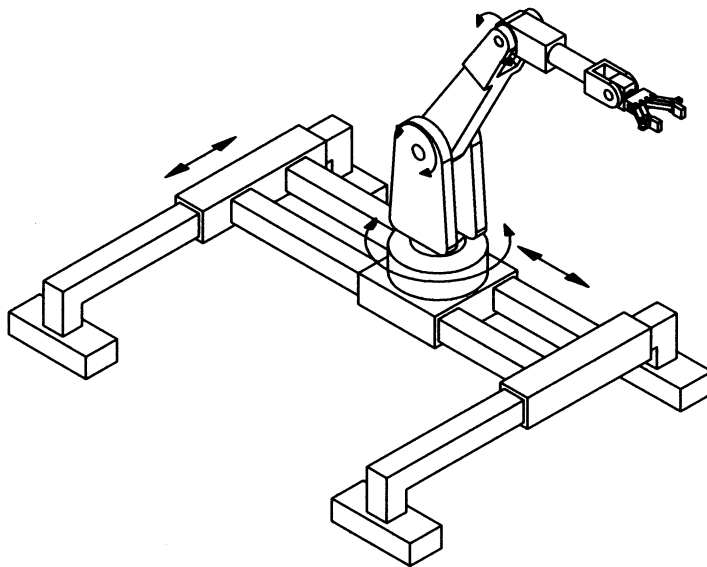


Fig. 2.17 Robot articulat montat pe o platformă carteziană 2D

2.4.3 Structura mecanismelor de orientare

Mecanismul de orientare joacă rolul articulației carpiene umane (articulația pumnului). În soluție completă (având trei grade de mobilitate), acesta realizează rotirea obiectului manipulat în jurul celor trei axe ale unui sistem de coordonate spațial triortogonal. Aceste mișcări de rotație poartă numele de mișcări de orientare, fiecare dintre acestea având o denumire, în funcție de axa în jurul căreia se realizează (Fig. 2.18 – 2.19).

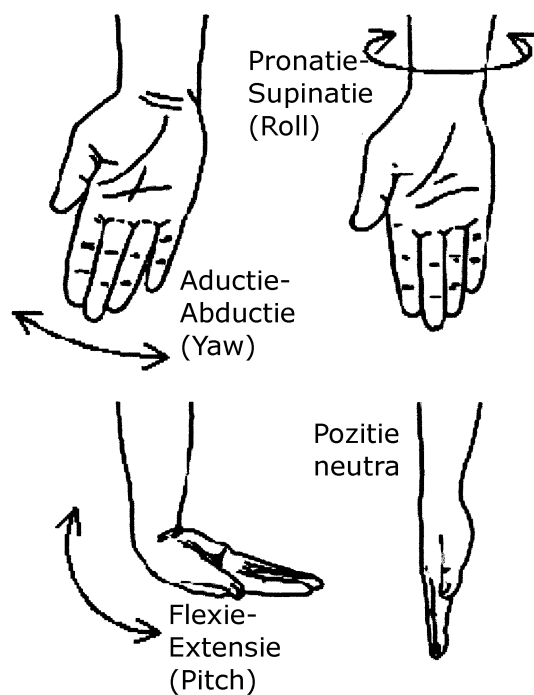


Fig. 2.18 Articulația carpiană umană

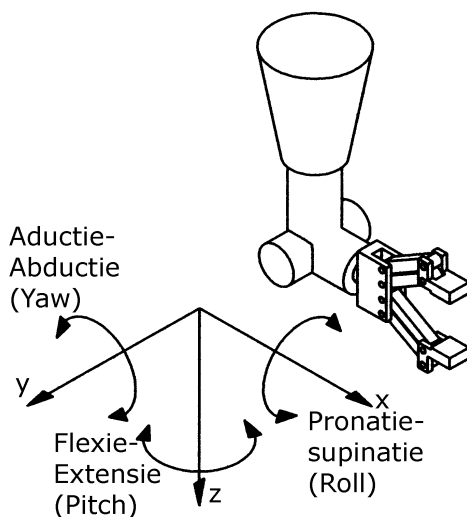
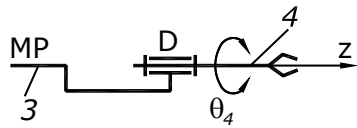
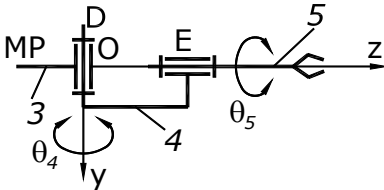
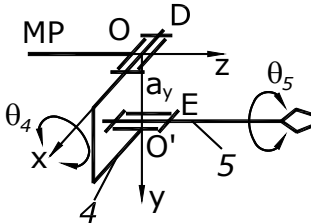
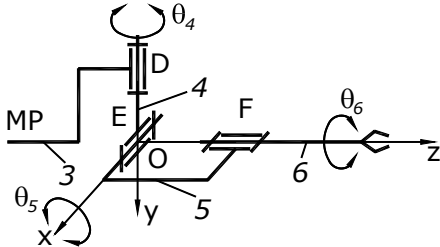
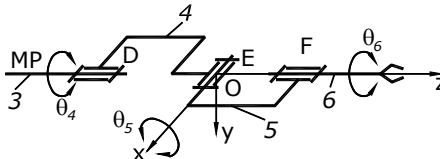


Fig. 2.19 Mecanism de orientare

2. Structura sistemului mecanic

În funcție de numărul gradelor de libertate, mecanismele de orientare pot fi de tip: R, RR, RRR (vezi și Tabelul 2.3). În tabelul menționat sunt prezentate schemele cinematice ale unor soluții de mecanisme de orientare.

Tabelul 2.3 Tipuri de mecanisme de orientare

Nr. crt.	M	Simbol	Schemă cinematică	Observații
1	1	R	 <p>MP – mecanism de poziționare (considerat cu $M=3$)</p>	
2	2	RR		Axe concurente în O
3	2	Ra_yR		Axe neconcurente "offset" $OO'=a_y$
4	3	RRR		Axe concurente în O
5	3	RRR		Axe concurente în O

Bazele Roboticii

Tabelul 2.3 (continuare)

6	3	RRR		Axe concurrente în O
7	3	Ra _z RR		Axe neconcurrente "offset" OO' = a _z
8	3	Ra _x RR		Axe neconcurrente "offset" OO' = a _x
9	3	RRa _x R		Axe neconcurrente "offset" OO' = a _x
10	3	RRR (RR _a ^{π/4} R _a ^{3π/4})		Axe neconcurrente "offset" OO' = a

2. Structura sistemului mecanic

Tabelul 2.3 (continuare)

11	3	RRa _z R		Axe neconcurente $OO' = a_z$
----	---	--------------------	--	------------------------------------

Mișcările de orientare ale mecanismului, impuse obiectului manipulat, au amplitudinile limitate prin valorile ψ_4 , ψ_5 , ψ_6 , prescrise constructiv de către fabricantul robotului. Ca urmare, dreptele caracteristică δ și auxiliară δ' , atașate obiectului manipulat, ocupă poziții cuprinse în interiorul unor conuri, denumite impropriu "unghi de serviciu" și "unghi auxiliar" (Fig. 2.20).

Se consideră că dreapta caracteristică (δ) a obiectului manipulat coincide cu axa Oz a acestuia și că dreapta auxiliară (δ') coincide cu axa Oy (Fig. 2.21).

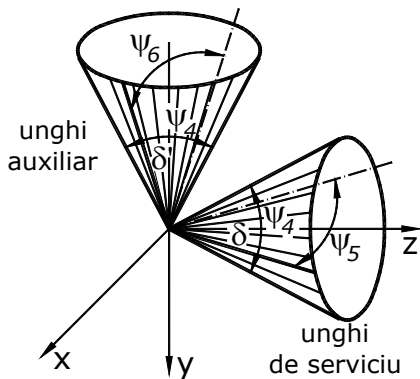


Fig. 2.20 Unghiuri de orientare

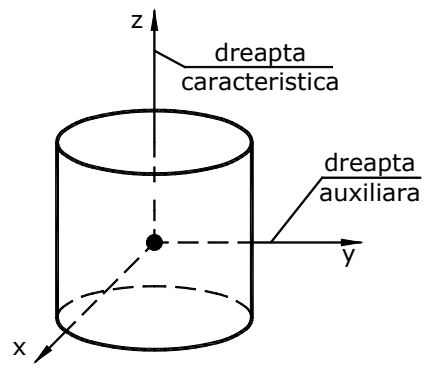


Fig. 2.21 Obiectul manipulat

2.5 Efectorul final

Efectorul final este partea componentă a sistemului mecanic al unui robot de tip manipulator, atașat ultimului element al mecanismului de orientare, cu rolul de a solidariza obiectul manipulat

Bazele Roboticii

de elementul respectiv (atunci când efectorul final este un mecanism de prehensiune) sau de a efectua o anumită operație (atunci când acesta este o sculă sau un cap de forță cu sculă).

Efectorul final poate fi:

- *un mecanism de prehensiune*, atunci când robotul este destinat să manipuleze obiecte;
- *sculă*, atunci când robotul execută operații pentru care nu este necesară o sursă de energie exterioară, care să acționeze scula (exemplu: pistolul de sudurare, în cazul operației de sudare cu arc; pistolul de vopsire, în cazul unei operații de vopsire; instrumentul de măsură, în cazul operației de control dimensional, etc.);
- *un cap de forță cu sculă*, în cazul în care, pe lângă energia necesară acționării cuplelor cinematice conducătoare, este nevoie de existe o sursă de energie suplimentară pentru acționarea sculei (exemplu: polizor pentru debavurare; ciocan pneumatic; mașină de găurit, etc.);

Legarea efectorului final la ultimul element al mecanismului de ghidare se face printr-un *mechanism de cuplare*. Acesta trebuie să fie simplu și să permită montarea și demontarea ușoară și rapidă a efectorului final.

De asemenea, între mecanismul de cuplare și efectorul final poate exista un *mechanism de compliantă*, care permite realizarea unei mișcări relative (recomandată) între efectorul final și ultimul element al mecanismului de ghidare, sub acțiunea unei forțe de contact. Mecanismul de compliantă poate fi utilizat în cazul operațiilor de montaj, în scopul preluării unor erori de poziționare, sau al operațiilor de sudare, în scopul evitării distrugerii unor componente ale efectorului final, ca urmare a unor coliziuni.

Mecanismele de compliantă pot fi:

- cu *compliantă activă*, atunci când se folosesc elemente de acționare, care controlează activ deplasarea relativă a efectorului final în raport cu ultimul element al mecanismului de ghidare, ca urmare a unor informații primite de la senzorii de contact;
- cu *compliantă pasivă*, utilizând elemente elastice, care să permită această deplasare relativă, Fig. 2.22, în care: 1 – obiect manipulat; 2 – mecanism de prehensiune; 3 – ultimul element al mecanismului de ghidare; 4 – elemente elastice care permit deplasări relative de translație; 5 – elemente elastice ce permit deplasări relative de rotație.

2. Structura sistemului mecanic

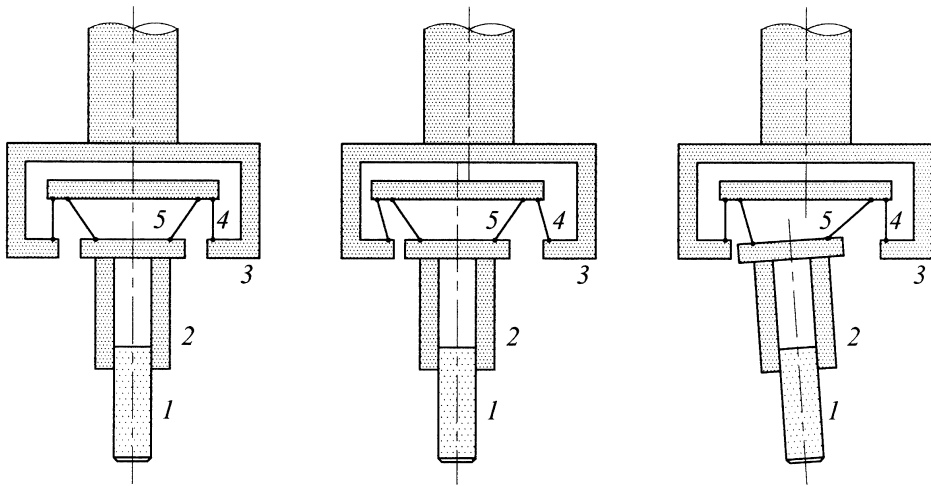


Fig. 2.22 Schema unui mecanism cu complianță pasivă

2.5.1 Mecanisme de prehensiune

Mecanismele de prehensiune sunt utilizate pentru apucarea obiectului manipulat sau a sculei și fixarea lor de ultimul element al mecanismului de ghidare. În funcție de tipul acestora, în general

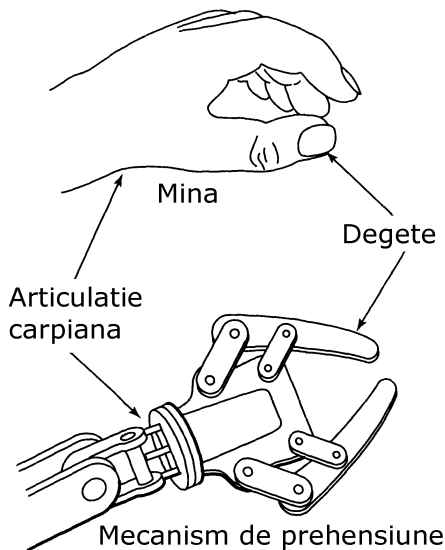


Fig. 2.23 Similitudinea mână - mecanism de prehensiune

Bazele Roboticii

mecanismele de prehensiune au în componența lor degete, transmisii mecanice și elemente de acționare (actuatori), vezi Fig. 2.23. Aceste mecanisme sunt de diferite tipuri, fiecare tip fiind conceput în concordanță cu obiectul ce urmează a fi apucat și manipulat.

Roboții industriali sunt în general utilizați pentru efectuarea unor operații repetitive. De aceea, mecanismele de prehensiune ale acestor sisteme sunt, de regulă, potrivite numai pentru obiecte cu formă, mărime și greutate similare. Robotul poate să manipuleze un alt obiect sau să efectueze o altă operație printr-o simplă reprogramare. Dar mecanismul său de prehensiune trebuie, în general, schimbat în cazul manipulării unui alt tip de obiect, excepție făcând cazul în care robotul are un mecanism de prehensiune universal.

2.5.1.1 Tipuri de mecanisme de prehensiune

Mecanismele de prehensiune pot fi, în mare, clasificate în șapte categorii:

- *Mecanice*, cu două sau mai multe degete sau bacuri pentru prindere interioară sau exterioară.
- *Cu vacuum*, ce au una sau mai multe ventuze cu vid pentru manipularea obiectelor cu suprafață plană sau aproape plană și destul de netedă și curată.
- *Magnetice*, cu unul sau mai mulți electromagneți sau magneți permanenți, ce pot fi folosite numai pentru materiale feroase. În cazul în care se folosesc magneți permanenți, este necesar un dispozitiv suplimentar pentru desprinderea piesei.
- *Expandabile*, cu saci sau manșete gonflabile, pentru manipularea obiectelor cu formă neregulată și a materialelor fragile, sau cu degete de prehensiune gonflabile.
- *Compliante*, sub forma unei piese flexibile ce poate genera mișcări prin deformarea sa elastică, sunt potrivite pentru micro-roboți.
- *Adezive*, pentru materiale ușoare și a căror manipulare nu se poate face cu vacuum (spre exemplu, haine).
- *Speciale*, cum ar fi: o mandrină pentru manipularea unor scule variate, un cârlig (gheară) pentru agățarea unei

2. Structura sistemului mecanic

greutăți, o furcă pentru ridicarea unei greutăți, sau o cupă pentru manipulare de lichid.

2.5.1.2 Mecanisme de prehensiune mecanice

Revenind la mecanismele de prehensiune cu degete, acestea se pot clasifica după mai multe criterii.

După modul de fixare a mecanismului de prehensiune în raport cu mecanismul de ghidare putem avea două situații:

- mecanisme de prehensiune având *degetele paralele cu axa ultimului element al mecanismului de ghidare*;
- mecanisme de prehensiune cu *degetele perpendiculare pe această axă*.

După modul de prindere a obiectului manipulat, deosebim:

- mecanisme de prehensiune *cu prindere interioară*;
- mecanisme de prehensiune *cu prindere exterioară*.

În funcție de tipul și dimensiunile obiectului manipulat, mecanismele de prehensiune pot fi:

- *speciale*, destinate manipulării obiectelor de aceeași formă și dimensiuni;
- *specializate*, pentru manipularea obiectelor de aceeași formă, dar de dimensiuni diferite, variind între anumite limite;
- *universale*, pentru manipularea obiectelor ale căror formă și dimensiuni variază în limite restrânse;
- *flexibile*, pentru manipularea obiectelor, ale căror formă și dimensiuni variază în limite largi.

În funcție de mecanismul utilizat pentru transmiterea mișcării de la arborele motorului la degete, mecanismele de prehensiune pot fi:

- tip mecanisme cu bare;
- tip roată dințată – cremalieră;
- tip mecanism cu camă;
- tip mecanism șurub-piuliță;
- tip mecanism cu cabluri.

În cele ce urmează vor fi exemplificate toate cele cinci tipuri de mecanisme de prehensiune.

2.5.1.2.1 Prehensor tip mecanism cu bare

Mișcarea degetelor mecanismului de prehensiune poate fi de rotație sau de translație. În Fig. 2.24 este prezentat un mecanism de prehensiune ale cărui degete efectuează o mișcare de strângere de

Bazele Roboticii

rotație. Strângerea este realizată de către un piston pneumatic, iar retragerea degetelor este asigurată de un resort elastic. Schema de funcționare simplifică mult instalația pneumatică și sistemul de control al mișcării.

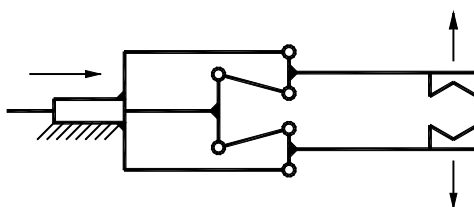


Fig. 2.24 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 1

Mecanismul de prehensiune din Fig. 2.25 constă dintr-o pereche de mecanisme manivela-piston, dispuse simetric. Atunci când fluidul hidraulic sau pneumatic împinge pistonul spre dreapta, degetele vor strânge obiectul manipulat.

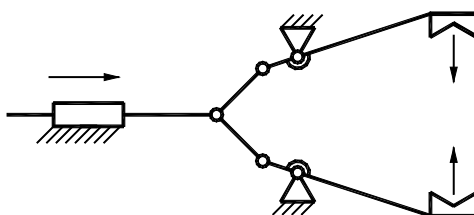


Fig. 2.25 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 2

Pistonul mecanismului din Fig. 2.26 poate fi acționat hidraulic sau pneumatic. Fiecare deget, ca element condus, oscilează în jurul axei cuplei cinematice pe care o face cu elementul fix.

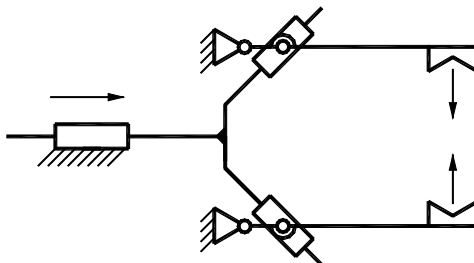


Fig. 2.26 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 3

2. Structura sistemului mecanic

Mecanismul de prehensiune din Fig. 2.27 constă dintr-o mână mecanică standard, ieftină și cu aplicații multiple. Mâna acceptă o varietate de degete, concepute în funcție de obiectele ce urmează a fi manipulate.

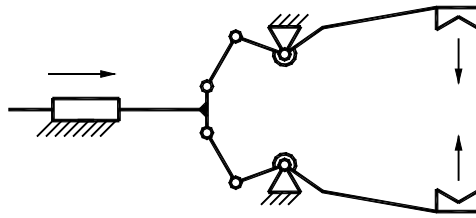


Fig. 2.27 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 4

Mâna mecanică din Fig. 2.28 are o deschidere largă a degetelor, fapt ce permite apucarea obiectelor ce nu sunt orientate la fel sau nu se găsesc în aceeași locație. Atunci când bacurile se închid, acestea elimină imprecizia de orientare și centrează obiectul.

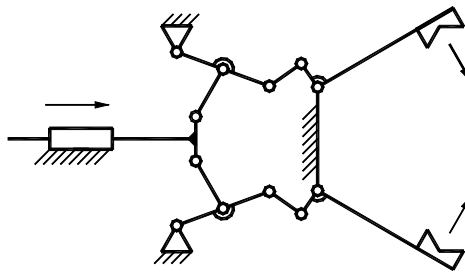


Fig. 2.28 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 5

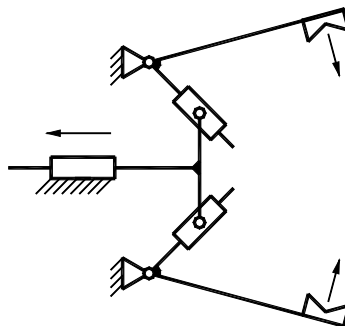


Fig. 2.29 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 6

Varianta de mecanism de prehensiune prezentată în Fig. 2.29

Bazele Roboticii

este ușor de utilizat și fiabilă, datorită simplității mecanismului cu bare și a mărimii reduse. Actuatorul pneumatic imprimă o mișcare cu viteză mare pistonului și permite strângerea obiectelor cu aproximativ aceeași forță, indiferent de mărimea lor.

În Fig. 2.30 este reprezentat un mecanism de prehensiune ce poate manipula obiecte diferite. Mecanismul este simplu și compact, iar degetele sunt interschimbabile pentru obiecte diferite. Multe dintre prehensoarele utilizate în prezent folosesc o asemenea structură

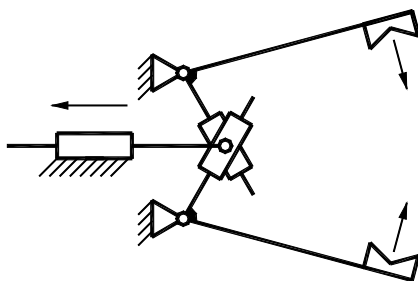


Fig. 2.30 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 7

Mecanismul din Fig. 2.31 este utilizat pentru apucarea pieselor de dimensiuni mari, cum ar fi lingourile de aluminiu. Bacurile se pot deschide larg.

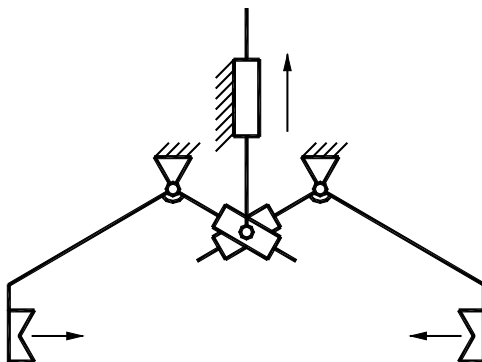


Fig. 2.31 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 8

În Fig. 2.31 este prezentat un mecanism ce permite fixarea obiectului din interior. De fapt, mișcarea inversă (de desfăcere) a unui mecanism cu strângere exterioară poate constitui o mișcare de apucare a unui mecanism cu strângere interioară. Aceleași mecanisme pot fi utilizate atât ca prehensoare cu strângere exterioară sau interioară dar forma degetelor este diferită.

2. Structura sistemului mecanic

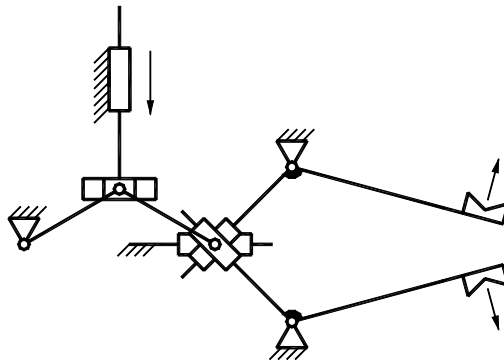


Fig. 2.32 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 9

Prehensorul bazat pe un mecanism paralelogram prezentat în Fig. 2.33 este simplu și relativ compact. Deschiderea degetelor este suficientă pentru a apuca obiecte cu diferite dimensiuni. Bacurile sunt în permanență paralele.

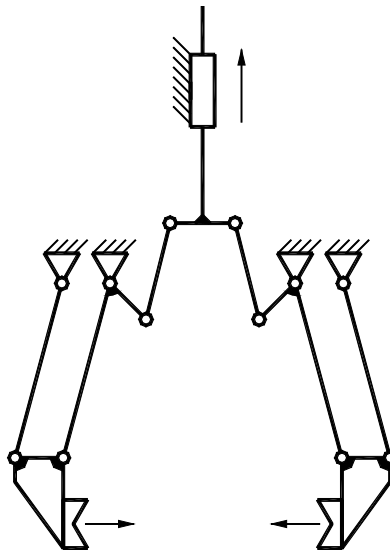


Fig. 2.33 Mecanism de prehensiune cu bare, varianta 10

2.5.1.2.2 Prehensor tip pinion-cremalieră

Mecanismul de prehensiune din Fig. 2.34 se bazează pe un mecanism pinion-cremalieră. Cremaliera (dublă) face corp comun cu tija pistonului, cu care angrenează două sectoare de roți dințate. Sectoarele menționate acționează două mecanisme paralelogram,

care (la rândul lor) deplasează bacurile mecanismului de prehensiune. Soluția prezintă avantajul că dezvoltă o forță de strângere destul de mare.

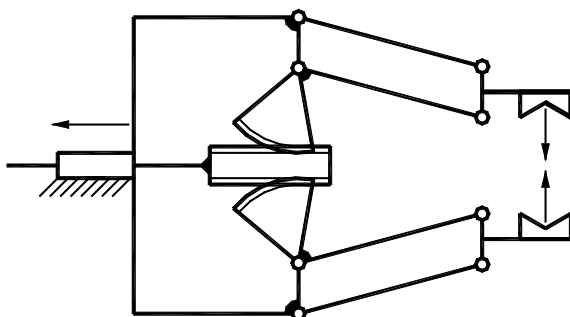


Fig. 2.34 Mecanism de prehensiune tip cremalieră-roată dințată, varianta 1

În continuare se prezintă o altă variantă de mecanism de prehensiune cu cremalieră-roată dințată, acționat tot de un piston pneumatic sau hidraulic, al cărui tijă se termină cu o cremalieră dublă. Roțile dințate ce angrenează cu cremaliera sunt legate rigid de bacurile mecanismului. Atunci când pistonul se deplasează înainte sau înapoi, translația pinionului produce rotația în sens invers a roților dințate, respectiv apropierea sau departarea bacurilor. Avantajul acestui mecanism este acela că poate fi utilizat pentru apucarea pieselor ale căror dimensiuni variază în limite largi.

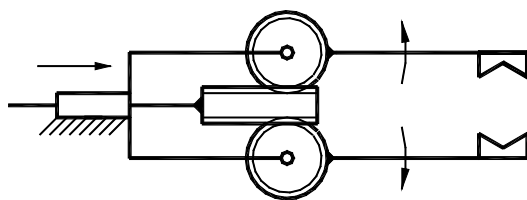


Fig. 2.35 Mecanism de prehensiune tip cremalieră-roată dințată, varianta 2

Figura 2.36 ne prezintă un mecanism de prehensiune al cărui element conducător este pinionul dințat. Acesta angrenează cu două cremaliere, de care sunt legate rigid bacurile mecanismului. Rotirea în sens orar sau trigonometric a pinionului va produce apropierea sau depărtarea acestor bacuri.

2. Structura sistemului mecanic

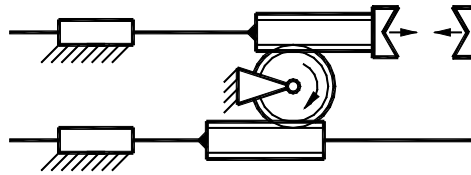


Fig. 2.36 Mecanism de prehensiune tip cremalieră-roată dințată, varianta 3

2.5.1.2.3 Prehensor tip mecanism cu camă

Aceste mecanisme de prehensiune folosesc o camă și doi tacheți, în legătură directă și rigidă cu aceștia aflându-se degetele mecanismului. Cama are un profil special, astfel încât să acționeze tacheții (degetele) într-un mod particular, respectiv cu viteză constantă, accelerație constantă, etc.

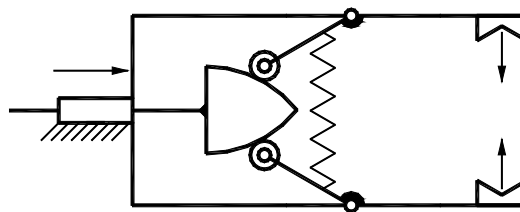


Fig. 2.37 Mecanism de prehensiune cu camă-tachet

2.5.1.2.4 Prehensor tip mecanism șurub-piuliță

Mecanismele de prehensiune bazate pe transmisii șurub-piuliță sunt acționate prin rotirea uniformă a șurubului de către un motoreductor. Piulița poate fi folosită direct ca bac sau pentru acționarea degetelor. Mecanismul din Fig. 2.38 este acționat prin rotirea șurubului, ce va deplasa înainte/înapoi piulița, care va acționa degetele prin intermediul unui mecanism cu bare.

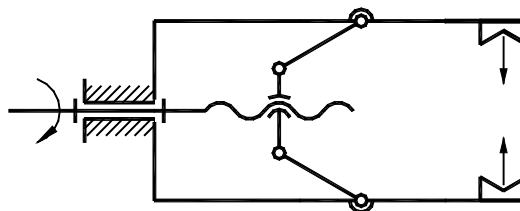


Fig. 2.38 Mecanism de prehensiune cu șurub-piuliță, varianta 1

Bazele Roboticii

În cazul mecanismelor din Fig. 2.39, piulița (piulițele) este legată direct la bacurile acestuia. Varianta din Fig. 2.39.a folosește două piulițe cu filet invers (dreapta/stânga), șurubul de acționarea având două tronsoane, unul filetat pe dreapta, celălalt pe stânga. Rotirea șurubului spre dreapta sau spre stânga va produce apropierea sau depărtarea bacurilor mecanismului de prehensiune. Varianta din Fig. 7.39.b folosește o singură piuliță, legată rigid de bacul mobil al mecanismului, celălalt bac fiind fix.

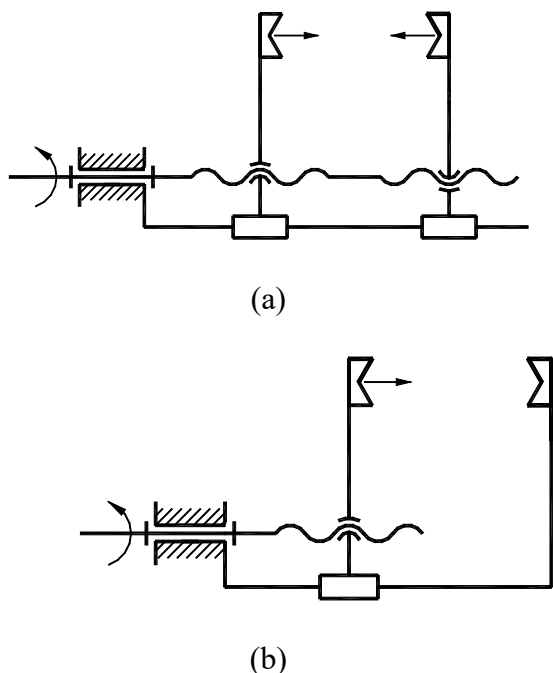


Fig. 2.39 Mecanism de prehensiune cu șurub-piuliță: a) cu două piulițe; b) cu o piuliță

2.5.1.2.5 Prehensor tip mecanism cu cabluri

Aceste tipuri de mecanisme de prehensiune, utilizând elemente elastice (cabluri), permit apucarea obiectelor cu forme neregulate, folosind degete multiple.

2. Structura sistemului mecanic

3

TRANSFORMĂRI DE COORDONATE

3.1 Generalități

În studiul roboticii suntem în mod constant confrunțați cu problema localizării unor obiecte în spațiul tridimensional. Aceste obiecte sunt elementele cinematice ale manipulatorului, obiectul manipulat sau scula de lucru, precum și alte obiecte din mediul de operare al manipulatorului. Aceste obiecte sunt descrise de două caracteristici: poziție și orientare. Problema de interes imediat o constituie maniera în care reprezentăm aceste cantități și modelarea matematică a acestora.

Pozițiile și orientările relative ale elementelor cinematice, ale unui robot de tip manipulator, sunt definite de parametrii variabili ai cuplelor cinematice. Deoarece fiecare element reprezintă un corp rigid, este necesar ca acestuia să i se atașeze un sistem de coordonate cartezian. În aceste condiții, configurația robotului este definită de pozițiile și orientările relative ale sistemelor de axe atașate fiecărui element cinematic (Fig. 3.1). Aceste poziții depind de geometria robotului și de parametrii cinematici ai cuplelor.

În robotică, sistemele de coordonate utilizate respectă regula mâinii drepte (vezi Fig. 3.2). Sensurile pozitive ale axelor unui sistem cartezian ce respectă această regulă se obține astfel: ținând mâna dreaptă deschisă, cu degetul mare desfăcut, direcția palmei (celor patru degete) va indica sensul pozitiv al axei x , iar degetul mare va indica sensul pozitiv al axei z . Sensul pozitiv al axei y se va obține îndoind cu 90° cele patru degete.

Un astfel de sistem de axe se obține și aplicând regula burghiului drept. Conform acestei reguli, rotind axa x spre dreapta, pentru a o suprapune peste axa y , sensul pozitiv al axei z ar fi cel dat de sensul de deplasare axială a burghiului drept, rotit în același sens.

3. Transformări de coordonate

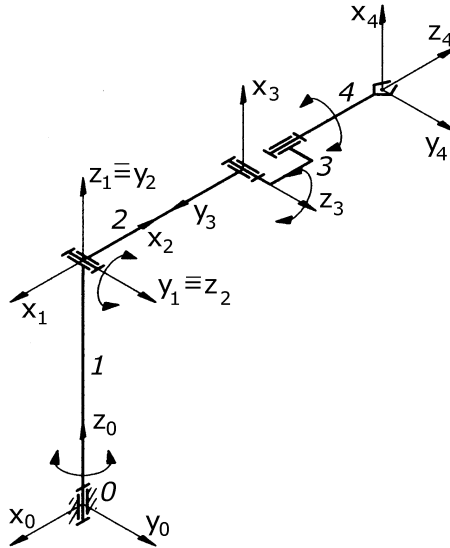


Fig. 3.1 Atașarea sistemelor de coordonate

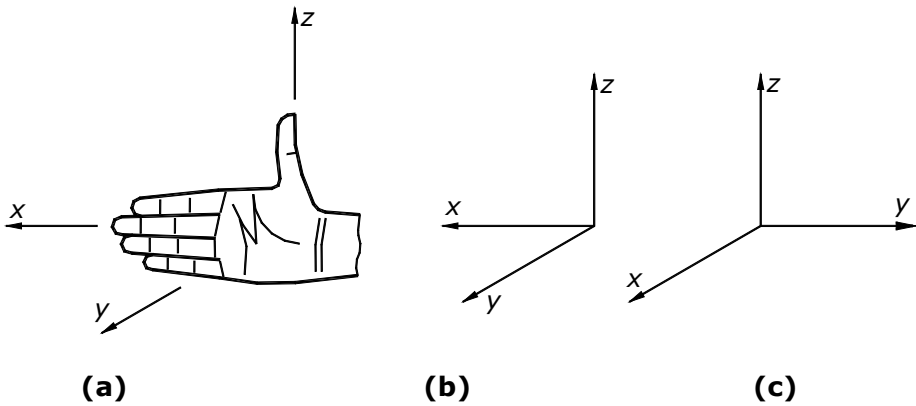


Fig. 3.2 Sisteme de coordonate

3.2 Poziția și orientarea unui corp rigid

Un corp rigid este descris complet în spațiul tridimensional cu ajutorul poziției și orientării sale în raport cu un sistem de referință.

Considerăm un sistem de referință $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ și un corp rigid, căruia i se atașează sistemul de coordonate $x_n y_n z_n$ (Fig. 3.3).

Bazele Roboticii

Coordonatele unui punct oarecare P de pe corp, în raport cu originea O_{n-1} a sistemului de referință, pot fi calculate cu relațiile:

$$\begin{cases} x_{n-1} = x + x_n \cdot \cos(x_{n-1}, x_n) + y_n \cdot \cos(x_{n-1}, y_n) + z_n \cdot \cos(x_{n-1}, z_n) \\ y_{n-1} = y + x_n \cdot \cos(y_{n-1}, x_n) + y_n \cdot \cos(y_{n-1}, y_n) + z_n \cdot \cos(y_{n-1}, z_n) \\ z_{n-1} = z + x_n \cdot \cos(z_{n-1}, x_n) + y_n \cdot \cos(z_{n-1}, y_n) + z_n \cdot \cos(z_{n-1}, z_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

unde: $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ reprezintă coordonatele punctului P în raport cu originea O_{n-1} a sistemului de referință; x_n, y_n, z_n sunt coordonatele aceluiași punct în raport cu originea O_n a sistemului de axe atașat corpului; x, y, z reprezintă coordonatele punctului O_n în raport cu originea O_{n-1} a sistemului de referință.

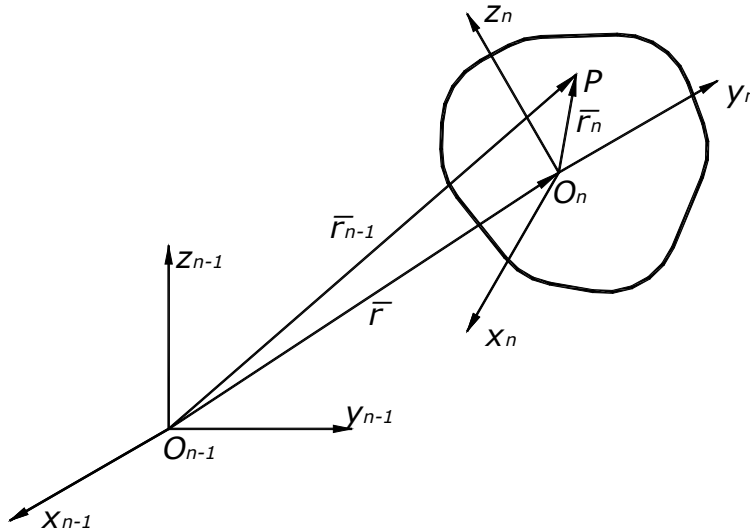


Fig. 3.3 Transformare de coordonate

Sub formă matriceală, ecuațiile (2.1) pot fi scrise astfel:

$${}^{n-1}\mathbf{P} = {}^{n-1}_n\mathbf{T}\mathbf{r} + {}^{n-1}_n\mathbf{R} \cdot {}^n\mathbf{P} \quad (3.2)$$

unde:

$${}^{n-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}; {}^{n-1}_n\mathbf{T}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; {}^n\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix};$$

3. Transformări de coordonate

$${}^{n-1}_n\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) \\ \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) \\ \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Poziția corpului rigid, căruia i s-a atașat sistemul de axe $x_n y_n z_n$, în raport cu sistemul de referință $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ este dată de matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{T}\mathbf{r}$, iar orientarea acestui corp în raport cu sistemul de referință menționat este definită de matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$.

3.3 Matricea de rotație

Matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$ (vezi relația 3.3), ce definește orientarea unui sistem de coordonate (a unui corp rigid) în raport cu un sistem de axe de referință, poartă numele de matrice de rotație.

3.3.1 Rotații simple (elementare)

Considerăm cazul particular al rotației sistemului de coordonate $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ în jurul axei x_{n-1} , cu unghiul θ_x (Fig. 3.4).

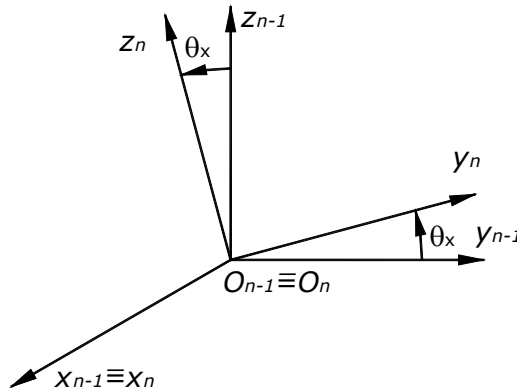


Fig. 3.4 Rotație în jurul axei x

Matricea de transformare corespunzătoare rotației menționate se va obține particularizând matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$, relația (3.3), la cazul nostru.

Bazele Roboticii

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Similar, pentru rotația în jurul axelor y_{n-1} , z_{n-1} , cu unghiurile θ_y , θ_z , matricele elementare de rotație sunt:

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Aceste matrice sunt utile pentru descrierea rotațiilor corpurilor rigide în jurul unei axe arbitrare în spațiul tridimensional. Ele au fost determinate considerând că rotațiile au fost făcute în sens pozitiv (spre dreapta).

Este ușor de verificat faptul că aceste matrice verifică relația:

$$\mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^T(\theta) \quad (3.7)$$

unde $\mathbf{R}^T(\theta)$ este transpusa matricei de rotație (pentru rotația simplă cu unghiul θ).

Cu alte cuvinte, modificarea sensului de rotație conduce la altă matrice de transformare, lucru ce trebuie reținut și de care trebuie să se țină seama.

Revenind la forma generală a matricei de rotație (3.3), vom scrie matricea de rotație la trecerea de la sistemul $x_n y_n z_n$ la $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$. Această matrice va avea forma:

$${}_{n-1}^n \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(x_n, x_{n-1}) & \cos(x_n, y_{n-1}) & \cos(x_n, z_{n-1}) \\ \cos(y_n, x_{n-1}) & \cos(y_n, y_{n-1}) & \cos(y_n, z_{n-1}) \\ \cos(z_n, x_{n-1}) & \cos(z_n, y_{n-1}) & \cos(z_n, z_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Analizând relațiile (3.3) și (3.8) se poate constata cu ușurință că:

$${}_{n-1}^n \mathbf{R} = {}_n^{n-1} \mathbf{R}^T \quad (3.9)$$

3. Transformări de coordonate

Acest lucru ne conduce la ideea ca inversa unei matrice de rotație este egală cu transpusa sa, fapt ce poate fi verificat ușor astfel:

$${}^{n-1}_n\mathbf{R}^T \cdot {}^{n-1}_n\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(x_n, x_{n-1}) & \cos(x_n, y_{n-1}) & \cos(x_n, z_{n-1}) \\ \cos(y_n, x_{n-1}) & \cos(y_n, y_{n-1}) & \cos(y_n, z_{n-1}) \\ \cos(z_n, x_{n-1}) & \cos(z_n, y_{n-1}) & \cos(z_n, z_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) \\ \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) \\ \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) \end{bmatrix} = I_3 \quad (3.10)$$

unde I_3 este matricea unitate 3x3

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Din (3.9) și (3.10) rezultă:

$${}^{n-1}_n\mathbf{R} = {}^{n-1}_n\mathbf{R}^{-1} = {}^{n-1}_n\mathbf{R}^T \quad (3.12)$$

Într-adevăr, din algebra lineară, știm că inversa unei matrice ortogonale este egală cu transpusa acesteia. În cele de mai sus tocmai am verificat geometric acest lucru.

3.3.2 Compunerea matricelor de rotație

Rotația totală a unui corp rigid în spațiul tridimensional poate fi exprimată ca o succesiune de rotații parțiale. Fiecare rotație este definită în raport cu cea precedentă, iar sistemul de axe la care se raportează rotația parțială poartă numele de sistem de axe curent.

Considerăm pentru exemplificare un corp rigid ce suferă două rotații succesive (a câte 90° fiecare) în jurul a două axe ale sistemului curent (Fig. 3.5).

Pentru succesiunea de rotații prezentată în Fig. 3.5.a, matricele elementare de rotație sunt:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

iar matricea totală de rotație va fi:

Bazele Roboticii

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

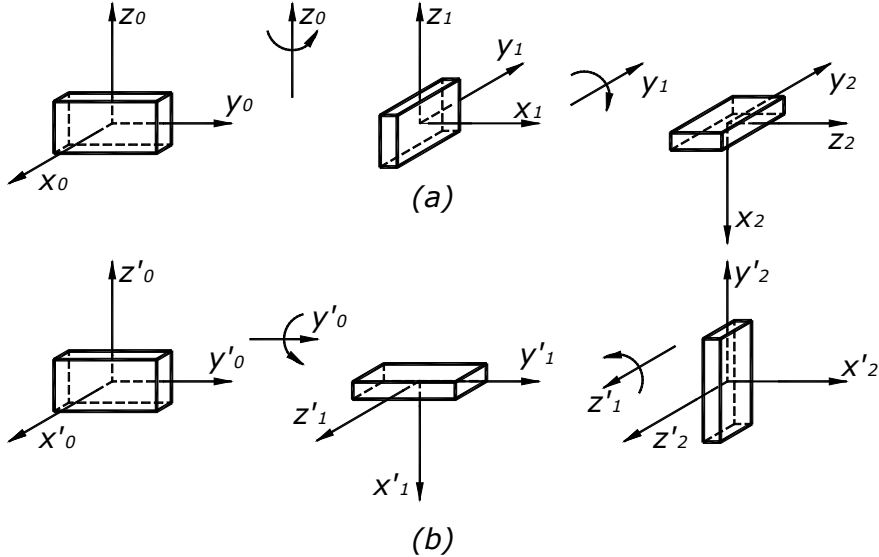


Fig. 3.5 Rotații succesive: **a)** succesiunea $z_0 \rightarrow y_1$;
b) succesiunea $y'_0 \rightarrow z'_1$

Pentru succesiunea de rotații din Fig. 3.5.b, matricele elementare de rotație sunt:

$${}^{0'}_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^{1'}_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

iar matricea totală de rotație corespunzătoare:

$${}^{0'}_2\mathbf{R} = {}^{0'}_1\mathbf{R} \cdot {}^{1'}_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Se poate constata cu ușurință că rotațiile parțiale succesive nu sunt comutative, fapt foarte important și căruia trebuie să i se acorde atenția cuvenită.

3. Transformări de coordonate

$${}^0_1\mathbf{R} = {}^1_2\mathbf{R}; {}^1_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R}; {}^0_2\mathbf{R} \neq {}^0_2\mathbf{R}, \text{ rezultă } {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} \neq {}^1_2\mathbf{R} \cdot {}^0_1\mathbf{R} \quad (3.17)$$

Rotațiile parțiale succesive pot fi, de asemenea, raportate la sistemul de axe inițial, numit în acest caz sistem de axe fix sau de referință.

Considerăm aceleași rotații parțiale succesive, dar raportate la sistemul de axe fix (Fig. 3.6).

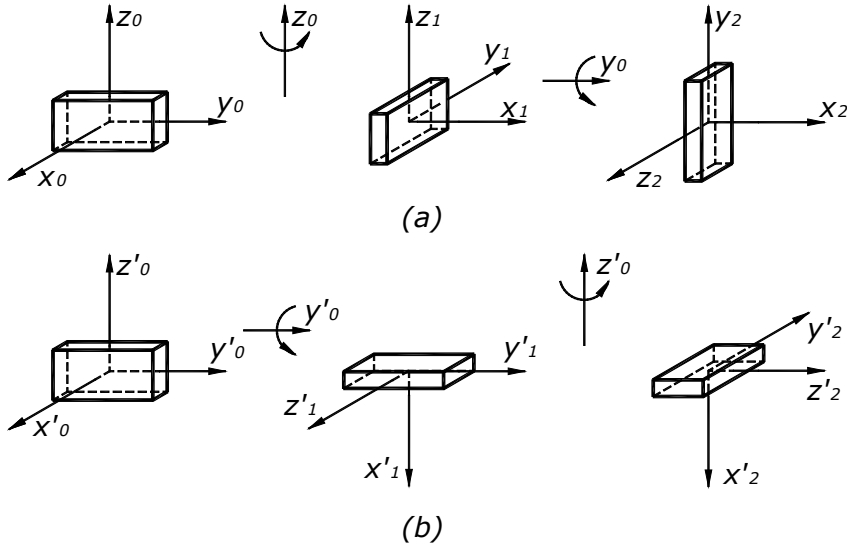


Fig. 3.6 Rotații succesive: a) succesiunea $z_0 \rightarrow y_0$; b) succesiunea $y'_0 \rightarrow z'_0$

Rotația cu 90° în jurul axei y_0 din succesiunea (a) înseamnă, de fapt, o rotație cu același unghi în jurul axei x_1 , iar rotația cu 90° în jurul axei z'_0 din succesiunea (b) înseamnă o rotație cu -90° în jurul axei x'_1 . În aceste condiții, matricele de rotație pentru cele două variante de succesiuni sunt:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Bazele Roboticii

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Și în acest caz ${}^0_2\mathbf{R} \neq {}^0_2\mathbf{R}$, ceea ce înseamnă că succesiunea rotațiilor nu este comutativă. Însă, se poate observa că succesiunea (a) din Fig 3.5 este comutativă cu succesiunea (b) din Fig. 3.6, iar succesiunea (b) din Fig 3.5 este comutativă cu succesiunea (a) din Fig. 3.6.

În robotică, rotațiile succesive sunt raportate la sistemul de axe curent, ca în exemplul prezentat în Fig. 3.5.

3.4 Matricea de transformare omogenă

Considerăm din nou corpul rigid din Fig. 3.3, ale cărui poziție și orientare sunt raportate la sistemul de referință $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$.

Transformarea de coordonate scrisă sub forma (3.2) prezintă unele dezavantaje din punct de vedere al analizei cinematice, datorită caracterului neomogen (conține termenul liber ${}^{n-1}_n\mathbf{T}\mathbf{r}$).

De asemenea, o matrice de ordinul 3x3 (cum este matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$) poate fi utilizată pentru descrierea rotației corpului rigid, dar nu și a translației acestuia, termenul ${}^{n-1}_n\mathbf{T}\mathbf{r}$ nefiind inclus în această matrice. Ori, în robotică, descrierea translațiilor (poziționării obiectului manipulat) este foarte importantă. Translația ar putea fi descrisă prin introducerea unei a patra coloane în matricea ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$, însă matricea rezultantă nu este pătrată și nu se poate scrie inversa ei.

Pentru a elimina aceste dezavantaje, respectiv pentru omogenizarea matricei de transformare, la cele trei ecuații (3.1) se adaugă ecuația formală

$$t_{n-1} = t_n = 1 \quad (3.22)$$

În aceste condiții, transformarea de coordonate sub formă matriceală se scrie astfel:

$${}^{n-1}_n\mathbf{P} = {}^{n-1}_n\mathbf{T} \cdot {}^n\mathbf{P} \quad (3.23)$$

3. Transformări de coordonate

unde:

$$\begin{aligned}
 {}^{n-1}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^n\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}; \\
 {}^{n-1}{}_n\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) & x \\ \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) & y \\ \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} {}^{n-1}{}_n\mathbf{R} & \vdots & {}^{n-1}{}_n\mathbf{T}r \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Aplicând același raționament ca în cazul matricei de rotație, se poate demonstra faptul că:

$${}^{n-1}{}_n\mathbf{T} = {}^n{}_{n-1}\mathbf{T}^{-1} = {}^n{}_{n-1}\mathbf{T}^T \quad (3.25)$$

3.4.1 Forme particulare pentru matricea de transformare omogenă

În cazul în care sistemul de axe $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ comportă doar mișcări de rotație în jurul axelor acestuia, matricea de transformare omogenă capătă următoarea formă particulară:

$$\begin{aligned}
 {}^{n-1}{}_n\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) & 0 \\ \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) & 0 \\ \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} {}^{n-1}{}_n\mathbf{R} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Pentru o rotație a acestui sistem în jurul axei x_{n-1} , cu unghiul θ_x , matricea de transformare corespunzătoare rotației menționate se va obține particularizând matricea ${}^{n-1}{}_n\mathbf{T}$ la cazul nostru.

Bazele Roboticii

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Similar, pentru rotația în jurul axelor y_{n-1} , z_{n-1} , cu unghiurile θ_y , θ_z , matricea capătă formele:

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Dacă presupunem că sistemul de axe $x_n y_n z_n$ comportă doar translații în raport cu sistemul de referință $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$, în absența rotațiilor matricea de transformare omogenă (3.24) capătă forma:

$${}^{n-1}_n\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Considerând cazul particular al translației sistemului de axe $x_n y_n z_n$ în lungul axei x_{n-1} , cu mărimea x (Fig. 3.7), matricea de translație corespunzătoare va fi:

$$\mathbf{T}r_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Similar, translațiile elementare în lungul axelor y_{n-1} , z_{n-1} , cu mărimile y , z , sunt exprimate cu ajutorul matricelor:

3. Transformări de coordonate

$$Tr_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; Tr_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

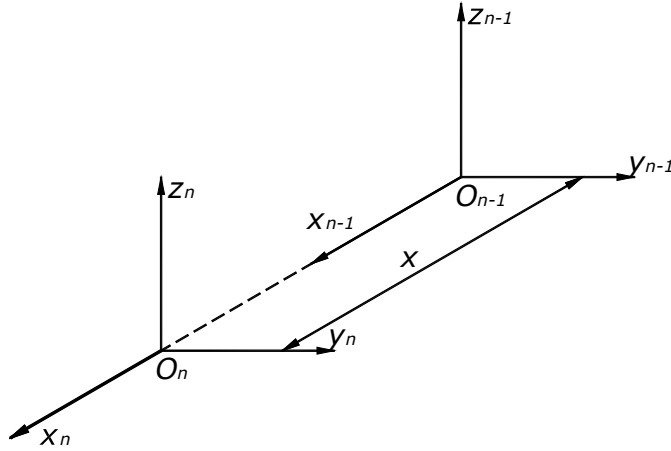


Fig. 3.7 Translație în jurul axei x

3.5 Operații cu transformări de coordonate

3.5.1 Compunerea transformărilor

Considerăm Fig. 3.8, în care cunoaștem coordonatele punctului P în raport cu sistemul de referință $\{2\}$ (matricea 2P) și dorim să determinăm coordonatele acestui punct în raport cu sistemul $\{0\}$, respectiv matricea 0P .

De asemenea, sunt cunoscute poziția și orientarea sistemului de axe $\{2\}$ în raport cu sistemul $\{1\}$, respectiv poziția și orientarea sistemului de axe $\{1\}$ în raport cu sistemul $\{0\}$. Conform expresiei (3.23) putem scrie:

$${}^1P = {}^1_2T \cdot {}^2P \quad (3.33)$$

respectiv

$${}^0P = {}^0_1T \cdot {}^1P \quad (3.34)$$

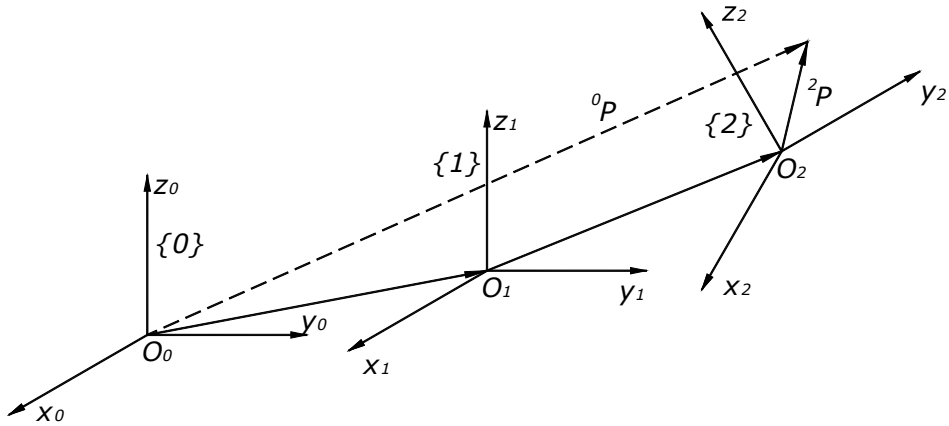


Fig. 3.8 Transformări de coordonate compuse

Combinând ultimele două relații, obținem rezultatul:

$${}^0\mathbf{P} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2\mathbf{P} = {}^0_2\mathbf{T} \cdot {}^2\mathbf{P} \quad (3.35)$$

3.5.1.1 Exemplul 3.1

Considerăm punctul P , aparținând unui corp rigid, de coordonate $(2, 4, 1)$ în raport cu originea sistemului de axe atașat acestuia. Corpul respectiv comportă mai întâi o rotație cu 30° în jurul axei y_0 , apoi o translație cu 50 mm în jurul axei x_1 , respectiv o rotație cu 60° în jurul axei z_2 (Fig. 3.9). Se cer coordonatele finale ale punctului P în raport cu sistemul de referință $x_0 y_0 z_0$.

Matricele omogene elementare, la trecerea de la sistemul de referință $x_0 y_0 z_0$ la sistemul de coordonate $x_3 y_3 z_3$, sunt următoarele:

$${}^0_1\mathbf{T} = R_y(30^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1_2\mathbf{T} = \mathbf{T}_{r_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

3. Transformări de coordonate

$${}^2_3\mathbf{T} = \mathbf{R}_z(60^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

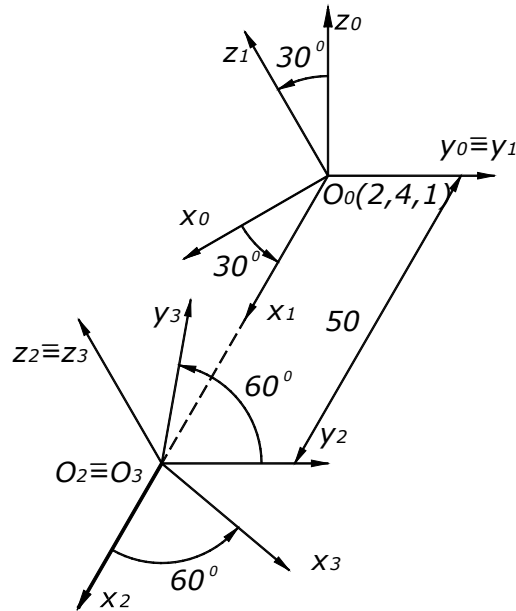


Fig. 3.9 Exemplul 3.1

Matricea omogenă totală va fi:

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.433 & -0.75 & 0.5 & 43.3013 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.433 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordonatele punctului P în raport cu sistemul de axe

$x_3 \ y_3 \ z_3$ se știu ca fiind ${}^3\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matricea ce conține coordonatele

Bazele Roboticii

punctului respectiv în raport cu sistemul de referință se va calcula folosind relația:

$${}^0\mathbf{P} = {}^0\mathbf{T} \cdot {}^3\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 41.6673 \\ 3.7321 \\ -22.9019 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Din matricea ${}^0\mathbf{P}$ rezultă coordonatele cerute ca fiind (41.6673, 3.7321, -22.9019).

3.5.2 Inversa unei matrice de transformare

Considerăm sistemul de axe $\{n\}$, căruia i se cunosc poziția și orientarea în raport cu un sistem de coordonate $\{n-1\}$. Aceasta înseamnă că se cunoaște matricea omogenă de transformare, la trecerea de la sistemul $\{n-1\}$ la $\{n\}$, ${}^{n-1}_n\mathbf{T}$. Uneori dorim să inversăm această matrice, cu scopul de a găsi descrierea sistemului $\{n-1\}$ în raport cu sistemul de axe $\{n\}$, adică a găsi ${}^n_{n-1}\mathbf{T}$. O cale directă de a determina matricea de transformare inversă este calcularea inversei matricei omogene ${}^{n-1}_n\mathbf{T}$. Dacă procedăm în acest fel, nu beneficiem de toate avantajele transformărilor de coordonate. Va fi ușor să găsim o metodă mai simplă de calcul a matricei inverse, ținând seama de avantajele menționate mai sus.

Pentru a găsi matricea ${}^n_{n-1}\mathbf{T}$, va trebui să calculăm matricele ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$ și ${}^{n-1}_n\mathbf{Tr}$ cunoscând ${}^{n-1}_n\mathbf{R}$ și ${}^{n-1}_n\mathbf{Tr}$. Revenind la relația (3.12), știm că:

$${}^{n-1}_n\mathbf{R} = {}^{n-1}_n\mathbf{R}^{-1} = {}^{n-1}_n\mathbf{R}^T$$

De asemenea, cunoaștem faptul că (3.2):

$${}^{n-1}\mathbf{P} = {}^{n-1}_n\mathbf{Tr} + {}^{n-1}_n\mathbf{R} \cdot {}^n\mathbf{P}$$

Rezultă:

$${}^n\mathbf{P} = {}^{n-1}_n\mathbf{R}^{-1} \cdot ({}^{n-1}\mathbf{P} - {}^{n-1}_n\mathbf{Tr}) \quad (3.36)$$

După efectuarea calculelor, ținând seama și de relația (3.12), obținem:

$${}^n\mathbf{P} = {}^{n-1}_n\mathbf{R} \cdot {}^{n-1}\mathbf{P} - {}^{n-1}_n\mathbf{R}^T \cdot {}^{n-1}_n\mathbf{Tr} \quad (3.37)$$

3. Transformări de coordonate

Dar, conform relației (3.2), putem scrie:

$${}^n\mathbf{P} = {}_{n-1}^n\mathbf{T}\mathbf{r} + {}_{n-1}^n\mathbf{R} \cdot {}^{n-1}\mathbf{P} \quad (3.38)$$

Calculând diferența între expresiile (3.37) și (3.38), rezultă:

$$\mathbf{0} = -{}_{n-1}^n\mathbf{T}\mathbf{r} - {}_{n-1}^{n-1}\mathbf{R}^T \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{r}, \text{ adică}$$

$${}_{n-1}^n\mathbf{T}\mathbf{r} = -{}_{n-1}^{n-1}\mathbf{R}^T \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{r} \quad (3.39)$$

Conform relației (3.24) și ținând seama de (3.12) și (3.39), putem scrie:

$${}_{n-1}^n\mathbf{T} = {}^{n-1}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} {}_{n-1}^{n-1}\mathbf{R}^T & \vdots & -{}_{n-1}^{n-1}\mathbf{R}^T \cdot {}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{r} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.6 Ecuații de transformare

Considerăm situația în care o serie de transformări de coordonate succesive formează o buclă închisă (Fig. 3.10), sistemul $\{4\}$ putând fi exprimat în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ folosind două produse de transformări:

$${}^0_4\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_4\mathbf{T} \quad (3.41)$$

respectiv

$${}^0_4\mathbf{T} = {}^0_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} \cdot {}^3_4\mathbf{T} \quad (3.42)$$

Egalând cele două expresii obținem o *ecuație de transformare*:

$${}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_4\mathbf{T} = {}^0_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} \cdot {}^3_4\mathbf{T} \quad (3.43)$$

Ecuațiile de transformare pot fi utilizate pentru determinarea unor matrice de transformare în cazul în care pentru un număr n de matrice necunoscute avem n ecuații de transformare. Considerăm pentru exemplificare ecuația (3.43), în care presupunem că se cunosc toate matricele de transformare cu excepție matricei ${}^2_3\mathbf{T}$. În situația considerată, avem o ecuație de transformare și o matrice necunoscută, soluția găsindu-se ușor sub forma:

$${}^2_3\mathbf{T} = {}^0_2\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_4\mathbf{T} \cdot {}^3_4\mathbf{T}^{-1} \quad (3.44)$$

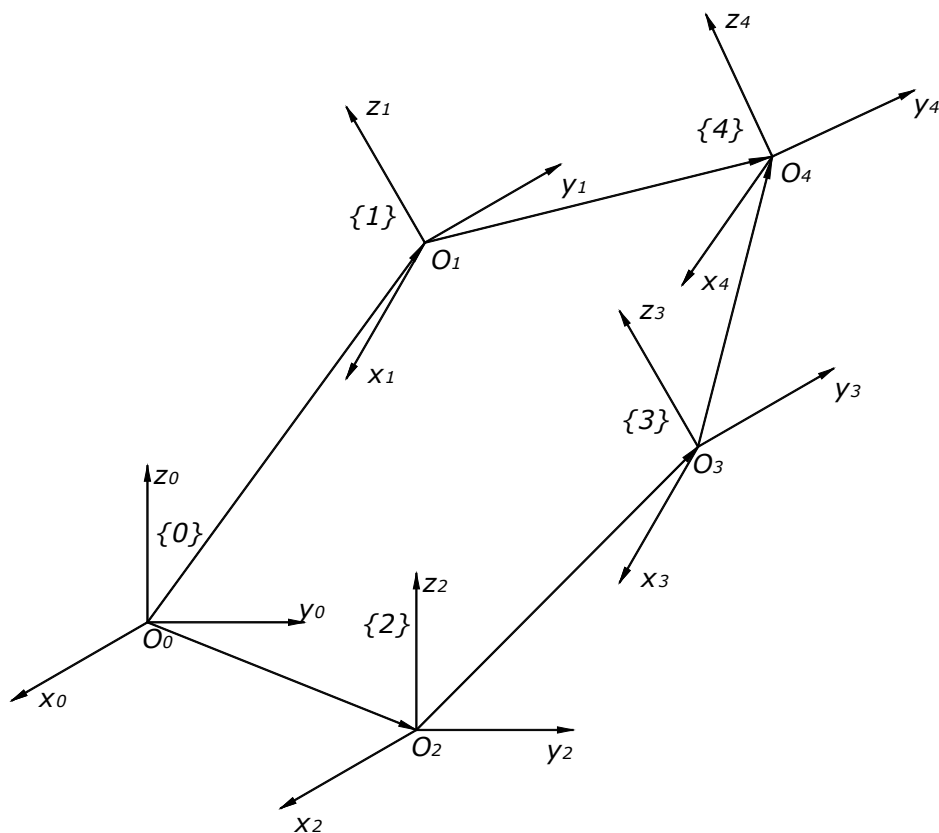


Fig. 3.10 Set de transformări formând o buclă închisă

Vom considera acum o situație similară (Fig. 3.11), în care se consideră ca fiind necunoscută matricea de transformare ${}^0_3\mathbf{T}$. Pentru aceasta, scriem ecuațiile ce determină matricea de transformare ${}^0_2\mathbf{T}$, spre exemplu.

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \quad (3.45)$$

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_3\mathbf{T} \cdot {}^4_3\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^4_2\mathbf{T} \quad (3.46)$$

Egalăm cele două expresii pentru a obține ecuația de transformare necesară rezolvării problemei:

$${}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} = {}^0_3\mathbf{T} \cdot {}^4_3\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^4_2\mathbf{T} \quad (3.47)$$

3. Transformări de coordonate

Din această ecuație obținem soluția pentru matricea necunoscută:

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^3_4\mathbf{T} \quad (3.48)$$

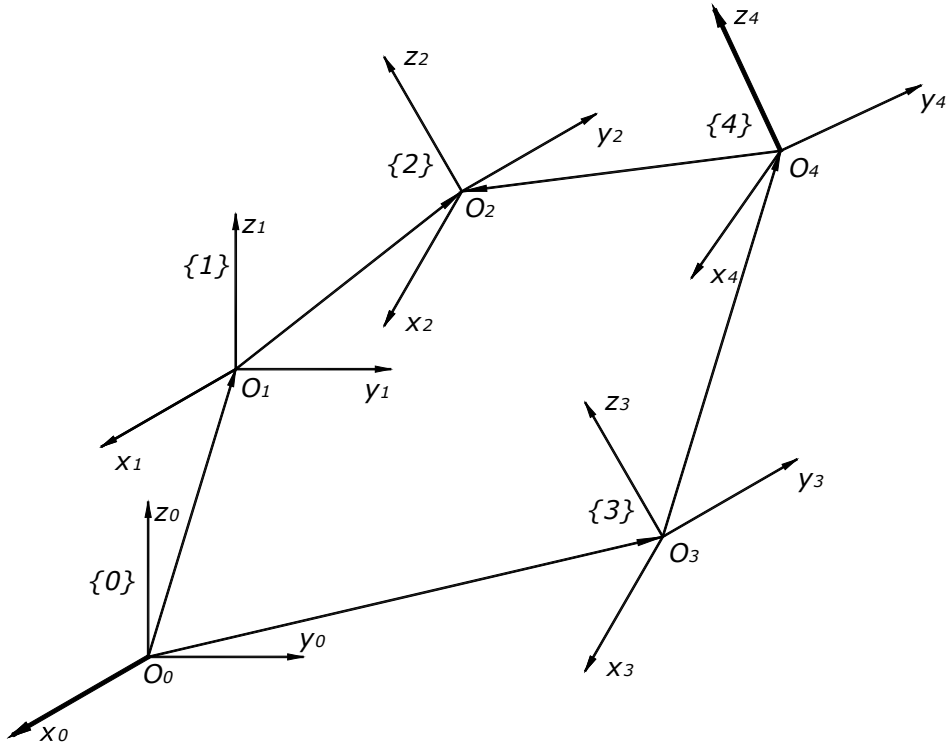


Fig. 3.11 Exemplu de ecuație de transformare

3.6.1 Exemplul 3.2

Presupunem cunoscută matricea de transformare ${}^0_1\mathbf{T}$, ce descrie situarea efectorului final al manipulatorului din Fig. 3.12 în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ atașat elementului fix al acestuia, respectiv situarea sistemului de coordonate $\{3\}$ atașat unui bolț așezat pe masă, în raport cu sistemul de coordonate $\{1\}$ atașat unui colț al mesei, situare definită de matricea ${}^2_3\mathbf{T}$. Deoarece masa este fixă, se cunoaște situarea acesteia în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, prin matricea de transformare ${}^0_2\mathbf{T}$. Se pune problema

Bazele Roboticii

determinării situații (poziției și orientării) bolțului în raport cu efectorul final al manipulatorului, situare dată de matricea de transformare 1_3T . Expresiile ce definesc situarea bolțului (a sistemului de coordonate $\{3\}$) în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ sunt:

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_3T \quad (3.49)$$

$${}^0_3T = {}^0_2T \cdot {}^2_3T \quad (3.50)$$

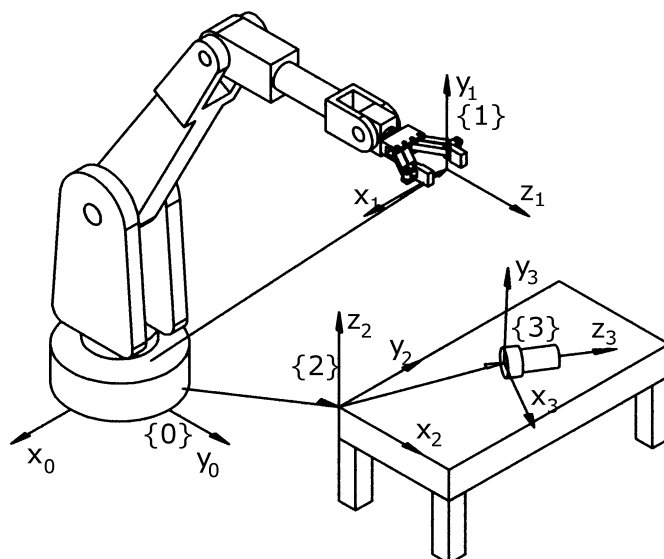


Fig. 3.12 Exemplul 3.2

Ecuția de transformare obținută este:

$${}^0_1T \cdot {}^1_3T = {}^0_2T \cdot {}^2_3T \quad (3.51)$$

iar matricea căutată va fi:

$${}^1_3T = {}^0_1T^{-1} \cdot {}^0_2T \cdot {}^2_3T \quad (3.52)$$

3.7 Unghiurile fixe X-Y-Z

Considerăm sistemul de referință fix $\{0\}$ și sistemul de coordonate $\{1\}$, care în primă fază coincide cu sistemul $\{0\}$. Se

3. Transformări de coordonate

rotește mai întâi sistemul $\{1\}$ în jurul axei x_0 cu unghiul γ , apoi în jurul axei y_0 cu unghiul β și în final în jurul axei z_0 cu unghiul α . Fiecare dintre aceste trei rotații are loc în jurul unei axe a sistemului de referință fix $\{0\}$, de aceea această convenție va fi numită *unghiuri fixe X-Y-Z*. Cuvântul „fixe” se referă la faptul că rotațiile au loc în jurul axelor sistemului de referință fix (Fig. 3.13).

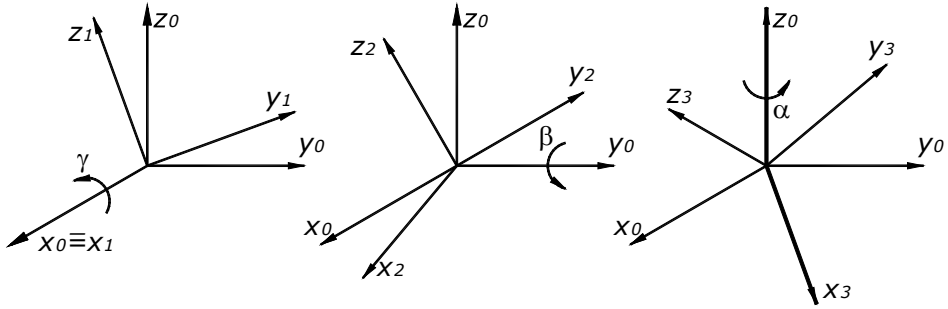


Fig. 3.13 Unghiurile fixe X-Y-Z. Rotațiile au loc în ordinea $R_x(\gamma)$, $R_y(\beta)$, $R_z(\alpha)$

Ținând seama de cele prezentate în paragraful 3.3.2, matricea de rotație totală echivalentă ${}^0_1R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha)$ va fi:

$${}^0_1R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Făcând produsul respectiv, obținem:

$${}^0_1R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

În relația (3.54) s-au făcut notațiile: $s_\alpha = \sin \alpha$, $s_\beta = \sin \beta$, $s_\gamma = \sin \gamma$, $c_\alpha = \cos \alpha$, $c_\beta = \cos \beta$, $c_\gamma = \cos \gamma$.

Problema inversă, ce constă în determinarea unghiurilor

Bazele Roboticii

α, β, γ , cunoscând matricea totală de rotație, prezintă adesea interes. Soluția depinde de rezolvarea unui set de ecuații, conform (3.54) existând nouă ecuații și trei necunoscute. Din cele nouă ecuații, șase sunt dependente, ceea ce înseamnă că avem trei ecuații și trei necunoscute. Cunoscând ca fiind cunoscute elementele matricei totale de rotație

$${}^0_1\mathbf{R}_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Din ecuația (3.54) vedem că: $r_{11} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ și $r_{21} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$. Ridicând la pătrat cele două elemente și adunându-le, putem obține $\cos \beta$. De asemenea, $-r_{31} = \sin \beta$. Având funcțiile $\sin \beta$ și $\cos \beta$, vom determina unghiul β ca fiind:

$$\beta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \quad (3.56)$$

Funcția *Atan2* va fi discutată în capitolul următor. Considerând aceleași elemente $r_{11} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$, $r_{21} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$ și făcând rapoartele $r_{11} / \cos \beta = \cos \alpha$, $r_{21} / \cos \beta = \sin \alpha$ putem determina unghiul α utilizând aceeași funcție *Atan2*:

$$\alpha = \text{Atan2}(r_{21} / \cos \beta, r_{11} / \cos \beta) \quad (3.57)$$

Pentru a determina unghiul γ aplicăm aceeași metodă, considerând elementele r_{32} și r_{33} , rezultând:

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{32} / \cos \beta, r_{33} / \cos \beta) \quad (3.58)$$

Mai mult despre rezolvarea problemei inverse se va discuta în capitolele următoare.

3.8 Unghiurile Euler Z-Y-X

Considerăm din nou sistemul de referință fix $\{0\}$ și sistemul de coordonate $\{1\}$, care în primă fază coincid. Se rotește mai întâi sistemul $\{1\}$ în jurul axei z_1 cu unghiul α , apoi în jurul axei y_1 cu unghiul β și în final în jurul axei x_1 cu unghiul γ . În această reprezentare, fiecare dintre aceste trei rotații are loc în jurul unei axe a sistemului de coordonate curent (mobil) $\{1\}$. Un asemenea set de

3. Transformări de coordonate

trei rotații este numit *unghiurile lui Euler*. Trebuie menționat faptul că fiecare rotație are loc în jurul unei axe a cărei amplasare depinde de rotațiile precedente. Deoarece cele trei rotații se desfășoară în jurul axelor z , y și x , reprezentarea este numită *unghiurile Euler Z-Y-X* (Fig. 3.14).

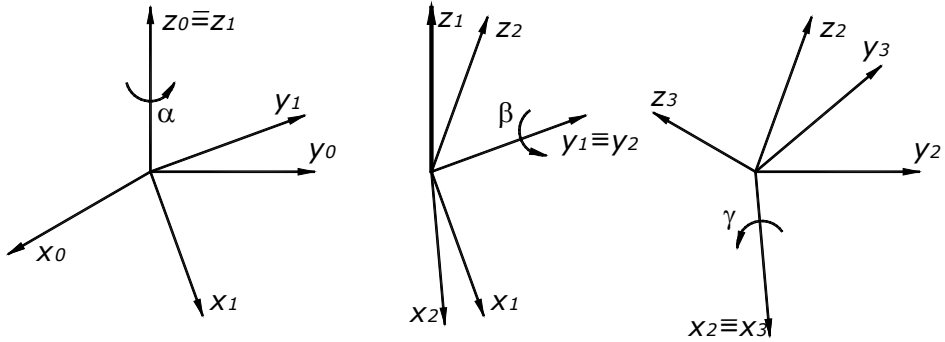


Fig. 3.14 Unghiurile Euler Z-Y-X

Dacă ținem seama de compunerea rotațiilor, se poate scrie imediat:

$${}^0_1R = {}^0_1R \cdot {}^{1'}_1R \cdot {}^{1''}_1R \quad (3.59)$$

Matricea de rotație totală echivalentă convenției numită *unghiurile Euler Z-Y-X*, ${}^0_1R_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma)$, este:

$${}^0_1R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Făcând produsul respectiv, obținem:

$${}^0_1R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Bazele Roboticii

Se poate observa că rezultatele sunt exact aceleași cu cele obținute făcând rotațiile în sens invers dar în jurul axelor sistemului de referință fix. Pe baza acestui rezultat putem trage concluzia generală că: trei rotații efectuate în jurul axelor sistemului de referință conduc la aceeași orientare finală ca în cazul în care rotațiile sunt efectuate în ordine inversă dar în jurul sistemului de coordonate curent.

Deoarece ecuațiile (3.54) și (3.61) sunt identice, nu mai este necesar să repetăm metodologia de rezolvare a problemei inverse.

3.9 Alte convenții de unghiuri

În secțiunile precedente au fost prezentate orientările numite: *unghiurile fixe X-Y-Z* și *unghiurile Euler Z-Y-X*. Fiecare dintre aceste convenții necesită trei rotații în jurul axelor principale într-o anumită ordine. Aceste convenții sunt doar două exemple ale unui set de 24 convenții de unghiuri. Dintre acestea, 12 convenții sunt seturi de unghiuri fixe și 12 seturi de unghiuri Euler. Datorită faptului că fiecărui set de unghiuri fixe îi este echivalent un set de unghiuri Euler, în realitate există doar 12 reprezentări unice ale matricei totale de rotație. Cel mai adesea, nu există motive pentru adoptarea unuia dintre aceste seturi în defavoarea altuia, dar diferiți autori adoptă convenții diferite, de aceea este utilă listarea matricei de rotație echivalente pentru toate cele 24 de convenții.

Cele 12 seturi de unghiuri Euler sunt:

$$\mathbf{R}_{x'y'z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{R}_{x'z'y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -s_\beta & c_\beta s_\gamma \\ c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{R}_{y'x'z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha c_\beta \\ c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & -s_\beta \\ c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

3. Transformări de coordonate

$$\mathbf{R}_{Y'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & -C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma & C_\alpha S_\beta S_\gamma + S_\alpha C_\gamma \\ S_\beta & C_\beta C_\gamma & -C_\beta S_\gamma \\ -S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma & -S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{R}_{X'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & -S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma \\ C_\alpha S_\beta S_\gamma + S_\alpha C_\gamma & C_\alpha C_\beta & -C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ -C_\beta S_\gamma & S_\beta & C_\beta C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{R}_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & C_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -S_\beta & C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{R}_{X'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C_\beta & S_\beta S_\gamma & S_\beta C_\gamma \\ S_\alpha S_\beta & -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & -S_\alpha C_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -C_\alpha S_\beta & C_\alpha C_\beta S_\gamma + S_\alpha C_\gamma & C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{R}_{X'Z'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C_\beta & -S_\beta C_\gamma & S_\beta S_\gamma \\ C_\alpha C_\beta & C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha S_\gamma & -C_\alpha C_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma \\ S_\alpha S_\beta & S_\alpha C_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma & -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{R}_{Y'X'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta & S_\alpha C_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma \\ S_\beta S_\gamma & C_\beta & -S_\beta C_\gamma \\ -C_\alpha C_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta & C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha S_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{R}_{Y'Z'Y'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha S_\gamma & -C_\alpha S_\beta & C_\alpha C_\beta S_\gamma + S_\alpha C_\gamma \\ S_\beta C_\gamma & C_\beta & S_\beta S_\gamma \\ -S_\alpha C_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma & S_\alpha S_\beta & -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{R}_{Z'X'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & -S_\alpha C_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma & S_\alpha S_\beta \\ C_\alpha C_\beta S_\gamma + S_\alpha C_\gamma & C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha S_\gamma & -C_\alpha S_\beta \\ S_\beta S_\gamma & S_\beta C_\gamma & C_\beta \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Bazele Roboticii

$$\mathbf{R}_{z'y'z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Cele 12 seturi de unghiuri fixe sunt date de relațiile:

$$\mathbf{R}_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{R}_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma \\ s_\beta & c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma \\ -s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{R}_{yxz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma \\ c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta & -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ -c_\beta s_\gamma & s_\beta & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{R}_{yzx}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -s_\beta & c_\beta s_\gamma \\ c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{R}_{zxy}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha c_\beta \\ c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma & -s_\beta \\ c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{R}_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{R}_{xyx}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta & s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma \\ s_\alpha s_\beta & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

3. Transformări de coordonate

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta & -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma \\ c_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma \\ s_\alpha s_\beta & s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{R}_{\gamma\alpha\beta}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta & s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma \\ s_\beta s_\gamma & c_\beta & -s_\beta c_\gamma \\ -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{R}_{\gamma\beta\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma \\ s_\beta c_\gamma & c_\beta & s_\beta s_\gamma \\ -s_\alpha c_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\beta & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\gamma\beta}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ c_\alpha c_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{R}_{\beta\gamma\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

3.10 Reprezentarea unghi-axă echivalentă

Dacă axa de rotație este o direcție generală (altă decât axele sistemului de coordonate), se poate obține orice orientare în jurul axei indicate, cu unghiul ales. Considerăm că sistemul de axe $\{1\}$, inițial coincident cu sistemul de referință fix $\{0\}$, comportă o rotație

spre dreapta, cu unghiul θ , în jurul vectorului \mathbf{k} , $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$.

Vectorul \mathbf{k} este uneori numit axă echivalentă de rotații finite. O orientare generală a sistemului de axe $\{1\}$ în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ poate fi scrisă ca ${}^0\mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta)$ sau $\mathbf{R}_k(\theta)$ și va fi numită reprezentare unghi-axă echivalentă, cunoscută și ca teorema lui Euler asupra rotației (Fig. 3.15). Specificarea vectorului \mathbf{k} necesită numai

Bazele Roboticii

doi parametri deoarece lungimea acestuia este considerată întotdeauna ca fiind unu. Unghiul de rotație reprezintă al treilea parametru.

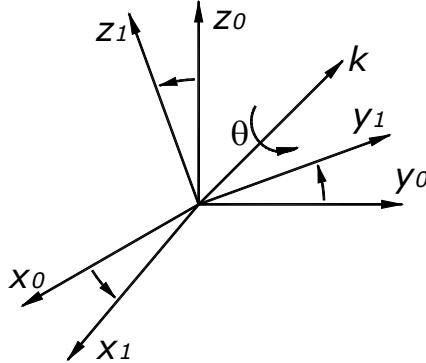


Fig. 3.15 Reprezentarea unghi-axă echivalentă

Când axa de rotație este aleasă una dintre axele sistemului de referință $\{0\}$, matricea de rotație echivalentă ia forma obișnuită a unei rotații plane $\mathbf{R}_x(\theta)$, $\mathbf{R}_y(\theta)$ sau $\mathbf{R}_z(\theta)$ (vezi relațiile 3.4 - 3.6).

Dacă axa de rotație este o axă generală, atunci matricea de rotație echivalentă are forma:

$$\mathbf{R}_k(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x (1 - c_\theta) + c_\theta & k_x k_y (1 - c_\theta) - k_z s_\theta & k_x k_z (1 - c_\theta) + k_y s_\theta \\ k_x k_y (1 - c_\theta) + k_z s_\theta & k_y k_y (1 - c_\theta) + c_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) - k_x s_\theta \\ k_x k_z (1 - c_\theta) - k_y s_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) + k_x s_\theta & k_z k_z (1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

unde: $s_\theta = \sin \theta$, $c_\theta = \cos \theta$. Sensul lui θ este considerat pozitiv dacă rotația se efectuează spre dreapta.

Problema inversă presupune că matricea de rotație echivalentă este cunoscută și se cere determinarea unghiului θ și a axei în jurul căreia a fost efectuată rotația.

$${}^0_1\mathbf{R}_k(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Se obțin:

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (3.88)$$

3. Transformări de coordonate

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \cdot \sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Această soluție permite determinarea unghiului θ cu valori cuprinse între 0° și 180° . Pentru fiecare pereche (\mathbf{k}, θ) există o altă pereche $(-\mathbf{k}, -\theta)$, pentru aceeași orientare descrisă de matricea de rotație respectivă. De aceea trebuie să alegem una dintre cele două soluții. O problemă mai serioasă este aceea că, pentru rotații cu unghiuri mici, definirea axei devine dificilă. Dacă unghiul de rotație tinde spre zero, axa de rotație devine imposibil de definit. Soluția dată de (3.89) nu are sens atunci când $\theta = 0^\circ$ sau $\theta = 180^\circ$.

În cele de mai sus s-a considerat că axa de rotație trece prin originea sistemului de referință. Atunci când această axă nu trece prin originea menționată, problema poate fi redusă la „axă ce trece prin origine”, după cum se va vedea în exemplul 3.4.

3.10.1 Exemplul 3.3

Sistemul de coordonate $\{1\}$, inițial coincident cu sistemul de referință $\{0\}$, suferă o rotație cu unghiul $\theta = 30^\circ$ în jurul vectorului

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ce trece prin origine. Calculați matricea de transformare}$$

omogenă corespunzătoare orientării sistemului de axe $\{1\}$.

Înlocuind datele problemei în relația (3.86), obținem:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

3.10.2 Exemplul 3.4

Presupunem acum că sistemul de coordonate $\{1\}$, ce coincide inițial cu sistemul de referință $\{0\}$, comportă o rotație cu unghiul

Bazele Roboticii

$\theta = 30^\circ$ în jurul vectorului $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ 0 \end{bmatrix}$, ce trece prin punctul P de

coordonate $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calculați matricea de transformare omogenă la

trecerea de la sistemul $\{0\}$ la $\{1\}$.

Înainte de efectuarea rotației, sistemele de axe $\{0\}$ și $\{1\}$ coincid. Pentru rezolvarea problemei se definesc două sisteme de axe noi, $\{0'\}$ și $\{1'\}$, care au aceeași origine, aflată în punctul P , a căror orientare este cea a sistemelor $\{0\}$ și $\{1\}$ dar care sunt translate față de originea sistemului de referință (Fig. 3.16). În condițiile menționate, putem scrie:

$${}^0_0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

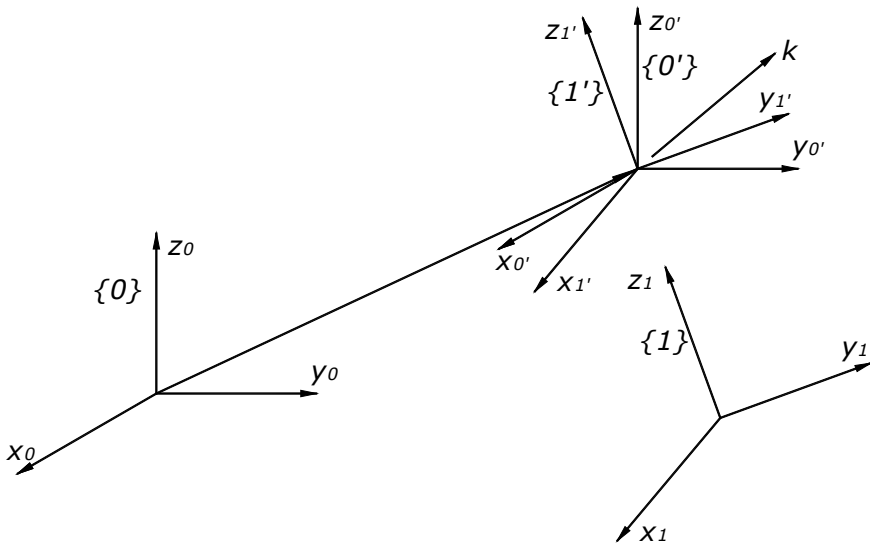


Fig. 3.16 Rotație în jurul unei axe ce nu trece prin originea sistemului de referință $\{0\}$

3. Transformări de coordonate

$${}^1_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Apoi, se va face rotația sistemului de axe $\{1'\}$ în raport cu sistemul $\{0'\}$. Aceasta este o rotație în jurul unei axe ce trece prin originea sistemului, situație în care se poate aplica relația (3.86) pentru a calcula matricea de transformare corespunzătoare:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

În final, putem scrie ecuația de transformare pentru a calcula matricea de transformare cerută.

$${}^0_1\mathbf{T} = {}^0_0\mathbf{T} \cdot {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_1\mathbf{T} \quad (3.94)$$

Efectuând calculele, obținem:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

După cum se poate constata, o rotație în jurul unei axe ce nu trece prin originea sistemului de referință are ca efect modificări în ceea ce privește poziția sistemului de axe $\{1\}$. Orientarea sistemului de axe respectiv este aceeași ca în cazul când rotația s-ar efectua în jurul unei axe ce trece prin origine.

3.11 Parametrii lui Euler

O altă reprezentare a orientării poate fi descrisă cu ajutorul *parametrilor lui Euler*. Considerând rotația cu unghiul θ în jurul axei

echivalente $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$, parametrii lui Euler sunt date de relațiile:

Bazele Roboticii

$$e_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.96)$$

$$e_1 = k_x \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.97)$$

$$e_2 = k_y \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.98)$$

$$e_3 = k_z \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.99)$$

Acești parametri nu sunt independenți, între ei existând relația:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (3.100)$$

Uneori, parametrii Euler sunt priviți ca fiind un vector 3x1 și un scalar. Ca vector 4x1, parametrii Euler sunt cunoscuți ca fiind un cuaternion unitate.

Matricea de rotație \mathbf{R}_e corespunzătoare parametrilor Euler menționați este

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} 1 - 2e_2^2 - 2e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_3e_0) & 2(e_1e_3 + e_2e_0) \\ 2(e_1e_2 + e_3e_0) & 1 - 2e_1^2 - 2e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_1e_0) \\ 2(e_1e_3 - e_2e_0) & 2(e_2e_3 + e_1e_0) & 1 - 2e_1^2 - 2e_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Pentru situația în care se cunoaște matrice de rotație \mathbf{R}_e , ca fiind

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

se pot calcula parametrii lui Euler

$$e_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \quad (3.103)$$

$$e_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4e_0} \quad (3.104)$$

$$e_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4e_0} \quad (3.105)$$

3. Transformări de coordonate

$$e_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4e_0} \quad (3.106)$$

Atunci când rotația se efectuează cu un unghi de 180° , parametrul e_0 va fi zero, ceea ce înseamnă că relațiile (3.103 – 3.105) nu au sens. Totuși, se poate arăta că, la limită, toate aceste expresii rămân finite chiar și în acest caz.

3.12 Orientări învățate și predefinite

În multe situații, sistemele robotizate pot fi „învățate” să efectueze poziționările și orientările necesare. Pentru aceasta, mai întâi manipulatorul este deplasat în locația cerută de către operatorul uman, iar această poziție va fi înregistrată de calculator. Învățarea manipulatorului să efectueze o orientare nu necesită ca programatorul uman să fie familiarizat cu asemenea reprezentări. Orientarea învățată este înregistrată în calculator ca o matrice de rotație dar utilizatorul nu e nevoit să o vadă sau să o înțeleagă. De aceea, sistemele robotizate care permit programarea lor prin învățare sunt foarte recomandate.

Pe lângă posibilitatea de a fi învățate, unele sisteme au un set de orientări predefinite pentru calibrare, ce sunt foarte accesibile operatorilor umani.

4

CINEMATICA DIRECTĂ A POZIȚIILOR

4.1 Generalități

Cinematica este știința care se ocupă cu studiul mișcării sistemelor mecanice în general, fără a ține seama de forțele care cauzează acea mișcare. În cadrul cinematicii pot fi studiate pozițiile, vitezele și accelerațiile sistemelor menționate.

În acest capitol vom studia poziția și orientarea roboților de tip manipulator, în situații statice. Relațiile existente între parametrii de mișcare și forțele ce o cauzează vor fi discutate în cadrul capitolului de dinamică.

4.2 Cinematica directă a pozițiilor roboților cu structură plană

4.2.1 Introducere

Începerea modelării cinematice a roboților de tip manipulator cu roboții plani este utilă, deoarece cinematica acestora este mult mai simplă și ridică puține probleme din punct de vedere matematic. De asemenea, exemplele plane prezentate vor putea arăta care sunt problemele de bază ce apar în proiectarea, analiza și controlul mișcării roboților, fără a pătrunde prea profund în modelarea matematică. Deși exemplele ce vor fi discutate se referă la lanțuri cinematice cu structură plană, metodologia are un caracter general și poate fi extinsă la mecanismele spațiale. De asemenea, trebuie menționat faptul că metodologia de analiză cinematică a roboților spațiali poate fi aplicată și la roboții plani, însă este posibil ca acea metodologie să necesite un timp prea mare pentru rezolvarea unei probleme simple.

Considerăm, ca și exemplu, un robot serial plan cu trei grade de mobilitate, având toate cuplele cinematice de rotație (Fig. 4.1).

4. Cinematica directă a pozițiilor

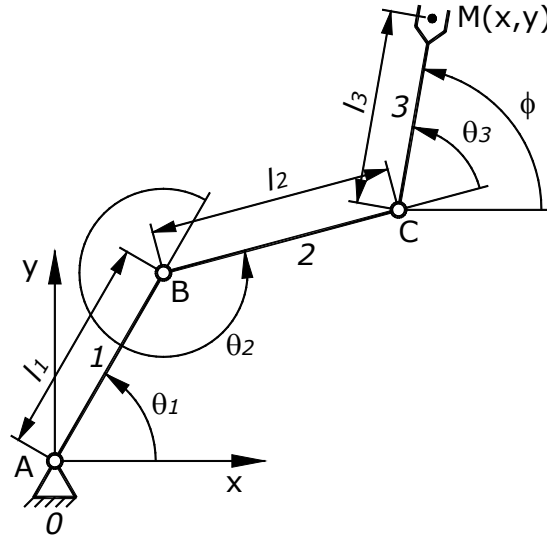


Fig. 4.1 Exemplu de manipulator plan

Lungimile elementelor, l_1 , l_2 , l_3 sunt constante și definesc geometria robotului, în timp ce unghiurile θ_1 , θ_2 , θ_3 sunt variabile și determină pozițiile relative ale elementelor cinematice.

Definirea lungimilor elementelor și a unghiurilor de poziție ale cuplelor cinematice se face respectând următoarele reguli:

- Normala comună i este perpendiculara pe axele cuplelor cinematice i și $i+1$;
- Lungimea elementului i este definită ca fiind lungimea normalei comune i sau distanța dintre axele cuplelor cinematice i și $i+1$;
- Unghiul de poziție al cuplei cinematice i este unghiul dintre normala comună $i-1$ și normala comună i , măsurat în sens trigonometric, de la normala comună $i-1$ la normala comună i .

Se poate observa că există ambiguități în ceea ce privește definirea unghiului pentru cupla cinematică formată de elementul 1 cu elementul fix O , respectiv în definirea lungimii ultimului element. Unghiul de poziție al primei cuple cinematice se va măsura de la o axă de referință, aleasă în mod convenabil (în exemplul dat, axa x), iar lungimea elementului final se măsoară de la axa ultimei cuple cinematice la punctul caracteristic al obiectului manipulat (de regulă, acesta este centrul geometric al mecanismului de prehensiune sau punctul final al sculei).

Bazele Roboticii

În cazul unei cuple cinematice de translație, parametrul cinematic variabil este deplasarea d a cuplei (Fig. 4.2).

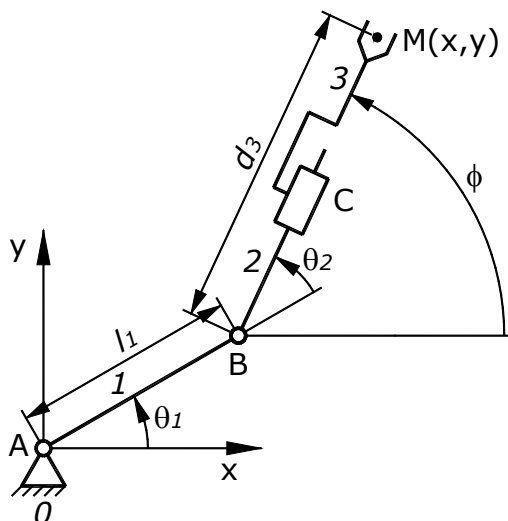


Fig. 4.2 Manipulator plan având și o cuplă cinematică de translație

4.2.2 Rezolvarea cinematicii directe a pozițiilor

Problema cinematicii directe presupune că se cunosc parametrii cinemati ai cuplelor și se cere determinarea coordonatelor și orientării efectorului final.

Pentru exemplul considerat în Fig. 4.1, această problemă se rezolvă prin scrierea ecuațiilor ce definesc aceste coordonate.

$$\begin{cases} x_M = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_M = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

Problema devine mai complicată dacă mecanismul conține una sau mai multe bucle închise. În plus, în aceste cazuri, cinematica directă poate avea mai multe soluții sau nici una.

4.3 Cinematica directă a pozițiilor roboților cu structură spațială

4.3.1 Generalități

După cum s-a menționat și în paragraful anterior, analiza cinematică directă a pozițiilor unui robot de tip manipulator necesită cunoașterea parametrilor cinematici ai fiecărei cuple. Cunoscând acești parametri, se pot determina poziția și orientarea efectorului final, respectiv poziția și orientarea obiectului manipulat.

Așa cum s-a arătat în capitoul anterior, poziția și orientarea unui corp în raport cu un sistem de referință sunt descrise de vectorul de poziție al originii, respectiv versorii sistemului de axe atașat corpului. Din acest motiv, funcția ce definește cinematica directă în raport cu sistemul de axe $\{b\}$ este exprimată de matricea de tranformare omogenă de forma

$${}^b_eT = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e & \mathbf{s}_e & \mathbf{a}_e & \mathbf{p}_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

unde: \mathbf{n}_e , \mathbf{s}_e și \mathbf{a}_e sunt versorii sistemului atașat efectorului final; \mathbf{p}_e este vectorul de poziție al originii acestui sistem de axe, în raport cu originea sistemului de referință (Fig. 4.3). Atât versorii menționați, cât și vectorul de poziție \mathbf{p}_e , depind de parametrii cinematici ai cuplurilor.

Sistemul de axe $\{b\}$ este numit *sistem bază*, iar sistemul atașat efectorului final $\{e\}$ poartă numele de *sistem efector final* și, convențional, este ales în funcție de tipul efectorului. Dacă acesta este un mecanism de prehensiune, originea sistemului efector final este localizată în centrul geometric al acestuia, versorul \mathbf{a}_e este ales pe direcția de apropiere de obiect (fiind numit *versor de apropiere*), versorul \mathbf{s}_e este ales normal la \mathbf{a}_e în planul de translație (sliding plane) al bacurilor mecanismului de prehensiune, iar versorul \mathbf{n}_e este normal pe ceilalți doi, astfel încât sistemul de axe $\mathbf{n}_e\mathbf{s}_e\mathbf{a}_e$ să respecte regula burghiului drept (regula mâinii drepte).

O primă cale de rezolvare a problemei cinematicii directe este oferită de o analiză geometrică a structurii manipulatorului. Eficacitatea metodei geometrice se bazează, în primul rând, pe alegerea convenabilă a mărimilor relevante și, respectiv, pe abilitatea și intuiția geometrică în rezolvarea problemei. Atunci când structura manipulatorului este complexă și numărul cuplurilor cinematice crește,

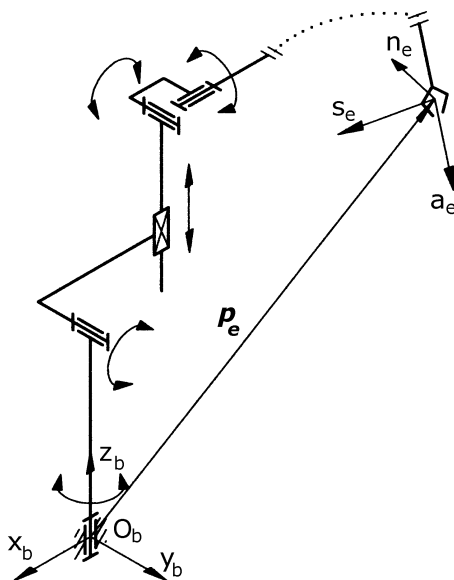


Fig. 4.3 Descrierea poziției și orientării sistemului *efector final*

este preferabil să se adopte o rezolvare mai puțin directă, care, totuși, se bazează pe o procedură generală sistematică. Problema devine și mai complexă atunci când manipulatorul conține unul sau mai multe lanțuri cinematice închise. În asemenea cazuri, nu există garanția obținerii unei expresii analitice pentru funcția cinematicii directe (4.2).

Modelarea cinematică se face în ipoteza că precizia geometrică a robotului este absolută.

4.3.2 Lanț cinematic deschis

Considerăm un manipulator constituit dintr-un lanț cinematic deschis având $n+1$ elemente legate între ele prin n cuple cinematice, la care elementul 0 este, convențional, fix (Fig. 4.4). Se presupune că fiecare cuplă cinematică are un singur grad de mobilitate.

Deoarece fiecare cuplă cinematică conectează două elemente succesive, se consideră mai întâi descrierea relației cinematice ce există între aceste elemente și apoi se obține descrierea totală a cinematicii manipulatorului. Pentru a efectua acest lucru, este necesar să se atașeze câte un sistem de axe cartezian fiecărui element cinematic, pornind de la elementul 0 către elementul n .

4. Cinematica directă a pozițiilor

Transformarea ce descrie poziția și orientarea sistemului de axe $\{n\}$ în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ este dată de

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot \dots \cdot {}^{n-1}_n\mathbf{T} \quad (4.3)$$

În concordanță cu ecuația cinematicii directe (4.2), transformarea de coordonate ce descrie poziția și orientarea sistemului efector final în raport cu sistemul bază poate fi obținută astfel:

$${}^b_e\mathbf{T} = {}^b_0\mathbf{T} \cdot {}^0_n\mathbf{T} \cdot {}^n_e\mathbf{T} \quad (4.4)$$

unde ${}^b_0\mathbf{T}$ și ${}^n_e\mathbf{T}$ sunt două matrice de transformare omogene, de obicei constante, ce descriu poziția și orientarea sistemului de axe $\{0\}$ în raport cu sistemul bază, respectiv a sistemului efector final în raport cu sistemul de axe $\{n\}$.

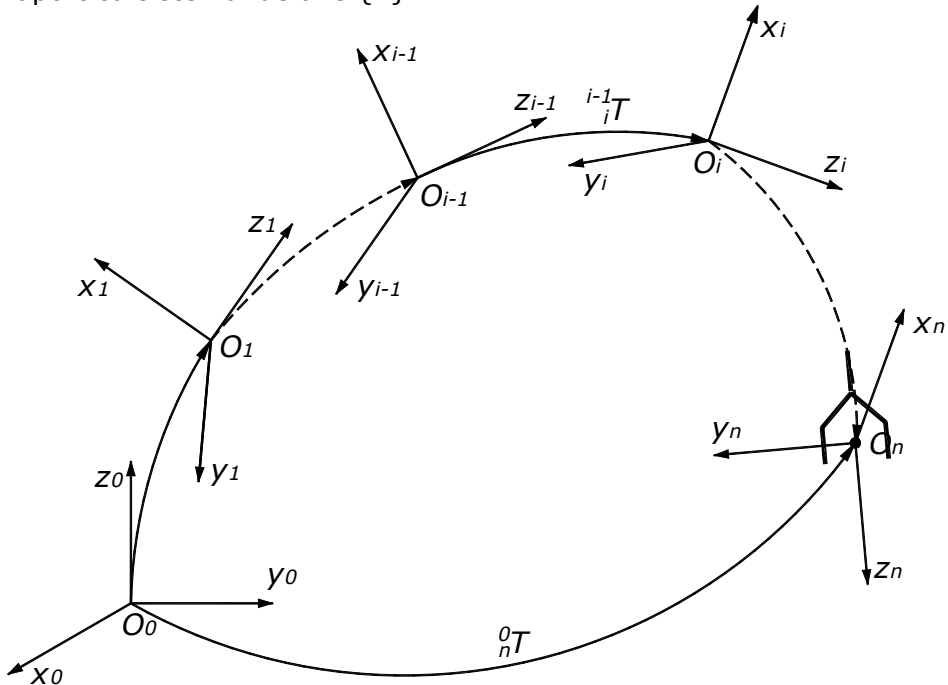


Fig. 4.4 Transformări de coordonate într-un lanț cinematic deschis

După atașarea sistemelor de axe fiecărui element cinematic, pentru scrierea matricelor de transformare, se determină parametrii *Denavit - Hartenberg* (D-H) corespunzători.

În literatura de specialitate există două convenții privind determinarea parametrilor D-H:

- Parametrii D-H standard, prezentați de Paul [11];
- Parametrii D-H modificați, utilizați de Craig [3].

Ambele convenții de stabilire a parametrilor D-H sunt valabile, alegerea uneia dintre acestea fiind o problemă de obișnuință sau preferință

4.3.2.1 Parametrii Denavit-Hartenberg standard

Atașarea sistemelor de axe se poate face arbitrar, dar este mai convenabil să se respecte anumite reguli, în cazul nostru regulile impuse de convenția Denavit-Hartenberg.

Considerăm două elemente $i-1$ și i , legate prin cupla cinematică i (Fig. 4.5). Pentru definirea sistemului de axe atașat elementului i , va fi utilizată convenția menționată, după cum urmează:

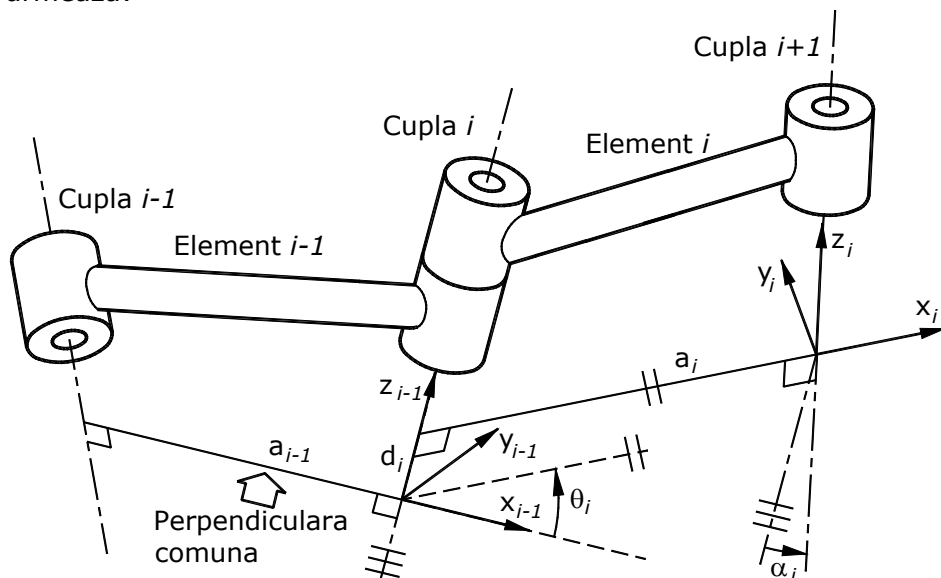


Fig. 4.5 Definirea parametrilor Denavit-Hartenberg standard

- Axa z_i se alege astfel încât aceasta să coincidă cu axa cuplei cinematice $i+1$.
- Originea O_i a sistemului va fi localizată la intersecția axei z_i cu perpendiculara comună la axele z_{i-1} și z_i .

4. Cinematica directă a pozițiilor

- Axa x_i se alege în lungul perpendicularei comune la axele z_{i-1} și z_i , având sensul orientat de la cupla i spre cupla $i+1$.
- Axa y_i rezulta astfel încât sistemul de coordonate să respecte regula mâinii drepte.

Convenția Denavit-Hartenberg standard oferă mai multe soluții în următoarele cazuri:

- Pentru sistemul initial $\{0\}$, este specificată numai axa z_0 . Originea O_0 și axa x_0 pot fi alese arbitrar. Axa x_0 se alege, totuși, astfel încât matricea de transformare rezultată la trecerea de la sistemul de axe $\{0\}$ la sistemul $\{1\}$ să fie cât mai simplă.
- Pentru sistemul n , deoarece nu există cupla cinematica $n+1$, axa z_n nu este definită unic, atâta timp cât axa x_n trebuie să fie perpendiculară pe axa z_{n-1} . În mod obișnuit, cupla n este de rotație, de aceea axa z_n va fi paralelă cu axa z_{n-1} .
- Când două axe succesive sunt paralele, perpendiculara lor comună nu este unic definită.
- Când două axe succesive se intersectează, direcția axei x_i este arbitrară.
- Când cupla i este de translație, direcția axei z_{i-1} este arbitrară.

În astfel de cazuri, atașarea sistemelor de axe se face în așa fel încât problema să fie cât mai simplă; spre exemplu, axele a două sisteme succesive pot fi paralele.

Odată ce au fost stabilite sistemele de coordonate, poziția și orientarea sistemului i în raport cu sistemul $i-1$ sunt definite complet de următorii parametri:

a_i - distanța dintre z_{i-1} și z_i , măsurată în lungul lui x_i (a_i este pozitiv când x_i este orientat de la axa i la axa $i+1$);

α_i - unghiul dintre axele z_{i-1} și z_i , măsurat în jurul axei x_i ; acesta este pozitiv când rotația este făcută în sens trigonometric;

d_i - distanța dintre x_{i-1} și x_i , măsurată în lungul lui z_{i-1} ;

θ_i - unghiul dintre axele x_{i-1} și x_i , măsurat în jurul axei z_{i-1} ; acesta este pozitiv când rotația are loc în sens trigonometric.

Bazele Roboticii

Doi dintre acești parametri (α_i și a_i) sunt constanți și depind numai de geometria robotului. Dintre ceilalți doi parametri, doar unul este variabil, în funcție de tipul cuplei cinematice:

- θ_i este variabil în cazul în care cupla i este de rotație;
- d_i este variabil în cazul când cupla i este de translație.

Trecerea de la sistemul de referință $i-1$ la sistemul i are loc prin:

- o translație cu d_i în lungul axei z_{i-1} , și o rotație cu θ_i în jurul axei z_{i-1} , urmate de
- o translație cu a_i în lungul axei x_i și o rotație în jurul lui x_i cu unghiul α_i .

Corespunzător celor două etape de trecere de la sistemul de axe $\{i-1\}$ la sistemul $\{i\}$ se poate scrie matricea omogenă de transformare totală, sub forma:

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \text{Transl}(z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Transl}(x_i, a_i) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \quad (4.5)$$

respectiv

$$\begin{aligned} {}^{i-1}_i\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6) \end{aligned}$$

Matricea de transformare omogenă a unui robot cu n elemente, scrisă în raport cu originea O_0 a sistemului de referință, va fi:

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot \dots \cdot {}^{j-1}_j\mathbf{T} \cdot \dots \cdot {}^{n-1}_n\mathbf{T} \quad (4.7)$$

4. Cinematica directă a pozițiilor

4.3.2.2 Parametrii Denavit-Hartenberg modificați

Convenția atașării sistemelor de axe în acest caz este următoarea (Fig. 4.6):

- Axa z_i se alege astfel încât aceasta să oincidă cu axa cuplei cinematice i .
- Originea O_i a sistemului de axe va fi localizată la intersecția axei z_i cu perpendiculara comună la axele z_i și z_{i+1} .
- Axa x_i se alege în lungul perpendicularei comune la axele z_i și z_{i+1} , având sensul orientat de la cupla i spre cupla $i+1$.
- Axa y_i rezulta astfel încât sistemul de coordonate să respecte regula mâinii drepte.

Convenția D-H modificată oferă mai multe soluții în următoarele cazuri:

- Când axele a două cuple cinematice succesive sunt paralele, perpendiculara lor comună nu este clar definită, existând mai multe posibilități. Alegerea axei x_i , în acest caz, se face în funcție de context.
- Dacă două axe succesive sunt concurente, lungimea " a " a perpendicularei comune este zero. Totuși, noțiunea de perpendiculară comună poate fi menținută și axa x_i se alege perpendiculară pe planul (z_i, z_{i+1}) .
- Alegerea primului sistem de axe $\{0\}$ nu este definit prin convenție, existând o anumită libertate în adoptarea acestuia. Respectivul sistem se va alege astfel încât matricea de transformare la trecerea de la sistemul $\{0\}$ la sistemul $\{1\}$ să fie cât mai simplă posibil.

Din punct de vedere cinematic, un element este un corp rigid caracterizat de pozițiile relative ale axelor sistemelor de coordonate atașate acestuia. În Fig. 4.6, elementul $i-1$ este caracterizat de parametrii a_{i-1} și α_{i-1} , care reprezintă: lungimea perpendicularei comune a axelor cuplelor cinematice $i-1$ și i , respectiv unghiul dintre axele z_{i-1} , z_i ale acestor cuple cinematice.

Poziția relativă a două elemente succesive este definită cu ajutorul parametrilor θ_i și d_i . Parametrul θ_i este unghiul cu care ar

Bazele Roboticii

trebui rotit elementul i în jurul axei z_i , pentru a aduce perpendiculara comună $i-1$ paralelă cu cea a elementului i . Parametrul d_i este distanța cu care ar trebui traslată perpendiculara comună $i-1$, în lungul axei i , pentru a o suprapune cu perpendiculara comună i .

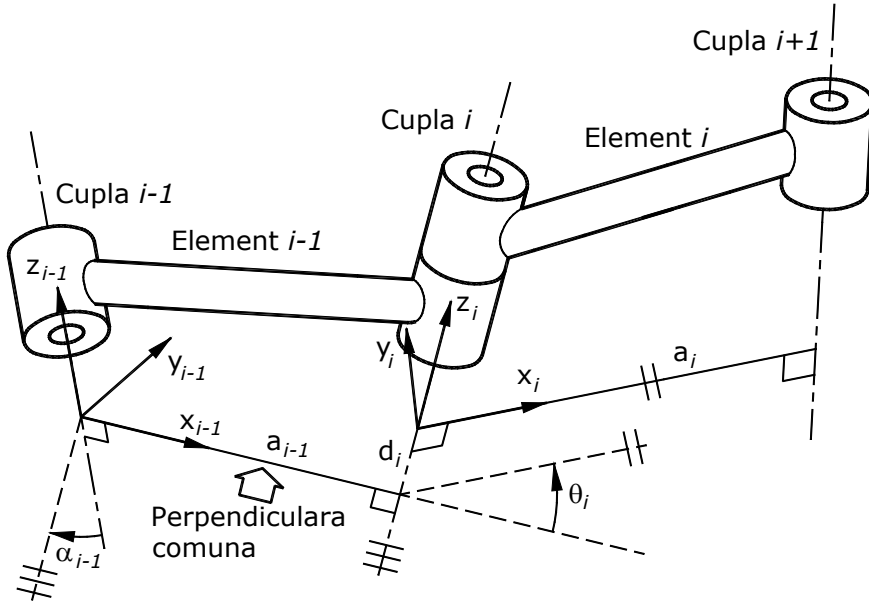


Fig. 4.6 Definirea parametrilor Denavit-Hartenberg modificați

Unul dintre parametrii θ_i , d_i este variabil: θ_i , în cazul unei cuple de rotație; d_i , pentru o cuplă cinematică de translație.

Cei patru parametri α_{i-1} , a_{i-1} , θ_i și d_i constituie parametrii Denavit-Hartenberg modificați. Ținând cont de cele prezentate anterior, semnificația parametrilor Denavit-Hartenberg modificați poate fi rezumată după cum urmează:

a_{i-1} - este distanța dintre axe z_{i-1} și z_i , măsurată în lungul axei x_{i-1} (a_{i-1} este pozitiv când x_{i-1} este orientat de la axa $i-1$ la i);

α_{i-1} - este unghiul dintre axe z_{i-1} și z_i , măsurat în jurul axei x_{i-1} ; acesta este pozitiv când rotația este făcută în sens trigonometric;

d_i - este distanța dintre axe x_{i-1} și x_i , măsurată în lungul axei z_i ;

θ_i - este unghiul dintre axe x_{i-1} și x_i , măsurat în jurul axei z_i ; acesta este pozitiv când rotația este făcută în sens trigonometric.

4. Cinematica directă a pozițiilor

După atașarea sistemelor de axe și scrierea parametrilor D-H modificați, se exprimă matricea de transformare omogenă pentru trecerea de la un sistem de axe la celălalt, în funcție de acești parametri. Așa cum se poate observa și în Fig. 4.6, trecerea de la un sistem de axe $\{i-1\}$ la sistemul $\{i\}$ se face prin:

- o rotație cu unghiul α_{i-1} , în jurul axei x_{i-1} , și o translație cu a_{i-1} , în lungul axei x_{i-1} , urmate de
- o rotație cu unghiul θ_i , în jurul axei z_i , și o translație cu d_i în lungul axei z_i .

O rotație urmată de o translație constituie un operator "screw", prin analogie cu mecanismul șurub-piuliță. Este vorba de un operator cu trei parametri: axa de rotație, mărimea translației și mărimea unghiului de rotație.

Corespunzător celor două etape de trecere de la sistemul de axe $\{i-1\}$ la sistemul $\{i\}$, ținând seama de modul de definire a matricelor elementare de rotație și translație, se poate scrie:

$$\text{Screw}(x_{i-1}, a_{i-1}, \alpha_{i-1}) = \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot \text{Transl}(x_{i-1}, a_{i-1}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Screw}(z_i, d_i, \theta_i) = \text{Rot}(z_i, \theta_i) \cdot \text{Transl}(z_i, d_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (4.9)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bazele Roboticii

Matricea de transformare omogenă între sistemele de axe $\{i-1\}$ și $\{i\}$ va fi:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}_i T &= \text{Screw}(x_{i-1}, a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot \text{Screw}(z_i, d_i, \theta_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cdot \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} \cdot d_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cdot \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} \cdot d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

4.3.3 Lanț cinematic închis

În cazul unui lanț cinematic închis, numărul cuplelor cinematice c este mai mare decât numărul elementelor mobile n . Numărul buclelor închise este egal cu diferența $c-n$.

După cum se observa în Fig. 4.7.a, în această situație unele elemente sunt conectate la mai mult de un element vecin. Pentru rezolvarea problemei și determinarea parametrilor cinematici se procedează în felul urmator:

- Se alege o cuplă cinematică pasivă și se desface această cuplă, obținându-se un lanț cinematic deschis, în structură ramificată;
- Se calculează matricea de transformare omogenă, conform convenției Denavit-Hartenberg;
- Se caută relațiile existente între parametrii sistemelor de coordonate având originile în cupla cinematică tăiată;
- Se determină constrângerile pentru un număr redus de variabile;
- Se exprimă matricea de transformare omogenă totală, prin compunerea matricelor de transformare elementare.

4. Cinematica directă a pozițiilor

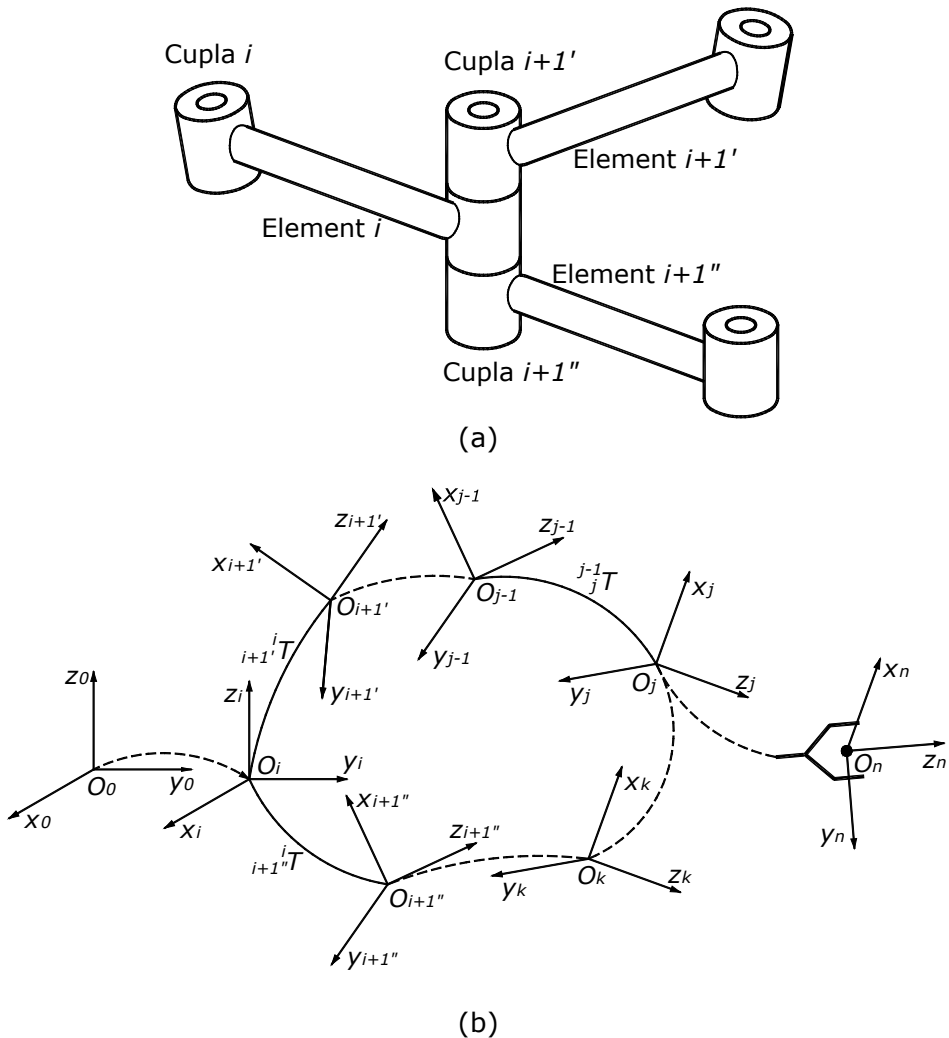


Fig. 4.7 Lanț cinematic închis :a); legătura dintre elemente; b) transformări de coordonate.

4.3.4 Exemple privind analiza cinematică directă

În acest paragraf vor fi prezentate câteva exemple de calcul a cinematicii directe pentru structuri des întâlnite în structura roboților industriali. Pentru unele exemple vor fi utilizate ambele convenții de

Bazele Roboticii

definire a parametrilor D-H, astfel încât cei interesați să aleagă metoda pe care o consideră mai convenabilă din punctul lor de vedere. De asemenea, vor fi exemplificate atât lanțuri cinematice deschise, cât și închise, respectiv plane sau spațiale.

Pentru atașarea sistemelor de axe corespunzătoare fiecărui element, se recomandă reprezentarea, mai întâi, a axelor z_i pentru toate cuplele cinematice, urmând ca mai apoi să se treacă la alegerea axelor x_i și y_i .

Așa cum s-a menționat în capitolul 2, mecanismul de poziționare (generator de traiectorie) mai este numit și braț. În exemplele prezentate, se va folosi această denumire pentru mecanismul menționat.

4.3.4.1 Braț plan cu trei grade de mobilitate

Deși ecuațiile ce definesc cinematica directă a roboților cu structură plană pot fi scrise direct, considerăm utilă și prezentarea metodei ce utilizează parametrii D-H în rezolvarea problemei.

Considerăm manipulatorul plan cu trei grade de mobilitate din Fig. 4.8, fiecărui element al manipulatorului atașându-i sistemul de

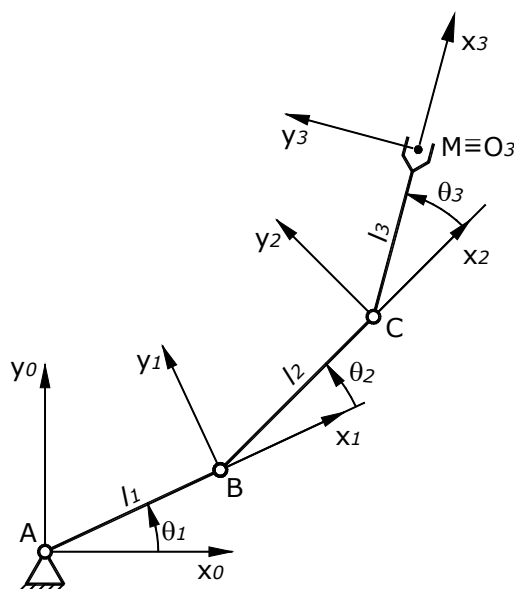


Fig. 4.8 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate, parametri D-H standard

4. Cinematica directă a pozițiilor

axe conform primei convenții (parametri D-H standard). Deoarece axele tuturor cuplelor cinematice sunt paralele, pentru definirea axelor x_i s-a ales cea mai simplă soluție, direcția elementelor. Direcția axei x_0 este arbitrară. În aceste condiții, toți parametrii d_i sunt nuli iar unghiurile dintre axele x_i reprezintă tocmai variabilele cuplelor cinematice, θ_i . Parametrii Denavit-Hartenberg standard sunt prezentați în Tabelul 4.1.

Tabelul 4.1 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Folosind relația (4.6), vom scrie matricele transformare omogene, la trecerea de la un sistem de coordonate la următorul.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Matricea de transformare omogenă totală, ce reprezintă funcția cinematicii directe (4.2), se obține astfel:

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Bazele Roboticii

unde: $s_1 = \sin \theta_1$, $c_1 = \cos \theta_1$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$,
 $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

Primele trei elemente ale ultimei coloane reprezintă coordonatele efectorului final în raport cu sistemul de referință $\{0\}$. Evident, deoarece manipulatorul este plan, coordonata z va fi zero.

Este important de notat că sistemul de axe $\{3\}$ nu coincide cu sistemul efector-final, ca în Fig. 4.3, deoarece versorul de apropiere este aliniat cu axa x_3 și nu cu z_3 . De aceea, presupunând că cele două sisteme de axe au aceeași origine, este necesară scrierea matricei de transformare la trecerea de la sistemul $\{3\}$ la sistemul efector-final $\{e\}$, trecere ce constă într-o rotație cu 90° în jurul axei y_3 .

$${}^3_e T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Matricea de trecere de la sistemul de referință $\{0\}$ la sistemul de axe efector-final va fi:

$${}^0_e T = {}^0_3 T \cdot {}^3_e T = \begin{bmatrix} 0 & -s_{123} & c_{123} & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ 0 & c_{123} & s_{123} & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Considerăm același manipulator, căruia i se atașează sistemele de axe conform convenției modificate (Fig. 4.9). Parametrii Denavit-Hartenberg modificați vor fi prezentați în Tabelul 4.2.

Tabelul 4.2 Parametrii D-H modificați

Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	l_1	0	0	θ_2
3	l_2	0	0	θ_3
3'	l_3	0	0	0

De data aceasta, vom folosi relația (4.10) pentru scrierea matricelor de transformare omogene, la trecerea de la un element cinematic la următorul.

4. Cinematica directă a pozițiilor

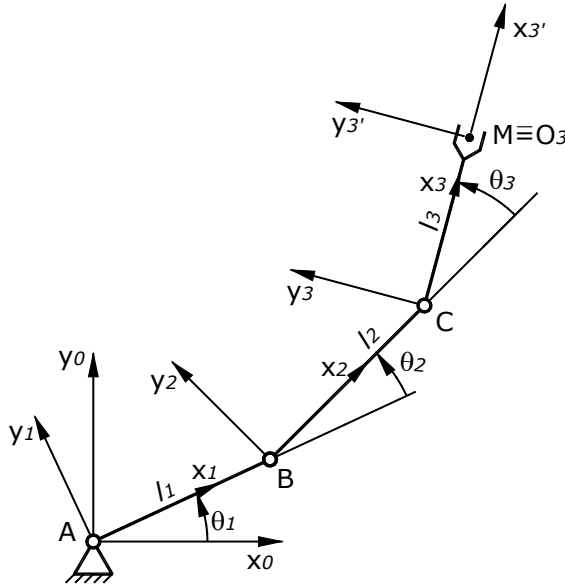


Fig. 4.9 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate, parametri D-H modificați

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

După cum se poate observa, pentru a determina în acest caz poziția și orientarea efectorului final, este necesară o transformare de coordonate suplimentară.

Bazele Roboticii

$${}^3_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Matricea de transformare omogenă totală va fi:

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Indiferent de convenția utilizată, matricea finală este identică. Folosirea uneia dintre aceste convenții depinde de obișnuința sau preferințele utilizatorului.

4.3.4.2 Braț plan tip paralelogram

Considerăm acum un manipulator având în structura sa un lanț cinematic închis de tip paralelogram (Fig. 4.10). Cupla cinematică ce a fost aleasă pentru a fi desfăcută este cupla D , iar

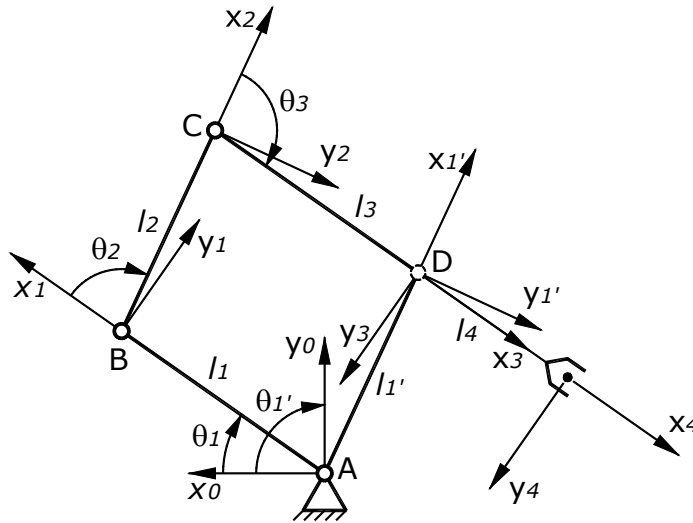


Fig. 4.10 Manipulator plan tip paralelogram, parametri D-H standard

4. Cinematica directă a pozițiilor

sistemele de axe au fost atașate în concordanță cu acest lucru. Parametrii D-H standard sunt specificați în Tabelul 4.3, unde $l_1 = l_3$ și $l_2 = l_{1'}$.

Tabelul 4.3 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3
1'	$l_{1'}$	0	0	$\theta_{1'}$
4	l_4	0	0	0

Trebuie notat faptul că toți parametrii cinematici pentru elementul 4 sunt constanți. Deoarece toate cuplele cinematice sunt de rotație, matricele de transformare omogene la trecerea de la un element la altul au aceeași formă:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$${}^0_{1'}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1'} & -\sin \theta_{1'} & 0 & l_{1'} \cdot \cos \theta_{1'} \\ \sin \theta_{1'} & \cos \theta_{1'} & 0 & l_{1'} \cdot \sin \theta_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Ultima transformare omogenă o constituie o translație de forma:

Bazele Roboticii

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Matricea de transformare omogenă pentru prima ramură a structurii ramificate este

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

În matricea (4.27), primele trei elemente ale primelor trei coloane reprezintă matricea de orientare (rotație) a originii O_3 în raport cu originea O_0 a sistemului de referință.

$${}^0_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Primele trei elemente din ultima coloană a aceleiași matrice reprezintă coordonatele originii O_3 , scrise în raport cu originea O_0 a sistemului de referință.

$$\begin{cases} {}^0_3x = l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ {}^0_3y = l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ {}^0_3z = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Deoarece gradul de mobilitate al mecanismului paralelogram $BCDE$ este egal cu 1 (mecanismul are o singură cuplă cinematică conducătoare, adică poate fi acționat cu un singur motor), este necesar să se scrie relațiile de dependență între parametrii cinematici ai cuplelor mecanismului respectiv ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$). Acest lucru se face rezolvând ecuația

$${}^3_0\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} {}^0_3x - {}^0_1x \\ {}^0_3y - {}^0_1y \\ {}^0_3z - {}^0_1z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^3_1d \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

adică

4. Cinematica directă a pozițiilor

$$\begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} - l_{1'} \cdot c_{1'} \\ l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} - l_{1'} \cdot c_{1'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^3_1 d \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Deoarece $l_1 = l_3$, $l_2 = l_{1'}$, ${}_1^3 d = 0$ și

$${}_0^3 R = {}_3^0 R^{-1} = \begin{bmatrix} s_{123} & -c_{123} & 0 \\ c_{123} & s_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

aceasta înseamnă:

$$\begin{cases} l_1 \cdot (c_1 + c_{123}) + l_{1'} \cdot (c_{12} - c_{1'}) = 0 \\ l_1 \cdot (s_1 + s_{123}) + l_{1'} \cdot (s_{12} - s_{1'}) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Aceste relații sunt adevărate numai dacă

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_{1'} - \theta_1 \\ \theta_3 = \pi - \theta_2 = \pi - \theta_{1'} + \theta_1 \end{cases} \quad (4.34)$$

Înlocuind condițiile (4.34) în matricea (4.27), matricea omogenă totală a manipulatorului va fi:

$${}_4^0 T = {}_3^0 T \cdot {}_4^3 T = \begin{bmatrix} -c_1 & s_1 & 0 & l_{1'} \cdot c_{1'} - l_4 \cdot c_1 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & l_{1'} \cdot s_{1'} - l_4 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

unde: $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $i = 1, 1'$.

Relațiile (4.35) demonstrează faptul că brațul tip paralelogram este echivalent din punct de vedere cinematic cu un manipulator plan cu două grade de mobilitate. Diferența este că cele două cuple cinematice conducătoare sunt amplasate la baza manipulatorului. Aceasta simplifică mult modelul dinamic al acestei structuri.

4.3.4.3 Braț în coordonate sferice

Considerăm manipulatorul în coordonate sferice din Fig. 4.11, având deja atașate sistemele de axe conform convenției D-H standard. Parametrii D-H standard sunt specificați în Tabelul 4.4.

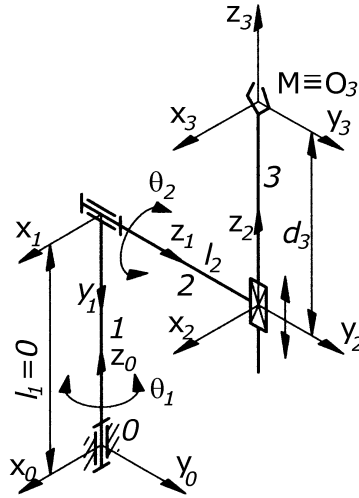


Fig. 4.11 Manipulator în coordonate sferice, parametri D-H standard

Tabelul 4.4 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi / 2$	$l_1 = 0$	θ_1
2	0	$\pi / 2$	l_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

Conform relației (4.6), matricele de transformare omogene corespunzătoare fiecărui element sunt:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

4. Cinematica directă a pozițiilor

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Calculând matricea omogenă totală, obținem:

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_2 & -s_1 & c_1 \cdot s_2 & d_3 \cdot c_1 \cdot s_2 - l_2 \cdot s_1 \\ s_1 \cdot c_2 & c_1 & s_1 \cdot s_2 & d_3 \cdot s_1 \cdot s_2 + l_2 \cdot c_1 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_3 \cdot c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

unde: $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $i = 1, 2$.

4.3.4.4 Braț antropomorf

Considerăm manipulatorul antropomorf din Fig. 4.12, ale cărui parametri D-H standard sunt prezentați în Tabelul 4.5.

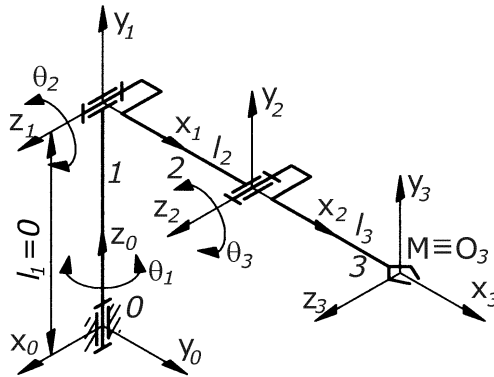


Fig. 4.12 Manipulator antropomorf, parametri D-H standard

Tabelul 4.5 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	$l_1 = 0$	$\pi/2 + \theta_1$
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Bazele Roboticii

Ținând seama de relația (4.6), scriem matricele de transformare omogene la trecerea de la un sistem de axe la altul.

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Matricea omogenă totală, ce dă informații cu privire la poziția și orientarea efectorului final în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ va fi:

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot c_{23} & s_1 \cdot s_{23} & c_1 & -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ c_1 \cdot c_{23} & -c_1 \cdot s_{23} & s_1 & (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

unde: $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$, $i = 1, 2$; $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$,
 $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$.

4.3.4.5 Mecanism de orientare sferic

Considerăm o structură particulară de mecanism de orientare (Fig. 4.13). Considerând că mecanismul de orientare este legat la ultimul element al mecanismului de poziționare, notarea elementelor acestuia va începe cu elementul 4, având în vedere că mecanismul din urmă are de regulă trei grade de mobilitate. Mecanismul de orientare este numit sferic deoarece toate axele celor trei cuple de rotație se intersectează în același punct. Deoarece axele z_3 , z_4 și z_5 au fost deja stabilite, iar x_3 se cunoaște, există ceva probleme în

4. Cinematica directă a pozițiilor

stabilirea axelor x_4 și x_5 , respectând convenția D-H standard. Parametrii parametri D-H standard sunt prezentați în Tabelul 4.6.

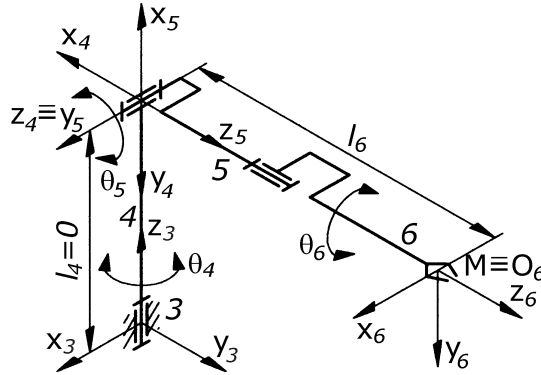


Fig. 4.13 Mecanism de orientare sferic, parametri D-H standard

Tabelul 4.6 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	$-\pi/2$	$l_4 = 0$	$-\pi/2 + \theta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$-\pi/2 + \theta_5$
6	0	0	l_6	$\pi/2 + \theta_6$

Matricele de transformare omogene corespunzătoare trecerii de la un sistem de axe la altul sunt:

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ -\cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ -\cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Bazele Roboticii

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Matricea omogenă totală va fi:

$$\begin{aligned} {}^3_6\mathbf{T} &= {}^3_4\mathbf{T} \cdot {}^4_5\mathbf{T} \cdot {}^5_6\mathbf{T} = \\ &= \begin{bmatrix} -s_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + c_4 \cdot c_6 & -s_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - c_4 \cdot s_6 & -s_4 \cdot c_5 & -l_6 \cdot s_4 \cdot c_5 \\ c_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_6 & c_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - s_4 \cdot s_6 & c_4 \cdot c_5 & l_6 \cdot c_4 \cdot c_5 \\ -c_5 \cdot s_6 & -c_5 \cdot c_6 & s_5 & l_6 \cdot s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47)$$

unde: $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$, $i = 4, 5, 6$.

Considerăm același mecanism de orientare, căruia îi atașăm sistemele de axe conform celei de a doua convenții (Fig. 4.14). Parametrii D-H modificați sunt specificați în Tabelul 4.7.

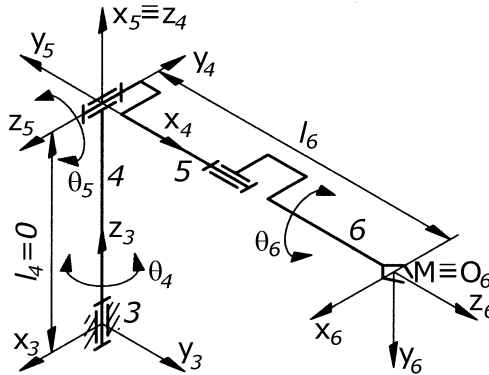


Fig. 4.14 Mecanism de orientare sferic, parametri D-H modificați

Tabelul 4.7 Parametrii D-H modificați

Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
4	0	0	$l_4 = 0$	$\pi/2 + \theta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\pi/2 + \theta_5$
6	0	$\pi/2$	l_6	$\pi/2 + \theta_6$

4. Cinematica directă a pozițiilor

Matricele de transformare omogene corespunzătoare convenției D-H modificată, matrice scrise folosind relația (4.10), sunt:

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_6 \\ \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Matricea omogenă totală va fi:

$$\begin{aligned} {}^3_6\mathbf{T} &= {}^3_4\mathbf{T} \cdot {}^4_5\mathbf{T} \cdot {}^5_6\mathbf{T} = \\ &= \begin{bmatrix} -s_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + c_4 \cdot c_6 & -s_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - c_4 \cdot s_6 & -s_4 \cdot c_5 & -l_6 \cdot s_4 \cdot c_5 \\ c_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_6 & c_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - s_4 \cdot s_6 & c_4 \cdot c_5 & l_6 \cdot c_4 \cdot c_5 \\ -c_5 \cdot s_6 & -c_5 \cdot c_6 & s_5 & l_6 \cdot s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

unde: $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$, $i = 4, 5, 6$.

Se poate observa ca matricele obținute prin cele două convenții, relațiile (4.47) și (4.51), sunt identice.

4.3.4.6 Braț în coordonate sferice cu mecanism de orientare sferic

Pentru un ultim exemplu, vom considera un manipulator format dintr-un mecanism de poziționare în coordonate sferice și un mecanism de orientare sferic (Fig. 4.15). Acest manipulator se întâlnește în literatura de specialitate sub denumirea de *manipulator Stanford*. Vom atașa mai întâi sistemele de axe conform primei convenții iar parametrii D-H standard sunt specificați în Tabelul 4.8.

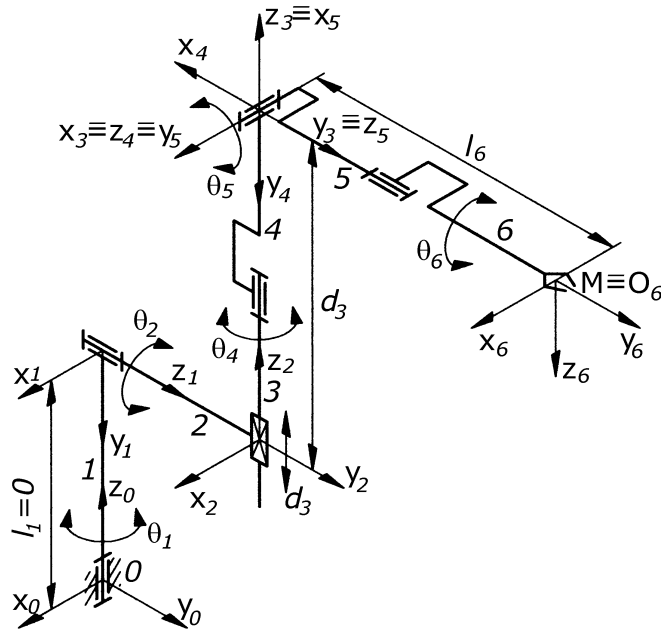


Fig. 4.15 Manipulator Stanford, parametri D-H standard

Tabelul 4.8 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi / 2$	$l_1 = 0$	θ_1
2	0	$\pi / 2$	l_2	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	$-\pi / 2$	$l_4 = 0$	$-\pi / 2 + \theta_4$
5	0	$\pi / 2$	0	$-\pi / 2 + \theta_5$
6	0	0	l_6	$\pi / 2 + \theta_6$

Matricele de transformare omogene scrise conform relației (4.6), la trecerea de la un sistem de axe la următorul, sunt:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

4. Cinematica directă a pozițiilor

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ -\cos \theta_4 & 0 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 & 0 \\ -\cos \theta_5 & 0 & -\sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 & 0 \\ \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Matricea omogenă totală va fi:

$${}^0_6\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} \cdot {}^3_4\mathbf{T} \cdot {}^4_5\mathbf{T} \cdot {}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0_6\mathbf{n} & {}^0_6\mathbf{s} & {}^6_0\mathbf{a} & {}^0_6\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

unde

$${}^0_6\mathbf{p} = \begin{bmatrix} {}^0_6p_x \\ {}^0_6p_y \\ {}^0_6p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2s_1 + d_3c_1s_2 + l_6 [c_1(-c_2s_4c_5 + s_2c_5) - s_1c_4c_5] \\ l_2s_1 + d_3s_1s_2 + l_6 [s_1(-c_2s_4c_5 + s_2s_5) + c_1c_4c_5] \\ d_3c_2 + l_6 (s_2s_4c_5 + c_2s_5) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

reprezintă coordonatele efectorului final în raport cu originea sistemului de referință $\{0\}$, iar

Bazele Roboticii

$${}^0_6\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix} = \begin{bmatrix} C_1 [C_2 (-s_4 s_5 s_6 + c_4 c_6) - s_2 c_5 s_6] - s_1 (c_4 s_5 s_6 + s_4 c_6) \\ s_1 [C_2 (-s_4 s_5 s_6 + c_4 c_6) - s_2 c_5 s_6] + c_1 (c_4 s_5 s_6 + s_4 c_6) \\ -s_2 (-s_4 s_5 s_6 + c_4 c_6) - c_2 c_5 s_6 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$${}^0_6\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{matrix} = \begin{bmatrix} C_1 [C_2 (-s_4 s_5 c_6 - c_4 c_6) - s_2 c_5 c_6] - s_1 (c_4 s_5 c_6 - s_4 s_6) \\ s_1 [C_2 (-s_4 s_5 c_6 - c_4 c_6) - s_2 c_5 c_6] + c_1 (c_4 s_5 c_6 - s_4 s_6) \\ -s_2 (-s_4 s_5 c_6 - c_4 s_6) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$${}^0_6\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix} = \begin{bmatrix} C_1 (-c_2 s_4 c_5 + s_2 s_5) - s_1 c_4 c_5 \\ s_1 (-c_2 s_4 c_5 + s_2 s_5) + c_1 c_4 c_5 \\ s_2 s_4 c_5 + c_2 s_5 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

reprezintă orientarea acestui efector în raport cu axele sistemului de referință menționat. S-au făcut notațiile: $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $i = 1, \dots, 6$.

Considerând același manipulator, căruia îi atașăm sistemele de axe conform celei de a doua convenții (Fig. 4.16), vom obține

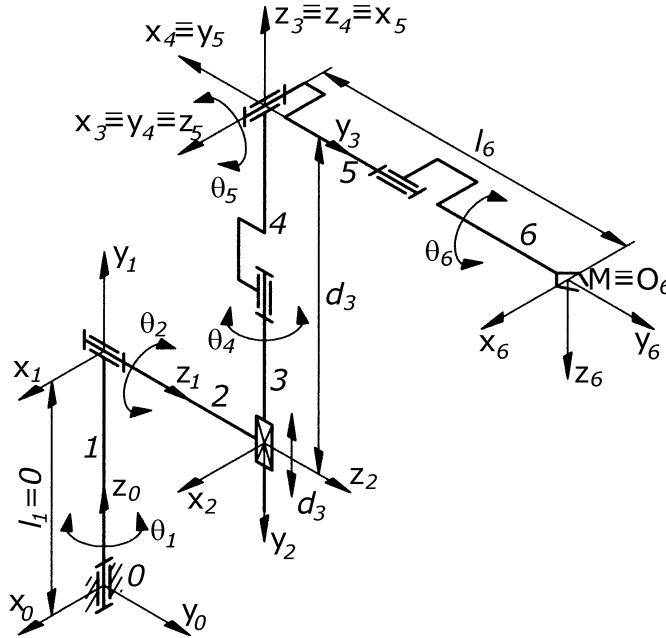


Fig. 4.16 Manipulator Stanford, parametri D-H modificați

4. Cinematica directă a pozițiilor

parametrii D-H modificați din Tabelul 4.9.

Tabelul 4.9 Parametrii D-H modificați

Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	$l_1 = 0$	θ_1
2	0	$-\pi/2$	l_2	θ_2
3	0	$\pi/2$	d_3	0
4	0	0	$l_4 = 0$	$-\pi/2 + \theta_4$
5	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2 + \theta_5$
6	0	$\pi/2$	l_6	$\pi/2 + \theta_6$

Apoi, folosind relația (4.10), vom obține matricele de transformare omogene corespunzătoare fiecărui element.

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ -\sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_6 \\ \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

După efectuarea calculelor, matricea omogenă totală va fi aceeași cu cea descrisă de relațiile (4.58...4.62), ceea ce demonstrează încă o dată că cele două convenții sunt echivalente.

4.3.5 Sisteme de axe cu denumiri standard

Considerăm utilă stabilirea unor denumiri standard pentru anumite sisteme de coordonate, în concordanță cu localizarea lor în structura robotului și în spațiul de lucru al acestuia. Figura 4.17 prezintă o situație tipică în care robotul fixează o anumită sculă în mecanismul de prehensiune și trebuie să poziționeze extremitatea finală a acestei scule într-o locație definită de operator. Cele cinci sisteme de axe reprezentate în figură sunt adesea sisteme de referință, de aceea vor căpăta o denumire standard. Acest lucru va fi util în programarea și controlul mișcării robotului, toate mișcările acestuia fiind descrise în raport cu aceste sisteme de axe.

Definirea sistemelor de axe reprezentate în Fig. 4.16 este următoarea:

- Sistemul *bază* (*base frame*), $\{b\}$ este localizat la baza manipulatorului. Aceasta este doar o altă denumire a sistemului de referință $\{0\}$, atașat elementului fix al robotului (de regulă, elementul 0).
- Sistemul *post de lucru* (*station frame*), $\{s\}$ este localizat într-o poziție cunoscută a postului de lucru (spre exemplu, un colț al mesei de lucru). Deoarece sistemul de axe $\{s\}$ se află în spațiul de lucru al robotului, toate mișcările robotului vor fi raportate la acest sistem. Uneori, acesta se mai numește sistem de coordonate *universal* sau sistem *mișcare*. Poziția și orientarea acestuia sunt raportate în general la sistemul bază, prin matricea de transformare omogenă ${}^b_s\mathbf{T}$.
- Sistemul *orientare* (*wrist frame*), $\{w\}$ este atașat ultimului element al manipulatorului. Acesta mai este notat cu $\{n\}$, n fiind cifra corespunzătoare elementului respectiv. Foarte adesea, sistemul de axe $\{w\}$ este atașat unui punct al manipulatorului numit *wrist* și se deplasează odată odată

4. Cinematica directă a pozițiilor

cu ultimul element al manipulatorului. Localizarea lui este definită în raport cu sistemul bază (referință, fix), matricea de transformare omogenă corespunzătoare fiind ${}^b_w\mathbf{T} = {}^0_n\mathbf{T}$.

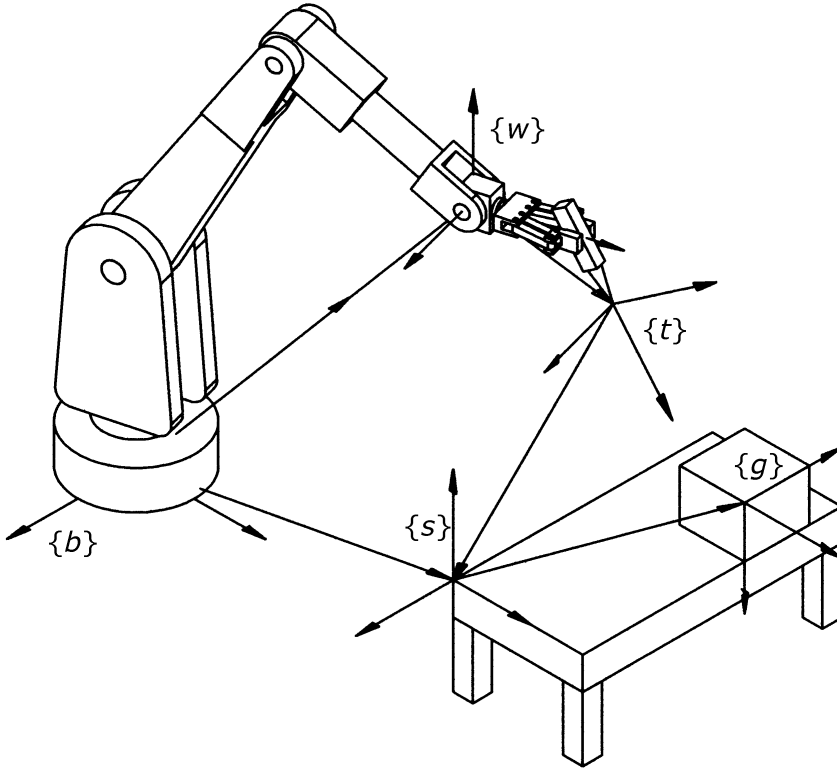


Fig. 4.17 Sisteme de axe standard

- Sistemul *sculă* (*tool frame*), $\{t\}$ este atașat extremității finale a sculei. Când mecanismului de prehensiune nu are fixat nimic între degete, $\{t\}$ are de obicei originea localizată între acestea și se mai numește sistem *efector final*, fiind notat cu $\{e\}$, așa cum s-a văzut anterior în acest capitol. Sistemul de axe $\{t\}$ este specificat în raport cu sistemul $\{w\}$ prin intermediul matricii omogene de transformare ${}^w_t\mathbf{T} = {}^w_e\mathbf{T} = {}^n_e\mathbf{T}$.
- Sistemul *obiectiv* (*goal frame*), $\{g\}$ descrie locația în care robotul trebuie să deplaseze scula. Aceasta înseamnă că atunci când robotul termină de efectuat mișcările

Bazele Roboticii

comandate, sistemele de axe $\{t\}$ și $\{g\}$ trebuie să coincidă. Acest sistem este întotdeauna raportat la sistemul de axe $\{s\}$, prin matricea sT_g .

Toate mișcările robotului pot fi descrise în raport cu aceste sisteme de coordonate, fără a pierde din generalitate, utilizarea lor putând oferi un limbaj standard de discuție.

Dacă dorim să definim localizarea sistemului de axe $\{t\}$ în raport cu sistemul $\{s\}$, procedăm ca la paragraful 3.6.

$${}^b_sT = {}^b_wT \cdot {}^w_tT \cdot {}^t_sT \quad (4.69)$$

Din relația (4.69) putem obține matricea omogenă de transformare sT_t :

$${}^sT_t = {}^t_sT^{-1} = {}^b_sT^{-1} \cdot {}^b_wT \cdot {}^w_tT \quad (4.70)$$

Deoarece în final sistemele $\{t\}$ și $\{g\}$ trebuie să coincidă, trebuie calculată matricea de transformare omogenă t_gT , plecând de la ecuația de transformare:

$${}^t_gT = {}^t_sT \cdot {}^s_gT, \quad (4.71)$$

adică

$${}^t_gT = {}^w_tT^{-1} \cdot {}^b_wT^{-1} \cdot {}^b_sT \cdot {}^s_gT \quad (4.72)$$

4. Cinematica directă a pozițiilor

5

CINEMATICA INVERSĂ A POZIȚIILOR

5.1 Generalități

În capitolul anterior s-a considerat problema determinării poziției și orientării efectorului final, în raport cu un sistem de referință fix, atunci când se cunosc parametrii cinematici ai cuplelor robotului. În acest capitol, se va rezolva o problemă mult mai dificilă și anume, fiind date poziția și orientarea efectorului final în raport cu sistemul de referință, se vor determina parametrii cinematici ai cuplelor, parametri ce sunt necesari asigurării poziției și orientării impuse. Această abordare este numită cinematica inversă a roboților și constă în rezolvarea unor ecuații matematice. Deoarece aceste ecuații sunt, în general, neliniare și complicate, analiza cinematică inversă poate deveni dificilă. De asemenea, chiar dacă rezolvarea ecuațiilor neliniare este posibilă, acestea nu au soluții unice.

5.2 Posibilități de rezolvare

Problema cinematicii inverse este mult mai complexă, din următoarele motive:

- Ecuațiile ce trebuie rezolvate sunt, în general, neliniare, motiv pentru care nu este posibil întotdeauna să se găsească soluții distincte.
- Pot exista mai multe soluții.
- Poate exista un număr infinit de soluții, cum ar fi cazul roboților redundanți.
- Se pot obține soluții inadmisibile din punct de vedere al geometriei robotului.

În ceea ce privește existența soluțiilor, acest lucru se poate garanta dacă poziția și orientarea efectorului final sunt din spațiul de

5. Cinematica inversă a pozițiilor

lucru admisibil al robotului.

Pe de altă parte, problema soluțiilor multiple nu depinde numai de numărul gradelor de mobilitate ale robotului, ci și de numărul de parametri Denavit-Hartenberg nenuli. În general, cu cât numărul parametrilor D-H nenuli este mai mare, cu atât numărul soluțiilor admisibile crește. Pentru un manipulator cu șase grade de mobilitate, fără limite mecanice pentru cuplele cinematice, există până la 16 soluții admisibile. Acest lucru necesită o serie de criterii de alegere a soluțiilor practice. Existența limitelor mecanice pentru cuple poate reduce numărul de soluții admisibile multiple.

Determinarea soluțiilor distincte necesită fie o intuiție algebrică, în vederea găsirii ecuațiilor semnificative ce conțin necunoscutele, fie o intuiție geometrică, pentru a găsi punctele semnificative ale structurii, în raport cu care este convenabil a se exprima poziția și/sau orientarea, ca o funcție de un număr redus de necunoscute. Atunci când nu există – sau este dificil să se găsească – soluții distincte, se poate apela la metode de rezolvare numerică. Aceste metode au avantajul că pot fi aplicate la orice structură cinematică, dar în general nu permit determinarea tuturor soluțiilor admisibile.

Deși un robot cu șase grade de mobilitate cu o structură complet generală nu are soluții analitice, unele cazuri speciale pot fi rezolvate, cum ar fi manipulatoarele cu șase grade de mobilitate având axele a trei cuple cinematice succesive concurente într-un punct (metodă propusă de Pieper [12]). În această categorie sunt incluși și roboții cu axele a trei cuple cinematice succesive paralele, deoarece axele acestora sunt concurente într-un punct la infinit.

5.2.1 Existența soluțiilor

Existența unei soluții depinde de spațiul de lucru al manipulatorului, care reprezintă volumul ce conține punctele din spațiu ce pot fi atinse de efectorul final (pentru un efector final prestabilit, destinat unei anumite operații). Pentru ca o soluție să existe, punctul indicat ca obiectiv trebuie să fie conținut în spațiul de lucru. Uneori este util să se ia în considerare tipurile de spațiu de lucru. Spre exemplu, *spațiul de dexteritate* (*dexterous workspace*) este volumul ce conține punctele ce pot fi atinse de efectorul final utilizând toate orientările posibile ale acestuia. Aceasta înseamnă că în spațiul de lucru util, efectorul final poate fi orientat arbitrar. *Spațiul de lucru total* este volumul ce conține toate punctele ce pot fi atinse

Bazele Roboticii

de efectorul final, în cel puțin o orientare a acestuia. Este evident că spațiul de dexteritate este un subspațiu al spațiului de lucru total.

Considerând un manipulator plan cu două grade de mobilitate (Fig. 5.1), atunci când $l_1 = l_2$ spațiul de lucru total constă într-un disc având raza $2 \cdot l_1$. Spațiul de dexteritate este constituit dintr-un singur punct, originea sistemului de referință $\{0\}$. Dacă $l_1 \neq l_2$, atunci nu există spațiu de lucru dexter iar spațiul de lucru total devine un inel cu raza exterioară $l_1 + l_2$ și raza interioară $|l_1 - l_2|$. În interiorul spațiului de lucru total există două orientări posibile ale efectorului final. Pe cercurile ce mărginesc spațiul de lucru, efectorul final poate avea o singură orientare.

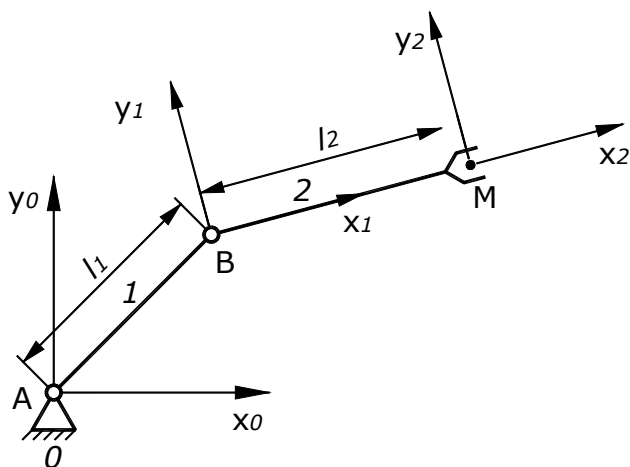


Fig. 5.1 Manipulator plan cu două grade de mobilitate

Aceste considerații privind spațiul de lucru al unui manipulator plan cu două grade de mobilitate au fost stabilite presupunând că ambele cuple cinematice permit rotații ale elementelor cu 360° . Acest lucru este rar adevărat pentru un mecanism real. Când unghiurile de rotație sunt limitate la valori sub 360° , spațiul de lucru este redus corespunzător, ori în suprafață, ori în numărul de orientări posibile. Spre exemplu, dacă manipulatorul din Fig. 5.1 permite rotații ale elementelor cu $\theta_1 = 360^\circ$ și $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$, atunci spațiul de lucru total are aceeași suprafață, dar numai o singură orientare a efectorului final este accesibilă în fiecare punct.

Atunci când un manipulator are mai puțin de șase grade de mobilitate, acesta nu poate atinge poziții și orientări universale în spațiul 3D. Este sigur că manipulatorul exemplificat nu poate atinge

5. Cinematica inversă a pozițiilor

decât puncte din planul acestuia. În multe situații reale, roboții cu patru sau cinci grade de mobilitate pot opera în afara planului dar nu pot atinge obiective universale. Fiecare dintre aceste manipolatoare trebuie studiate pentru a înțelege spațiul lor de lucru.

După cum s-a mai menționat în capitolul 2, spațiul de lucru depinde și de forma și dimensiunile obiectului manipulat sau sculei.

5.2.2 Soluții multiple

O altă problemă întâlnită în rezolvarea ecuațiilor cinematice este existența soluțiilor multiple. Un robot plan cu trei grade de mobilitate are un spațiu de dexteritate mare în plan, deoarece orice punct din interiorul spațiului de lucru poate fi atins cu orice orientare. Figura 5.2 prezintă un manipulator cu trei grade de mobilitate având efectorul final într-o anumită poziție și orientare. Liniile întrerupte indică o a doua configurație posibilă a robotului, în care efectorul final ocupă aceeași poziție și orientare.

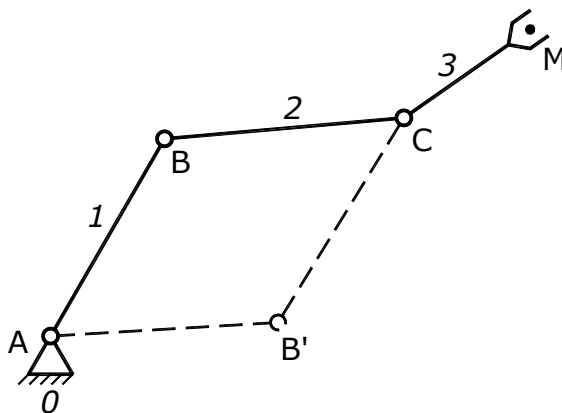


Fig. 5.2 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate, configurații posibile

Faptul că manipulatorul are mai multe configurații înseamnă că există mai multe soluții, iar acest lucru poate crea probleme, deoarece robotul trebuie să aleagă una dintre ele. Criteriul de alegere a soluției poate varia, dar o alegere foarte rezonabilă poate fi cea a soluției cea mai apropiată. Spre exemplu, dacă efectorul final este în poziția și orientarea M (vezi Fig. 5.3) și dorim deplasarea acestuia în poziția și orientarea M' , o bună alegere poate fi soluția ce

Bazele Roboticii

minimizează valoarea unghiului cu care trebuie să se rotească fiecare cuplă cinematică. Aceasta înseamnă că, în absența unui obstacol, ar trebui aleasă configurația superioară, reprezentată cu linie întreruptă. Prezența unui obstacol poate forța alegerea unei soluții mai „îndepărtate”. Spre exemplu, prezența unui obstacol în cazul manipulatorului din Fig. 5.3 implică alegerea configurației inferioare, pentru atingerea punctului M' .

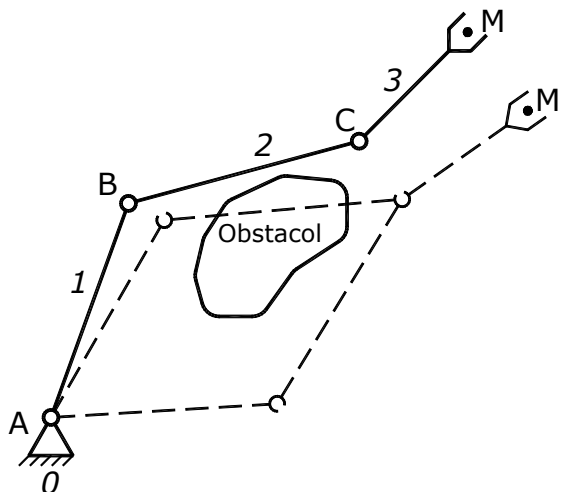


Fig. 5.3 Alegerea configurației pentru atingerea unui punct

După cum s-a mai specificat, numărul de soluții depinde atât de numărul cuplelor cinematice ale robotului, cât și de parametrii D-H ai acestuia. În general, cu cât numărul parametrilor D-H nenuli este mai mare, cu atât numărul soluțiilor este mai mare.

5.2.3 Metode de rezolvare

Spre deosebire de ecuațiile liniare, în cazul celor neliniare nu există algoritmi generali de rezolvare.

Un manipulator va fi considerat rezolvabil dacă variabilele cuplelor cinematice pot fi determinate utilizând un algoritm ce permite determinarea tuturor seturilor de variabile, pentru o poziție și orientare date. În cazul unor soluții multiple, aceasta înseamnă determinarea tuturor soluțiilor. Din acest motiv, nu vor fi considerate unele proceduri numerice iterative ca metode de rezolvare a unui

5. Cinematica inversă a pozițiilor

manipulator, deoarece aceste metode nu garantează obținerea tuturor soluțiilor.

Vom împărți metodele de rezolvare a unui manipulator în două mari categorii: metode *analitice* și metode *numerice*. Datorită naturii lor iterative, metodele numerice sunt în general mai lente decât metodele analitice corespondente, de aceea, în cele mai multe cazuri, nu suntem interesați în utilizarea metodelor numerice pentru rezolvarea cinematicii inverse.

În capitolul de față ne vom referi la metodele analitice de rezolvare, ce pot fi la rândul lor clasificate în: metode *algebrice* și metode *geometrice*.

În concordanță cu definiția dată rezolvării, toate manipulatorele seriale având cuple cinematice de rotație și translație, și un număr total de șase grade de mobilitate, pot fi rezolvate. Totuși, această rezolvare generală este una numerică. Numai în cazuri speciale pot fi rezolvați analitic roboții cu șase grade de mobilitate. Aceste cazuri sunt cele în care robotul are mai multe axe ale cuplelor ce se intersectează sau mai mulți parametri $\alpha_i = 0^\circ$ sau $\pm 90^\circ$. Metodele numerice necesită în general un timp mare de rezolvare, comparativ cu metodele analitice. De aceea, este considerat ca fiind foarte important să se proiecteze robotul în așa fel încât să existe soluții analitice. Proiectanții au descoperit acest lucru în ultima perioadă și teoretic toți roboții industriali sunt proiectați suficient de simpli astfel încât să poată fi rezolvați analitic.

O condiție suficientă ca un manipulator cu șase grade de mobilitate să aibă soluții analitice este ca trei cuple cinematice vecine să aibă axele concurente într-un punct. Aproape fiecare manipulator cu șase grade de mobilitate construit astăzi are trei cuple vecine ale căror axe se intersectează.

5.3 Algebric versus geometric

Ca o introducere în rezolvarea ecuațiilor cinematice, vom considera două metode diferite de rezolvare a unui manipulator plan cu trei grade de mobilitate.

5.3.1 Considerații matematice preliminare

După cum se știe, funcțiile trigonometrice inverse au două valori în intervalul $[0, 2\pi]$. Spre exemplu, considerând funcția

Bazele Roboticii

$$y = \sin x$$

inversa acestei funcții are două valori în intervalul menționat, respectiv:

$$\arcsin y = x \text{ și } \arcsin y = \pi - x.$$

Similar, funcțiile inverse pentru \cos și tg au două valori în intervalul $[0, 2\pi]$.

Dacă $y = \cos x$ sau $y = \operatorname{tg} x$, atunci:

$$\arccos y = x \text{ și } \arccos y = -x$$

respectiv

$$\operatorname{arctg} y = x \text{ și } \operatorname{arctg} y = \pi + x.$$

Acest lucru crează probleme în ceea ce privește controlul mișcării robotului, prin faptul că există mai multe căi de a atinge poziția impusă efectorului final. Pentru evitarea acestor probleme, a fost definită funcția $\operatorname{Atan2}$, care necesită două argumente și returnează un singur răspuns în intervalul $[0, 2\pi]$.

Astfel, dacă vom considera cunoscute funcțiile $s = \sin x$ și $c = \cos x$, funcția $\operatorname{Atan2}$ folosește ca argumente valorile s , c și returnează un singur rezultat, x .

$$\operatorname{Atan2}(s, c) = x$$

Această funcție este implementată ca o funcție standard în limbaje de programare ca: C, Matlab, Pascal, Fortran, etc.

De asemenea, utilizând funcția inversă arctg , $\operatorname{Atan2}$ poate fi definită astfel:

$$\operatorname{Atan2}(s, c) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{c}\right), & \text{pentru } c > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{c}\right) + \pi \cdot \operatorname{sign}(s), & \text{pentru } c < 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(s), & \text{pentru } c = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

5.3.2 Metodă algebrică de rezolvare

Considerăm manipulatorul plan cu trei grade de mobilitate din Fig. 5.4, pentru care parametrii D-H modificați sunt specificați în

5. Cinematica inversă a pozițiilor

Tabelul 5.1. Aplicând metologia prezentată la paragraful 4.3.2.2, obținem matricea omogenă totală a manipulatorului de forma:

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^b_w\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

unde: $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$,
 $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

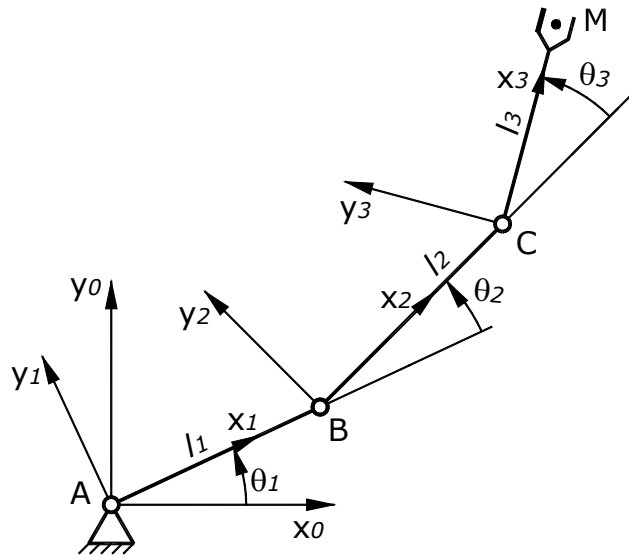


Fig. 5.4 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate, parametri D-H modificați

Tabelul 5.1 Parametrii D-H modificați

Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	l_1	0	0	θ_2
3	l_2	0	0	θ_3

În cazul de față vom presupune că matricea omogenă de transformare a fost scrisă fiind impus ca și punct obiectiv originea sistemului de referință $\{w\}$, în cazul nostru $\{3\}$, și nu un punct de pe

Bazele Roboticii

efectorul final. În acel ultim caz, ar fi trebuit să mai scriem matricea de transformare suplimentară ${}^w_e\mathbf{T} = {}^3_3\mathbf{T}$, ca în exemplul prezentat în paragraful 4.3.4.1. Deoarece manipulatorul este plan, localizarea punctului menționat poate fi cel mai ușor obținută specificând trei numere, x_C , y_C și ϕ , unde: x_C și y_C sunt coordonatele originii sistemului de axe $\{3\}$, ϕ este orientarea elementului 3 în raport cu axa x_0 a sistemului de referință, în planul manipulatorului. În condițiile menționate, matricea (5.2) va deveni:

$${}^0_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} \\ s_\phi & c_\phi & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Din relațiile (5.2) și (5.3) obținem un set de patru ecuații neliniare ce trebuie rezolvate pentru a obține θ_1 , θ_2 și θ_3 :

$$\cos \phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (5.4)$$

$$\sin \phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (5.5)$$

$$x_C = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.6)$$

$$y_C = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.7)$$

În continuare, vor fi rezolvate ecuațiile algebrice (5.4...5.7). Dacă ridicăm la patrat relațiile (5.6) și (5.7) și le adunăm obținem în final:

$$x_C^2 + y_C^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (5.8)$$

Pentru efectuarea calculelor am utilizat relațiile între funcții trigonometrice

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \quad (5.9)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (5.10)$$

Din ecuația (5.8) putem scrie

$$\cos \theta_2 = \frac{x_C^2 + y_C^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2} \quad (5.11)$$

5. Cinematica inversă a pozițiilor

Pentru ca problema noastră să aibă soluție pentru θ_2 , este necesar ca membrul drept al relației (5.11) să fie cuprins între -1 și 1. Dacă această condiție nu este satisfăcută, va fi prea dificil pentru manipulator să atingă punctul obiectiv.

Presupunând că punctul respectiv este în spațiul de lucru al manipulatorului, vom scrie expresia pentru $\sin \theta_2$, sub forma

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (5.12)$$

În final, vom calcula θ_2 utilizând cele două argumente

$$\theta_2 = \text{Atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \quad (5.13)$$

Faptul că în relația (5.12) trebuie să alegem unul dintre cele două semne, înseamnă că problema are două soluții, fiind nevoiți să alegem una dintre ele (vezi paragraful 5.2.2).

Având unghiul θ_2 , putem determina θ_1 din ecuațiile (5.6) și (5.7). Vom rescrie aceste ecuații, ținând seama de (5.9) și (5.10), sub forma

$$x_C = (l_1 + l_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \cos \theta_1 - l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_1 \quad (5.14)$$

$$y_C = (l_1 + l_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (5.15)$$

Făcând notațiile

$$t = l_1 + l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (5.16)$$

$$u = l_2 \cdot \sin \theta_2 \quad (5.17)$$

vom obține

$$x_C = t \cdot \cos \theta_1 - u \cdot \sin \theta_1 \quad (5.18)$$

$$y_C = t \cdot \sin \theta_1 + u \cdot \cos \theta_1 \quad (5.19)$$

Pentru a rezolva o ecuație de această formă, vom face o schimbare de variabile. Dacă notăm

$$v = \sqrt{t^2 + u^2} \quad (5.20)$$

și

$$\beta = \text{Atan2}(u, t) \quad (5.21)$$

atunci

Bazele Roboticii

$$t = v \cdot \cos \beta \quad (5.22)$$

$$u = v \cdot \sin \beta \quad (5.23)$$

Ecuatiile (5.18) și (5.19) pot fi acum scrise sub forma

$$\frac{x_C}{v} = \cos \beta \cdot \cos \theta_1 - \sin \beta \cdot \sin \theta_1 \quad (5.24)$$

$$\frac{y_C}{v} = \cos \beta \cdot \sin \theta_1 + \sin \beta \cdot \cos \theta_1 \quad (5.25)$$

ceea ce înseamnă

$$\cos(\beta + \theta_1) = \frac{x_C}{v} \quad (5.26)$$

$$\sin(\beta + \theta_1) = \frac{y_C}{v} \quad (5.27)$$

Având relațiile (5.26) și (5.27) ca argumente, obținem

$$\beta + \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{y_C}{v}, \frac{x_C}{v}\right) = \text{Atan2}(y_C, x_C) \quad (5.28)$$

respectiv

$$\theta_1 = \text{Atan2}(y_C, x_C) - \beta = \text{Atan2}(y_C, x_C) - \text{Atan2}(u, t) \quad (5.29)$$

Trebuie notat faptul că, alegerea semnului în soluția pentru θ_2 va cauza o modificare a semnului lui u , fapt ce va afecta parametrul θ_1 . De asemenea, dacă $x_C = y_C = 0$, atunci (5.29) este nedefinită, în acest caz θ_1 fiind ales arbitrar.

În final, din (5.4) și (5.5), putem obține suma $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{Atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi \quad (5.30)$$

Din (5.30) putem obține unghiul θ_3 , deoarece celelalte două unghiuri sunt deja calculate.

5.3.3 Metodă geometrică de rezolvare

În cadrul metodei geometrice de rezolvare a cinematicii inverse a unui manipulator, încercăm să descompunem geometria spațială a brațului în mai multe probleme geometrice plane. Pentru

5. Cinematica inversă a pozițiilor

mulți roboți (în particular când $\alpha_i = 0^\circ$ sau $\pm 90^\circ$) acest lucru poate fi rezolvat relativ simplu. Mai apoi, parametrii cinematici ai cuplelor pot fi determinați utilizând relațiile din geometria plană. Pentru manipulatorul cu trei grade de mobilitate din Fig. 5.4 putem aplica geometria plană direct, deoarece acesta este plan.

Figura 5.5 prezintă triunghiurile formate de l_1 , l_2 și linia ce unește originea sistemului de referință $\{0\}$ cu originea sistemului $\{3\}$. Liniile întrerupte reprezintă o altă configurație posibilă a triunghiului, care conduce la aceeași poziție a sistemului de axe $\{3\}$. Considerând triunghiul trasat cu linii continue, putem aplica teorema cosinusului pentru determinarea unghiului θ_2 .

$$x_C^2 + y_C^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_2 - 180^\circ) \quad (5.31)$$

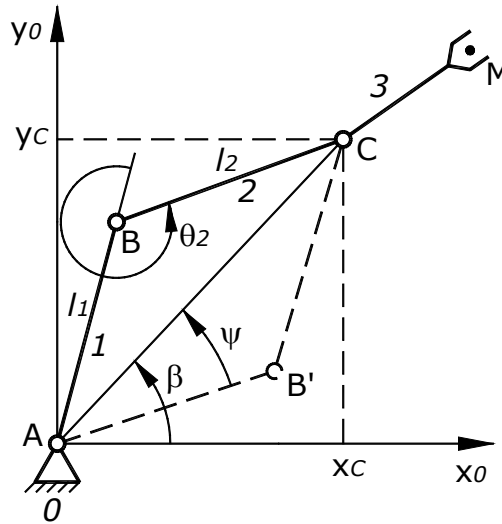


Fig. 5.5 Rezolvarea geometrică a unui manipulator plan cu trei grade de mobilitate

Știm că

$$\cos(\theta_2 - 180^\circ) = -\cos \theta_2 \quad (5.32)$$

ceea ce înseamnă că relația (5.30) devine

$$x_C^2 + y_C^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta_2 \quad (5.33)$$

Bazele Roboticii

de unde obținem

$$\cos \theta_2 = \frac{x_C^2 + y_C^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2} \quad (5.34)$$

Pentru ca triunghiul să existe este necesar ca

$$\sqrt{x_C^2 + y_C^2} < l_1 + l_2 \quad (5.35)$$

Această condiție va permite verificarea existenței soluțiilor și nu este satisfăcută atunci când punctul impus nu este în interiorul spațiului de lucru. Presupunând că există o soluție, ecuația este rezolvată pentru o valoare a lui θ_2 cuprinsă între 0° și 180° , deoarece numai pentru aceste valori există triunghiul din Fig. 5.5. O altă posibilă soluție (cea indicată de liniile întrerupte) este găsită făcând simetria $\theta_2' = -\theta_2$.

Pentru a determina θ_1 , vom scrie expresiile pentru unghiurile β și ψ . Mai întâi determinăm unghiul β în funcție de x_C și y_C .

$$\beta = \text{Atan2}(y_C, x_C) \quad (5.36)$$

Apoi, aplicând iar teorema cosinusului, găsim

$$l_2^2 = l_1^2 + x_C^2 + y_C^2 - 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \cdot \cos \psi \quad (5.37)$$

de unde

$$\cos \psi = \frac{x_C^2 + y_C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2}} \quad (5.38)$$

De asemenea, existența triunghiului impune $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$. Obținem

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \quad (5.39)$$

unde semnul plus este utilizat atunci când $\theta_2 < 0$, iar semnul minus atunci când $\theta_2 > 0$.

Cunoscând unghiurile θ_1 și θ_2 , putem acum determina unghiul θ_3 știind că pentru manipulatorul plan

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \quad (5.40)$$

adică

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (5.41)$$

5.4 Rezolvare algebrică prin reducere la un polinom

Ecuatiile neliniare sunt adesea dificil de rezolvat deoarece, chiar dacă acestea au doar o necunoscută (spre exemplu, θ), în general aceasta apare ca $\sin \theta$ și $\cos \theta$.

Polinoamele până la ordinul patru au soluții analitice, de aceea manipulatorii suficient de simple, astfel încât să poată fi rezolvate utilizând ecuații algebrice de acest ordin sau mai mic, se numesc manipulatori *rezolvabile analitic*.

5.4.1 Exemplul 5.1

În rezolvarea cinematicii inverse întâlnim frecvent ecuații de forma:

$$a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta + c = 0 \quad (5.42)$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații, se definește unghiul β astfel încât:

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ și } \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.43)$$

Unghiul β poate fi determinat utilizând funcția Atan2 :

$$\beta = \text{Atan2} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (5.44)$$

În aceste condiții, ecuația noastră poate fi rescrisă astfel:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta + c = 0 \quad (5.45)$$

respectiv

$$\cos \beta \cdot \cos \theta + \sin \beta \cdot \sin \theta + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad (5.46)$$

sau

Bazele Roboticii

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.47)$$

Vom avea două soluții ale lui θ , în funcție de β cunoscut:

$$\theta = \beta \pm \arccos\left(\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (5.48)$$

5.4.2 Exemplul 5.2

Considerând aceeași ecuație neliniară (5.42), se pot face următoarele substituții:

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (5.49)$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad (5.50)$$

$$\sin \theta = \frac{2 \cdot u}{1 + u^2} \quad (5.51)$$

Aceste substituții transformă ecuația noastră într-un polinom în u

$$a \cdot \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + b \cdot \frac{2 \cdot u}{1 + u^2} + c = 0 \quad (5.52)$$

respectiv

$$a \cdot (1 - u^2) + 2 \cdot b \cdot u + c \cdot (1 + u^2) = 0 \quad (5.53)$$

Reorganizând termenii, obținem

$$(-a + c) \cdot u^2 + 2 \cdot b \cdot u + (a + c) = 0 \quad (5.54)$$

a cărei soluții sunt

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - a} \quad (5.55)$$

Rezultă

5. Cinematica inversă a pozițiilor

$$\theta = 2 \cdot \arctg \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - c^2 + a^2}}{c - a} \right) \quad (5.56)$$

Dacă soluția (5.55) este un număr complex, nu există o soluție reală pentru ecuația (5.42). Trebuie notat faptul că, dacă $c - a = 0$, argumentul funcției \arctg devine infinit și $\theta = 180^\circ$.

5.5 Exemple privind analiza cinematică inversă a pozițiilor

5.5.1 Cinematica inversă a pozițiilor unui manipulator serial plan

Pentru analiza cinematică inversă a manipulatorului plan cu trei grade de mobilitate din Fig. 4.1 considerăm ecuațiile ce definesc coordonatele și orientarea efectorului final.

$$\begin{cases} x_M = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_M = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (5.57)$$

Substituind a treia ecuație în primele două, obținem:

$$\begin{cases} x_M - l_3 \cdot \cos \phi = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_M - l_3 \cdot \sin \phi = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (5.58)$$

Necunoscutele au fost grupate în termenii din dreapta. Se fac notațiile:

$$t = x_M - l_3 \cdot \cos \phi \text{ și } u = y_M - l_3 \cdot \sin \phi. \quad (5.59)$$

Regrupând termenii, ridicându-i la patrat și adunându-i se obține:

$$\begin{aligned} (t - l_1 \cdot \cos \theta_1)^2 + (u - l_1 \cdot \sin \theta_1)^2 &= \\ &= [l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)]^2 + [l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]^2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Efectuând calculele și rearanjând termenii, rezultă:

$$(-2 \cdot l_1 \cdot t) \cdot \cos \theta_1 + (-2 \cdot l_1 \cdot u) \cdot \sin \theta_1 + (t^2 + u^2 + l_1^2 - l_2^2) = 0 \quad (5.61)$$

Bazele Roboticii

Ținând seama de cele menționate în paragraful 5.4.1, privind rezolvarea ecuațiilor de forma (5.42), se obține:

$$\theta_1 = \beta \pm \arccos \left[\frac{-(t^2 + u^2 + l_1^2 - l_2^2)}{2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{t^2 + u^2}} \right] \quad (5.62)$$

unde

$$\beta = \text{atan2} \left(\frac{-u}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \frac{-t}{\sqrt{t^2 + u^2}} \right) \quad (5.63)$$

Cunoscând θ_1 , din ecuațiile (5.58) avem:

$$\begin{cases} \cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{t - l_1 \cdot \cos \theta_1}{l_2} \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{u - l_1 \cdot \sin \theta_1}{l_2} \end{cases} \quad (5.64)$$

Utilizând funcția Atan2 , vom putea obține unghiul θ_2 :

$$\theta_2 = \text{Atan2} \left(\frac{u - l_1 \cdot \sin \theta_1}{l_2}, \frac{t - l_1 \cdot \cos \theta_1}{l_2} \right) - \theta_1 \quad (5.65)$$

Aceasta înseamnă că și pentru θ_2 vom avea tot două soluții (funcție de θ_1).

În final, θ_3 poate rezulta simplu:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (5.66)$$

Faptul că pentru θ_1 și θ_2 au fost obținute câte două soluții, înseamnă că există două configurații posibile ale robotului, care ne conduc la aceleași coordonate și aceeași orientare (Fig. 5.6).

Comandând robotului să deplaseze efectorul final într-o anumită poziție și orientare, acesta va avea probleme, deoarece trebuie să aleagă una din cele două configurații. Din punct de vedere practic, acest lucru se poate rezolva dacă limitele cuplelor cinematice sunt alese astfel încât numai una din cele două configurații poate fi atinsă (limitare mecanică).

5. Cinematica inversă a pozițiilor

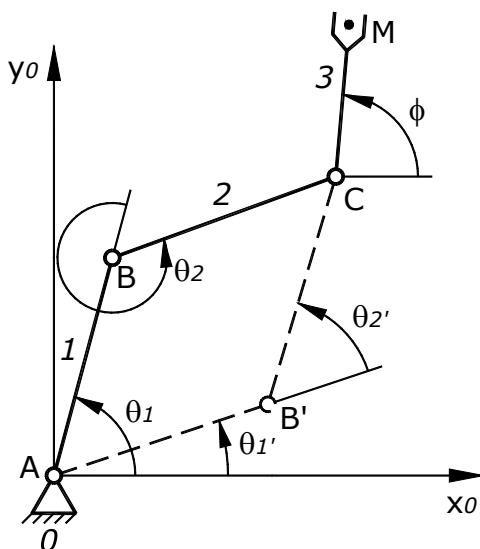


Fig. 5.6 Configurații posibile ale manipulatorului, pentru aceeași poziție și orientare a efectorului final

5.5.2 Cinematica inversă a manipuletoarelor cu mecanism de orientare sferic

Cea mai mare parte a roboților industriali existenți sunt simpli din punct de vedere cinematic, atâta timp cât aceștia sunt de obicei formați dintr-un braț și un mecanism de orientare sferic. Utilizarea mecanismului de orientare sferic este motivată de dificultatea găsirii soluțiilor problemei cinemate inverse în cazul general. În particular, un manipulator cu șase grade de mobilitate are soluții analitice pentru cinematica inversă dacă:

- Axele a trei cuple cinematice succesive sunt concurente într-un punct, cum ar fi mecanismul de orientare sferic;
- Axele a trei cuple cinematice succesive sunt paralele.

În fiecare caz, este necesară o intuiție algebrică sau geometrică pentru a obține soluții analitice.

Trebuie găsit un punct în cadrul structurii manipulatorului, a cărui poziție poate fi scrisă ca o funcție de poziția și orientarea efectorului final și ca o funcție de un număr redus de variabile ale cuplelor cinematice. Acest lucru este echivalent cu împărțirea

problemei cinematicii inverse în două subprobleme, atâta timp cât rezolvarea poziției este decuplată de cea a orientării.

Pentru un manipulator cu mecanism de orientare sferic, alegerea normală este de a localiza un asemenea punct w la intersecția axelor ultimelor cuple cinematice. De fapt, odată ce poziția și orientarea efectorului final sunt specificate prin vectorul de poziție \mathbf{p} și matricea de rotație $\mathbf{R} = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}]$ (vezi paragraful 4.3.1), poziția punctului w poate fi găsită ca fiind

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{p} - d_6 \cdot \mathbf{a} \quad (5.67)$$

În cazul unui braț cu trei grade de mobilitate, cinematica inversă poate fi rezolvată parcurgând următoarele etape:

- Se calculează poziția punctului \mathbf{p}_w , ca în (5.67);
- Se rezolvă cinematică inversă pentru poziție;
- Se calculează matricea ${}^0_3\mathbf{R}$;
- Se calculează matricea ${}^3_6\mathbf{R} = {}^0_3\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$;
- Se rezolvă cinematica inversă pentru orientare.

5.5.3 Cinematica inversă a unui braț în coordonate sferice

Considerăm brațul în coordonate sferice din Fig. 4.11, a cărei cinematică directă a fost rezolvată în paragraful 4.3.4.3. Se cere să se determine variabilele θ_1 , θ_2 și d_3 ale cuplelor cinematice, corespunzătoare unei poziții date a efectorului final $\mathbf{p}_w = \mathbf{p}_3 = [x_M \ y_M \ z_M]^T$. În scopul separării variabilelor de care depinde poziția efectorului, este convenabil să exprimăm această poziție în raport cu sistemul de axe $\{1\}$; prin urmare, considerăm ecuația

$${}^0_1\mathbf{T}^{-1} \cdot {}^0_3\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T}. \quad (5.68)$$

Calculând primele trei elemente ale celei de a patra coloane pentru produsele de matrice din egalitatea (5.81), rezultă

$${}^1_3\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_M \cdot \cos \theta_1 + y_M \cdot \sin \theta_1 \\ -z_M \\ -x_M \cdot \sin \theta_1 + y_M \cdot \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 \cdot \sin \theta_2 \\ -d_3 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

5. Cinematica inversă a pozițiilor

care depinde numai de θ_2 și d_3 . Pentru a rezolva această ecuație, facem notația

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}, \quad (5.70)$$

astfel încât

$$\cos \theta_1 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad (5.71)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{2 \cdot u}{1 + u^2}. \quad (5.72)$$

Substituind aceste ecuații în al treilea termen al matricei din stânga a relației (5.70), obținem

$$(l_2 + y_M) \cdot u^2 + 2 \cdot x_M \cdot u + l_2 - z_M = 0, \quad (5.73)$$

a cărei soluție este

$$u = \frac{-x_M \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2 - l_2^2}}{l_2 + y_M}. \quad (5.74)$$

Cele două soluții corespund la două posturi diferite ale brațului. Dacă expresia de sub radical este negativă, soluția nu este admisibilă. De aici, rezultă

$$\theta_1 = 2 \cdot \operatorname{Atan2} \left(-x_M \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2 - l_2^2}, l_2 + y_M \right). \quad (5.75)$$

Odată ce θ_1 este cunoscut, din primii doi termeni ai relației (5.70) obținem

$$\frac{x_M \cdot \cos \theta_1 + y_M \cdot \sin \theta_1}{-z_M} = \frac{d_3 \cdot \sin \theta_2}{-d_3 \cdot \cos \theta_2}. \quad (5.76)$$

de unde

$$\theta_2 = \operatorname{Atan2}(x_M \cdot \cos \theta_1 + y_M \cdot \sin \theta_1, z_M). \quad (5.77)$$

În final, ridicând la patrat și adunând primii doi termeni ai relației (5.70), vom avea

$$d_3 = \sqrt{(x_M \cdot \cos \theta_1 + y_M \cdot \sin \theta_1)^2 + z_M^2}, \quad (5.78)$$

unde numai soluția cu $d_3 > 0$ a fost considerată.

5.5.4 Cinematica inversă a unui braț antropomorf

Considerăm brațul antropomorf din Fig. 4.12. Se cer parametrii θ_1 , θ_2 și θ_3 ai cuplelor cinematice, cunoscând poziția efectorului final (x_M, y_M, z_M) în raport cu sistemul de referință $\{0\}$.

Matricea omogenă totală a brațului antropomorf, relația (4.43), este

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot c_{23} & s_1 \cdot s_{23} & c_1 & -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ c_1 \cdot c_{23} & -c_1 \cdot s_{23} & s_1 & (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Considerând primele două elemente ale celei de a patra coloane, avem

$$\begin{cases} x_M = -[l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cdot \sin \theta_1 \\ y_M = [l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cdot \cos \theta_1 \end{cases}, \quad (5.80)$$

de unde

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{-x_M}{l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)} \\ \cos \theta_1 = \frac{y_M}{l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)} \end{cases}, \quad (5.81)$$

respectiv

$$\theta_1 = \text{Atan2}(-x_M, y_M). \quad (5.82)$$

O altă soluție poate fi

$$\theta_1 = \pi + \text{Atan2}(-x_M, y_M), \quad (5.83)$$

cu condiția ca θ_2 să fie modificat în $\pi - \theta_2$.

Ridicând la patrat și adunând cele trei elemente ale coloanei a patra din (5.79), obținem

5. Cinematica inversă a pozițiilor

$$l_2^2 + 2l_2l_3 [\cos \theta_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin \theta_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)] + l_3^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2, \quad (5.84)$$

respectiv

$$l_2^2 + 2l_2l_3 \cos \theta_3 + l_3^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2, \quad (5.85)$$

de unde rezultă

$$\cos \theta_3 = \frac{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}, \quad (5.86)$$

$$\sin \theta_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3}. \quad (5.87)$$

Având $\sin \theta_3$ și $\cos \theta_3$, putem determina θ_3 ,

$$\theta_3 = \text{Atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3). \quad (5.88)$$

Din primele două elemente ale coloanei a patra a matricei (5.79) avem

$$\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3), \quad (5.89)$$

iar din elementul al treilea al aceleiași coloane,

$$z_M = l_2 \cdot \sin \theta_2 + l_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3), \quad (5.90)$$

adică

$$\begin{cases} \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - l_3 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_3 \\ z_M = l_2 \cdot \sin \theta_2 + l_3 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_3 + l_3 \cdot \sin \theta_3 \cdot \cos \theta_2 \end{cases} \quad (5.91)$$

Rezolvând acest sistem, obținem

$$\sin \theta_2 = \frac{z_M \cdot (l_2 + l_3 \cdot \cos \theta_3) - (\sqrt{x_M^2 + y_M^2}) \cdot l_3 \cdot \sin \theta_3}{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}, \quad (5.92)$$

respectiv

$$\cos \theta_2 = \frac{(l_2 + l_3 \cdot \cos \theta_3) \cdot \sqrt{x_M^2 + y_M^2} + z_M \cdot l_3 \cdot \sin \theta_3}{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2} \quad (5.93)$$

și

$$\theta_2 = \text{Atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2). \quad (5.94)$$

5.5.5 Cinematica inversă a unui mecanism de orientare sferic

Considerăm mecanismul de orientare din Fig. 4.13, a cărui cinematică directă a fost rezolvată în paragraful 4.3.4.5, obținând matricea finală de transformare din relația (4.47). Se cere determinarea parametrilor cinematici θ_4 , θ_5 și θ_6 ai cuplelor, cunoscând orientarea efectorului final, dată prin matricea de rotație

$${}^3_6\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + c_4 \cdot c_6 & -s_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - c_4 \cdot s_6 & -s_4 \cdot c_5 \\ c_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_6 & c_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - s_4 \cdot s_6 & c_4 \cdot c_5 \\ -c_5 \cdot s_6 & -c_5 \cdot c_6 & s_5 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Ridicând la pătrat și adunând primele două elemente ale celei de a treia coloane, obținem

$$\cos \theta_5 = \pm \sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2} \quad (5.96)$$

De asemenea, din egalitatea ultimului element al aceleiași coloane, pentru cele două matrice, avem

$$\sin \theta_5 = r_{33}. \quad (5.97)$$

Alegerea semnului pozitiv în relația (5.96) limitează unghiul θ_5 la intervalul $(0, \pi)$,

$$\theta_5 = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right). \quad (5.98)$$

Considerăm acum, din nou, elementele r_{13} și r_{23} , din care vom obține

$$\begin{cases} \sin \theta_4 = \frac{-r_{13}}{\cos \theta_5} \\ \cos \theta_4 = \frac{r_{23}}{\cos \theta_5} \end{cases}, \quad (5.99)$$

respectiv

$$\theta_4 = \text{Atan2}(\sin \theta_4, \cos \theta_4) = \text{Atan2}(-r_{13}, r_{23}). \quad (5.100)$$

5. Cinematica inversă a pozițiilor

Din elementele r_{31} și r_{32} avem

$$\begin{cases} \sin \theta_6 = \frac{-r_{31}}{\cos \theta_5} \\ \cos \theta_6 = \frac{-r_{32}}{\cos \theta_5} \end{cases}, \quad (5.101)$$

și

$$\theta_6 = \text{Atan2}(\sin \theta_6, \cos \theta_6) = \text{Atan2}(-r_{31}, r_{32}). \quad (5.102)$$

Pentru semnul negativ al lui θ_5 în relația (5.96), adică $\theta_5 \in (\pi, 2\pi)$, soluțiile mecanismului de orientare sunt:

$$\theta_4 = \text{Atan2}(r_{13}, -r_{23}), \quad (5.103)$$

$$\theta_5 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right), \quad (5.104)$$

$$\theta_6 = \text{Atan2}(r_{31}, -r_{32}). \quad (5.105)$$

5.7 Precizie și exactitate

Mulți dintre roboții industriali existenți în prezent au deja *învățate* punctele în care se deplasează. Un *punct învățat* este punctul în care robotul a fost deplasat fizic, iar informațiile primite de la traductoarele de poziție ale cuplelor cinematice au fost memorate. Când, mai târziu robotul este comandat să se întoarcă în acel punct din spațiu, fiecare cuplă cinematică este deplasată în poziția memorată. În cazul manipuletoarelor simple „teach and playback”, cele tocmai menționate, problema cinematicii inverse nu se pune niciodată deoarece punctele obiectiv nu sunt specificate în coordonate carteziane. Când un producător specifică precizia cu care se poate întoarce manipulatorul în punctul învățat, acesta specifică de fapt *repetabilitatea* manipulatorului.

De fiecare dată când poziția și orientarea efectorului final sunt specificate în termeni cartezieni, trebuie rezolvată cinematica inversă a manipulatorului, în scopul determinării parametrilor cinematici ai cuplelor. Manipuletoarele care permit descrierea obiectivului de atins în termeni cartezieni sunt capabile să se deplaseze în puncte ce nu au fost niciodată învățate, puncte din spațiul de lucru prin care aceste manipuletoare poate n-au mai trecut niciodată anterior. Aceste

Bazele Roboticii

puncte se numesc *puncte calculate*. Asemenea capacități sunt necesare pentru multe aplicații ale manipuloarelor. Spre exemplu, dacă este utilizată o cameră video pentru a localiza un obiect ce urmează a fi manipulat de robot, acesta din urmă trebuie să fie capabil să deplaseze efectorul final în coordonatele carteziene stabilite de senzorul video. Precizia cu care poate fi atins punctul calculat poartă numele de *exactitatea* manipulatorului.

Exactitatea unui manipulator este limitată de repetabilitatea acestuia. Evident, exactitatea este afectată de precizia parametrilor ce apar în ecuațiile cinematice ale robotului. Erorile în determinarea parametrilor Denavit-Hartenberg vor cauza erori în determinarea parametrilor cinematici rezultați în urma analizei cinematice inverse. De aceea, deși repetabilitatea majorității roboților industriali este bună, exactitatea este de obicei mult mai scăzută și variază de la manipulator la manipulator. Tehnicile de calibrare permit îmbunătățirea exactității unui manipulator prin estimarea parametrilor cinematici particulari ai manipuloarelor.

5. Cinematica inversă a pozițiilor

6

CINEMATICA VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR

6.1 Generalități

Atunci când se controlează deplasarea unui robot dintr-o anumită poziție în alta, nu este suficientă determinarea coordonatelor cuplelor cinematice și ale efectorului final, coordonate corespunzătoare poziției ce trebuie atinsă. În plus, uneori poate fi necesar controlul continuu al traiectoriei robotului, pe durata deplasării acestuia spre poziția cerută, în scopul evitării obstacolelor. De asemenea, există cazuri când efectorul final trebuie să urmărească precis o anumită traiectorie. Spre exemplu, în cazul operației de sudare este necesară menținerea electrozudului la o anumită distanță (constantă) și cu o anumită orientare față de piesă, pe toată durata efectuării operației respective. Acest lucru necesită controlul vitezei efectorului final sau al sculei. Deoarece controlul mișcării robotului se realizează prin controlul cuplelor cinematice, viteza efectorului final va fi controlată efectuând un control al vitezelor acestor cuple. În acest sens, cunoscând viteza impusă efectorului final, este necesară determinarea vitezei fiecărei cuple cinematice.

În acest capitol este prezentată analiza cinematică a vitezelor, care oferă legătura dintre vitezele cuplelor cinematice și vitezele unghiulară și liniară corespunzătoare efectorului final. Acest lucru este descris de o matrice, numită *matrice Jacobiană geometrică*, care depinde de configurația manipulatorului. Alternativ, dacă este exprimată localizarea efectorului final în raport cu un sistem de referință printr-un set de ecuații analitice, atunci este posibilă calcularea matricei Jacobiene prin derivarea directă a ecuațiilor respective, în raport cu variabilele cuplelor cinematice. Matricea Jacobiană rezultată, numită *matrice Jacobiană analitică*, diferă în general de cea geometrică. Matricea Jacobiană constituie unul din cele mai importante instrumente de caracterizare a roboților de tip manipulator. Aceasta este utilă pentru găsirea configurațiilor

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

singulare, analizarea redundanței, determinarea algoritmilor de analiză cinematică inversă, descrierea relațiilor dintre forțele aplicate efectorului final și momentele de torsiune rezultate în cuple (statică) și pentru obținerea ecuațiilor dinamice de mișcare.

Modelele matematice din acest capitol sunt valabile pentru convenția Denavit-Hartenberg standard.

6.2 Mișcarea generală a corpului rigid

Un vector \mathbf{p} poate fi variabil în raport cu un sistem de axe dar constant în raport cu un alt sistem. De aceea, în general avem nevoie de două sisteme de axe pentru a descrie natura unui vector: unul în raport cu care sunt măsurate modificările vectorului, iar cel de al doilea fiind cel în raport cu care este exprimat vectorul respectiv.

Spre exemplu, ${}^B\mathbf{p}$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct P în raport cu sistemul de axe $\{B\}$, iar ${}^A({}^B\mathbf{p})$ denotă exprimarea vectorului ${}^B\mathbf{p}$ în raport cu sistemul de referință $\{A\}$. Similar, viteza punctului P , definită prin derivarea vectorului ${}^B\mathbf{p}$ în raport cu timpul, va fi:

$${}^B\mathbf{v}_P = \frac{d{}^B\mathbf{p}}{dt}.$$

Vectorul viteză poate fi, de asemenea, exprimat în raport cu un alt sistem de axe, respectiv

$${}^A({}^B\mathbf{v}_P) = {}^A\left(\frac{d{}^B\mathbf{p}}{dt}\right).$$

Această relație indică faptul că derivarea se face în raport cu sistemul de axe $\{B\}$, iar vectorul rezultat este exprimat în raport cu sistemul de axe $\{A\}$.

6.2.1 Viteza unghiulară a unui corp rigid

În timp ce viteza liniară descrie rata modificării poziției unui punct în spațiu, vectorul viteză unghiulară descrie rata modificării orientării unui corp rigid. Fig. 6.1 prezintă faptul că sistemul de axe $\{B\}$ se rotește în raport cu sistemul de referință $\{A\}$, având un punct

Bazele Roboticii

fix O , ce reprezintă originea comună a celor două sisteme de axe. Orientarea sistemului $\{B\}$ în raport cu sistemul de referință A poate fi descrisă de o matrice de rotație ${}^A_B\mathbf{R}$. Deoarece această matrice este ortogonală, inversa acesteia este identică cu transpusa ei. Deci, putem scrie:

$${}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B_A\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad (6.1)$$

unde cu \mathbf{I} s-a notat matricea unitate de dimensiune 3×3 . Derivând relația (6.1) în raport cu timpul, obținem

$${}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^T + {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^A_B\dot{\mathbf{R}}^T = {}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} + \left({}^A_B\mathbf{R}^{-1}\right)^T \cdot {}^A_B\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

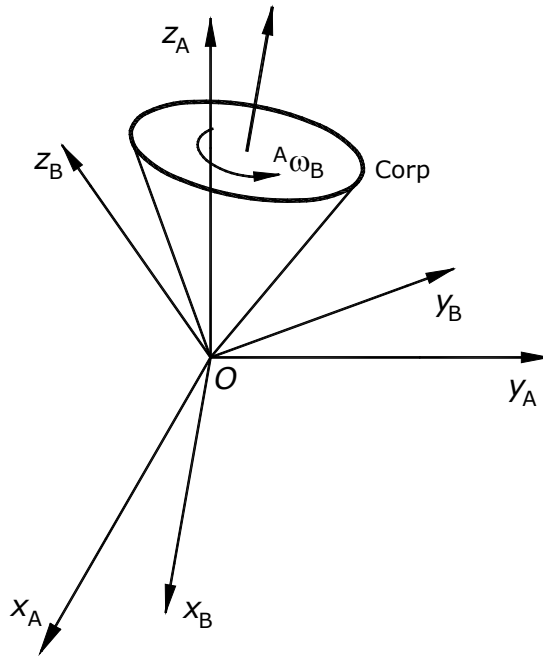


Fig. 6.1 Rotația sistemului de axe $\{B\}$ în raport cu sistemul de referință $\{A\}$

Cunoscând, din proprietățile matricelor, faptul că $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T$, rezultă:

$${}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} + \left({}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1}\right)^T = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

Pentru a satisface relația (6.3), matricea $\left({}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} \right) = \mathbf{S}$ trebuie să fie *antisimetrică*. De asemenea, matricea respectivă reprezintă rata modificării orientării și este numită *matrice viteză unghiulară* a sistemului de axe $\{B\}$, exprimată în sistemul de referință $\{A\}$.

$$\mathbf{S} = {}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^T, \quad (6.4)$$

respectiv

$$\mathbf{S} = {}^A_B\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Această matrice definește vectorul viteză unghiulară a sistemului de axe $\{B\}$, exprimat în sistemul de referință $\{A\}$,

$${}^A\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

6.2.1.1 Exemplu

Considerăm matricea elementară de rotație în jurul axei z , cu unghiul θ :

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă θ este o funcție de timp, prin derivarea în raport cu timpul a matricei $\mathbf{R}_z(\theta)$, relația (6.4) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot \sin \theta & -\dot{\theta} \cdot \cos \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cdot \cos \theta & -\dot{\theta} \cdot \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

În concordanță cu relația (6.6), vectorul

$${}^A\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

exprimă viteza unghiulară de rotație a sistemului de axe în jurul axei z .

6.2.2 Viteza liniară a unui punct

Considerăm un corp rigid, care suferă o rotație și o translație în raport cu sistemul de referință $\{A\}$ (vezi Fig. 6.2). Vectorul de poziție al unui punct P de pe acest corp, ce nu este neapărat fix în raport cu sistemul de axe $\{B\}$, poate fi exprimat în raport cu sistemul de referință $\{A\}$ astfel:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{q} + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p}, \quad (6.7)$$

unde ${}^A\mathbf{q}$ reprezintă vectorul de poziție al originii O_B a sistemului de axe $\{B\}$ în raport cu originea O_A a sistemului de referință $\{A\}$. Viteza punctului P , scrisă în raport cu sistemul de referință $\{A\}$, este dată de relația

$${}^A\mathbf{v}_P = \frac{d{}^A\mathbf{p}}{dt} = \frac{d{}^A\mathbf{q}}{dt} + \frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p}), \quad (6.8)$$

unde ${}^A\mathbf{v}_P = \frac{d{}^A\mathbf{q}}{dt}$ este viteza originii O_B în raport cu sistemul de referință $\{A\}$. Al doilea termen poate fi dezvoltat după cum urmează:

$$\frac{d}{dt}({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p}) = {}^A\mathbf{R} \cdot \frac{d{}^B\mathbf{p}}{dt} + \frac{d{}^A\mathbf{R}}{dt} \cdot ({}^B\mathbf{p}) = {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + {}^A\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^B\mathbf{p}, \quad (6.9)$$

unde ${}^B\mathbf{v}_P = \frac{d{}^B\mathbf{p}}{dt}$ reprezintă viteza punctului P în raport cu originea O_B a sistemului de axe $\{B\}$.

Din relația (6.4), $\mathbf{S} = {}^A\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^A\mathbf{R}^{-1}$. Înmulțind ambii termeni ai acestei expresii cu ${}^A\mathbf{R}$, vom avea

$${}^A\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S} \cdot {}^A\mathbf{R}. \quad (6.10)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

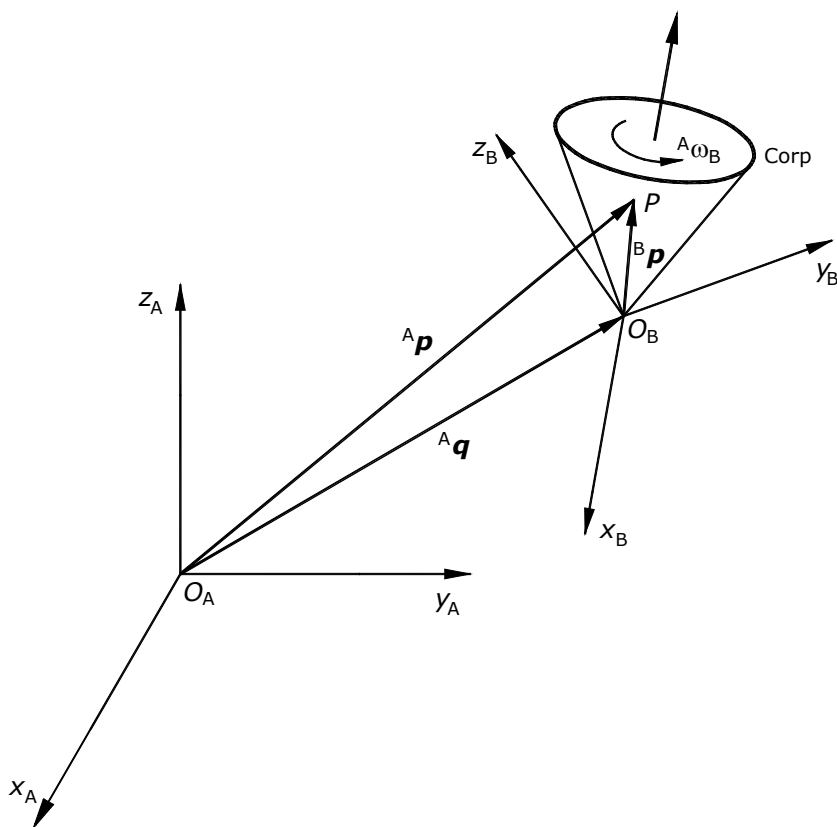


Fig. 6.2 Rotația și translația sistemului de axe {B} în raport cu sistemul de referință {A}

Înlocuind expresia (6.10) în (6.9), rezultă

$$\frac{d}{dt} \left({}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p} \right) = {}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{v}_P + \mathbf{S} \cdot {}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p}. \quad (6.11)$$

Viteza unghiulară a sistemului de axe {B} poate fi exprimată în formă vectorială, astfel că putem rescrie ultimul termen al relației (6.11) după cum urmează

$$\mathbf{S} \cdot {}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p} = {}^A \boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p} \right). \quad (6.12)$$

Acest lucru va conduce la

$$\frac{d}{dt} \left({}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p} \right) = {}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{v}_P + {}^A \boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{p} \right). \quad (6.13)$$

Bazele Roboticii

În final, expresia generală a vitezei punctului P din relația (6.8) poate fi scrisă după cum urmează:

$${}^A\mathbf{v}_P = {}^A\mathbf{v}_{O_B} + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right). \quad (6.14)$$

6.2.3 Accelerația liniară a unui punct

Derivând ecuația (6.14) în raport cu timpul, vom obține:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left({}^A\mathbf{v}_P \right) &= \frac{d}{dt} \left({}^A\mathbf{v}_{O_B} \right) + \frac{d}{dt} \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

respectiv

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{a}_P &= {}^A\mathbf{a}_{O_B} + {}^A\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + {}^A\mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt} \left({}^B\mathbf{v}_P \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left({}^A\boldsymbol{\omega}_B \right) \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \frac{d}{dt} \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) = \\ &= {}^A\mathbf{a}_{O_B} + {}^A\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{a}_P + {}^A\boldsymbol{\epsilon}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Utilizând iar egalitatea ${}^A\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S} \cdot {}^A\mathbf{R}$, vom avea

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{a}_P &= {}^A\mathbf{a}_{O_B} + \mathbf{S} \cdot {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{a}_P + {}^A\boldsymbol{\epsilon}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left(\mathbf{S} \cdot {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

După înlocuirea matricei viteză unghiulară \mathbf{S} prin vectorul corespunzător ${}^A\boldsymbol{\omega}_B$, obținem

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{a}_P &= {}^A\mathbf{a}_{O_B} + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P + \\ &+ {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{a}_P + {}^A\boldsymbol{\epsilon}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P \right) \end{aligned}, \quad (6.18)$$

respectiv

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^A\mathbf{a}_P = {}^A\mathbf{a}_{O_B} + {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{a}_P + {}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B \times \left({}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p} \right) + 2 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left({}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{v}_P \right). \quad (6.19)$$

6.3 Propagarea vitezelor și accelerațiilor de la un element la altul

Considerăm un robot plan de tip manipulator serial cu n elemente, reprezentat schematic în Fig. 6.3.

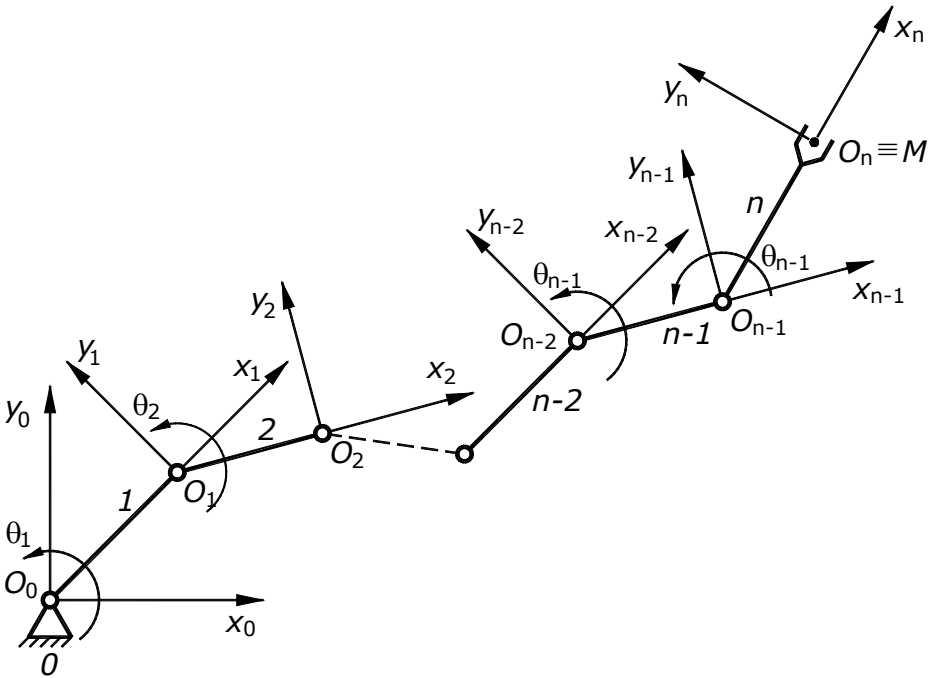


Fig. 6.3 Reprezentarea schematică a unui manipulator serial plan cu n elemente cinematice

Se pune problema determinării ecuațiilor ce exprimă vitezele și accelerațiile, liniare și unghiulare, ale elementului i al manipulatorului, astfel încât să se stabilească o relație recursivă de calcul a vitezei și accelerației pentru întregul manipulator.

6.3.1 Scrierea ecuațiilor în raport cu sistemul de referință {0}

6.3.1.1 Viteza unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de referință {0}

Viteza unghiulară a unui sistem de axe $\{i\}$, scrisă în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, este egală cu suma dintre viteza unghiulară a sistemului $\{i\}$ în raport cu sistemul $\{i-1\}$ și viteza unghiulară a sistemului de axe $\{i-1\}$ în raport cu sistemul de referință,

$${}^0\omega_{0,i} = {}^0\omega_{0,i-1} + {}^0\omega_{i-1,i} = {}^0\omega_{0,i-1} + {}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i}, \quad (6.20)$$

unde: $i = 1 \dots n$; ${}^0\omega_{0,i-1}$ reprezintă vectorul viteză unghiulară a sistemului de axe $\{i-1\}$ în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, raportat la sistemul de referință; ${}_{i-1}^0R$ este matricea de rotație la scrisă la trecerea de la sistemul de referință $\{0\}$ la sistemul de axe $\{i-1\}$; ${}^{i-1}\omega_{i-1,i}$ este vectorul viteză unghiulară a sistemului de axe $\{i\}$ în raport cu sistemul $\{i-1\}$, raportat la sistemul de axe $\{i-1\}$.

6.3.1.2 Accelerația unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de referință {0}

Aceasta se obține derivând în raport cu timpul relația (6.20).

$$\frac{d}{dt}({}^0\omega_{0,i}) = \frac{d}{dt}({}^0\omega_{0,i-1}) + \frac{d}{dt}({}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i}), \quad (6.21)$$

obținându-se

$${}^0\epsilon_{0,i} = {}^0\epsilon_{0,i-1} + {}_{i-1}^0\dot{R} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i} + {}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\epsilon_{i-1,i}. \quad (6.22)$$

Utilizând relația ${}_{i-1}^0\dot{R} = S \cdot {}_{i-1}^0R$, obținem

$${}^0\epsilon_{0,i} = {}^0\epsilon_{0,i-1} + S \cdot {}_{i-1}^0\dot{R} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i} + {}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\epsilon_{i-1,i}. \quad (6.23)$$

Această ecuație este echivalentă cu

$${}^0\epsilon_{0,i} = {}^0\epsilon_{0,i-1} + {}^0\omega_{0,i-1} \times ({}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i}) + {}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\epsilon_{i-1,i}. \quad (6.24)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

6.3.1.3 Viteza liniară, exprimată în raport cu sistemul de referință {0}

Considerăm ecuația (6.14), raportând-o la Fig. 6.3. Originea sistemului de axe {B} coincide cu cea a sistemului {i-1}, iar punctul P coincide cu originea sistemului de axe {i}. Sistemul de axe {A} coincide cu sistemul de referință {0}. De aceea, viteza liniară a elementului i în raport cu sistemul de referință poate fi exprimată modificând ecuația (6.14), după cum urmează,

$${}^0\mathbf{v}_{0,i} = {}^0\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right), \quad (6.25)$$

unde, cu ${}^{i-1}\mathbf{p} = {}^{i-1}\mathbf{T}\mathbf{r}$ s-a notat vectorul de translație la trecerea de la sistemul de axe {i-1} la sistemul {i}, conținând primele trei elemente ale coloanei a patra din matricea de transformare omogenă, vezi relația (3.24) din volumul 1.

6.3.1.4 Accelerația liniară, exprimată în raport cu sistemul de referință {0}

Similar, accelerația liniară este obținută modificând ecuația (6.19) astfel

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_{0,i} = & {}^0\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{a}_{i-1,i} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ & + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \right) + \\ & + 2 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.3.2 Scrierea ecuațiilor în raport cu sistemul de axe curent {i}

6.3.2.1 Viteza unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent {i}

Exprimând ecuația (6.20) în sistemul de axe {i}, obținem:

- Pentru cupla cinematică de rotație

$$\begin{aligned} {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} &= {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}^i\left({}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\right) = \\ &= {}^i\boldsymbol{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

- Pentru cupla cinematică de translație

$${}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} = {}^i\boldsymbol{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\right) = {}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1}. \quad (6.28)$$

6.3.2.2 Accelerația unghiulară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$

Ecuția (6.24) exprimată în sistemul de axe curent $\{i\}$ are forma

$$\begin{aligned} {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} &= {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} + {}^i\left[{}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^0\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\right)\right] + \\ &+ {}^i\left({}^0\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i}\right) = \\ &= {}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} + {}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\right) + \\ &+ {}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Pentru o cuplă cinematică de rotație, ${}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i} = {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i}$, ceea ce înseamnă că relația (6.29) devine

$${}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} = {}^i\boldsymbol{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i}\right). \quad (6.30)$$

Pentru o cuplă cinematică de translație, ${}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i} = \mathbf{0}$, iar ecuația (6.29) capătă forma

$${}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} = {}^i\boldsymbol{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1}. \quad (6.31)$$

6.3.2.3 Viteza liniară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$

Similar, exprimând ecuația (6.25) în sistemul de axe $\{i\}$, se obține

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{v}_{0,i} &= {}^i\mathbf{v}_{0,i-1} + \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i} \right) + \left[{}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \right] = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} + \\
 &+ {}^i\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right)
 \end{aligned} \quad . \quad (6.32)$$

Componenta ${}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i}$ este viteza relativă a cuplei cinematice i relativ la sistemul de axe $\{i-1\}$, scrisă în raport cu sistemul de coordonate $\{i-1\}$.

Pentru o cuplă cinematică de rotație,

$${}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} = {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} = {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{v}_{0,i} &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \right) \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}
 \end{aligned} \quad . \quad (6.34)$$

Făcând apel la ecuația (6.29), putem simplifica relația (6.34) după cum urmează

$${}^i\mathbf{v}_{0,i} = {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}. \quad (6.35)$$

Pentru o cuplă cinematică de translație ${}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} = {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}$, iar ecuațiile capătă forma:

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{v}_{0,i} &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}^i \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} \right) = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} = \quad . \quad (6.36) \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} = \\
 &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p}_i + {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} \right)
 \end{aligned}$$

6.3.2.4 Accelerația liniară, exprimată în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$

Plecând de la ecuația (6.26) și ținând seama de faptul că pentru o cuplă de rotație,

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} &= {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p} = {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p}, \\
 {}^{i-1}\mathbf{a}_{i-1,i} &= {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) = \\
 &= {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) \quad ,
 \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{a}_{0,i} &= {}^0\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\
 &+ 2 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \quad . \quad (6.37) \\
 &+ {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} + \\
 &+ {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right)
 \end{aligned}$$

Exprimând relația (6.37) în raport cu sistemul de axe $\{i\}$, obținem

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{a}_{0,i} &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ 2 \cdot {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \quad . \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

$$= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} &{}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ &+ {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ &+ {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \end{aligned} \right]$$

Pentru o cuplă cinematică de translație ${}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}}$, ${}^{i-1}\mathbf{a}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\ddot{\mathbf{p}}$, iar accelerația liniară are expresia

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{a}_{0,i} &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\
 &+ 2 \cdot {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} \right) + {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}} \quad . \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

$$= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} &{}^{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ &+ {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}} \end{aligned} \right]$$

6.3.3 Scurt rezumat privind vitezele și accelerațiile cuplurilor cinematice

În cele ce urmează, vor fi prezentate pe scurt ecuațiile ce permit determinarea vitezelor și accelerațiilor unui manipulator, în formă recursivă.

Bazele Roboticii

Mai întâi, vom scrie ecuațiile respective în raport cu sistemul de axe curent $\{i\}$.

$$\left. \begin{aligned} {}^i\omega_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot \left({}^{i-1}\omega_{0,i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1,i} \right) \text{ pentru cuple de rotație} \\ {}^i\omega_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \text{ pentru cuple de translație} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^i\mathbf{v}_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^i\omega_{0,i} \times {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} \quad \text{pt. cuple de rotație} \\ {}^i\mathbf{v}_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot \left({}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} \right) \text{ pt. cuple de transl.} \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^i\epsilon_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot \left({}^{i-1}\epsilon_{0,i-1} + {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \right) \text{ pt. cuple de rotație} \\ {}^i\epsilon_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\epsilon_{0,i-1} \text{ pt. cuple de transl.} \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^i\mathbf{a}_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot \left[\begin{aligned} &{}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\epsilon_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ &+ {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \end{aligned} \right] \text{ pt. cuple de rotație} \\ {}^i\mathbf{a}_{0,i} &= {}_{i-1}^iR \cdot \left[\begin{aligned} &{}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\epsilon_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ &+ {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}} \end{aligned} \right] \text{ pt. cuple de transl.} \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Cunoaștem ${}_{i-1}^iR$, ${}^{i-1}\mathbf{p}$ din cinematica pozițiilor robotului. Din convenția Denavit-Hartenberg standard, ${}^{i-1}\mathbf{p} = [a_i \cdot \cos \theta_i \quad a_i \cdot \sin \theta_i \quad d_i]^T$. De asemenea, se cunosc ${}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i}$, ${}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i}$ pentru cuplele cinematice de rotație, respectiv ${}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{d}}$, ${}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{d}}$ pentru cuplele de translație.

Se pot calcula, recursiv, ${}^i\omega_{0,i}$, ${}^i\mathbf{v}_{0,i}$, ${}^i\epsilon_{0,i}$, ${}^i\mathbf{a}_{0,i}$, pentru $i = 1 \dots n$.

Ecuațiile vitezelor și accelerațiilor scrise în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ sunt:

$$\left. \begin{aligned} {}^0\omega_{0,i} &= {}^0\omega_{0,i-1} + {}_{i-1}^0R \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1,i} \text{ pentru cuple de rotație} \\ {}^0\omega_{0,i} &= {}^0\omega_{0,i-1} \text{ pentru cuple de translație} \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$$\left. \begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_{0,i} &= {}^0\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) && \text{pt. cuple de rot.} \\ {}^0\mathbf{v}_{0,i} &= {}^0\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) && \text{pt. cuple de transl.} \end{aligned} \right\} (6.45)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} &= {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \right) + {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \\ &&& \text{pentru cuple de rotație} \\ {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} &= {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} && \text{pentru cuple de translație} \end{aligned} \right\} (6.46)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_{0,i} &= {}^0\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) \right) && \text{pt. cuple de rot.} \\ {}^0\mathbf{a}_{0,i} &= {}^0\mathbf{a}_{0,i-1} + {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\ddot{\mathbf{p}} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) + \\ &+ {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} \right) \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\dot{\mathbf{p}} \right) && \text{pt. cuple de transl.} \end{aligned} \right\} (6.47)$$

6.3.4 Calculul vitezelor pentru manipulatorul Stanford

Considerăm manipulatorul serial spațial de tip Stanford, reprezentat în Fig. 6.4.

Parametrii Denavit-Hartenberg standard pentru manipulatorul considerat sunt prezentați în Tabelul 6.1.

Tabelul 6.1 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi / 2$	0	θ_1
2	0	$\pi / 2$	l_2	θ_2
3	0	0	d_3	$-\pi / 2$
4	0	$-\pi / 2$	0	θ_4
5	0	$\pi / 2$	0	θ_5
6	0	0	0	θ_6

Matricele omogene de transformare, la trecerea de la sistemul de referință $\{0\}$ la elementul final $\{6\}$ sunt:

Bazele Roboticii

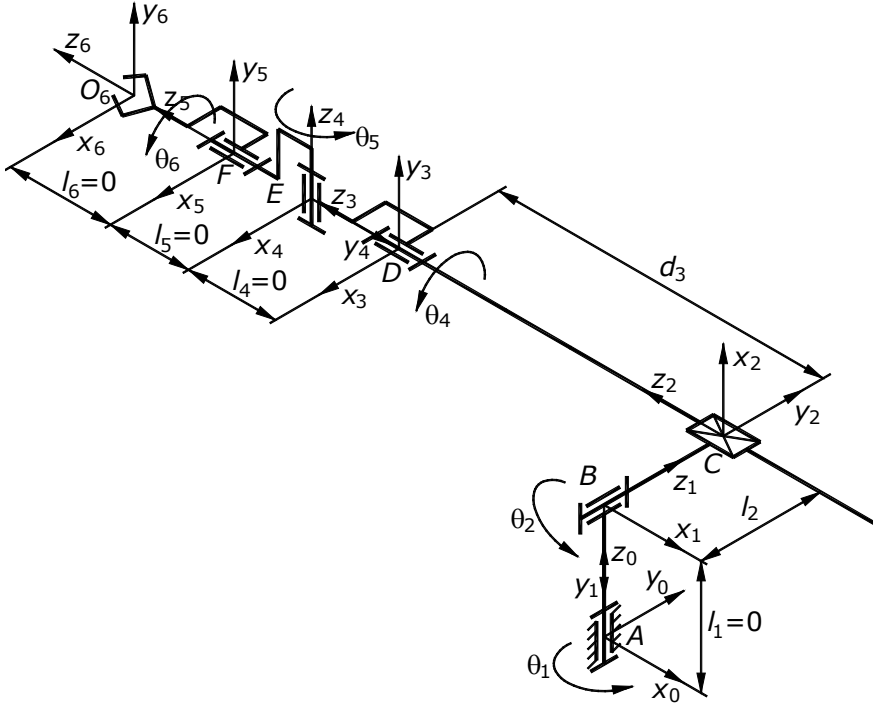


Fig. 6.4 Manipulator Stanford

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.52)$$

$${}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

De asemenea, matricele elementare de rotație, scrise pentru trecerea (în ambele sensuri) de la un sistem de axe la altul, vor fi:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.54)$$

$${}^1_0\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.55)$$

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

$${}^2_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.57)$$

Bazele Roboticii

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.58)$$

$${}^3_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

$${}^3_4\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

$${}^4_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.61)$$

$${}^4_5\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.62)$$

$${}^5_4\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & \sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.63)$$

$${}^5_6\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 \\ \sin \theta_6 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.64)$$

$${}^6_5\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & \sin \theta_6 & 0 \\ -\sin \theta_6 & \cos \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Pentru a determina vitezele și accelerațiile cuplelor cinematice, conform celor prezentate la paragraful anterior, vom scrie și vectorii

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

de deplasare și de rotație ai unui sistem de axe în raport cu cel anterior:

$${}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

$${}^1_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad (6.67)$$

$${}^2_3\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad (6.68)$$

$${}^3_4\mathbf{p} = {}^3_4\mathbf{p} = {}^3_4\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.69)$$

$${}^0\boldsymbol{\theta}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (6.70)$$

$${}^1\boldsymbol{\theta}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (6.71)$$

$${}^2\boldsymbol{\theta}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

$${}^3\boldsymbol{\theta}_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

Bazele Roboticii

$${}^4\theta_{4,5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_5 \end{bmatrix}, \quad (6.74)$$

$${}^5\theta_{5,6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_6 \end{bmatrix}. \quad (6.75)$$

Conform celor descrise în paragraful anterior, relațiile de calcul pentru vitezele unghiulare și liniare sunt:

- Pentru o cuplă cinematică de rotație

$${}^i\omega_{0,i} = {}_{i-1}^iR \cdot ({}^{i-1}\omega_{0,i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1,i}),$$

$${}^i\mathbf{v}_{0,i} = {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^i\omega_{0,i} \times {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\mathbf{p};$$

- Pentru o cuplă cinematică de translație

$${}^i\omega_{0,i} = {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\omega_{0,i-1},$$

$${}^i\mathbf{v}_{0,i} = {}_{i-1}^iR \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}_{i-1}^iR \cdot ({}^{i-1}\omega_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}}).$$

În continuare, vom determina aceste viteze pentru fiecare cuplă cinematică.

- *Cupla cinematică A, de rotație*

$$\begin{aligned} {}^1\omega_{0,1} &= {}_0^1R \cdot ({}^0\omega_{0,0} + {}^0\omega_{0,1}) = {}_0^1R \cdot {}^0\omega_{0,1} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{v}_{0,1} &= {}_0^1R \cdot {}^0\mathbf{v}_{0,0} + {}^1\omega_{0,1} \times {}_0^1R \cdot {}^0\mathbf{p} = {}^1\omega_{0,1} \times {}_0^1R \cdot {}^0\mathbf{p} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

- *Cupla cinematică B, de rotație*

$$\begin{aligned}
 {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} &= {}^2_1\mathbf{R} \cdot ({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2}) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \quad , \quad (6.78) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{v}_{0,2} &= {}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{v}_{0,1} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{p} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ 0 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \end{bmatrix} . \quad (6.79)
 \end{aligned}$$

- *Cupla cinematică C, de translație*

$$\begin{aligned}
 {}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3} &= {}^3_2\mathbf{R} \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} , \quad (6.80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{v}_{0,3} &= {}^3_2\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{v}_{0,2} + {}^3_2\mathbf{R} \cdot \left({}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2_3\mathbf{p} + {}^2_3\dot{\mathbf{p}} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ 0 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 + \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.81)
 \end{aligned}$$

- *Cupla cinematică D, de rotație*

$$\begin{aligned}
 {}^4\boldsymbol{\omega}_{0,4} &= {}^4_3\mathbf{R} \cdot \left({}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3} + {}^3\boldsymbol{\omega}_{3,4} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \quad , \quad (6.82) \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_4 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$$\begin{aligned}
 {}^4\mathbf{v}_{0,4} &= {}^4_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{v}_{0,3} + {}^4\boldsymbol{\omega}_{0,4} \times {}^4_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{p} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 + \dot{d}_3 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_4 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_4 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 + \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_4 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 + d_3 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_4 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.83)
 \end{aligned}$$

Pentru simplificarea relației, s-au făcut notațiile $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, pentru $i = 1..n$.

- *Cupla cinematică E, de rotație*

$$\begin{aligned}
 {}^5\boldsymbol{\omega}_{0,5} &= {}^5_4\mathbf{R} \cdot ({}^4\boldsymbol{\omega}_{0,4} + {}^4\boldsymbol{\omega}_{4,5}) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & \sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_4 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \right) \quad (6.84.a)
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$${}^5\omega_{0,5} = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & \sin \theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta_5 & -\cos \theta_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_4 \\ \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_4 - \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_4 + \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} = \quad , (6.84.b)$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_5 + \dot{\theta}_4 s_5 \\ \dot{\theta}_2 \cdot s_4 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 + \dot{\theta}_5 \\ -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 \end{bmatrix}$$

$${}^5v_{0,5} = {}^4R \cdot {}^4v_{0,4} + {}^5\omega_{0,5} \times {}^4R \cdot {}^4p =$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_4 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 + d_3 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_5 + \dot{\theta}_4 s_5 \\ \dot{\theta}_2 \cdot s_4 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 + \dot{\theta}_5 \\ -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} c_5 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 & s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_5 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_4 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 + d_3 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_4 \cdot c_5 - \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_5 + d_3 \cdot s_5 \\ d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_4 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_4 \\ -d_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot s_5 + d_3 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_4 \cdot s_5 + \\ + l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_5 - d_3 \cdot c_5 \end{bmatrix} \quad . (6.85)$$

- Cupla cinematică F , de rotație

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^6\omega_{0,6} = {}^6R \cdot ({}^5\omega_{0,5} + {}^5\omega_{5,6}) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_5 + \dot{\theta}_4 s_5 \\ \dot{\theta}_2 \cdot s_4 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 + \dot{\theta}_5 \\ -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \right) = \quad , (6.86)$$

$$= \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot c_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot c_5 + \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot s_5 + \dot{\theta}_4 s_5 \\ \dot{\theta}_2 \cdot s_4 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot c_4 + \dot{\theta}_5 \\ -\dot{\theta}_2 \cdot c_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_5 - \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \cdot c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_6 (-\dot{\theta}_2 c_4 c_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 c_5 + \dot{\theta}_1 c_2 s_5 + \dot{\theta}_4 s_5) + s_6 (\dot{\theta}_2 s_4 - \dot{\theta}_1 s_2 c_4 + \dot{\theta}_5) \\ -s_6 (-\dot{\theta}_2 c_4 c_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 c_5 + \dot{\theta}_1 c_2 s_5 + \dot{\theta}_4 s_5) + c_6 (\dot{\theta}_2 s_4 - \dot{\theta}_1 s_2 c_4 + \dot{\theta}_5) \\ -\dot{\theta}_2 c_4 s_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 s_5 - \dot{\theta}_1 c_2 c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

$${}^6v_{0,6} = {}^6R \cdot {}^5v_{0,5} + {}^6\omega_{0,6} \times {}^6R \cdot {}^5p =$$

$$= \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3 \dot{\theta}_1 s_2 c_4 c_5 - l_2 \dot{\theta}_1 c_2 s_4 c_5 + d_3 \dot{\theta}_2 s_4 c_5 - \\ -l_2 \dot{\theta}_1 s_2 s_5 + \dot{d}_3 s_5 \\ d_3 \dot{\theta}_1 s_2 s_4 - l_2 \dot{\theta}_1 c_2 c_4 + d_3 \dot{\theta}_2 c_4 \\ -d_3 \dot{\theta}_1 s_2 c_4 s_5 - l_2 \dot{\theta}_1 c_2 s_4 s_5 + d_3 \dot{\theta}_2 s_4 s_5 + \\ + l_2 \dot{\theta}_1 s_2 c_5 - \dot{d}_3 c_5 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} c_6 (-\dot{\theta}_2 c_4 c_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 c_5 + \dot{\theta}_1 c_2 s_5 + \dot{\theta}_4 s_5) + \\ + s_6 (\dot{\theta}_2 s_4 - \dot{\theta}_1 s_2 c_4 + \dot{\theta}_5) \\ -s_6 (-\dot{\theta}_2 c_4 c_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 c_5 + \dot{\theta}_1 c_2 s_5 + \dot{\theta}_4 s_5) + \\ + c_6 (\dot{\theta}_2 s_4 - \dot{\theta}_1 s_2 c_4 + \dot{\theta}_5) \\ -\dot{\theta}_2 c_4 s_5 - \dot{\theta}_1 s_2 s_4 s_5 - \dot{\theta}_1 c_2 c_5 - \dot{\theta}_4 c_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, (6.87.a)

Bazele Roboticii

$${}^6\mathbf{v}_{0,6} = \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_3\dot{\theta}_1 s_2 c_4 c_5 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 s_4 c_5 + d_3\dot{\theta}_2 s_4 c_5 - \\ -l_2\dot{\theta}_1 s_2 s_5 + \dot{d}_3 s_5 \\ d_3\dot{\theta}_1 s_2 s_4 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 c_4 + d_3\dot{\theta}_2 c_4 \\ -d_3\dot{\theta}_1 s_2 c_4 s_5 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 s_4 s_5 + d_3\dot{\theta}_2 s_4 s_5 + \\ + l_2\dot{\theta}_1 s_2 c_5 - \dot{d}_3 c_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_6 (-d_3\dot{\theta}_1 s_2 c_4 c_5 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 s_4 c_5 + d_3\dot{\theta}_2 s_4 c_5 - l_2\dot{\theta}_1 s_2 s_5 + \dot{d}_3 s_5) + \\ + s_6 (d_3\dot{\theta}_1 s_2 s_4 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 c_4 + d_3\dot{\theta}_2 c_4) \\ -s_6 (-d_3\dot{\theta}_1 s_2 c_4 c_5 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 s_4 c_5 + d_3\dot{\theta}_2 s_4 c_5 - l_2\dot{\theta}_1 s_2 s_5 + \dot{d}_3 s_5) + \\ + c_6 (d_3\dot{\theta}_1 s_2 s_4 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 c_4 + d_3\dot{\theta}_2 c_4) \\ -d_3\dot{\theta}_1 s_2 c_4 s_5 - l_2\dot{\theta}_1 c_2 s_4 s_5 + d_3\dot{\theta}_2 s_4 s_5 + l_2\dot{\theta}_1 s_2 c_5 - \dot{d}_3 c_5 \end{bmatrix} \cdot$$

(6.87.b)

Pentru a sintetiza calculul vitezelor efectorului final, putem scrie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left({}^6\mathbf{v}_{0,6} \right)_x = \left(-d_3 s_2 c_4 c_5 c_6 - l_2 c_2 s_4 c_5 c_6 - l_2 s_2 s_5 c_6 + \right) \dot{\theta}_1 + \\ \quad + (d_3 s_4 c_5 c_6 + d_3 c_4 s_6) \dot{\theta}_2 + \dot{d}_3 s_5 c_6 \\ \left({}^6\mathbf{v}_{0,6} \right)_y = \left(d_3 s_2 c_4 c_5 s_6 + l_2 c_2 s_4 c_5 s_6 + l_2 s_2 s_5 s_6 + \right) \dot{\theta}_1 + \\ \quad + (-d_3 s_4 c_5 s_6 + d_3 c_4 c_6) \dot{\theta}_2 - \dot{d}_3 s_5 s_6 \\ \left({}^6\mathbf{v}_{0,6} \right)_z = (-d_3 s_2 c_4 s_5 - l_2 c_2 s_4 s_5 + l_2 s_2 c_5) \dot{\theta}_1 + \\ \quad + d_3 \dot{\theta}_2 s_4 s_5 - \dot{d}_3 c_5 \\ \left({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6} \right)_x = (-s_2 s_4 c_5 c_6 + c_2 s_5 c_6 - s_2 c_4 s_6) \dot{\theta}_1 + \\ \quad + (-c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) \dot{\theta}_2 + (s_5 c_6) \dot{\theta}_4 + (s_6) \dot{\theta}_5 \\ \left({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6} \right)_y = (s_2 s_4 c_5 s_6 - c_2 s_5 s_6 - s_2 c_4 c_6) \dot{\theta}_1 + \\ \quad + (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) \dot{\theta}_2 - (s_5 s_6) \dot{\theta}_4 + (c_6) \dot{\theta}_5 \\ \left({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6} \right)_z = (-s_2 s_4 s_5 - c_2 c_5) \dot{\theta}_1 - (c_4 s_5) \dot{\theta}_2 - (c_5) \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{array} \right. \cdot \quad (6.88)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

Ecuatiile (6.88) pot fi rescrise într-o formă, care ne permite determinarea matricei Jacobiene în sistemul de axe $\{6\}$:

$$\begin{bmatrix} ({}^6\mathbf{v}_{0,6})_x \\ ({}^6\mathbf{v}_{0,6})_y \\ ({}^6\mathbf{v}_{0,6})_z \\ ({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6})_x \\ ({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6})_y \\ ({}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6})_z \end{bmatrix} = {}^6J = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}. \quad (6.89)$$

Dacă vitezele sunt exprimate în sistemul de referință $\{0\}$,

$${}^0\mathbf{v}_{0,6} = {}^0R \cdot {}^6\mathbf{v}_{0,6} \text{ și } {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,6} = {}^0R \cdot {}^6\boldsymbol{\omega}_{0,6}, \quad (6.90)$$

se poate determina matricea Jacobiană în raport cu sistemul respectiv,

$$\begin{bmatrix} ({}^0\mathbf{v}_{0,6})_x \\ ({}^0\mathbf{v}_{0,6})_y \\ ({}^0\mathbf{v}_{0,6})_z \\ ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,6})_x \\ ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,6})_y \\ ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,6})_z \end{bmatrix} = {}^0J = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}. \quad (6.91)$$

6.4 Matricea Jacobiană geometrică

Considerăm un manipulator cu n grade de mobilitate, a cărei cinematică directă poate fi exprimată prin matricea generală de forma:

Bazele Roboticii

$${}^0_n\mathbf{T}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0_n\mathbf{R}(\mathbf{q}) & {}^0_n\mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.92)$$

unde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ este vectorul variabilelor cuplelor cinematice, $q_i = \theta_i$ pentru o cuplă cinematică de rotație și $q_i = d_i$ pentru o cuplă de translație. Atât poziția, cât și orientarea efectorului final, depind de aceste variabile.

Scopul analizei cinematice a vitezelor este de a găsi legătura dintre vitezele cuplelor și vitezele liniară și unghiulară ale efectorului final. Cu alte cuvinte, se cere determinarea expresiei vitezei liniare $\dot{\mathbf{p}}$ și unghiulare $\boldsymbol{\omega}$, ca funcții de vitezele $\dot{\mathbf{q}}$ ale cuplelor cinematice:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.93)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.94)$$

În relația (6.93), \mathbf{J}_p este o submatrice $3 \times n$ a matricei Jacobiene, reprezentând contribuția vitezelor cuplelor cinematice $\dot{\mathbf{q}}$ la viteza liniară $\dot{\mathbf{p}}$ a efectorului final, iar în (6.94) \mathbf{J}_o este o submatrice $3 \times n$, reprezentând contribuția vitezelor $\dot{\mathbf{q}}$ la viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ a efectorului final. În formă compactă, relațiile (6.93) și (6.94) pot fi scrise astfel:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.95)$$

care reprezintă *ecuația cinematicii directe a vitezelor* manipulatorului. Matricea \mathbf{J} de dimensiune $6 \times n$ poartă numele de *matrice Jacobiană geometrică* a manipulatorului,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix}, \quad (6.96)$$

care este, în general, o funcție de variabilele cuplelor cinematice.

6.4.1 Derivarea unei matrice de rotație

Ecuația cinematicii directe a unui robot de tip manipulatorului (vezi relația (4.3) din vol. 1) descrie poziția și orientarea efectorului final, ca o funcție de variabilele cuplelor cinematice, prin intermediul unui vector de poziție și a unei matrice de rotație. Deoarece scopul

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

nostru este de a caracteriza viteza liniară și unghiulară a efectorului final, este necesară derivarea matricei de rotație în raport cu timpul.

Considerăm o matrice ortogonală de rotație ca funcție de timp $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, respectând relația

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) = \mathbf{I}, \quad (6.97)$$

unde \mathbf{I} este matricea unitate. Derivând relația în raport cu timpul, obținem

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}^T(t) = \mathbf{0}, \quad (6.98)$$

unde $\mathbf{0}$ este matricea nulă. Ecuația (6.98) poate fi rescrisă sub forma

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) + \left(\dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) \right)^T = \mathbf{0}. \quad (6.99)$$

Notând cu

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t), \quad (6.100)$$

vom avea

$$\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{0}. \quad (6.101)$$

Se poate observa că \mathbf{S} este o matrice 3x3 antisimetrică. Înmulțind ambii termeni ai relației (6.100) cu $\mathbf{R}(t)$, obținem

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{R}(t). \quad (6.102)$$

Deoarece matricea $\mathbf{R}(t)$ este ortogonală, putem scrie

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^{-1}(t), \quad (6.103)$$

6.4.2 Calculul matricei Jacobiene geometrice

Considerăm matricea Jacobiană (6.96) a unui manipulator cu n cuple cinematice, care conține $2n$ vectori coloană cu dimensiunea 3x1:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1} & \cdots & \mathbf{J}_{Pn} \\ \mathbf{J}_{O1} & \cdots & \mathbf{J}_{On} \end{bmatrix}, \quad (6.104)$$

Bazele Roboticii

unde vectorii \mathbf{J}_{pi} reprezintă contribuția cuplei cinematice i la viteza liniară a efectorului final, iar \mathbf{J}_{Oi} constituie contribuția cuplei cinematice i la viteza unghiulară a acestuia. Se poate demonstra că acești vectori au forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pi} \\ \mathbf{J}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \left({}^0\mathbf{p} - {}_{i-1}^0\mathbf{p} \right) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{pt. o cupla cinematica de } \textit{rotatie} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{pt. o cupla cinematica de } \textit{translatie} \end{cases}, (6.105)$$

pentru $i = 1..n$, unde:

- vectorul \mathbf{z}_{i-1} este reprezentat de a treia coloană a matricei de rotație ${}_{i-1}^0\mathbf{R}$ sau se poate calcula cu relația

$$\mathbf{z}_{i-1} = {}_{i-1}^0\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}_0, (6.106)$$

cu

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; (6.107)$$

- vectorul ${}_{i-1}^0\mathbf{p}$ este reprezentat de primele trei elemente ale coloanei a patra din matricea omogenă ${}_{i-1}^0\mathbf{T}$ sau se poate calcula astfel

$${}_{i-1}^0\mathbf{p} = {}_{i-1}^0\mathbf{T} \cdot {}_0^0\mathbf{p}, (6.108)$$

cu

$${}_0^0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; (6.109)$$

- vectorul ${}_n^0\mathbf{p}$ este reprezentat de primele trei elemente ale coloanei a patra din matricea omogenă ${}_n^0\mathbf{T}$ sau se poate calcula cu relația

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^0_n\mathbf{p} = {}^0_n\mathbf{T} \cdot {}^0_0\mathbf{p}. \quad (6.110)$$

Din ${}^0_0\mathbf{p}$, respectiv din produsele (6.108) și (6.110), se rețin numai primii trei termeni.

Cu alte cuvinte, matricea Jacobiană geometrică a unui manipulator cu n grade de mobilitate, având toate cele n cuple cinematice de rotație, capătă forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \left({}^0_n\mathbf{p} - {}^0_0\mathbf{p} \right) & \cdots & \mathbf{z}_{i-1} \times \left({}^0_n\mathbf{p} - {}^0_{i-1}\mathbf{p} \right) & \cdots & \mathbf{z}_{n-1} \times \left({}^0_n\mathbf{p} - {}^0_{n-1}\mathbf{p} \right) \\ \mathbf{z}_0 & \cdots & \mathbf{z}_{i-1} & \cdots & \mathbf{z}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.111)$$

Pentru un manipulator cu n grade de mobilitate, având $n-1$ cuple cinematice de rotație și cupla cinematică i de translație, matricea Jacobiană are forma generală

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \left({}^0_n\mathbf{p} - {}^0_0\mathbf{p} \right) & \cdots & \mathbf{z}_{i-1} & \cdots & \mathbf{z}_{n-1} \times \left({}^0_n\mathbf{p} - {}^0_{n-1}\mathbf{p} \right) \\ \mathbf{z}_0 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{z}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.112)$$

Vectorii ce intervin în matricea Jacobiană geometrică au formele prezentate anterior numai pentru convenția Denavit-Hartenberg standard.

6.4.3 Schimbarea sistemului de referință al matricei Jacobiene

Trebuie remarcat faptul că ecuațiile scrise anterior pot fi folosite pentru a calcula vitezele liniare și unghiulare ale oricărui punct din structura manipulatorului, atunci când se cunoaște funcția ce definește cinematica directă a punctului respectiv.

De asemenea, trebuie notat că matricea Jacobiană depinde de sistemul de axe în raport cu care au fost exprimate vitezele efectorului final. Ecuațiile prezentate anterior permit determinarea matricei Jacobiene în raport cu sistemul de referință fix $\{0\}$. Dacă se cere reprezentarea matricei Jacobiene în raport cu un alt sistem de axe, este suficient să cunoaștem matricea de rotație relativă scrisă la trecerea de la sistemul de axe respectiv la sistemul de referință $\{0\}$.

Fie ${}^0\mathbf{J}$ matricea Jacobiană a unui manipulator, scrisă în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, care permite determinarea vitezelor efectorului final în raport cu sistemul de referință menționat

Bazele Roboticii

$${}^0\mathbf{v} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ {}^0\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.113)$$

Presupunem că dorim să calculăm vitezele efectorului în raport cu alt sistem de axe, sistemul $\{a\}$ spre exemplu. Mai întâi, trebuie notat faptul că vectorul viteză ${}^0\mathbf{v}$ cu dimensiunea 6×1 este descris în raport cu sistemul $\{a\}$ de transformarea

$${}^a\mathbf{v} = \begin{bmatrix} {}^a\dot{\mathbf{p}} \\ {}^a\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a_0\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^a_0\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}} \\ {}^0\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a_0\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^a_0\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^0\mathbf{v}. \quad (6.114)$$

Deci, putem scrie

$$\begin{bmatrix} {}^a\dot{\mathbf{p}} \\ {}^a\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a_0\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^a_0\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^0\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.115)$$

ceea ce înseamnă că schimbarea sistemului de referință a unei matrice Jacobiene este descrisă de următoarea relație

$${}^a\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^a_0\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^a_0\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot {}^0\mathbf{J}. \quad (6.116)$$

6.4.4 Exemple de calcul a matricei Jacobiene

În cele ce urmează vor fi calculate matricele Jacobiene în raport cu sistemul de referință $\{0\}$ pentru câteva tipuri de manipolatoare, a căror cinematică directă a fost rezolvată în Cap. 4.

6.4.4.1 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate

Considerăm un manipulator plan cu trei grade de mobilitate (Fig. 6.5).

Matricele de transformare omogene, la trecerea de la elementul fix 0 către elementul final 3 (folosind convenția parametrilor Denavit-Hartenberg standard) sunt:

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

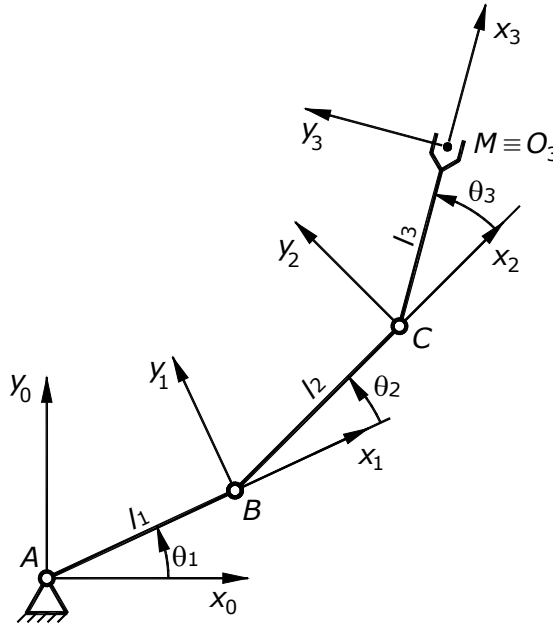


Fig. 6.5 Manipulator plan cu trei grade de mobilitate,

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.117)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.118)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.119)$$

Bazele Roboticii

Plecând de la relația (4.3), putem determina celelalte matrice de transformare,

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 \cdot c_{12} + l_1 \cdot c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 \cdot s_{12} + l_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.120)$$

$${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.121)$$

unde s-au făcut notațiile: $s_1 = \sin \theta_1$, $c_1 = \cos \theta_1$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

De asemenea, matricele de rotație corespunzătoare sunt:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.122)$$

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.123)$$

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.124)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.125)$$

Matricea Jacobiană scrisă în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, conform relației (6.112), va fi

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \mathbf{p} - \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \mathbf{p} \right) & \mathbf{z}_1 \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \mathbf{p} - \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{p} \right) & \mathbf{z}_2 \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \mathbf{p} - \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \mathbf{p} \right) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.126)$$

Conform paragrafului 6.4.2,

$$\mathbf{z}_1 = {}^0_1\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.127)$$

$$\mathbf{z}_2 = {}^0_2\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (6.128)$$

$${}^0_1\mathbf{T} \cdot \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 \cdot c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 \\ l_1 \cdot s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.129)$$

adică

$$\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 \\ l_1 \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.130)$$

$${}^0_2\mathbf{T} \cdot \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_2 \cdot c_{12} + l_1 \cdot c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2 \cdot s_{12} + l_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_{12} + l_1 \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_{12} + l_1 \cdot s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.131)$$

ceea ce înseamnă

$$\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_{12} + l_1 \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_{12} + l_1 \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.132)$$

Bazele Roboticii

$${}^0_3\mathbf{T} \cdot {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.133)$$

adică

$${}^0_3\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.134)$$

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.135)$$

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.136)$$

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_3 \cdot c_{123} \\ l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.137)$$

Vectorii \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 și ${}^0_1\mathbf{p}$, ${}^0_2\mathbf{p}$, ${}^0_3\mathbf{p}$ se pot obține direct, fără efectuarea calculelor prezentate anterior, aceștia reprezentând a treia coloană a matricelor ${}^0_1\mathbf{R}$, ${}^0_2\mathbf{R}$, respectiv primele trei elemente ale coloanei a patra din matricele ${}^0_1\mathbf{T}$, ${}^0_2\mathbf{T}$, ${}^0_3\mathbf{T}$.

În aceste condiții, matricea (6.126) devine

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot s_1 - l_2 \cdot s_{12} - l_3 \cdot s_{123} & -l_2 \cdot s_{12} - l_3 \cdot s_{123} & -l_3 \cdot s_{123} \\ l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} & l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} & l_3 \cdot c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.138)$$

În matricea Jacobiană descrisă de (6.138), numai cele trei linii nenule sunt relevante, ele referindu-se la cele două componente ale vitezei liniare a efectorului final în lungul axelor x_0 și y_0 , respectiv la componenta vitezei unghiulare în jurul axei z_0 . Acest rezultat poate fi obținut observând că trei grade de mobilitate permit specificarea a cel mult trei variabile a efectorului final; v_z , ω_x și ω_y sunt întotdeauna nule pentru această structură cinematică.

6.4.4.2 Manipulator antropomorf

Pentru manipulatorul antropomorf, Fig. 6.6, matricele de rotație, respectiv matricele de transformare (convenția D-H standard) sunt după cum urmează:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.139)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.140)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.141)$$

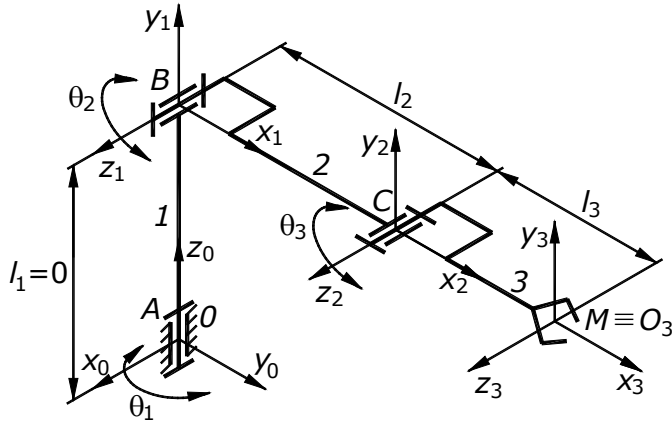


Fig. 6.6 Manipulator antropomorf

$${}^0_2T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot c_2 & s_1 \cdot s_2 & c_1 & -l_2 \cdot s_1 \cdot c_2 \\ c_1 \cdot c_2 & -c_1 \cdot s_2 & s_1 & l_2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.142)$$

$${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot c_{23} & s_1 \cdot s_{23} & c_1 & -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ c_1 \cdot c_{23} & -c_1 \cdot s_{23} & s_1 & (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.143)$$

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.144)$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.145)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.146)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -s_1c_2 & s_1s_2 & c_1 \\ c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.147)$$

Matricea Jacobiană a manipulatorului va fi

$${}^0_0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times \left({}^0_3\mathbf{p} - {}^0_0\mathbf{p} \right) & \mathbf{z}_1 \times \left({}^0_3\mathbf{p} - {}^0_1\mathbf{p} \right) & \mathbf{z}_2 \times \left({}^0_3\mathbf{p} - {}^0_2\mathbf{p} \right) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.148)$$

unde:

$$\mathbf{z}_1 = {}^0_1\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 \\ c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.149)$$

$$\mathbf{z}_2 = {}^0_2\mathbf{R} \cdot \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -s_1c_2 & s_1s_2 & c_1 \\ c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.150)$$

$${}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.151)$$

adică

$${}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.152)$$

Bazele Roboticii

$${}^0_2\mathbf{T} \cdot {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot c_2 & s_1 \cdot s_2 & c_1 & -l_2 \cdot s_1 \cdot c_2 \\ c_1 \cdot c_2 & -c_1 \cdot s_2 & s_1 & l_2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s_1 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.153)$$

adică

$${}^0_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s_1 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \end{bmatrix}; \quad (6.154)$$

$${}^0_3\mathbf{T} \cdot {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & c_1 & -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.155)$$

adică

$${}^0_3\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \end{bmatrix}; \quad (6.156)$$

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \end{bmatrix}; \quad (6.157)$$

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ (l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23} \end{bmatrix}; \quad (6.158)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

$${}^0_3\mathbf{p} - {}^0_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -l_3 \cdot s_1 \cdot c_{23} \\ l_3 \cdot c_1 \cdot c_{23} \\ l_3 \cdot s_{23} \end{bmatrix}. \quad (6.159)$$

Matricea Jacobiană (6.148) va fi

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 & (l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23}) \cdot s_1 & l_3 \cdot s_1 \cdot s_{23} \\ -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 & -(l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23}) \cdot c_1 & -l_3 \cdot c_1 \cdot s_{23} \\ 0 & l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23} & l_3 \cdot c_{23} \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.160)$$

6.5 Singularități

Așa cum se vede în relația (6.95), matricea Jacobiană depinde de parametrii cinematici ai cuplelor, reprezentați prin vectorul \mathbf{q} . Mulți roboți prezintă configurații cu valori ale acestor parametri, pentru care matricea Jacobiană devine singulară (determinantul ei este zero). Aceste configurații sunt numite *singularități cinemate ale mecanismului* sau, pe scurt, *singularități*. Toate manipulatorele au singularități la granița spațiului lor de lucru, și multe dintre ele au o serie de singularități în interiorul acestui spațiu. Descoperirea singularităților unui manipulator prezintă un interes deosebit din următoarele motive:

- Singularitățile reprezintă configurații pentru care mobilitatea structurii cinemate este redusă, spre exemplu, impunerea unei mișcări arbitrare efectorului final nu este posibilă;
- Când manipulatorul este într-o asemenea configurație (singulară), poate exista un număr infinit de soluții pentru cinematica inversă;
- În vecinătatea unei poziții singulare (unei singularități), vitezele mici ale efectorului final pot cauza viteze mari ale cuplelor cinemate.

Singularitățile pot fi clasificate în două categorii:

Bazele Roboticii

- *Singularități de frontieră*, ce apar atunci când manipulatorul este extins sau pliat. Se înțelege că aceste singularități nu reprezintă o reală deficiență, deoarece ele pot fi evitate impunând condiția ca manipulatorul să fie astfel controlat, încât efectorul final să nu atingă limitele spațiului de lucru.
- *Singularități interne*, ce apar în interiorul spațiului de lucru și sunt, în general, cauzate de alinierea a două sau mai multe axe ale cuplelor cinematice sau de atingerea unor configurații particulare de către efectorul final. Spre deosebire de cazul anterior, aceste singularități constituie o problemă serioasă, deoarece pot fi întâlnite oriunde în spațiul de lucru, pentru o anumită traiectorie planificată.

Considerăm, pentru exemplificare, manipulatorul cu două grade de mobilitate din Fig. 6.7, aflat în extensie. În acest caz, vom considera numai componentele \dot{p}_x și \dot{p}_y ale vitezei liniare a efectorului final, mișcarea acestuia având loc într-un plan. De aceea, submatricea matricei Jacobiene datorată acestor componente este

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (6.161)$$

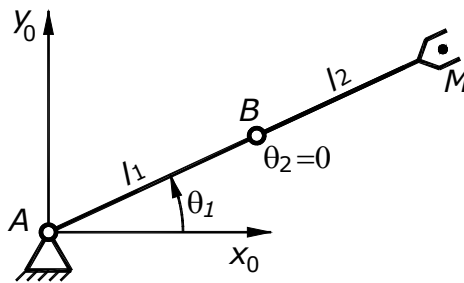


Fig. 6.7 Manipulator cu două grade de mobilitate într-o poziție singulară de frontieră

Pentru a analiza rangul matricei (6.161), considerăm determinantul acesteia,

$$\det(\mathbf{J}_p) = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \theta_2. \quad (6.162)$$

Pentru $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ este ușor să găsim că determinantul este nul pentru $\theta_2 = 0$ și $\theta_2 = \pi$, θ_1 fiind irelevant pentru determinarea

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

configurațiilor singulare. Aceste configurații apar atunci când manipulatorul este într-una din aceste situații ale parametrului θ_2 (vezi Fig. 6.7, pentru $\theta_2 = 0$).

Analizând mișcarea mecanismului în asemenea configurație, se poate observa că cele două coloane $\begin{bmatrix} -(l_1 + l_2) \cdot \sin \theta_1 & (l_1 + l_2) \cdot \cos \theta_1 \end{bmatrix}^T$ și $\begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_1 & l_2 \cdot \cos \theta_1 \end{bmatrix}^T$ ale matricei Jacobiene devin paralele și, de aceea, rangul matricei devine unu; aceasta înseamnă că, componentele vitezei efectorului final nu sunt independente.

6.5.1 Decuplarea singularităților

Determinarea singularităților interne cu ajutorul matricei Jacobiene poate fi plictisitoare sau dificilă, pentru structurile complexe. Pentru manipolatoarele având un mecanism de orientare sferic, ca și în cazul cinematicii inverse, este posibil a diviza problema determinării singularităților în două probleme distincte:

- Determinarea *singularităților brațului* (mecanismului de poziționare), acestea rezultând din analiza mișcării primelor trei (sau mai multe, în funcție de complexitatea structurii manipulatorului) elemente;
- Determinarea *singularităților mecanismului de orientare*, din analiza mișcării cuplelor cinematice ale acestuia.

Pentru simplificare, considerăm un manipulator serial cu șase grade de mobilitate, având toate cuplele cinematice de rotație. Matricea Jacobiană a manipulatorului poate fi divizată în patru submatrice (3×3), după cum urmează:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.163)$$

unde, deoarece ultimele trei cuple cinematice (ale mecanismului de orientare) sunt de rotație, expresiile submatricelor din dreapta sunt

$$\mathbf{J}_{12} = \left[\mathbf{z}_3 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad \mathbf{z}_4 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad \mathbf{z}_5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} \right] \quad (6.164)$$

și

$$\mathbf{J}_{22} = [\mathbf{z}_3 \quad \mathbf{z}_4 \quad \mathbf{z}_5]. \quad (6.165)$$

Deoarece singularitățile depind, de obicei, de structura mecanică și nu de sistemele de axe atașate elementelor, în vederea efectuării analizei cinematice este convenabil să se aleagă originea

Bazele Roboticii

sistemului de axe atașat efectorului final în punctul de intersecție al axelor celor trei cuple cinematice ale mecanismului de orientare. Această alegere conduce la ${}^0_3\mathbf{p} = {}^0_4\mathbf{p} = {}^0_5\mathbf{p} = {}^0_6\mathbf{p} = \mathbf{0}$ și

$$\mathbf{J}_{12} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]. \quad (6.166)$$

În aceste condiții, calculul determinantului matricei (6.163) este mult simplificat, deoarece acesta este dat de produsul determinantilor submatricelor de pe o diagonală,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}) &= \det(\mathbf{J}_{11}) \cdot \det(\mathbf{J}_{22}) - \det(\mathbf{J}_{21}) \cdot \det(\mathbf{J}_{12}) = \\ &= \det(\mathbf{J}_{11}) \cdot \det(\mathbf{J}_{22}) \end{aligned} \quad (6.167)$$

Rezultatul este o reală *decuplare a singularităților*, condiția

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0 \quad (6.168)$$

conducând la determinarea *singularităților mecanismului de poziționare (brațului)*, iar condiția

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \quad (6.169)$$

conducând la determinarea *singularităților mecanismului de orientare*.

Trebuie notat faptul că această formă de matrice Jacobiană nu oferă o relație între vitezele cuplelor cinematice și viteza efectorului final, dar permite simplificarea determinării singularităților. În cele ce urmează vor fi analizate în detaliu cele două tipuri de singularități.

6.5.2 Singularitățile mecanismului de orientare

Pe baza celor prezentate în paragraful anterior, se pot determina singularitățile mecanismului de orientare analizând submatricea \mathbf{J}_{22} în (6.165). Se poate spune că mecanismul de orientare este într-o configurație singulară oricând vectorii \mathbf{z}_3 , \mathbf{z}_4 , \mathbf{z}_5 sunt linear dependenți. Analiza cinematică a mecanismului de orientare scoate la iveală faptul că o singularitate apare atunci când \mathbf{z}_3 și \mathbf{z}_5 sunt *aliniați* (Fig. 6.8), spre exemplu oricând

$$\theta_5 = 0 \text{ sau } \theta_5 = \pi. \quad (6.170)$$

Luând în considerare numai prima configurație, $\theta_5 = 0$, pierderea mobilității este cauzată de faptul că rotațiile în sensuri

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

opuse, cu același unghi $\theta_4 = -\theta_6$, nu produc nici o rotație a efectorului final.

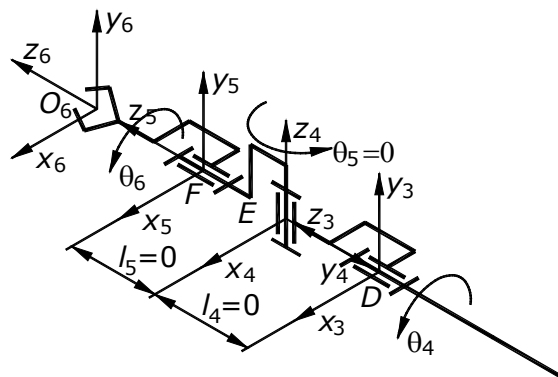


Fig. 6.8 Mecanism de orientare sferic într-o configurație cu singularități

În plus, mecanismul de orientare nu permite rotația după o axă perpendiculară pe axele z_3 și z_4 . (vezi primul motiv pentru studierea singularităților, de la începutul paragrafului 6.5). Această singularitate poate să apară oriunde în spațiul de lucru al manipulatorului. În consecință, trebuie acordată o atenție deosebită în programarea mișcării efectorului final.

6.5.3 Singularitățile mecanismului de poziționare

Singularitățile mecanismului de poziționare depind de structura manipulatorului. Pentru a pune în evidență modul de determinare al acestor singularități, considerăm mecanismul de poziționare antropomorf (Fig. 6.6), al cărui matrice Jacobiană este dată de relația (6.160). Din matricea respectiva, reținem doar submatricea corespunzătoare vitezelor lineare:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot c_1 & (l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23}) \cdot s_1 & l_3 \cdot s_1 \cdot s_{23} \\ -(l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23}) \cdot s_1 & -(l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_{23}) \cdot c_1 & -l_3 \cdot c_1 \cdot s_{23} \\ 0 & l_2 \cdot c_2 + l_3 \cdot c_{23} & l_3 \cdot c_{23} \end{bmatrix} \quad (6.171)$$

Determinantul matricei (6.167) este

Bazele Roboticii

$$\det(\mathbf{J}_p) = l_2 \cdot l_3 \cdot \sin \theta_3 \cdot [l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3)]. \quad (6.172)$$

Se poate observa că determinantul nu depinde de parametrul θ_1 al primei cuple cinematice.

Pentru $l_2 \neq 0$ și $l_3 \neq 0$, determinantul devine nul dacă $\sin \theta_3 = 0$ și/sau $l_2 \cdot \cos \theta_2 + l_3 \cdot \cos \theta_{23} = 0$. Prima situația apare atunci când

$$\theta_3 = 0 \text{ sau } \theta_3 = \pi, \quad (6.173)$$

ceea ce înseamnă că elementele 2 și 3 sunt în prelungire sau suprapuse (Fig. 6.9) și se numește *singularitatea cotului*. Trebuie notat faptul că acest tip de singularitate este echivalent cu singularitatea găsită pentru manipulatorul plan cu două elemente.

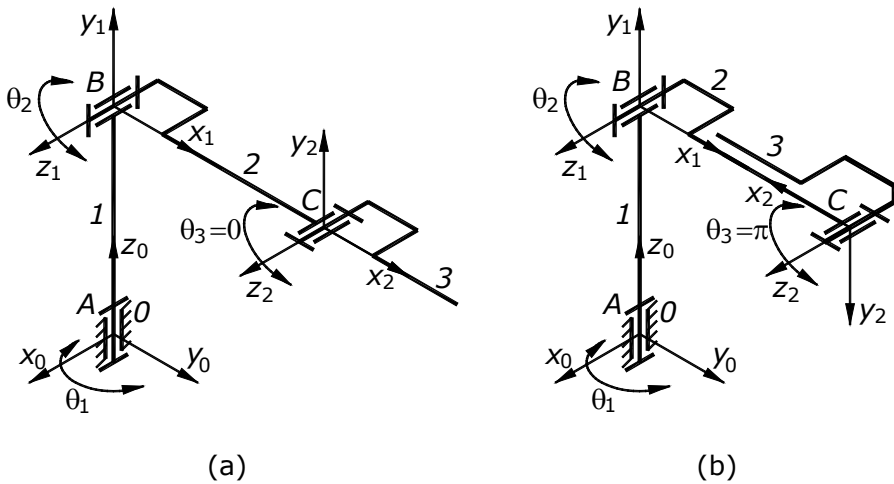


Fig. 6.9 Manipulator antropomorf cu o singularitate a cotului: a) $\theta_3 = 0$; b) $\theta_3 = \pi$

Făcând apel la ecuația (6.143), se poate observa că cea de a doua situație apare atunci când extremitatea finală a elementului 3 (punctul de intersecție al axelor cuplelor mecanismului de orientare) se află pe axa z_0 (Fig. 6.10), fapt ce conduce la

$$p_x = p_y = 0 \quad (6.174)$$

și se numește *singularitatea umărului*.

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

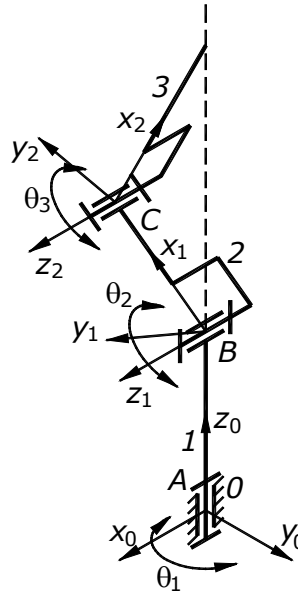


Fig. 6.10 Manipulator antropomorf cu o singularitate a umărului

Notăm faptul că rotația cu θ_1 a primei cuple cinematice nu produce nici o translație a extremității elementului 3. Prima coloană a matricei \mathbf{J}_p este tot timpul nulă în cazul unei singularități a umărului, iar ecuațiile cinematice admit soluții infinite. Mai mult, mișcările ce pleacă din poziția de singularitate, pentru deplasarea pe direcția z_1 a extremității menționate, nu sunt permise (vezi al doilea motiv pentru studierea singularităților, de la începutul paragrafului 6.5).

În final, este important de remarcat faptul că, spre deosebire de singularitățile mecanismului de orientare, cele ale mecanismului de poziționare pot fi evitate în faza de planificare a traiectoriei a efecteurului final.

6.6 Cinematica inversă a vitezelor

După cum s-a putut constata la începutul acestui capitol, cinematica directă a vitezelor este descrisă de ecuația

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.175)$$

Bazele Roboticii

unde: $\mathbf{v} = [\dot{\mathbf{p}} \ \boldsymbol{\omega}]^T$ este vectorul viteză a efectorului final, iar $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]$ reprezintă vectorul viteză al cuplelor cinematice.

Dacă matricea Jacobiană nu este singulară și este patratică, se poate determina inversa acesteia, respectiv se pot calcula vitezele cuplelor cinematice cunoscând vitezele efectorului final

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}. \quad (6.176)$$

Cu alte cuvinte, dacă operația pe care trebuie să o efectueze robotul impune o anumită viteză efectorului final (spre exemplu, cazul operației de sudare), ecuația (6.176) permite determinarea vitezelor ce trebuie impuse fiecărei cuple cinematice.

Relația (6.176) reprezintă *ecuația cinematicii inverse a vitezelor* unui manipulator.

Pentru mulți roboți, matricea Jacobiană nu este pătratică, ceea ce înseamnă că nu poate fi calculată inversa acesteia. În aceste situații se calculează *matricea Jacobiană pseudo-inversă*.

Să considerăm că matricea Jacobiană a unui manipulator are dimensiunea $(m \times n)$, unde m este numărul de linii, iar n numărul de coloane. Matricea Jacobiană pseudo-inversă \mathbf{J}^+ se calculează cu relațiile:

$$\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T, \text{ dacă } m < n, \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{J} = \mathbf{I}_m; \quad (6.177)$$

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}, \text{ dacă } m > n, \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^+ = \mathbf{I}_n. \quad (6.178)$$

6.7 Matricea Jacobiană analitică

În paragrafele anterioare s-a arătat modalitatea de calcul a matricei Jacobiene a vitezelor folosind o *metodă geometrică*, prin care sunt determinate contribuțiile vitezei fiecărei cuple cinematice la componentele vitezei efectorului final.

Dacă atât poziția, cât și orientarea efectorului final, sunt exprimate analitic în raport cu un sistem de referință, se poate calcula matricea Jacobiană prin derivarea funcției cinematicii directe în raport cu variabilele cuplelor cinematice. În acest scop, în continuare va fi prezentată o *metodă analitică* de calcul a matricei Jacobiene.

Considerăm un manipulator cu n grade de mobilitate, a cărui cinematică directă poate fi exprimată printr-o serie de ecuații analitice,

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

iar poziția și orientarea efectorului final în raport cu sistemul de referință sunt date de vectorul \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (6.179)$$

unde: $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$ este vectorul de poziție al originii sistemului de axe atașat efectorului final, în raport cu sistemul de referință $\{0\}$; $\phi = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]^T$ reprezintă vectorul orientare al aceluiași sistem de axe.

Vitezele liniare ale efectorului final sunt descrise de relația

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_p \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.180)$$

unde: $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ este vectorul variabilelor cuplelor cinematice, $q_i = \theta_i$ pentru o cuplă cinematică de rotație și $q_i = d_i$ pentru o cuplă de translație (atât poziția, cât și orientarea efectorului final depind de aceste variabile); \mathbf{J}_p este submatricea matricei Jacobiene, datorată vitezelor liniare ale efectorului final.

În ceea ce privește viteza rotațională a efectorului final, poate fi considerată reprezentarea minimă a orientării în funcție de variabilele ϕ . Derivata în raport cu timpul, $\dot{\phi}$, a vectorului respectiv diferă, în general, de vectorul viteză unghiulară a ω a efectorului final. În orice caz, atunci când funcția $\phi(q)$ este cunoscută, se poate scrie relația

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\phi \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (6.181)$$

unde \mathbf{J}_ϕ este submatricea matricei Jacobiene, datorată vitezelor unghiulare ale efectorului final.

Determinarea submatricei \mathbf{J}_ϕ nu este simplă, deoarece în mod obișnuit funcția $\phi(\mathbf{q})$ nu se obține direct (cu excepția roboților plani), ci necesită un calcul utilizând elementele matricei de rotație.

Pe baza celor menționate anterior, ecuația cinematicii directe a vitezelor poate fi obținută prin derivarea în raport cu timpul a ecuației cinematicii directe a pozițiilor:

Bazele Roboticii

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_\phi \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} . \quad (6.182)$$

În cazul unui robot cu n grade de mobilitate, forma generală a matricei Jacobiene analitice va fi

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \frac{\partial p_x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \frac{\partial p_y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_1} & \frac{\partial p_z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \phi_z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \phi_z}{\partial q_n} \end{bmatrix} . \quad (6.183)$$

Dacă matricea \mathbf{J}_A este nesingulară și se poate determina inversa acesteia, problema cinematicii inverse a vitezelor este descrisă de relația

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1} \cdot \dot{\mathbf{x}} . \quad (6.184)$$

Matricea Jacobiană analitică \mathbf{J}_A diferă, în general, de matricea Jacobiană geometrică \mathbf{J} deoarece (așa cum s-a menționat anterior) vectorul viteză unghiulară a $\boldsymbol{\omega}$ a efectorului final diferă, de cele mai multe ori, de derivata în raport cu timpul a vectorului $\boldsymbol{\phi}$.

Este posibil să se găsească relația de legătură dintre viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ și viteza de rotație $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ pentru un set de unghiuri de orientare. Spre exemplu, considerăm unghiurile Euler ZYZ definite în capitolul 3, volumul 1. În Fig. 6.11 au fost reprezentați vectorii corespunzători vitezelor rotaționale $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, $\dot{\boldsymbol{\nu}}$, $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ în raport cu sistemul de axe curent. Fig. 6.12 ilustrează modul în care se pot calcula contribuțiile fiecărei viteze de rotație la componentele vitezei unghiulare în jurul axelor sistemului de axe:

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

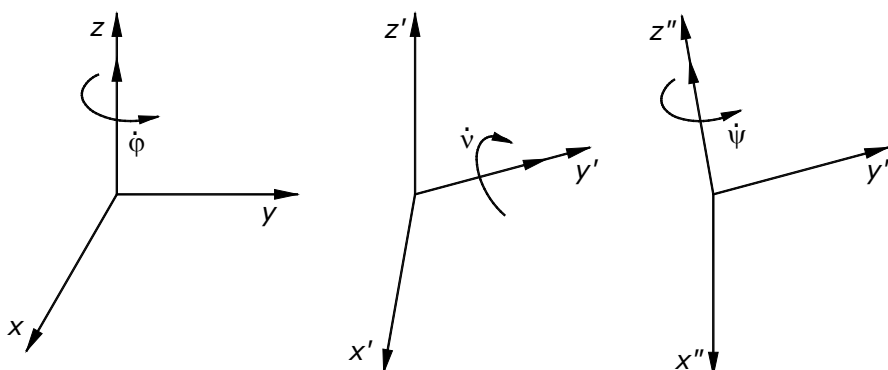


Fig. 6.11 Vitezele de rotație ale unghiurilor Euler ZYZ în sistemul de axe curent

- ca o contribuție a lui $\dot{\varphi}$, $[\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = \dot{\varphi} \cdot [0 \ 0 \ 1]^T$;
 - ca o contribuție a lui $\dot{\psi}$, $[\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = \dot{\psi} \cdot [-\sin \varphi \ \cos \varphi \ 0]^T$;
 - contribuția lui $\dot{\nu}$, $[\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = \dot{\nu} \cdot [c_\varphi \cdot s_\nu \ s_\varphi \cdot s_\nu \ c_\nu]^T$,
- unde s-au făcut notațiile, $c_\varphi = \cos \varphi$, $s_\varphi = \sin \varphi$, $c_\nu = \cos \nu$, $s_\nu = \sin \nu$.

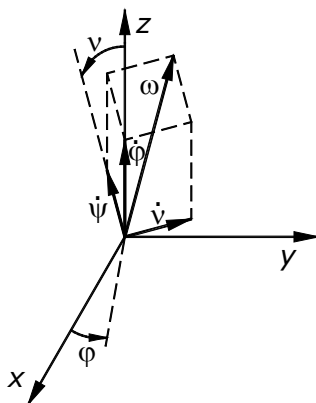


Fig. 6.12 Compunerea vitezelor de rotație elementare pentru determinarea vitezei unghiulare

În final, ecuația corespunzătoare vitezei unghiulare ω în funcție de derivata în raport cu timpul a unghiurilor Euler, $\dot{\phi}$, este:

Bazele Roboticii

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi \cdot s_\nu \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi \cdot s_\nu \\ 1 & 0 & c_\nu \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (6.185)$$

Determinantul matricei \mathbf{T} este $-\sin \nu$, ceea ce înseamnă că matricea respectivă nu poate fi inversată pentru $\nu = 0$ sau $\nu = \pi$. Aceasta înseamnă că, deși toate vitezele de rotație ale sistemului efectorului final pot fi exprimate în funcție de un vector viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$, există viteze unghiulare care nu pot fi exprimate prin intermediul lui $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ atunci când orientarea sistemului de axe atașat efectorului final conduce la $\sin \nu = 0$. De fapt, în această situație, vitezele unghiulare ce pot fi descrise de $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ ar trebui să aibă componente ce liniar dependente pe direcție perpendiculară pe axa z ($\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\nu}^2$). O orientare pentru care determinantul matricei de transformare \mathbf{T} devine nul se numește *reprezentare singulară* a lui $\dot{\boldsymbol{\phi}}$.

Din punct de vedere fizic, semnificația lui $\boldsymbol{\omega}$ este mult mai intuitivă decât cea a lui $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. Cele trei componente ale lui $\boldsymbol{\omega}$ reprezintă componentele vitezei unghiulare ale efectorului final în raport cu sistemul de axe de referință. În schimb, cele trei componente ale lui $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ reprezintă componentele neortogonale ale vitezei unghiulare definite în raport cu axele unui sistem ce variază pe măsură ce orientarea efectorului final variază. Pe de altă parte, deși integrarea lui $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ în raport cu timpul ne conduce la $\boldsymbol{\phi}$, integrarea lui $\boldsymbol{\omega}$ nu admite o interpretare fizică clară, așa cum se vede în exemplul ce urmează.

Odată ce se cunoaște matricea de transformare $\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi})$, dintre $\boldsymbol{\omega}$ și $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, poate fi exprimată matricea Jacobiană analitică \mathbf{J}_A , în funcție de matricea Jacobiană geometrică \mathbf{J} după cum urmează

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}) \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\phi}) \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad (6.186)$$

care, conform relațiilor (6.95) și (6.182), conduce la

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{J}_A, \quad (6.187)$$

$$\mathbf{J}_A = \mathbf{T}_A^{-1}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{J}. \quad (6.188)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

Această relație arată că matricele \mathbf{J} și \mathbf{J}_A , în general, diferă. În ceea ce privește utilizarea uneia sau a celeilalte, în toate problemele influențate de matricea Jacobiană, se poate anticipa că matricea Jacobiană geometrică va fi adoptată oricând este necesară referirea la cantități cu semnificație fizică, în timp ce matricea Jacobiană analitică va fi adoptată atunci când este necesară referirea la cantități diferențiale ale variabilelor definite în spațiul de lucru.

Relația (6.188) de determinare a matricei Jacobiene analitice este mult superioară relației (6.183).

Pentru unele geometrii de manipuloare, este posibilă stabilirea unei echivalențe substanțiale între \mathbf{J} și \mathbf{J}_A . De fapt, atunci când gradele de mobilitate ale acestora cauzează rotații ale efectorului final în jurul aceleiași axe fixe în spațiu, cele două matrice Jacobiene sunt identice. Acesta este cazul manipulatorului plan cu trei grade de mobilitate. Matricea sa Jacobiană (paragraful 6.7.2) scoate în evidență faptul că sunt posibile numai rotații în jurul axei x_0 . Matricea Jacobiană analitică (3×3), ce poate fi obținută considerând componentele poziției efectorului final în planul structurii și definind orientarea acestuia ca fiind $\phi = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, coincide cu matricea obținută eliminând cele trei linii nule ale matricei Jacobiene geometrice.

6.7.1 Exemplu de integrare a vitezei unghiulare

Considerăm un obiect a cărui orientare în raport cu sistemul de referință este cunoscută la timpul $t = 0$ (Fig. 6.13). Stabilim că $\boldsymbol{\omega}$ are următoarele variații în timp:

$$\boldsymbol{\omega} = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T, \text{ pt. } 0 \leq t \leq 1 \quad \boldsymbol{\omega} = [0 \ \pi/2 \ 0]^T, \text{ pt. } 1 \leq t \leq 2,$$

respectiv

$$\boldsymbol{\omega} = [0 \ \pi/2 \ 0]^T, \text{ pt. } 0 \leq t \leq 1 \quad \boldsymbol{\omega} = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T, \text{ pt. } 1 \leq t \leq 2.$$

Integrarea lui $\boldsymbol{\omega}$ ne dă același rezultat în ambele cazuri

$$\int_0^2 \boldsymbol{\omega} \cdot dt = [\pi/2 \ \pi/2 \ 0]^T,$$

dar orientarea finală corespunzătoare celei de a doua legi de variație este totat diferită față de cea corespunzătoare primei legi.

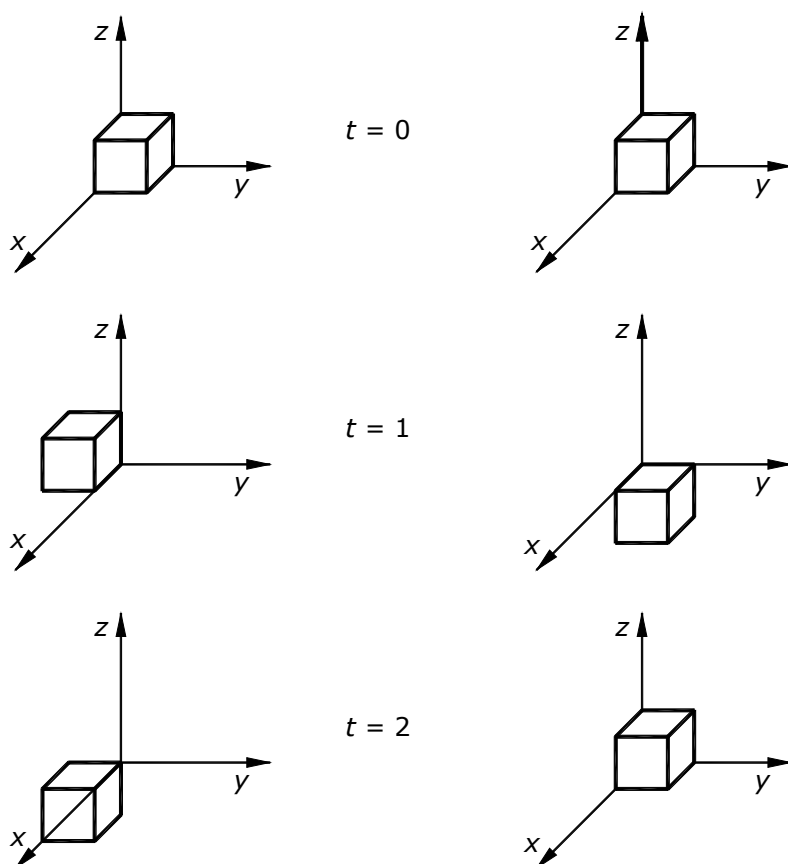


Fig. 6.13 Orientări diferite ale unui corp pentru aceleași rezultate privind integrarea vitezei unghiulare

6.7.2 Exemplu de calcul a matricei Jacobiene analitice

Considerăm, pentru exemplificare, un robot serial plan cu trei grade de mobilitate (vezi Fig. 4.1 și 6.5).

Ecuatiile ce definesc cinematica directă a pozițiilor acestui manipulator sunt

$$\begin{cases} x_M = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_M = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (6.189)$$

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

Plecând de aceste ecuații, ce definesc poziția și orientarea efectorului final în raport cu sistemul de referință $\{0\}$, și derivându-le în raport cu timpul, obținem ecuațiile ce definesc vitezele efectorului:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - \\ \quad - l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{y}_M = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ \quad + l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases} \quad (6.190)$$

unde $\dot{\theta}_i$ reprezintă viteza cuplei cinematice i , iar $\dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{\phi}$ reprezintă derivatele în raport cu timpul a coordonatelor și orientării efectorului final.

Reranjând termenii în funcție de $\dot{\theta}_i$, obținem:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = -[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1 - \\ \quad - [l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_M = [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1 + \\ \quad + [l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases} \quad (6.191)$$

Sub formă matriceală, aceste ecuații devin:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (6.192)$$

unde: $s_1 = \sin \theta_1$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$,
 $c_1 = \cos \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

Bazele Roboticii

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 s_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.193)$$

Cunoscând vitezele cuplelor cinematice,

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (6.194)$$

putem obține expresiile pentru vitezele efectorului final

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (6.195)$$

Dacă matricea Jacobiană analitică nu este singulară (determinantul ei este diferit de zero și se poate calcula matricea inversă), atunci putem determina vitezele cuplelor cinematice cunoscând vitezele efectorului final.

Cu alte cuvinte, dacă misiunea robotului impune o anumită viteză efectorului final (spre exemplu pentru sudare), ecuația (6.184) permite determinarea vitezelor ce se impun pentru fiecare cuplă cinematică, astfel încât să se asigure viteza impusă acestuia.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 s_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_{12}}{l_1 s_2} & \frac{s_{12}}{l_1 s_2} & \frac{l_3 s_3}{l_1 s_2} \\ \frac{-(l_1 c_1 + l_1 c_{12})}{l_1 l_2 s_2} & \frac{-(l_1 s_1 + l_1 s_{12})}{l_1 l_2 s_2} & \frac{-(l_1 l_3 s_{23} + l_2 l_3 s_3)}{l_1 l_2 s_2} \\ \frac{s_1}{l_2 s_2} & \frac{c_1}{l_2 s_2} & \frac{l_1 l_2 s_2 + l_1 l_3 s_{23}}{l_1 l_2 s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.196)$$

Pentru a determina condițiilor pentru care matricea Jacobiană devine singulară, se calculează determinantul acesteia și se egalează cu zero. Folosind relațiile ce există între funcțiile trigonometrice,

6. Cinematica vitezelor și accelerațiilor

determinantul matricei Jacobiene pentru exemplul considerat poate fi redus la expresia:

$$|\mathbf{J}_A| = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \theta_2. \quad (6.197)$$

Aceasta înseamnă că matricea Jacobiană devine singulară atunci când $\theta_2 = 0^\circ$ sau $\theta_2 = 180^\circ$. De aceea, atâta timp cât sunt evitate aceste configurații, poate fi impusă orice viteză efectorului final.

Matricea Jacobiană geometrică, determinată conform paragrafului 6.4.2 conduce la

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.198)$$

Eliminând cele trei linii nule, se obține matricea Jacobiană analitică \mathbf{J}_A , relația (6.193).

7

STATICA ROBOȚILOR DE TIP MANIPULATOR

7.1 Generalități

În cazul unui robot de tip manipulator, fiecare element cinematic este conectat la unul sau alte două elemente, prin intermediul unor cuple cinematice, ce pot avea diverse tipuri. Figura 7.1 prezintă forțele și momentele ce acționează asupra unui element cinematic i , conectat la elementul $i-1$ prin cupla cinematică i și la elementul $i+1$ prin cupla $i+1$.

Pentru a descrie forțele și momentele ce acționează asupra elementului i , folosim următoarele notații:

- ${}^0\mathbf{F}_{i,i+1}$ - forța rezultantă exercitată de elementul i asupra elementului $i+1$ în originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$, raportată la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{F}_{i,i+1} = -{}^0\mathbf{F}_{i+1,i}$;
- ${}^0\mathbf{g}$ - vectorul accelerație unghiulară;
- m_i - masa elementului i ;
- ${}^0\mathbf{M}_{i,i+1}$ - momentul rezultant exercitat de elementul i asupra elementului $i+1$ în originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$, raportat la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{M}_{i,i+1} = -{}^0\mathbf{M}_{i+1,i}$;
- ${}^0\mathbf{p}_{i,C_i}$ - vectorul de poziție al centrului de masă al elementului cinematic i , relativ la originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$, raportat la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{p}_{i,C_i} = \overline{O_i C_i}$;
- ${}^0\mathbf{p}_{i-1,i}$ - vectorul de poziție al originii O_i a sistemului de axe $\{i\}$, față de originea O_{i-1} a sistemului de axe $i-1$, raportat la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{p}_{i-1,i} = \overline{O_{i-1} O_i}$;

7. Statica roboților de tip manipulator

- ${}^0\mathbf{F}_{i-1,i}$ - forța rezultantă exercitată de elementul $i-1$ asupra elementului i în originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$, raportată la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{F}_{i-1,i} = -{}^0\mathbf{F}_{i,i-1}$;
- ${}^0\mathbf{M}_{i-1,i}$ - momentul rezultant exercitat de elementul $i-1$ asupra elementului i în originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$, raportat la sistemul de axe de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{M}_{i-1,i} = -{}^0\mathbf{M}_{i,i-1}$.

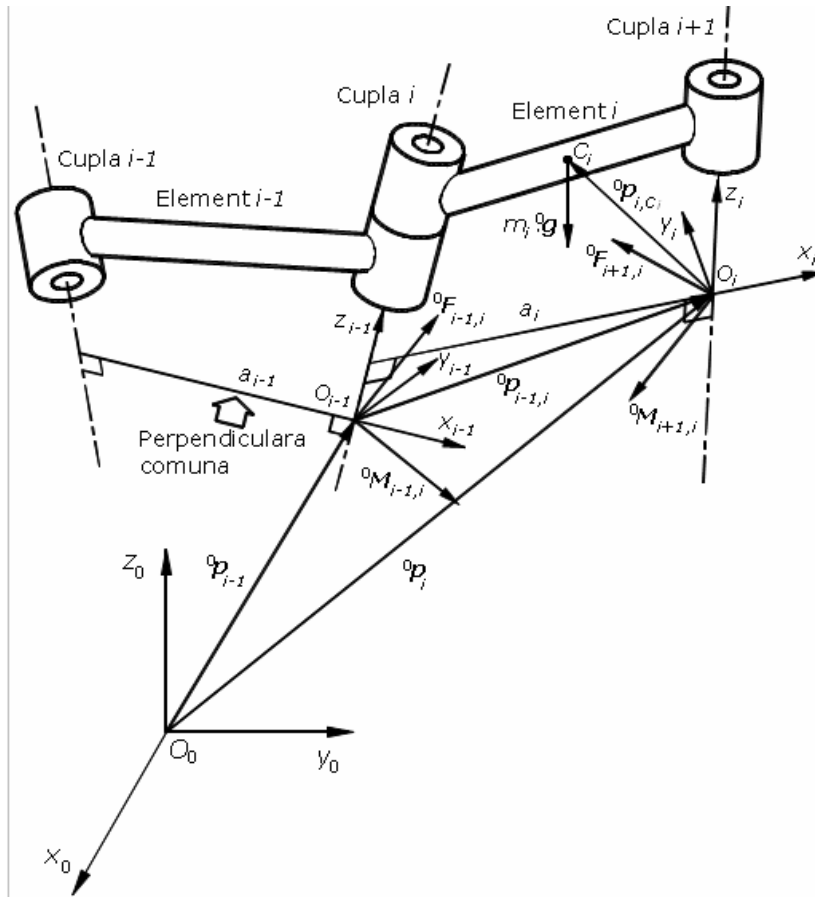


Fig. 7.1 Forțele și momentele ce acționează asupra unui element

Echilibrul de forțe pentru elementul i poate fi scris astfel:

$${}^0\mathbf{F}_{i-1,i} - {}^0\mathbf{F}_{i,i+1} + m_i \cdot {}^0\mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

Bazele Roboticii

Similar, echilibrul de momente scris în raport cu originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$ va fi:

$${}^0\mathbf{M}_{i-1,i} - {}^0\mathbf{M}_{i,i+1} - {}^0\mathbf{p}_{i-1,i} \times {}^0\mathbf{F}_{i-1,i} + {}^0\mathbf{p}_{i,Ci} \times (m_i \cdot {}^0\mathbf{g}) = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Pentru $i = 0$, ${}^0\mathbf{F}_{0,1}$ și ${}^0\mathbf{M}_{0,1}$ reprezintă forța și momentul exercitate de elementul fix asupra primului element mobil.

Pentru $i = n$, ${}^0\mathbf{F}_{n,n+1}$ și ${}^0\mathbf{M}_{n,n+1}$ reprezintă forța și momentul exercitate de mediu asupra efectorului final. În această situație, mediul este considerat ca fiind un element suplimentar, notat cu $n+1$.

Pentru mai multă comoditate, forțele și momentele vor fi combinate într-un vector de forma:

$${}^0\mathcal{F}_{i-1,i} = \begin{Bmatrix} {}^0\mathbf{F}_{i-1,i} \\ {}^0\mathbf{M}_{i-1,i} \end{Bmatrix}, \quad (7.3)$$

unde ${}^0\mathcal{F}_{i-1,i}$ este numit tursorul forțelor scrise în raport cu originea O_{i-1} .

Atunci când manipulatorul efectuează o anumită operație, efectorul final exercită o anumită forță sau/și un anumit moment asupra mediului. Pe de altă parte, când manipulatorul manipulează un obiect, forța de greutate a acestuia acționează asupra efectorului final. Din acest motiv, considerând că se cunosc forța și momentul ce acționează asupra efectorului final, ${}^0\mathbf{F}_{n,n+1}$ și ${}^0\mathbf{M}_{n,n+1}$, ecuațiile (7.1) și (7.2) pot fi rezolvate pentru determinarea celorlalte forțe și momente de reacțiune.

7.2 Momentele de torsiune din cuple

Odată ce se cunosc forțele de reacțiune din cuplele cinematice, pot fi determinate forțele și/sau cuplurile actuatorilor. În cazul roboților seriali de tip manipulator, fiecare cuplă cinematică este acționată de un actuator ce exercită o forță sau un cuplu între două elemente succesive.

Pentru o cuplă cinematică de translație, forța actuatorului este exercitată în lungul axei cuplei cinematice i . Presupunând că forțele de frecare sunt neglijabile, forța actuatorului este dată de relația:

$${}^0\tau_{i-1,i} = \mathbf{z}_{i-1}^T {}^0\mathbf{F}_{i-1,i}. \quad (7.4)$$

7. Statica roboților de tip manipulator

unde \mathbf{z}_{i-1} este un vector unitate pe direcția axei cuplei cinematice i .

Pentru o cuplă cinematică de rotație, actuatorul exercită un cuplu (moment de torsiune) în jurul axei cuplei i . Cuplul actuatorului se poate calcula folosind expresia:

$$\tau_i = \mathbf{z}_{i-1}^T {}^0\mathbf{M}_{i-1,i} \cdot \quad (7.5)$$

7.3 Metoda recursivă

Rescriem ecuațiile (7.1) și (7.2) în formă recursivă

$${}^0\mathbf{F}_{i-1,i} = {}^0\mathbf{F}_{i,i+1} - m_i \cdot {}^0\mathbf{g}, \quad (7.6)$$

$${}^0\mathbf{M}_{i-1,i} = {}^0\mathbf{M}_{i,i+1} + {}^0\mathbf{p}_{i-1,i} \times {}^0\mathbf{F}_{i-1,i} - {}^0\mathbf{p}_{i,Ci} \times (m_i \cdot {}^0\mathbf{g}). \quad (7.7)$$

Vectorii din ecuațiile (7.6) și (7.7) sunt exprimați în sistemul de referință fix $\{0\}$. Oricum, vectorul de poziție ${}^0\mathbf{p}_{i,Ci}$ este adesea exprimat în raport cu sistemul de axe al elementului i . În termenii parametrilor Denavit-Hartenberg standard, vectorul ${}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\mathbf{p}$ este exprimat ca fiind

$${}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_i \cdot \cos \theta_i \\ a_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Aceasta înseamnă că vectorul respectiv exprimat în sistemul de axe $\{i\}$, ${}^i\mathbf{p}_{i-1,i}$, va fi

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} &= {}^{i-1}_i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}_i\mathbf{p} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \cdot \cos \theta_i \\ a_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} = . \quad (7.9) \\ &= \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \cdot \sin \alpha_i \\ d_i \cdot \cos \alpha_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

Ambii vectori, $\mathbf{p}_{i,Ci}$ și $\mathbf{p}_{i-1,i}$, trebuie transformați în sistemul de referință utilizând relațiile:

$${}^0\mathbf{p}_{i-1,i} = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{p}_{i-1,i}, \quad (7.10)$$

$${}^0\mathbf{p}_{i,Ci} = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{p}_{i,Ci}, \quad (7.11)$$

unde ${}^0\mathbf{R}$ este matricea de rotație, scrisă la trecerea de la sistemul de referință $\{0\}$ la sistemul de axe $\{i\}$.

Aplicând ecuațiile (7.4) și (7.5), pot fi determinate forțele de reacțiune ale cuplelor într-o manieră recursivă. Procesul începe de la efectorul final, pentru fiecare element în parte, și se termină la elementul fix.

7.4 Exemplu

Considerăm, pentru exemplificare, un robot de tip manipulator serial cu structură plană, având 3 grade de mobilitate și toate cuplele cinematice de rotație (Fig. 7.2).

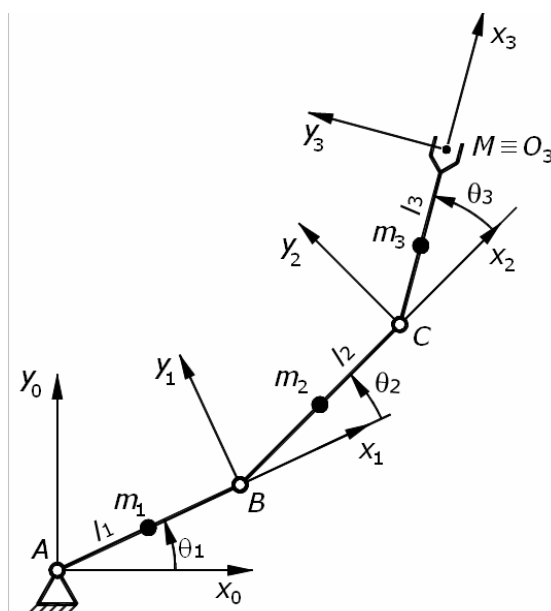


Fig. 7.2 Manipulator plan cu 3 grade de mobilitate

Parametrii Denavit-Hartenberg ai manipulatorului sunt prezentați în Tabelul 7.1.

7. Statica roboților de tip manipulator

Tabelul 4.1 Parametrii D-H standard

Element	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Considerăm că forța și momentul ce acționează asupra efectorului final sunt ${}^0\mathbf{F}_{3,4} = [F_x \ F_y \ 0]^T$, ${}^0\mathbf{M}_{3,4} = [0 \ 0 \ M_z]^T$.

Matricele de transformare omogene, la trecerea de la elementul fix O la efectorul final sunt:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Corespunzător, matricele de rotație vor fi:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

Bazele Roboticii

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

$${}^0_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Vectorul accelerație gravitațională este dat de

$${}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Determinăm vectorii de poziție necesari efectuării calculului nostru.

$${}^1\mathbf{p}_{0,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7.21)$$

$${}^2\mathbf{p}_{1,2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7.22)$$

7. Statica roboților de tip manipulator

$${}^3\mathbf{p}_{2,3} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7.23)$$

$${}^0\mathbf{p}_{0,1} = {}^0\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 \\ l_1 \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

unde: $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$;

$${}^0\mathbf{p}_{1,2} = {}^0\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_{12} \\ l_2 \cdot s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

cu: $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$;

$${}^0\mathbf{p}_{2,3} = {}^0\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cdot c_{123} \\ l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

unde s-au făcut notațiile: $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$,
 $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

Similar,

$${}^1\mathbf{p}_{1,C1} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

$${}^2\mathbf{p}_{2,C2} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

Bazele Roboticii

$${}^3\mathbf{p}_{3,C3} = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

$${}^0\mathbf{p}_{1,C1} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot c_1 \\ -\frac{l_1}{2} \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

$${}^0\mathbf{p}_{2,C2} = {}^0_2\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \\ -\frac{l_2}{2} \cdot s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

$${}^0\mathbf{p}_{3,C3} = {}^0_3\mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \\ -\frac{l_3}{2} \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

Pentru $i = 3$ avem:

$${}^0\mathbf{F}_{2,3} = {}^0\mathbf{F}_{3,4} - m_3 \cdot {}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + m_3 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.33)$$

7. Statica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{M}_{2,3} &= {}^0\mathbf{M}_{3,4} + {}^0\mathbf{p}_{2,3} \times {}^0\mathbf{F}_{2,3} - {}^0\mathbf{p}_{3,C3} \times (m_3 \cdot {}^0\mathbf{g}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \cdot c_{123} \\ l_3 \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + m_3 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \\ -\frac{l_3}{2} \cdot s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_3 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \cdot c_{123} \cdot (F_y + m_3 \cdot g) - l_3 \cdot s_{123} \cdot F_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \cdot m_3 \cdot g \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z + l_3 \cdot c_{123} \cdot (F_y + m_3 \cdot g) - l_3 \cdot s_{123} \cdot F_x - \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \cdot m_3 \cdot g \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z + l_3 \cdot c_{123} \cdot F_y - l_3 \cdot s_{123} \cdot F_x + \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \cdot m_3 \cdot g \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3,2z} \end{bmatrix} \quad , (7.34)
 \end{aligned}$$

unde, $M_{3,2z} = M_z + l_3 \cdot c_{123} \cdot F_y - l_3 \cdot s_{123} \cdot F_x + \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \cdot m_3 \cdot g$.

Pentru $i = 2$:

$${}^0\mathbf{F}_{1,2} = {}^0\mathbf{F}_{2,3} - m_2 \cdot {}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_2 + m_3) \cdot g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

$${}^0\mathbf{M}_{1,2} = {}^0\mathbf{M}_{2,2} + {}^0\mathbf{p}_{1,2} \times {}^0\mathbf{F}_{1,2} - {}^0\mathbf{p}_{2,C2} \times (m_2 \cdot {}^0\mathbf{g})$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{M}_{1,2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3,2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_{12} \\ l_2 \cdot s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_2 + m_3) \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \\ -\frac{l_2}{2} \cdot s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{3,2z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \cdot c_{12} \cdot [F_y + (m_2 + m_3) \cdot g] - l_2 \cdot s_{12} \cdot F_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \cdot m_2 \cdot g \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2,1z} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.36)$$

unde, $M_{2,1z} = M_{3,2z} + l_2 \cdot c_{12} \cdot [F_y + (m_2 + m_3) \cdot g] - l_2 \cdot s_{12} \cdot F_x - \frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \cdot m_2 \cdot g$.

După înlocuiri, obținem

$$M_{2,1z} = \begin{bmatrix} M_z + F_y \cdot (l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}) - F_x \cdot (l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) + \\ + \frac{l_3}{2} \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{123} + l_2 \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{12} + \frac{l_2}{2} \cdot m_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Pentru $i = 1$,

$${}^0\mathbf{F}_{0,1} = {}^0\mathbf{F}_{1,2} - m_1 \cdot {}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{M}_{0,1} &= {}^0\mathbf{M}_{1,2} + {}^0\mathbf{p}_{0,1} \times {}^0\mathbf{F}_{0,1} - {}^0\mathbf{p}_{1,C_1} \times (m_1 \cdot {}^0\mathbf{g}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2,1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cdot c_1 \\ l_1 \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} - \\
 &\quad - \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot c_1 \\ -\frac{l_1}{2} \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

7. Statica roboților de tip manipulator

$${}^0\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{2,1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \cdot c_1 [F_y + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g] - l_1 \cdot F_x \cdot s_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1,0z} \end{bmatrix}, \quad (7.39)$$

unde

$$\begin{aligned} M_{0,1z} &= M_{1,2z} + l_1 \cdot [F_y + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g] \cdot c_1 - l_1 \cdot F_x \cdot s_1 - \frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot c_1 = \\ &= \begin{bmatrix} M_z + F_y \cdot (l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}) - F_x \cdot (l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) + \\ + \frac{l_3}{2} \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{123} + l_2 \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{12} + \frac{l_2}{2} \cdot m_2 \cdot g \cdot c_{12} + \\ + l_1 [F_y + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g] \cdot c_1 - l_1 \cdot F_x \cdot s_1 - \frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot c_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} M_z + F_y \cdot (l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}) - F_x \cdot (l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) + \\ + \frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot c_1 + m_2 \cdot g \cdot \left(l_1 \cdot c_1 + \frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \right) + \\ + \left(l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \right) \cdot m_3 \cdot g \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Momentele de torsiune ale actuatorilor sunt:

$$\tau_1 = \mathbf{z}_0^T \cdot {}^0\mathbf{M}_{0,1} = M_{0,1z}, \quad (7.41)$$

$$\tau_2 = \mathbf{z}_1^T \cdot {}^0\mathbf{M}_{1,2} = M_{1,2z}, \quad (7.42)$$

$$\tau_3 = \mathbf{z}_2^T \cdot {}^0\mathbf{M}_{2,3} = M_{2,3z}, \quad (7.43)$$

Bazele Roboticii

$$\tau_1 = \left[\begin{aligned} &M_z + F_y \cdot (l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}) - F_x \cdot (l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) + \\ &+ \frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot c_1 + m_2 \cdot g \cdot \left(l_1 \cdot c_1 + \frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \right) + \\ &+ m_3 \cdot g \cdot \left(l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \right) \end{aligned} \right], \quad (7.44)$$

$$\tau_2 = \left[\begin{aligned} &M_z + F_y \cdot (l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}) - F_x \cdot (l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) + \\ &+ \frac{l_3}{2} \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{123} + l_2 \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{12} + \frac{l_2}{2} \cdot m_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{aligned} \right], \quad (7.45)$$

$$\tau_3 = M_z + l_3 \cdot F_y \cdot c_{123} - l_3 \cdot F_x \cdot s_{123} + \frac{l_3}{2} \cdot m_3 \cdot g \cdot c_{123}. \quad (7.46)$$

Dar,

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}^T \cdot {}^0\mathbf{F}_{3,4} + \mathbf{G} = \mathbf{J}^T \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix}, \quad (7.47)$$

unde: ${}^0\mathbf{J}$ - matricea Jacobiană geometrică a vitezelor, ${}^0\mathbf{F}_{3,4}$ - forța ce acționează asupra efectorului final, \mathbf{G} - matricea forțelor de gravitate.

$${}^0\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) & -(l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}) & -l_3 \cdot s_{123} \\ l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} & l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} & l_3 \cdot c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

Matricea forțelor datorate gravitației este dată de relația:

7. Statica roboților de tip manipulator

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cdot m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot \left(l_1 \cdot c_1 + \frac{l_2}{2} \cdot c_{12} \right) + \\ + m_3 \cdot \left(l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + \frac{l_3}{2} \cdot c_{123} \right) \\ \frac{l_2}{2} \cdot m_2 \cdot c_{12} + m_3 \cdot \left(\frac{l_3}{2} \cdot c_{123} + l_2 \cdot c_{12} \right) \\ \frac{l_3}{2} \cdot m_3 \cdot c_{123} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g} . \quad (7.49)$$

Trebuie notat faptul că, în absența gravitației, momentele de torsiune ale actuatorilor și forțele ce acționează asupra efectorului final sunt legate între ele prin intermediul transpusei matricei Jacobiene.

DINAMICA ROBOȚILOR DE TIP MANIPULATOR

8.1 Dinamica corpului rigid

8.1.1 Matricea de inerție

Considerăm sistemul de axe de referință xyz și un corp rigid B , căruia i se atașează sistemul de axe $x_C y_C z_C$ (Fig. 8.1).

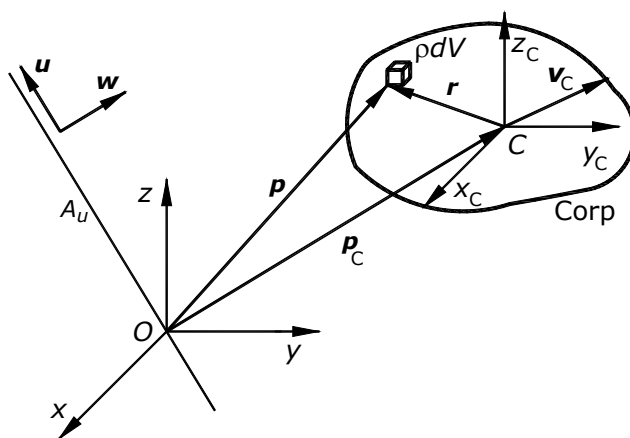


Fig. 8.1 Momente de inerție

Centrul de masă al unui corp rigid poate fi definit de vectorul de poziție:

$$\mathbf{p}_C = \frac{1}{m} \cdot \int_V \mathbf{p} \rho dV, \quad (8.1)$$

unde

$$m = \int_V \rho dV. \quad (8.2)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

Momentul de inerție \mathbf{I}_u^O , în raport cu axa A_u ce trece prin originea O a sistemului de referință și paralelă la vectorul unitate \mathbf{u} , este definit de relația:

$$\mathbf{I}_u^O = \int_V \mathbf{p} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \rho dV, \quad (8.3)$$

unde indicele O denotă punctul de referință iar indicele u semnifică direcția axei de referință. Relația (8.3) poate fi dezvoltată după cum urmează,

$$\mathbf{I}_u^O = \int_V [\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}] \rho dV. \quad (8.4)$$

Produsul dintre momentul de inerție și un vector unitate \mathbf{w} este numit produsul de inerție al corpului B în raport cu originea O , pentru \mathbf{u} și \mathbf{w} ,

$$I_{uw} = \mathbf{I}_u^O \cdot \mathbf{w} = \int_V [(\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{w})] \rho dV, \quad (8.5)$$

Conform definiției, $I_{uw} = I_{wu}$. În aceste condiții, momentul de inerție I_{uu} poate fi exprimat astfel:

$$I_{uu} = \mathbf{I}_u^O \cdot \mathbf{w} = \int_V [\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{u})^2] \rho dV = m \cdot r_a^2, \quad (8.6)$$

unde $r_a = \int_V [\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{u})^2] = (\mathbf{u} \times \mathbf{p})^2$ este un număr pozitiv și se numește rază de rotație.

Atunci când scriem expresia anterioară sub următoarea formă

$$\mathbf{I}_u^O = I_B^O \cdot \mathbf{u}, \quad (8.7)$$

aceasta va defini matricea de inerție a unui corp rigid în raport cu un sistem de referință având originea în O .

Matricea inerțială sau tensorul de inerție al corpului B în raport cu originea O este:

$$\mathbf{I}_B^O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Bazele Roboticii

Elementele matricei de inerție reprezintă momentele de inerție sau produsele de inerție ale corpului B în raport cu axele sistemului de referință,

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV, \quad (8.9)$$

$$I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV, \quad (8.10)$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV, \quad (8.11)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V x \cdot y \cdot \rho dV, \quad (8.12)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int_V y \cdot z \cdot \rho dV, \quad (8.13)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int_V x \cdot z \cdot \rho dV. \quad (8.14)$$

8.1.1.1 Teorema axelor paralele

Fie $x_C y_C z_C$ un sistem de axe cartezian atașat centrului de masă C al corpului B , având axele paralele cu cele ale sistemului de axe de referință xyz (Fig. 1). Se poate demonstra faptul că

$$I_{xx}^O = I_{xx}^C + m \cdot (y_C^2 + z_C^2), \quad (8.15)$$

$$I_{yy}^O = I_{yy}^C + m \cdot (x_C^2 + z_C^2), \quad (8.16)$$

$$I_{zz}^O = I_{zz}^C + m \cdot (x_C^2 + y_C^2), \quad (8.17)$$

$$I_{xy}^O = I_{xy}^C + m \cdot x_C \cdot y_C, \quad (8.18)$$

$$I_{yz}^O = I_{yz}^C + m \cdot y_C \cdot z_C, \quad (8.19)$$

$$I_{xz}^O = I_{xz}^C + m \cdot x_C \cdot z_C. \quad (8.20)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

8.1.1.2 Momentul de inerție principal

Momentul de inerție depinde de alegerea punctului de referință și de orientarea unui sistem de referință. Aceasta înseamnă că pentru o anumită orientare a sistemului de referință, produsul de inerție nu va exista (va fi nul). În această situație, axele sistemului se numesc axe principale, iar momentele de inerție corespunzătoare sunt numite momente de inerție principale.

Fie \mathbf{I}_B^O matricea de inerție a unui corp rigid B în raport cu originea O a sistemului de referință. De asemenea, fie L_u axa principală ce trece prin originea O și având direcția vectorului unitate \mathbf{u} . Pentru axele principale,

$$\mathbf{I}_B^O \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} . \quad (8.21)$$

Relația anterioară conține trei ecuații omogene cu trei necunoscute u_x, u_y, u_z . Condiția de existență a soluțiilor diferite de cea banală este

$$\begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0 . \quad (8.22)$$

Din acest motiv, valorile proprii și vectorii proprii ai matricei de inerție \mathbf{I}_B^O corespund momentului principal de inerție și direcției axei principale de inerție.

8.1.2 Impulsul

Impulsul în raport cu originea O a sistemului de referință (vezi Fig. 1) poate fi exprimat după cum urmează,

$$d\mathbf{H}^0 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV . \quad (8.23)$$

Impulsul total al corpului B în raport cu originea O este

$$\mathbf{H}^0 = \int_V \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV . \quad (8.24)$$

Dar se știe că

Bazele Roboticii

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_C + \mathbf{r} = \mathbf{p}_C + {}^0_C\mathbf{R} \cdot {}^C_C\mathbf{r} . \quad (8.25)$$

Înlocuind relația (8.25) în (8.24) obținem,

$$\mathbf{H}^0 = \int_V \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \rho dV + \int_V \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rho dV . \quad (8.26)$$

Din definiția centrului de masă, pentru un corp rigid cu masă constantă,

$$\int_V \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rho dV = 0 , \quad (8.27)$$

ceea ce înseamnă că

$$\mathbf{H}^0 = \int_V \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \rho dV = m \cdot \mathbf{v}_C , \quad (8.28)$$

unde $\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{p}_C}{dt}$ reprezintă viteza liniară a centrului de masă în raport cu sistemul de referință.

8.1.3 Momentul cinetic

Momentul cinetic al unui element de masă ρdV în raport cu originea O a sistemului de referință este definit ca momentul impulsului său în raport cu O :

$$d\mathbf{K}^0 = \left(\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \rho dV . \quad (8.29)$$

Momentul cinetic total al corpului B în raport cu originea O este

$$\mathbf{K}^0 = \int_V \left(\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \rho dV . \quad (8.30)$$

Utilizând $\mathbf{p} = \mathbf{p}_C + \mathbf{r}$, putem rescrie ecuația (8.30) după cum urmează,

$$\mathbf{K}^0 = \int_V \left[(\mathbf{p}_C + \mathbf{r}) \times \frac{d(\mathbf{p}_C + \mathbf{r})}{dt} \right] \rho dv , \quad (8.31)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\mathbf{K}^0 = \left(\mathbf{p}_C \times \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \right) \int_V \rho dV + \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \rho dV + \mathbf{p}_C \times \int_V \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rho dV + \int_V \mathbf{r} \rho dV \times \left(\frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \right).$$

Această ultimă relație poate fi rearanjată astfel,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^0 = & \left(\mathbf{p}_C \times \frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \right) \int_V \rho dV + \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \rho dV + \\ & + \mathbf{p}_C \times \left(\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \rho dV \right) + \int_V \mathbf{r} \rho dV \times \left(\frac{d\mathbf{p}_C}{dt} \right). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Ultimii doi termeni ai relației (8.32) vor dispărea atunci când definiția centrului de masă conduce la

$$\int_V \mathbf{r} \rho dV = 0. \quad (8.33)$$

De asemenea, știm că $m = \int_V \rho dV$ și $\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{p}_C}{dt}$.

De aceea,

$$\mathbf{K}^0 = m \cdot (\mathbf{p}_C \times \mathbf{v}_C) + \mathbf{K}^C, \quad (8.34)$$

unde $\mathbf{K}^C = \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \rho dV$ reprezintă momentul cinetic al mișcării în

jurul centrului de masă, în raport cu un sistem de referință fix A . Dacă privim cu atenție expresia

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = d \left({}^A_B \mathbf{R} \cdot {}^B \mathbf{r} \right) = (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}),$$

atunci

$$\mathbf{K}^C = \int_V \left(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}_B \cdot \mathbf{r}) \right) \rho dV. \quad (8.35)$$

Utilizând definiția momentului de inerție, putem rescrie această relație astfel,

$$\mathbf{K}^C = \mathbf{I}_B^C \cdot \boldsymbol{\omega}_B, \quad (8.36)$$

unde \mathbf{I}_B^C reprezintă matricea de inerție a corpului B în raport cu centrul de masă C , iar $\boldsymbol{\omega}_B$ este vectorul viteză unghiulară a corpului în raport cu sistemul de axe de referință A .

8.1.4 Energia cinetică

Energia cinetică dE_c a unui element de masă ρdV , în raport cu sistemul de referință A , este definită ca fiind:

$$dE_c = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \cdot \rho dV, \quad (8.37)$$

unde \mathbf{v} este viteza liniară a elementului de masă. Energia totală a corpului B este dată de relația

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{v} \rho dV. \quad (8.38)$$

De asemenea, putem exprima viteza liniară a centrului de masă și viteza unghiulară a corpului ca fiind;

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}. \quad (8.39)$$

Înlocuind (8.39) în (8.38), obținem

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C^T \mathbf{v}_C \int_V \rho dV + (\mathbf{v}_C \times \boldsymbol{\omega}_B)^T \int_V \mathbf{r} \rho dV + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T \left(\int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}) \rho dV \right). \quad (8.40)$$

Al doilea termen al ecuației (8.40) devine nul datorită definiției centrului de masă. Integrala din cel de al treilea termen reprezintă momentul cinetic al corpului B în raport cu centrul de masă. De aceea, ecuația energiei cinetice se reduce la,

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C^T m \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B. \quad (8.41)$$

Această ecuație demonstrează faptul că energia cinetică a unui corp B este egală cu energia cinetică a unui punct de masă m , localizat în centrul de masă, plus energia cinetică de rotație în jurul centrului de masă.

8.1.5 Ecuațiile Newton-Euler

Considerăm din nou un corp rigid B , adupra căruia acționează forță și momentul resultant (Fig. 8.2). Sistemul de axe xyz poate fi un sistem de axe fix sau de referință.

8. Dinamica roboților de tip manipulator

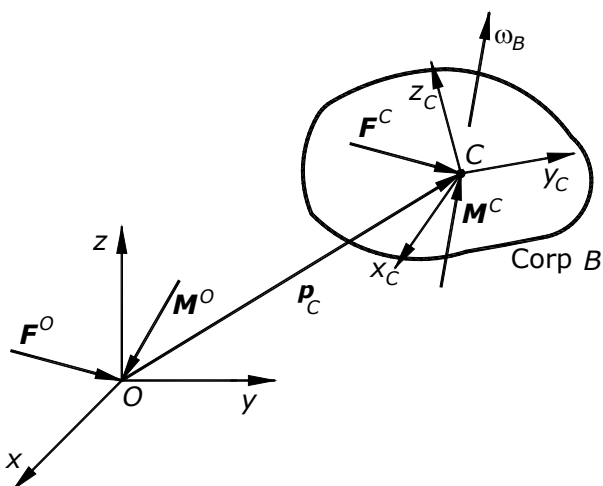


Fig. 8.2 Forța și momentul rezultanț ce acționează asupra corpului rigid

Ecuatiile Newton-Euler pot fi definite astfel,

$$\mathbf{F}^O = \frac{d\mathbf{H}^O}{dt}, \quad (8.42)$$

$$\mathbf{M}^O = \frac{d\mathbf{K}^O}{dt}, \quad (8.43)$$

unde:

- \mathbf{H}^O - impulsul unui corp rigid B în raport cu originea O a sistemului de referință $\{A\}$ și exprimat în sistemul de axe respectiv;
- \mathbf{K}^O - momentul cinetic corespunzător;
- $\mathbf{F}^O, \mathbf{M}^O$ - forțele și momentele rezultante ce acționează asupra corpului rigid B , în punctul O .

Ecuatiile (8.42) și (8.43) reprezintă ecuațiile fundamentale ale dinamicii.

8.1.5.1 Forțele în centrul de masă

Fie \mathbf{F}^C , \mathbf{M}^C forțele și momentele rezultante ce acționează în centrul de masă C , ca în Fig. 8.2. Se poate demonstra că:

$$\mathbf{F}^O = \frac{d(m \cdot \mathbf{v}_C)}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}. \quad (8.44)$$

Relația (8.44) reprezintă ecuația de mișcare a lui Newton. Derivând în raport cu timpul ecuația (8.34), obținem:

$$\frac{d\mathbf{K}^O}{dt} = \frac{d\mathbf{K}^C}{dt} + m \cdot \left(\mathbf{p}_C \times \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \right). \quad (8.45)$$

Dacă \mathbf{F}^C , \mathbf{M}^C sunt forțele și momentele rezultante exercitate în centrul de masă al corpului rigid, se poate arăta că

$$\mathbf{F}^O = \mathbf{F}^C, \quad (8.46)$$

$$\mathbf{M}^O = \mathbf{M}^C + \mathbf{p}_C \times \mathbf{F}^C, \quad (8.47)$$

$$\mathbf{M}^O = \mathbf{M}^C + \mathbf{p}_C \times \mathbf{F}^C = \frac{d\mathbf{K}^C}{dt} + m \cdot \left(\mathbf{p}_C \times \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \right). \quad (8.48)$$

Ecuația (8.48) se reduce la:

$$\mathbf{M}^C = \frac{d\mathbf{K}^C}{dt}. \quad (8.49)$$

Rata modificării momentului cinetic al corpului B , în centrul său de masă, este egală cu momentul resultant ce acționează în același punct.

Înlocuind $\mathbf{K}^C = \mathbf{I}_B^C \cdot \boldsymbol{\omega}_B$ în ecuația (8.49), obținem:

$$\mathbf{M}^C = \frac{d(\mathbf{I}_B^C \cdot \boldsymbol{\omega}_B)}{dt}. \quad (8.50)$$

Dacă modificăm notațiile $\mathbf{M}^C \equiv {}^C\mathbf{M}$, $\mathbf{I}_B^C \equiv {}^C\mathbf{I}_B$, și rescriem ecuația anterioară, vom avea,

$${}^C\mathbf{M} = \frac{d({}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^C\boldsymbol{\omega}_B)}{dt}. \quad (8.51)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

Făcând iar apel la derivata $d({}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{p})/dt$ de la analiza cinematică a vitezelor, putem scrie:

$${}^C\mathbf{M} = {}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^C\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + {}^C\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^C\boldsymbol{\omega}_B). \quad (8.52)$$

Transformând ecuația anterioară în raport cu sistemul de axe fix, obținem:

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{M} &= ({}^A_C\mathbf{R} \cdot {}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^A_C\mathbf{R}^T) \cdot {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times \left[({}^A_C\mathbf{R} \cdot {}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^A_C\mathbf{R}^T) \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_B \right] = \\ &= {}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^A\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times ({}^C\mathbf{I}_B \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_B) \end{aligned} \quad (8.53)$$

Relațiile (8.52) și (8.53) sunt numite ecuațiile de mișcare ale lui Euler ale unui corp rigid, în raport cu un sistem de axe aflat instantaneu cu originea în centrul de masă al acestui corp și având axele paralele cu cele ale sistemului de axe de referință $\{A\}$.

Atunci când axele sistemului atașat în centrul de masă coincid cu axele principale de inerție ale corpului B , ecuația (8.53) poate fi simplificată sub forma:

$$M_x = I_{xx} \cdot \dot{\omega}_x - \omega_y \cdot \omega_z \cdot (I_{yy} - I_{zz}), \quad (8.54)$$

$$M_y = I_{yy} \cdot \dot{\omega}_y - \omega_z \cdot \omega_x \cdot (I_{zz} - I_{xx}), \quad (8.55)$$

$$M_z = I_{zz} \cdot \dot{\omega}_z - \omega_x \cdot \omega_y \cdot (I_{xx} - I_{yy}). \quad (8.56)$$

8.2 Formularea recursivă Newton Euler

Forțele și momentele ce acționează asupra unui element i al unui robot serial de tip manipulator sunt reprezentate în Fig. 8.3.

În cele ce urmează se vor folosi notațiile:

- ${}^0\mathbf{F}_{i,i+1}$ - forța rezultantă exercitată de elementul cinematic i asupra elementului $i+1$, în originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$, exprimată în sistemul de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{F}_{i,i+1} = -{}^0\mathbf{F}_{i+1,i}$;
- ${}^0\mathbf{F}_i^*$ - forța de inerție ce acționează în centrul de masă al elementului cinematic i ;
- ${}^i\mathbf{I}_i$ - matricea de inerție a elementului cinematic i , în centrul său de masă, exprimată în sistemul de axe $\{i\}$;

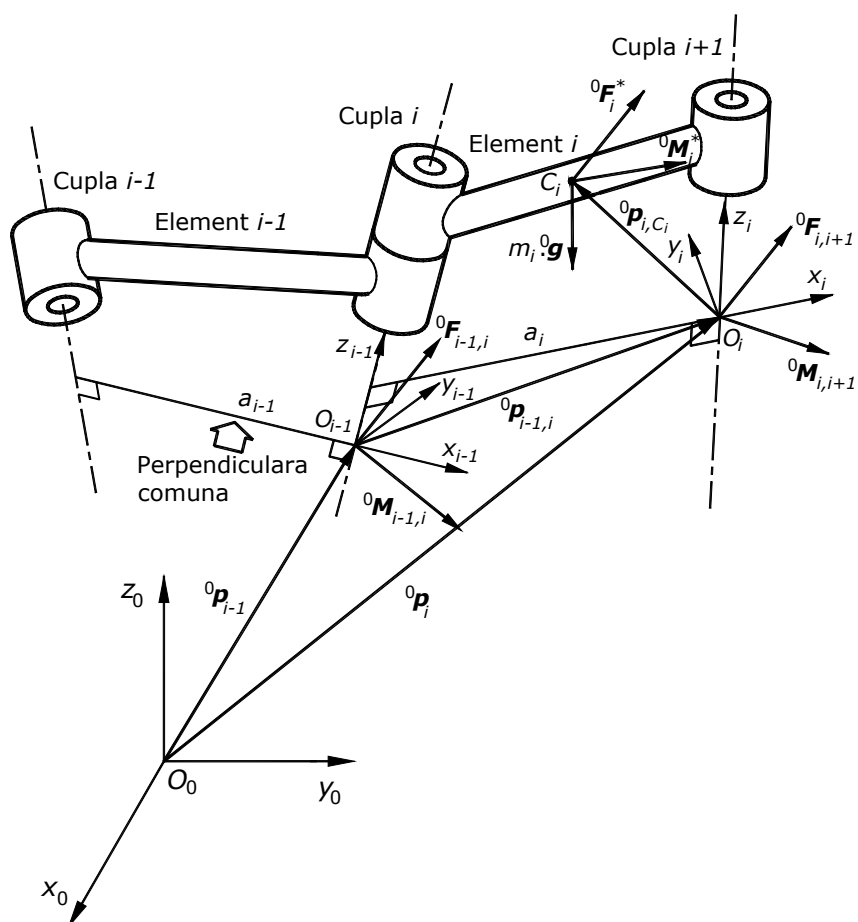


Fig. 8.3 Forțele și momentele ce acționează asupra elementului i

- ${}^0\mathbf{g}$ - vectorul accelerație gravitațională;
- m_i - masa elementului cinematic i ;
- ${}^0\mathbf{M}_{i,i+1}$ - momentul rezultat exercitat de elementul cinematic i asupra elementului $i+1$, în originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$, ${}^0\mathbf{M}_{i,i+1} = -{}^0\mathbf{M}_{i+1,i}$;
- ${}^0\mathbf{M}_i^*$ - momentul de inerție ce acționează în centrul de masă al elementului cinematic i ;

8. Dinamica roboților de tip manipulator

- ${}^0\mathbf{p}_{i,Ci}$ - vectorul de poziție al centrului de masă al elementului cinematic i în raport cu originea O_i a sistemului de axe $\{i\}$,
 ${}^0\mathbf{p}_{i,Ci} = \overline{O_i C_i}$;
- ${}^0\mathbf{p}_{i-1,i}$ - vectorul de poziție al originii O_i a sistemului de axe $\{i\}$ în raport cu originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$,
 ${}^0\mathbf{p}_{i-1,i} = \overline{O_{i-1} O_i}$;
- ${}^0\mathbf{v}_{0,i}$ - viteza liniară absolută a originii O_i ;
- ${}^0\mathbf{v}_{0,Ci}$ - viteza liniară absolută a centrului de masă al elementului cinematic i ;
- ${}^0\mathbf{a}_{0,i}$ - accelerația liniară absolută a originii O_i ;
- ${}^0\mathbf{a}_{0,Ci}$ - accelerația liniară absolută a centrului de masă al elementului cinematic i ;
- ${}^0\boldsymbol{\omega}_{0,i}$ - viteza unghiulară absolută a originii O_i ;
- ${}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i}$ - accelerația unghiulară absolută a originii O_i ;
- ${}^0\mathbf{F}_{i-1,i}$ - forța rezultantă exercitată de elementul cinematic $i-1$ asupra elementului i , în originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$, exprimată în sistemul de referință $\{0\}$, ${}^0\mathbf{F}_{i-1,i} = -{}^0\mathbf{F}_{i,i-1}$;
- ${}^0\mathbf{M}_{i-1,i}$ - momentul rezultant exercitat de elementul cinematic $i-1$ asupra elementului i , în originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$, ${}^0\mathbf{M}_{i-1,i} = -{}^0\mathbf{M}_{i,i-1}$.

8.2.1 Calculul vitezelor și accelerațiilor

Calculăm mai întâi viteza unghiulară, accelerația unghiulară, viteza liniară și accelerația liniară pentru fiecare element cinematic, în raport cu cel precedent. Aceste mărimi pot fi calculate într-o manieră recursivă începând cu primul element mobil și sfârșind cu efectorul final. Condițiile inițiale stabilite pentru elementul fix vor conduce la viteze și accelerații inițiale de valori egale cu zero.

- Propagarea vitezelor unghiulare

Bazele Roboticii

$$\begin{cases} {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \right) & \text{pt. cuple de rotație} \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} & \text{pt. cuple de translație} \end{cases} \quad (8.57)$$

- Propagarea accelerațiilor unghiulare

$$\begin{cases} {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \right) & \text{pt. cuple de rotație} \\ {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} & \text{pt. cuple de transl.} \end{cases} \quad (8.58)$$

- Propagarea vitezelor liniare

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{v}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} \times {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} & \text{pt. cuple de rotație} \\ {}^i\mathbf{v}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\mathbf{v}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} \right) & \text{pt. cuple de transl.} \end{cases} \quad (8.59)$$

- Propagarea accelerațiilor liniare

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{a}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} & {}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ & + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ & + 2 \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ & + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times \left({}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1,i} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) \end{aligned} \right] & \begin{array}{l} \text{pt. cuple} \\ \text{de rotație} \end{array} \\ {}^i\mathbf{a}_{0,i} = {}^{i-1}\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} & {}^{i-1}\mathbf{a}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} + \\ & + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{p} \right) + \\ & + 2 \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{p}} + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}} \end{aligned} \right] & \begin{array}{l} \text{pt. cuple} \\ \text{de transl.} \end{array} \end{cases} \quad (8.60)$$

- Accelerațiile liniare ale centrelor de masă

$${}^i\mathbf{a}_{0,Ci} = {}^i\mathbf{a}_{0,i} + {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} \times {}^i\mathbf{p}_{i,Ci} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} \times \left({}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} \times {}^i\mathbf{p}_{i,Ci} \right) \quad (8.61)$$

- Accelerația gravitațională

$${}^i\mathbf{g} = {}^i\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{g} \quad (8.62)$$

8.2.2 Calculul forțelor și momentelor

Odată ce au fost calculate vitezele și accelerațiile elementelor cinematice, pot fi determinate forțele și momentele ce acționează

8. Dinamica roboților de tip manipulator

asupra fiecărui element, pornind de la efectorul final și terminând cu elementul fix.

Mai întâi, calculăm forțele și momentele de inerție,

$${}^i\mathbf{F}_i^* = -m_i \cdot {}^i\mathbf{a}_{0,Ci}, \quad (8.63)$$

$${}^i\mathbf{M}_i^* = -{}^i\mathbf{I}_i \cdot {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{0,i} - {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} \times ({}^i\mathbf{I}_i \cdot {}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i}). \quad (8.64)$$

Apoi, determinăm ecuațiile de echilibru pentru forțe și momente, în raport cu centrul de masă al elementului i ,

$${}^i\mathbf{F}_i^* + {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} - {}^i\mathbf{F}_{i,i+1} + m_i \cdot {}^i\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (8.65)$$

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{M}_i^* + {}^i\mathbf{M}_{i-1,i} - {}^i\mathbf{M}_{i,i+1} - ({}^i\mathbf{p}_{i-1,i} + {}^i\mathbf{p}_{i,Ci}) \times {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} + \\ + {}^i\mathbf{p}_{i,Ci} \times {}^i\mathbf{F}_{i,i+1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8.66)$$

Scriind ecuațiile (8.65) și (8.66) într-o formă recursivă, obținem:

$${}^i\mathbf{F}_{i-1,i} = {}^i\mathbf{F}_{i,i+1} + m_i \cdot {}^i\mathbf{g} - {}^i\mathbf{F}_i^*, \quad (8.67)$$

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{M}_{i-1,i} = {}^i\mathbf{M}_{i,i+1} + ({}^i\mathbf{p}_{i-1,i} + {}^i\mathbf{p}_{i,Ci}) \times {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} - \\ - {}^i\mathbf{p}_{i,Ci} \times {}^i\mathbf{F}_{i,i+1} - {}^i\mathbf{M}_i^* \end{aligned} \quad (8.68)$$

Odată obținute forțele și momentele în sistemul de axe $\{i\}$, acestea sunt convertite în sistemul de axe $\{i-1\}$, astfel:

$${}^{i-1}\mathbf{F}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{F}_{i-1,i}, \quad (8.69)$$

$${}^{i-1}\mathbf{M}_{i-1,i} = {}^{i-1}_i\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{M}_{i-1,i}. \quad (8.70)$$

Cuplurile (momentele de torsiune) și forțele actuatorilor sunt obținute proiectând forțele de legătură pe axa cuplei corespunzătoare,

$$\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}\mathbf{M}_{i-1,i}^T \cdot {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1} & \text{pentru cuple de rotație} \\ {}^{i-1}\mathbf{F}_{i-1,i}^T \cdot {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1} & \text{pentru cuple de translație} \end{cases}. \quad (8.71)$$

Dacă există forțe vâscoase în cuplele cinematice,

$$\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}\mathbf{M}_{i-1,i}^T \cdot {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1} + b_i \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_i & \text{pentru cuple de rotație} \\ {}^{i-1}\mathbf{F}_{i-1,i}^T \cdot {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1} + b_i \cdot \dot{\mathbf{d}}_i & \text{pentru cuple de translație} \end{cases} \quad (8.72)$$

8.3 Formularea Lagrange

8.3.1 Generalități

Ecuatiile de mișcare Newton-Euler conțin ca variabile toate forțele de legătură dintre elementele cinematice adiacente. Din acest motiv, sunt necesare operații matematice suplimentare pe durata analizei dinamice, pentru a elimina aceste forțe. Acest lucru face ca metoda Newton-Euler să necesite un timp relativ mare. Pe de altă parte, metoda Lagrange permite obținerea ecuațiilor de mișcare utilizând un set de coordonate generalizate și elimină toate forțele de legătură sau o parte a acestora. Se vor folosi următoarele notații pentru formularea Lagrange:

\mathbf{G} - vectorul forțelor gravitaționale;

${}^0\mathbf{I}_i$ - matricea de inerție a elementului cinematic i , în raport cu centrul său de masă, exprimat în sistemul de axe de referință, ${}^0\mathbf{I}_i$;

\mathbf{J}_i - matricea Jacobiană a elementului i ;

\mathbf{J}_{vi} - submatricea Jacobiană corespunzătoare vitezei liniare a centrului de masă al elementului i ;

$\mathbf{J}_{\omega i}$ - submatricea Jacobiană corespunzătoare vitezei unghiulare a centrului de masă al elementului i ;

E_c - energia cinetică a sistemului mecanic;

E_p - energia potențială a sistemului mecanic;

L - funcția Lagrange, $L = E_c - E_p$;

\mathbf{M} - matricea de inerție a manipulatorului;

M_{ij} - element al matricei \mathbf{M} ;

n - numărul coordonatelor generalizate;

${}^0\mathbf{p}_{k,Ci}$ - vectorul de poziție al centrului de masă al elementului i în raport cu sistemul de axe k , exprimat în sistemul de referință $\{0\}$;

Q_i - forța generalizată activă corespunzătoare coordonatei generalizate i ;

8. Dinamica roboților de tip manipulator

\mathbf{Q} - vectorul forțelor generalizate, $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$;

q_i - coordonata generalizată i ;

\mathbf{q} - vectorul coordonatelor generalizate, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$;

\mathbf{N} - vectorul forțelor Coriolis și centrifugale,
 $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_n]^T$;

δL - lucrul mecanic virtual.

Funcția Lagrange este definită ca fiind diferența dintre energia cinetică și cea potențială a sistemului mecanic:

$$L = E_c - E_p. \quad (8.73)$$

Ecuția de mișcare Lagrange este definită ca fiind:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.74)$$

8.3.1.1 Coordonate generalizate

În cazul roboților de tip manipulator, în general, cuplele cinematice pot fi de rotație sau de translație. Deoarece un element liber în spațiu are șase grade de libertate, pentru a specifica complet poziția și orientarea unui sistem de m elemente mobile în spațiul tridimensional, sunt necesare $6m$ coordonate. Atunci când elementele sunt legate între ele prin cuple cinematice, cele $6m$ coordonate nu vor mai fi independente. Dacă există c constrângeri, numărul coordonatelor independente va fi $n = 6m - c$. Cele n variabile independente noi sunt denumite coordonate generalizate. Aceasta înseamnă că numărul variabilelor generalizate independente este egal cu numărul gradelor de mobilitate ale sistemului mecanic.

Pentru un robot serial de tip manipulator, numărul cuplelor cinematice este egal cu numărul gradelor de mobilitate ale acestuia. De aceea, variabilele cuplelor $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ constituie un set de coordonate generalizate independente.

8.3.2 Energia cinetică

Energia cinetică a unui element cinematic poate fi exprimată ca fiind:

Bazele Roboticii

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}_{Ci}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\omega}_i^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i, \quad (8.75)$$

unde: \mathbf{v}_{Ci} este vectorul viteză liniară a centrului de masă al elementului i în raport cu sistemul de referință; $\boldsymbol{\omega}_i$ este vectorul viteză unghiulară a elementului i în raport cu sistemul de referință; ${}^0\mathbf{I}_i$ este matricea de inerție a elementului i în jurul centrului său de masă, exprimată în raport cu sistemul de referință.

Dacă ${}^i\mathbf{I}_i$ este matricea de inerție a elementului i în raport cu centrul său de masă, exprimată în sistemul de axe $\{i\}$, atunci se poate scrie:

$${}^0\mathbf{I}_i = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{I}_i \cdot {}^0\mathbf{R}^T. \quad (8.76)$$

Este important de notat faptul că ${}^i\mathbf{I}_i$ nu depinde de timp, iar ${}^0\mathbf{I}_i$ depinde de configurația și postura robotului.

Viteza liniară \mathbf{v}_{Ci} și viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}_i$, ale elementului i , pot fi determinate utilizând metoda recursivă ce a fost prezentată anterior. Putem, de asemenea, exprima vitezele definind o matrice Jacobiană a elementului, după cum urmează:

$$\dot{\mathbf{x}}_{Ci} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (8.77)$$

unde, $\dot{\mathbf{x}}_{Ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ci} \\ \boldsymbol{\omega}_{Ci} \end{bmatrix}$ și $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{vi} \\ \mathbf{J}_{\omega i} \end{bmatrix}$.

Matricea Jacobiană a elementului i , \mathbf{J}_i , este o matrice $6 \times n$, ce depinde de vitezele instantanee liniare ale centrului de masă și de vitezele unghiulare ale elementului i . \mathbf{J}_{vi} și $\mathbf{J}_{\omega i}$ sunt două submatrice $3 \times n$, ce pot fi determinate astfel:

$$\mathbf{J}_{vi} = [\mathbf{J}_{vi}^1, \mathbf{J}_{vi}^2, \dots, \mathbf{J}_{vi}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}], \quad (8.78)$$

$$\mathbf{J}_{\omega i} = [\mathbf{J}_{\omega i}^1, \mathbf{J}_{\omega i}^2, \dots, \mathbf{J}_{\omega i}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]. \quad (8.79)$$

Vectorii coloană j ($j \leq i$) pot fi obținuți utilizând relațiile următoare:

$$\mathbf{J}_{vi}^j = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} \times {}^0\mathbf{p}_{j-1,Ci} & \text{pentru o cupla } j \text{ de rotație} \\ \mathbf{z}_{j-1} & \text{pentru o cupla } j \text{ de translație} \end{cases}, \quad (8.80)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\mathbf{J}_{\omega_j}^j = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{pentru o cupla } j \text{ de rotație} \\ \mathbf{0} & \text{pentru o cupla } j \text{ de translație} \end{cases}. \quad (8.81)$$

Ecuția (77) poate fi scrisă astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ci} \\ \boldsymbol{\omega}_{Ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Vi} \\ \mathbf{J}_{\omega i} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (8.82)$$

adică,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{Ci} = \mathbf{J}_{Vi} \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_{Ci} = \mathbf{J}_{\omega i} \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{cases}. \quad (8.83)$$

Energia cinetică totală a sistemului poate fi obținută însumând ecuația (8.75) pentru toate cele n elemente cinematice.

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{v}_{Ci}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{v}_{Ci} + \boldsymbol{\omega}_i^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right). \quad (8.84)$$

Înlocuind relația (8.83) în (8.84), obținem:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{J}_{Vi} \cdot \dot{\mathbf{q}})^T m_i \cdot \mathbf{J}_{Vi} \cdot \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}_{\omega i} \cdot \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{\omega i} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{J}_{Vi}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Vi} + \mathbf{J}_{\omega i}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{\omega i} \right) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (8.85)$$

În continuare, se poate defini matricea de inerție a manipulatorului,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{J}_{Vi}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Vi} + \mathbf{J}_{\omega i}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{\omega i} \right). \quad (8.86)$$

În aceste condiții, energia cinetică totală va fi

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.87)$$

Ecuția (8.86) demonstrează faptul că matricea de inerție a manipulatorului depinde de submatricele Jacobiene \mathbf{J}_{Vi} și $\mathbf{J}_{\omega i}$. De asemenea, se poate demonstra că aceasta este o matrice simetrică și definită pozitiv.

8.3.3 Energia potențială

Energia potențială înmagazinată în elementul i a unui robot de tip manipulator este definită ca fiind lucrul mecanic necesar pentru a deplasa centrul de masă al elementului din originea sistemului de referință în poziția determinată de vectorul \mathbf{p}_{Ci} și este dată de expresia

$$E_{pi} = -m_i \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{p}_{Ci} . \quad (8.88)$$

Energia potențială totală a robotului va fi

$$E_p = -\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{p}_{Ci} . \quad (8.89)$$

8.3.4 Forțele generalizate

Forțele generalizate influențează toate forțele care acționează asupra unui robot de tip manipulator, exceptând forțele gravitaționale și de inerție. Pentru n coordonate independente, vectorul forțelor generalizate poate fi exprimat după cum urmează,

$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T . \quad (8.90)$$

O deplasare virtuală a sistemului este determinată de o modificare infinitesimală a configurației acestuia, ca urmare a modificărilor infinitesimale ale coordonatelor, ce sunt compatibile cu forțele și constrângerile impuse acestui sistem la un moment dat. Pentru un manipulator serial, deplasarea virtuală la nivelul cuplelor cinematice poate fi scrisă ca fiind:

$$\delta \mathbf{q} = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n]^T . \quad (8.91)$$

Fiind dată mișcarea efectorului final în spațiul n dimensional,

$$\delta \mathbf{x} = [\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n]^T , \quad (8.92)$$

lucrul mecanic virtual pentru deplasarea virtuală infinitesimală va fi

$$\delta \mathbf{W} = \mathbf{Q}^T \cdot \delta \mathbf{q} . \quad (8.93)$$

Având forțele și cuplurile actuatorilor de acționare ale cuplelor cinematice, ca fiind

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \quad (8.94)$$

și vectorul forțelor și momentelor rezultante ce acționează asupra efectorului final,

$$\mathcal{F} = [\mathbf{F}_e^T, \mathbf{M}_e^T]^T, \quad (8.95)$$

atunci lucrul mecanic dezvoltat de aceste forțe și momente este

$$\delta \mathbf{W} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_e^T \cdot \delta \mathbf{x}. \quad (8.96)$$

Din definirea matricei Jacobiene, putem scrie,

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (8.97)$$

Înlocuind relațiile (8.93) și (8.97) în (8.96), obținem

$$\mathbf{Q}^T \cdot \delta \mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{q}, \quad (8.98)$$

de unde rezultă:

$$\mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\tau}^T + \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{J}, \quad (8.99)$$

respectiv

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{J})^T = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_e^T. \quad (8.100)$$

Atunci când se iau în considerare și forțele de frecare \mathbf{F}_f , ecuația (8.100) devine

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_e^T - \mathbf{F}_f. \quad (8.101)$$

Din ecuația (8.101) putem nota faptul că, în absența forțelor de frecare și a forțelor externe ($\mathbf{F}_e - \mathbf{F}_f = \mathbf{0}$), vectorul forțelor generalizate este echivalent cu momentul de torsiune al cuplei cinematice ($\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau}$).

8.3.5 Forma generală a ecuațiilor dinamice

Substituind ecuația (8.87) și (8.89) în funcția Lagrange (8.73), rezultă

$$L = \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{p}_{Ci}. \quad (8.102)$$

Bazele Roboticii

În continuare, derivăm funcția Lagrange în raport cu q_i, \dot{q}_i și t , pentru a obține ecuația de mișcare Lagrange definită de (8.74),

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{p}_{Ci} . \quad (8.103)$$

unde M_{ij} este elementul (i,j) al matricei \mathbf{M} de inerție a manipulatorului. Deoarece energia potențială este nu depinde de vitezele cuplelor cinematice, derivata parțială a relației (8.103) în raport cu \dot{q}_i poate fi scrisă ca fiind,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \dot{q}_j . \quad (8.104)$$

Derivata totală a relației (8.104) în raport cu timpul va fi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{dM_{ij}}{dt} \right) \cdot \dot{q}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{dM_{ij}}{dt} \right) \cdot \dot{q}_j \end{aligned} \quad (8.105)$$

Deoarece M_{ij} este o funcție ce depinde numai de unghiurile (deplasările) cuplelor cinematice, putem scrie

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \right) . \quad (8.106)$$

Înlocuind (8.106) în (8.105), obținem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial t} \right) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k . \quad (8.107)$$

Derivând ecuația (8.103) în raport cu q_i ,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) + \sum_{j=1}^n m_j \cdot \mathbf{g}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{Cj}}{\partial q_i} . \quad (8.108)$$

Se poate demonstra faptul că $\mathbf{J}_{vj} = \frac{\partial \mathbf{p}_{Cj}}{\partial q_i}$, ceea ce înseamnă că putem scrie

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) + \sum_{j=1}^n m_j \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{J}_{vj}^i \quad (8.109)$$

Substituind (8.104), (8.107) și (8.109) în ecuația dinamică (8.74), vom avea

$$Q_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \ddot{q}_j + N_i + G_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.110)$$

unde

$$N_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k, \quad (8.111)$$

$$G_i = - \sum_{j=1}^n m_j \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{J}_{vj}^i. \quad (8.112)$$

Primul termen al ecuației (8.110) $\sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \ddot{q}_j$ este forța de inerție, al doilea termen N_i reprezintă termenul neliniar, constituind forțele Coriolis și centrifugale, iar al treilea termen G_i este forța gravitațională. Sub formă matriceală, ecuația (8.110) poate fi scrisă astfel,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N} + \mathbf{G}, \quad (8.113)$$

unde $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_n]^T$ și $\mathbf{G} = [G_1, G_2, \dots, G_n]^T$.

8.3.6 Formularea Lagrange pe scurt

- Se aplică algoritmul Denavit-Hartenberg, determinându-se toate matricele de transformare necesare;
- Se determină matricele de inerție ale elementelor, ${}^i\mathbf{I}_i$ în sistemul de axe curent;
- Se calculează aceste matrice în sistemul de referință ${}^0\mathbf{I}_i = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{I}_i \cdot {}^0\mathbf{R}^T$;
- Se determină vectorii de poziție ai centrelor de masă, utilizând relațiile

Bazele Roboticii

$${}^0\mathbf{p}_{i-1,Ci} = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^i\mathbf{p}_{i,Ci} + {}^{i-1}_0\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} \text{ sau } {}^0\mathbf{p}_{i-1,Ci} = {}^0\mathbf{R} \cdot ({}^i\mathbf{p}_{i,Ci} + {}^i\mathbf{p}_{i-1,i})$$

$${}^0\mathbf{p}_{k-1,Ci} = {}^{k-1}_0\mathbf{R} \cdot {}^{k-1}\mathbf{p}_{k-1,k} + {}^0\mathbf{p}_{k,Ci}, \text{ pentru } k = i-1, i-2, \dots, 2, 1,$$

$$\text{unde } {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} l_i \cdot \cos \theta_i \\ l_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \text{ sau } {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} l_i \\ d_i \cdot \sin \alpha_i \\ d_i \cdot \cos \alpha_i \end{bmatrix};$$

- Se calculează matricele Jacobiene ale elementelor, utilizând următoarele ecuații:

$$\mathbf{J}_{Vi}^j = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} \times {}^0\mathbf{p}_{j-1,Ci} & \text{pentru o cupla } j \text{ de rotație} \\ \mathbf{z}_{j-1} & \text{pentru o cupla } j \text{ de translație} \end{cases},$$

$$\mathbf{J}_{\omega i}^j = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{pentru o cupla } j \text{ de rotație} \\ \mathbf{0} & \text{pentru o cupla } j \text{ de translație} \end{cases},$$

$$\mathbf{J}_{Vi} = [\mathbf{J}_{Vi}^1, \mathbf{J}_{Vi}^2, \dots, \mathbf{J}_{Vi}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}],$$

$$\mathbf{J}_{\omega i} = [\mathbf{J}_{\omega i}^1, \mathbf{J}_{\omega i}^2, \dots, \mathbf{J}_{\omega i}^i, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}];$$

- Determinăm matricea de inerție \mathbf{M} a manipulatorului,

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_{Vi}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Vi} + \mathbf{J}_{\omega i}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{\omega i});$$

- Calculăm componentele matricei neliniare,

$$N_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \text{ pentru } i = 1, 2, \dots, n;$$

- Se determină componentele matricei gravitaționale,

$$G_i = - \sum_{j=1}^n m_j \cdot \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{J}_{Vj}^i;$$

- Scriem ecuațiile dinamice,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N} + \mathbf{G}$$

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_e^T - \mathbf{F}_f.$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

8.4 Analiza dinamică a unui manipulator serial plan cu 2 grade de mobilitate folosind metoda recursivă Newton-Euler

Considerăm manipulatorul plan cu două grade de mobilitate din Fig. 8.4

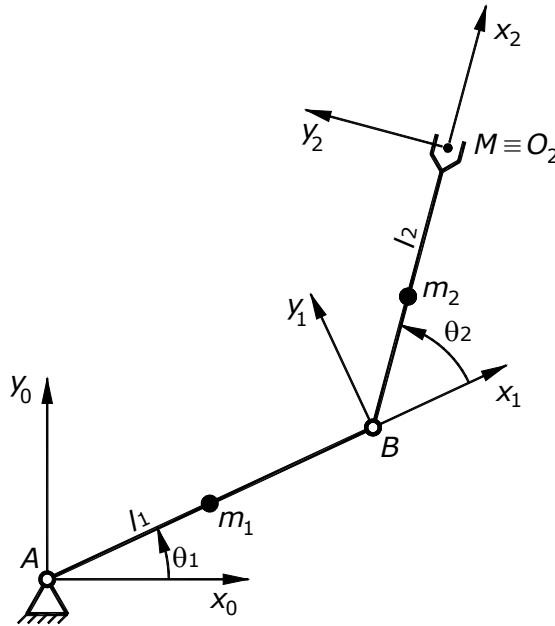


Fig. 8.4 Manipulator plan cu două grade de mobilitate

Parametrii Denavit-Hartenberg standard ai manipulatorului sunt în Tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

Elem.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2

Matricele omogene de transformare, scrise la trecerea de la sistemul de referință $\{0\}$ la sistemul de axe final $\{2\}$, sunt:

Bazele Roboticii

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.114)$$

$${}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.115)$$

$${}^0_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.116)$$

8.4.1 Determinarea matricelor de rotație

Plecând de la matricele de transformare omogene, putem determina matricele de rotație, ca fiind:

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.117)$$

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.118)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.119)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

Inversele acestor matrice vor fi:

$${}^0_1\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R}^{-1} = {}^0_1\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.120)$$

$${}^2_1\mathbf{R} = {}^2_1\mathbf{R}^{-1} = {}^2_1\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.121)$$

$${}^2_0\mathbf{R} = {}^0_2\mathbf{R}^{-1} = {}^0_2\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.122)$$

8.4.2 Determinarea vectorilor de poziție

Vectorii de poziție ${}^{i-1}_i\mathbf{p}$ sunt exprimați în raport cu sistemul de axe $\{i-1\}$, adică ${}^{i-1}_i\mathbf{p} = {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i}$. Conform convenției Denavit – Hartenberg standard, avem

$${}^{i-1}_i\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_i \cdot \cos \theta_i \\ a_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}. \quad (8.123)$$

Corespunzător acestei relații, obținem:

$${}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.124)$$

$${}^1_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.125)$$

Bazele Roboticii

Vectorii de poziție calculați în sistemul de axe curent pot fi determinați folosind relația

$${}^i \mathbf{p}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \cdot \sin \alpha_i \\ d_i \cdot \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (8.126)$$

ceea ce înseamnă

$${}^1 \mathbf{p}_{0,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.127)$$

$${}^2 \mathbf{p}_{1,2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.128)$$

Considerând faptul că elementele au secțiunea constantă pe toată lungimea lor, vectorii de poziție ai centrelor de masă vor fi:

$${}^1 \mathbf{p}_{1,C1} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.129)$$

$${}^2 \mathbf{p}_{2,C2} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.130)$$

8.4.3 Determinarea matricelor de inerție

$${}^1 \mathbf{I}_1 = \frac{m_1 \cdot l_1^2}{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.131)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$${}^2\mathbf{I}_2 = \frac{m_2 \cdot l_2^2}{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.132)$$

8.4.4 Calculul vitezelor și accelerațiilor

8.4.4.1 Propagarea vitezelor unghiulare

Din capitolul 6, cunoaștem că:

- Pentru cupla cinematică de rotație

$${}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} = {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot \left({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \right), \quad (8.133)$$

- Pentru cupla cinematică de translație

$${}^i\boldsymbol{\omega}_{0,i} = {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{0,i-1}. \quad (8.134)$$

În continuare, vom utiliza aceste relații pentru a determina vitezele unghiulare ale cuplelor cinematice.

Pentru prima cuplă cinematică, de rotație ($i=1$), avem:

$$\begin{aligned} {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} &= {}_0^1\mathbf{R} \cdot \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \right) = {}_0^1\mathbf{R} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.135)$$

Pentru a doua cuplă cinematică, de rotație ($i=2$),

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} &= {}_1^2\mathbf{R} \cdot \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.136)$$

8.4.4.2 Propagarea accelerațiilor unghiulare

Pentru prima cuplă cinematică, de rotație ($i=1$),

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot \left({}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \right) = {}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} . \quad (8.137)
 \end{aligned}$$

Pentru a doua cuplă cinematică, de rotație ($i=2$),

$$\begin{aligned}
 {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} &= {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left({}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} + {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} \right) = \\
 &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \quad . \quad (8.138) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.4.4.3 Propagarea vitezelor liniare

Pentru prima cuplă cinematică, de rotație ($i=1$),

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{v}_{0,1} &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{v}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{p} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = . \quad (8.139) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pentru a doua cuplă cinematică, de rotație ($i=2$),

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{v}_{0,2} &= {}^1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{v}_{0,1} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{p} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad . \quad (8.140) \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.4.4.4 Propagarea accelerațiilor liniare

Pentru prima cuplă cinematică, de rotație ($i=1$),

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{a}_{0,1} &= {}^0\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} &{}^0\mathbf{a}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,0} \times {}^0\mathbf{p} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times {}^0\mathbf{p}) + \\ &+ 2 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^0\mathbf{p}) + {}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^0\mathbf{p} + \\ &+ {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^0\mathbf{p}) \end{aligned} \right] = \\
 &= {}^0\mathbf{R} \cdot \left[{}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^0\mathbf{p} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^0\mathbf{p}) \right] = \quad . \quad (8.141.a) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{a}_{0,1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ -l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} -(l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \cos \theta_1 + \\ + (l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \sin \theta_1 \\ (l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \sin \theta_1 + \\ + (l_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) \cdot \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad .(8.141.b) \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pentru a doua cuplă cinematică, de rotație ($i=2$),

$${}^2\mathbf{a}_{0,2} = {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[\begin{aligned} &{}^1\mathbf{a}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\epsilon}_{0,1} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) + \\ &+ 2 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) + {}^1\boldsymbol{\epsilon}_{1,2} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} + \\ &+ {}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) \end{aligned} \right]. \quad (8.142)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

Datorită calculului laborios, se vor considera separat termenii ecuației (8.142).

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{a}_{0,1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.143)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot ({}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^1_2\mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad , (8.144) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot [{}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1_2\mathbf{p})] &= \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] =, \quad (8.145.a) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \\ l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[{}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] = \\
 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.145.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[{}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] = \\
 = 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] = \\
 = 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\ l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \quad , (8.146) \\
 = 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left({}^1\boldsymbol{\epsilon}_{1,2} \times {}^1_2\mathbf{p} \right) = \\
 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \quad , \quad (8.147) \\
 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[{}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] = \\
 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right], \quad (8.148.a)
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[{}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2} \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] &= \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\ l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \quad . \quad (8.148.b) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ -l_2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Adunând termenii (8.143 – 8.148) obținem:

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_{0,2} &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \\ -2 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 - l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (8.149)
 \end{aligned}$$

8.4.5 Determinarea accelerațiilor centrelor de masă

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{a}_{0,C1} &= {}^1\mathbf{a}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^1\mathbf{p}_{1,C1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1\mathbf{p}_{1,C1} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.150)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_{0,C2} &= {}^2\mathbf{a}_{0,2} + {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} \times {}^2\mathbf{p}_{2,C2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times \left({}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2\mathbf{p}_{2,C2} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \quad (8.151.a) \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_{0,C_2} &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (8.151.b)
 \end{aligned}$$

8.4.6 Calculul forțelor și momentelor

8.4.6.1 Determinarea vectorilor gravitaționali

$${}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.152)$$

$${}^1\mathbf{g} = {}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cdot \sin \theta_1 \\ -g \cdot \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.153)$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{g} &= {}^2\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -g \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -g \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (8.154)
 \end{aligned}$$

8.4.6.2 Determinarea forțelor și momentelor

Presupunând că nu există forțe de încărcare externe, atunci:

$${}^2\mathbf{F}_{2,3} = \mathbf{0} , \quad (8.155)$$

$${}^2\mathbf{M}_{2,3} = \mathbf{0} . \quad (8.156)$$

Pentru elementul cinematic 2 ($i = 2$),

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{F}_2^* &= -m_2 \cdot {}^2\mathbf{a}_{0,C2} = \\
 &= -m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (8.157)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{M}_2^* &= -{}^2\mathbf{I}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} - {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times ({}^2\mathbf{I}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2}) = \\
 &= -\frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = , \quad (8.158) \\
 &= -\frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{F}_{1,2} &= {}^2\mathbf{F}_{2,3} - m_2 \cdot {}^2\mathbf{g} + m_2 \cdot {}^2\mathbf{a}_{0,C_2} = -m_2 \cdot \begin{bmatrix} -g \cdot s_{12} \\ -g \cdot c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot s_{12} \\ l_1 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g \cdot c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.159)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{F}_{1,2} &= {}^1\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{F}_{1,2} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + g \cdot s_{12} \\ l_1 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \\ + g \cdot c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \frac{l_2}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot s_1 - \frac{l_2}{2} \cdot s_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot c_1 + \frac{l_2}{2} \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.160)
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{M}_{1,2} &= {}^2\mathbf{M}_{2,3} + \left({}^2\mathbf{p}_{1,2} + {}^2\mathbf{p}_{2,C2} \right) \times {}^2\mathbf{F}_{1,2} - {}^2\mathbf{p}_{2,C2} \times {}^2\mathbf{F}_{2,3} - {}^2\mathbf{M}_2^* = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \frac{l_2}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot s_1 - \\ -\frac{l_2}{2} \cdot s_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot c_1 + \\ + \frac{l_2}{2} \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot \left[l_1 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g \cdot c_{12} \right] \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \right) \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix}, (8.161)
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{M}_{1,2} &= {}^1\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{M}_{2,3} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^2\mathbf{M}_{2,3} = \\
 &= m_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \right) \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.162)
 \end{aligned}$$

Cuplul actuatorului utilizat pentru acționarea cuplei B se poate calcula folosind relația:

$$\begin{aligned}
 \tau_2 &= {}^1\mathbf{z}_1^T \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = [0 \ 0 \ 1] \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = \\
 &= \left[m_2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \right) \right] \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \quad (8.163)
 \end{aligned}$$

Pentru elementul cinematic 2 ($i = 2$),

$${}^1\mathbf{F}_1^* = -m_1 \cdot {}^1\mathbf{a}_{0,C_1} = -m_1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.164)$$

Bazele Roboticii

$${}^1\mathbf{M}_1^* = -{}^1\mathbf{I}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} - {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\mathbf{I}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1}) =$$

$$= -\frac{1}{12} m_1 \cdot l_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{12} m_1 \cdot l_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = -\frac{1}{12} m_1 \cdot l_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{F}_{0,1} = {}^1\mathbf{F}_{1,2} - m_1 \cdot {}^1\mathbf{g} - {}^1\mathbf{F}_1^* = {}^1\mathbf{F}_{1,2} - m_1 \cdot {}^1\mathbf{g} - m_2 \cdot {}^2\mathbf{a}_{0,C1} =$$

$$= m_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot s_2 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot s_{12} \\ l_1 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cdot c_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g \cdot c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$-m_1 \cdot \begin{bmatrix} -g \cdot s_1 \\ -g \cdot c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + m_1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cdot l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s_1 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cdot l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot c_1 + \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad , (8.166)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$${}^0\mathbf{F}_{0,1} = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{F}_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cdot l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s_1 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cdot l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot c_1 + \frac{m_2}{2} \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, (8.167)$$

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{M}_{0,1} &= {}^1\mathbf{M}_{1,2} + \left({}^1\mathbf{p}_{0,1} + {}^1\mathbf{p}_{1,C1} \right) \times {}^1\mathbf{F}_{0,1} - {}^1\mathbf{p}_{1,C1} \times {}^1\mathbf{F}_{1,2} - {}^1\mathbf{M}_1^* = \\ &= {}^1\mathbf{M}_{1,2} + \left(\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times {}^1\mathbf{F}_{0,1} - \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^1\mathbf{F}_{1,2} + \\ &+ \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot l_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.168.a)$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{M}_{0,1} = & m_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2\right) \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \cdot \frac{l_1^2}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{m_2}{4} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ + (m_1 + m_2) \cdot \frac{l_1}{2} \cdot g \cdot c_1 + \frac{m_2}{4} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} + \\
 & + m_2 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \cdot s_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g \cdot c_1 + \\ + \frac{l_2}{2} \cdot c_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot l_1^2 \cdot \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} , \quad (8.168.b)
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$${}^1\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \right] \ddot{\theta}_2 - \\ - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}, (8.169)$$

$${}^0\mathbf{M}_{0,1} = {}^0\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^1\mathbf{M}_{0,1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \right] \ddot{\theta}_2 - \\ - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}. (8.170)$$

Cuplul actuatorului cuplei cinematice A se determină cu relația:

$$\tau_1 = \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \right] \ddot{\theta}_2 - \\ - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12}. (8.171)$$

8.4.7 Ecuațiile dinamice de mișcare

Conform celor rezultate în paragraful anterior, cuplul celor trei actuatori poate fi determinat folosind relațiile:

Bazele Roboticii

$$\tau_1 = \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \right] \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \quad (8.172)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= {}^1z_1^T \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = \\ &= \left[m_2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot l_2^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot c_2 \right) \right] \cdot \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\theta}_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot s_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot g \cdot c_{12} \end{aligned} \quad (8.173)$$

Sub formă matriceală, aceste ecuații pot fi scrise după cum urmează,

$$\tau = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}, \quad (8.174)$$

adică:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 & m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \\ m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) & \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \\ \frac{1}{2} m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.175)$$

Din ecuațiile (8.174) și (8.175) rezultă:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1^2 \right) + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 & m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) \\ m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2 \right) & \frac{1}{3} \cdot m_2 \cdot l_2^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8.176)$$

reprezintă matricea maselor;

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.177)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

este vectorul accelerațiilor cuplelor cinematice;

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (8.178)$$

este o matrice neliniară a vitezelor;

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g l_1 c_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \\ \frac{1}{2} m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}, \quad (8.179)$$

reprezintă matricea forțelor de gravitație.

8.5 Analiza dinamică a unui manipulator de tip SCARA

Considerăm mecanismul de poziționare al unui manipulator de tip SCARA (Fig. 8.5)

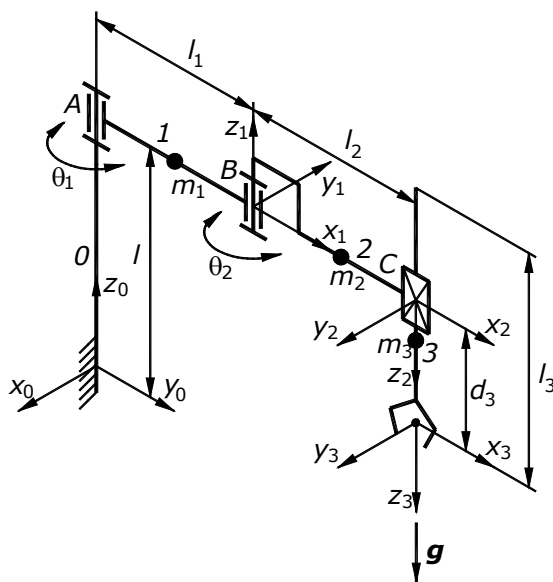


Fig. 8.5 Manipulator de tip SCARA

8.5.1 Determinarea matricelor de rotație

Primul pas îl constituie determinarea parametrilor Denavit Hartenberg și a matricelor de rotație. Parametrii Denavit-Hartenberg standard ai manipulatorului sunt prezentați în Tabelul 8.2.

Tabelul 8.2

Elem.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	l	θ_1
2	l_2	π	0	θ_2
3	0	0	d_3	0

$${}^0_1\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.180)$$

$${}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.181)$$

$${}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.182)$$

$${}^0_2\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1_2\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.183)$$

$${}^0_3\mathbf{R} = {}^0_2\mathbf{R} \cdot {}^2_3\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.184)$$

$${}^0_1\mathbf{R} = {}^0_1\mathbf{R}^{-1} = {}^0_1\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.185)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$${}^2_1\mathbf{R} = {}^1_2\mathbf{R}^{-1} = {}^1_2\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.186)$$

$${}^3_2\mathbf{R} = {}^2_3\mathbf{R}^{-1} = {}^2_3\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (8.187)$$

8.5.2 Determinarea vectorilor de poziție

Apoi, determinăm vectorii de poziție ${}^{i-1}_i\mathbf{p}$, la trecerea de la un sistem de axe la altul, plecând de la elementul fix 0, către efectorul final, 3. Vectorii de poziție ${}^{i-1}_i\mathbf{p}$ sunt exprimați în raport cu sistemul de axe $\{i-1\}$, adică ${}^{i-1}_i\mathbf{p} = {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i}$. Conform convenției Denavit – Hartenberg standard, avem

$${}^{i-1}_i\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_i \cdot \cos \theta_i \\ a_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}. \quad (8.188)$$

Corespunzător acestei relații, obținem:

$${}^0_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l \end{bmatrix}, \quad (8.189)$$

$${}^1_2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.190)$$

$${}^2_3\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}. \quad (8.191)$$

8.5.3 Calculul vitezelor și accelerațiilor

Al treilea pas îl constituie determinarea vitezelor și accelerațiilor pentru fiecare cuplă cinematică.

8.5.3.1 Propagarea vitezelor unghiulare

Mai întâi, determinăm vitezele unghiulare ale acestora, știind că:

$$\begin{cases} {}^i\omega_{0,i} = {}^{i-1}R \cdot ({}^{i-1}\omega_{0,i-1} + {}^{i-1}\dot{\theta}_i) & \text{pt. o cupla de rotație} \\ {}^i\omega_{0,i} = {}^{i-1}R \cdot {}^{i-1}\omega_{0,i-1} & \text{pentru o cupla de translație} \end{cases} \quad (8.192)$$

Pentru prima cuplă cinematică A, vom avea:

$$\begin{aligned} {}^1\omega_{0,1} &= {}^0R \cdot ({}^0\omega_{0,0} + {}^0\dot{\theta}_1) = {}^0R \cdot {}^0\dot{\theta}_1 = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.193)$$

Pentru a doua cuplă B, de rotație, obținem:

$$\begin{aligned} {}^2\omega_{0,2} &= {}^2R \cdot ({}^1\omega_{0,1} + {}^1\dot{\theta}_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.194)$$

Pentru a treia cuplă cinematică C, de translație :

$${}^3\omega_{0,3} = {}^3R \cdot {}^2\omega_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (8.195)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

8.5.3.2 Propagarea accelerațiilor unghiulare

Apoi, calculăm accelerațiile unghiulare pentru fiecare cuplă. Pentru prima cuplă cinematică, de rotație,

$$\begin{aligned} {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} &= {}^0\mathbf{R} \cdot \left({}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times {}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + {}^0\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.196)$$

Pentru cupla cinematică B , tot de rotație, avem:

$$\begin{aligned} {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} &= {}^1\mathbf{R} \cdot \left({}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + {}^1\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \right) = \\ &= {}^1\mathbf{R} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.197)$$

Pentru cupla cinematică C , de translație, accelerația unghiulară poate fi calculată cu relația:

$${}^3\boldsymbol{\varepsilon}_{0,3} = {}^2\mathbf{R} \cdot {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}. \quad (8.198)$$

8.5.3.3 Propagarea vitezelor liniare

În continuare, vom determina vitezele liniare ale celor trei cuple cinematice. Pentru cuplă A , de rotație:

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{v}_{0,1} &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{v}_{0,0} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1_0\mathbf{R} \cdot {}^0_1\mathbf{p} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8.199}$$

Pentru cupla cinematică B , de rotație, viteza liniară se determină cu relația:

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{v}_{0,2} &= {}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{v}_{0,1} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times \left({}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^1_1\mathbf{p} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \\
 &\times \left(\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_2 \\ l_1 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8.200}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

Pentru cupla C, de translație,

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{v}_{0,3} &= {}^3\mathbf{R} \cdot \left({}^2\mathbf{v}_{0,2} + {}^2_3\dot{\mathbf{p}} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2_3\mathbf{p} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad (8.201)
 \end{aligned}$$

8.5.3.4 Propagarea accelerațiilor liniare

De asemenea, determinăm accelerațiile liniare ale cuplelor cinematice. Pentru cupla cinematică A, de rotație, obținem:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{a}_{0,1} &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot \left[{}^0\mathbf{a}_{0,0} + {}^0\boldsymbol{\epsilon}_{0,0} \times {}^0_1\mathbf{p} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times \left({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times {}^0_1\mathbf{p} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,0} \times \left({}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times {}^0_1\mathbf{p} \right) + {}^0\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times {}^0_1\mathbf{p} + {}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \left({}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times {}^0_1\mathbf{p} \right) \right] = \\
 &= {}^1_0\mathbf{R} \cdot \left[{}^0\ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times {}^0_1\mathbf{p} + {}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times \left({}^0\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \times {}^0_1\mathbf{p} \right) \right] = \quad (8.202.a) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l \end{bmatrix} \right) \right] =
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{a}_{0,1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_1 \\ -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_1) \\ l_1 (\ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin \theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot s_1 + \dot{\theta}_1^2 \cdot c_1) \cdot c_1 + l_1 \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot c_1 - \dot{\theta}_1^2 \cdot s_1) \cdot s_1 \\ l_1 (\ddot{\theta}_1 \cdot s_1 + \dot{\theta}_1^2 \cdot c_1) \cdot s_1 + l_1 \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot c_1 - \dot{\theta}_1^2 \cdot s_1) \cdot c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.202)
 \end{aligned}$$

Pentru cea de a doua cuplă, de rotație,

$${}^2\mathbf{a}_{0,2} = {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[\begin{array}{l} {}^0\mathbf{a}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times \frac{1}{2}\mathbf{p} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \frac{1}{2}\mathbf{p}) + \\ + 2 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{p}) + {}^1\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{p} + {}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times ({}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \frac{1}{2}\mathbf{p}) \end{array} \right]. \quad (8.203)$$

Deoarece calculul este destul de laborios, acesta se va face pe etape, după cum urmează.

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{a}_{0,1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2) \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.204)
 \end{aligned}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot ({}^0\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^1_2\mathbf{p}) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_2 \\ l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (8.205) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot [{}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1_2\mathbf{p})] &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] = \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \\ l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \quad (8.206) \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot [2 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times {}^1_2\mathbf{p})] &= 2 \cdot {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] = \\
 &= 2 \cdot \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot s_2 \\ l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (8.207.a)
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[2 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] &= 2 \cdot \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -2 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.207.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left({}^1\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times {}^1_2\mathbf{p} \right) &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot s_2 \\ l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.208)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2_1\mathbf{R} \cdot \left[{}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times \left({}^1\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \times {}^1_2\mathbf{p} \right) \right] &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \cdot c_2 \\ l_2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot s_2 \\ l_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \quad (8.209) \\
 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot c_2 \\ -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot s_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Adunând termenii (8.204 ÷ 8.209), obținem:

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_{0,2} &= \begin{bmatrix} l_1(-\dot{\theta}_1^2 c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) \\ -l_1(\dot{\theta}_1^2 s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad .(8.210)
 \end{aligned}$$

Pentru ultima cuplă cinematică, de translație, accelerația liniară va fi:

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{a}_{0,3} &= {}^3\mathbf{R} \cdot \left[{}^2\mathbf{a}_{0,2} + {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} \times {}^2_3\mathbf{p} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times \left({}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2_3\mathbf{p} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2_3\dot{\mathbf{p}} + {}^1_3\ddot{\mathbf{p}} \right] = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[{}^2\mathbf{a}_{0,2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} \right] = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left({}^2\mathbf{a}_{0,2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{a}_{0,3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} = \quad (8.211) \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

8.5.4 Determinarea vectorilor de poziție ai centrelor de masă

Pasul următor îl constituie determinarea vectorului de poziție al centrului de masă, respectiv a vectorului de poziție al originii sistemului de axe, în raport cu sistemul de coordonate curent, pentru fiecare element cinematic.

Conform convenției Denavit-Hartenberg standard, matricea omogenă pentru un element cinematic, scrisă la trecerea de la sistemul de axe $\{i-1\}$ la sistemul $\{i\}$ este:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}_i\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (8.212) \\
 &= \begin{bmatrix} {}^{i-1}_i\mathbf{R} & {}^{i-1}_i\mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

unde ${}^{i-1}_i\mathbf{p} = {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i}$ este vectorul de poziție al originii O_i a sistemului de axe $\{i\}$ relativ la originea O_{i-1} a sistemului de axe $\{i-1\}$, raportat

8. Dinamica roboților de tip manipulator

la sistemul $\{i-1\}$. Pentru simplificare, atunci când vectorul $\mathbf{p}_{i-1,i}$ este raportat la sistemul de axe $\{i-1\}$ se utilizează notația ${}^{i-1}\mathbf{p}$.

Același vector, raportat la sistemul de axe curent $\{i\}$, va avea forma:

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{p}_{i-1,i} &= {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p}_{i-1,i} = {}_{i-1}^i\mathbf{R} \cdot {}^{i-1}\mathbf{p} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \cdot \cos \theta_i \\ a_i \cdot \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix} = (8.213) \\ &= \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \cdot \sin \alpha_i \\ d_i \cdot \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că:

$${}^1\mathbf{p}_{0,1} = {}_0^1\mathbf{R} \cdot {}^0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos \theta_1 \\ l_1 \cdot \sin \theta_1 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix}, (8.214)$$

$${}^2\mathbf{p}_{1,2} = {}_1^2\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (8.215)$$

$${}^3\mathbf{p}_{2,3} = {}_2^3\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}. (8.216)$$

Dacă presupunem că secțiunea elementelor cinematice este constantă pe toată lungimea acestora, atunci vectorii de poziție ai centrelor de masă sunt:

$${}^1\mathbf{p}_{1,C_1} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (8.217)$$

$${}^2\mathbf{p}_{2,C_2} = \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.218)$$

$${}^3\mathbf{p}_{3,C_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.219)$$

8.5.5 Calculul accelerațiilor centrelor de masă

În continuare, determinăm accelerațiile centrelor de masă.

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{a}_{0,C_1} &= {}^0\mathbf{a}_{0,1} + {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} \times {}^1\mathbf{p}_{1,C_1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times \left({}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times {}^1\mathbf{p}_{1,C_1} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \ddot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \ddot{\theta}_1^2 \\ l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.220)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{a}_{0,C_2} &= {}^2\mathbf{a}_{0,2} + {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} \times {}^2\mathbf{p}_{2,C_2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times {}^2\mathbf{p}_{2,C_2}) = \\
 &= {}^2\mathbf{a}_{0,2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_1 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.221)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{a}_{3,C_3} &= {}^3\mathbf{a}_{0,3} + {}^3\boldsymbol{\varepsilon}_{0,3} \times {}^3\mathbf{p}_{3,C_3} + {}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3} \times ({}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3} \times {}^3\mathbf{p}_{3,C_3}) = \\
 &= {}^3\mathbf{a}_{0,3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \right) = \quad (8.222) \\
 &= {}^3\mathbf{a}_{0,3} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.5.6 Determinarea forțelor și momentelor

Al șaselea pas îl constituie calculul forțelor și momentelor. Vectorii accelerație gravitațională, raportați la sistemele de axe atașate elementelor cinematice ale manipulatorului, sunt:

Bazele Roboticii

$${}^0\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (8.223)$$

$${}^1\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (8.224)$$

$${}^2\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (8.225)$$

$${}^3\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (8.226)$$

Presupunem că asupra efectorului final nu acționează nici o forță externă, ${}^3\mathbf{F}_{3,4} = \mathbf{0}$, ${}^3\mathbf{M}_{3,4} = \mathbf{0}$.

Pentru elementul cinematic 3 avem:

$${}^3\mathbf{F}_3^* = -m_3 \cdot {}^3\mathbf{a}_{0,C_3} = -m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix}, \quad (8.227)$$

$$\begin{aligned} {}^3\mathbf{M}_3^* &= -{}^3\mathbf{I}_3 \cdot {}^3\boldsymbol{\varepsilon}_{0,3} - {}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3} \times ({}^3\mathbf{I}_3 \cdot {}^3\boldsymbol{\omega}_{0,3}) = \\ &= -\frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot l_3^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} - \\ &\quad -\frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot l_3^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.228)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{F}_{2,3} &= {}^3\mathbf{F}_{3,4} - m_3 \cdot {}^3\mathbf{g} - {}^3\mathbf{F}_3^* = -m_3 \cdot {}^3\mathbf{g} + m_3 \cdot {}^3\mathbf{a}_{0,C_3} = \\
 &= -m_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} =, \quad (8.229) \\
 &= m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{F}_{2,3} &= {}^2_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{F}_{2,3} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} = \quad (8.230) \\
 &= m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathbf{M}_{2,3} &= {}^3\mathbf{M}_{3,4} + ({}^3\mathbf{p}_{2,3} + {}^3\mathbf{p}_{3,C_3}) \times {}^3\mathbf{F}_{2,3} - {}^3\mathbf{p}_{3,C_3} \times {}^3\mathbf{F}_{3,4} - {}^3\mathbf{M}_3^* = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \right) \times m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 - \frac{l_3}{2} \end{bmatrix} \times m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$${}^3\mathbf{M}_{2,3} = m_3 \cdot \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.231)$$

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{M}_{2,3} &= {}^2_3\mathbf{R} \cdot {}^3\mathbf{M}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^3\mathbf{M}_{2,3} = \\ &= m_3 \cdot \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.232) \end{aligned}$$

Forța actuatorului cuplei C, de translație, va fi:

$$\begin{aligned} \tau_3 &= {}^2\mathbf{z}_2^T \cdot {}^2\mathbf{F}_{2,3} = \\ &= [0 \quad 0 \quad 1] \cdot m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} = . \quad (8.233) \\ &= m_3 \cdot (\ddot{d}_3 - g) \end{aligned}$$

Pentru elementul cinematic 2,

$${}^2\mathbf{F}_2^* = -m_2 \cdot {}^2\mathbf{a}_{0,C_2} = -m_2 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 \cdot (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.234)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{M}_2^* &= -{}^2\mathbf{I}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{0,2} - {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2} \times ({}^2\mathbf{I}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_{0,2}) = \\
 &= -\frac{1}{12}m_2 \cdot l_2^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} - \frac{1}{12}m_2 \cdot l_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \\
 &\times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{12}m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \\
 &- \frac{1}{12}m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{12}m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad , (8.235)$$

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{F}_{1,2} &= {}^2\mathbf{F}_{2,3} - m_2 \cdot {}^2\mathbf{g} - {}^2\mathbf{F}_2^* = \\
 &= {}^2\mathbf{F}_{2,3} - m_2 \cdot {}^2\mathbf{g} + m_2 \cdot {}^2\mathbf{a}_{0,C_2} = \\
 &= m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1(-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1(\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ d_3 - g \end{bmatrix} - m_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \\
 &+ m_2 \cdot \begin{bmatrix} l_1(-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1(\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - \frac{l_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (m_2 + m_3) \cdot l_1(-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -(m_2 + m_3) \cdot l_1(\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ m_3 \cdot \ddot{d}_3 - (m_2 + m_3) \cdot g \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad , (8.236)$$

Bazele Roboticii

$${}^1\mathbf{F}_{1,2} = {}^1\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot {}^2\mathbf{F}_{1,2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cdot s_2 \right] \\ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cdot s_2 - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cdot c_2 \right] \\ -m_3 \cdot \ddot{d}_3 + (m_2 + m_3) \cdot g \end{bmatrix}, \quad (8.237)$$

$${}^2\mathbf{M}_{1,2} = {}^2\mathbf{M}_{2,3} + ({}^2\mathbf{p}_{1,2} + {}^2\mathbf{p}_{2,C_2}) \times {}^2\mathbf{F}_{1,2} - {}^2\mathbf{p}_{2,C_2} \times {}^2\mathbf{F}_{2,3} - {}^2\mathbf{M}_2^* =$$

$$= {}^2\mathbf{M}_{2,3} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^2\mathbf{F}_{1,2} - \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^2\mathbf{F}_{2,3} - \frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= m_3 \cdot \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (m_2 + m_3) \cdot l_1 (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -(m_2 + m_3) \cdot l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ m_3 \cdot \ddot{d}_3 - (m_2 + m_3) \cdot g \end{bmatrix} - \quad (8.238.a)$$

$$- \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(m_3 \cdot \begin{bmatrix} l_1 (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ -l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) - l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \ddot{d}_3 - g \end{bmatrix} \right) - \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^2\mathbf{M}_{1,2} = m_3 \cdot \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1 (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_2}{2} [m_3 \cdot \ddot{d}_3 - (m_2 + m_3) \cdot g] \\ -\frac{l_2}{2} \left[(m_2 + m_3) \cdot l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) \cdot l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right] \end{bmatrix} - \\
 - m_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_2}{2} (\ddot{d}_3 - g) \\ \frac{l_2}{2} [l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] \end{bmatrix} - \frac{1}{12} m_2 \cdot l_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \cdot [l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + l_2 \cdot (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] \\ m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) [l_1 (-\dot{\theta}_1^2 \cdot c_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot s_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] - \\ - \frac{l_2}{2} [2m_3 \cdot \ddot{d}_3 - (m_2 + 2m_3) \cdot g] \\ - \frac{l_2}{2} \left[(m_2 + 2m_3) l_1 (\dot{\theta}_1^2 s_2 + \ddot{\theta}_1 c_2) + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right] - \\ - \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (8.238.b)
 \end{aligned}$$

$${}^1\mathbf{M}_{1,2} = {}^1\mathbf{R} \cdot {}^2\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot {}^2\mathbf{M}_{1,2} \quad (8.239.a)$$

Bazele Roboticii

$${}^1\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 \right] - \\ - \frac{l_2}{2} [2m_3 \ddot{d}_3 - (m_2 + 2m_3) g] s_2 \\ m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 \right] + \\ + \frac{l_2}{2} [2m_3 \ddot{d}_3 - (m_2 + 2m_3) g] c_2 \\ \frac{l_2}{2} \left[(m_2 + 2m_3) l_1 (\dot{\theta}_1^2 s_2 + \ddot{\theta}_1 c_2) + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right] + \\ + \frac{1}{12} m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}. \quad (8.239.b)$$

Cuplul actuatorului ce acționează cupla cinematică B , de rotație,

$$\begin{aligned} \tau_2 &= {}^1\mathbf{z}_1^T \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot {}^1\mathbf{M}_{1,2} = \\ &= \frac{l_2}{2} \left[(m_2 + 2m_3) l_1 (\dot{\theta}_1^2 s_2 + \ddot{\theta}_1 c_2) + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right] + \\ &+ \frac{1}{12} m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ &+ \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2 \end{aligned} \quad (8.240)$$

Pentru elementul 1, forțele și momentele se calculează după cum urmează

$${}^1\mathbf{F}_1^* = -m_1 \cdot {}^1\mathbf{a}_{0,C_1} = -m_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.241)$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{M}_1^* &= -{}^1\mathbf{I}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\varepsilon}_{0,1} - {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1} \times ({}^1\mathbf{I}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_{0,1}) = \\
 &= -\frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) =, \quad (8.242) \\
 &= -\frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{F}_{0,1} &= {}^1\mathbf{F}_{1,2} - m_1 \cdot {}^1\mathbf{g} - {}^1\mathbf{F}_1^* = \\
 &= \begin{bmatrix} -(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cdot c_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 \right] \\ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cdot s_2 - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 \right] \\ -m_3 \ddot{d}_3 + (m_2 + m_3) g \end{bmatrix} - \\
 &\quad -m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ \frac{l_1}{2} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cdot c_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 \right] \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cdot s_2 - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 \right] \\ -m_3 \ddot{d}_3 + (m_1 + m_2 + m_3) g \end{bmatrix}, \quad (8.243)
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{F}_{0,1} &= {}^0\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{F}_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\
 &\cdot \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 \right] \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 \right] \\ -m_3 \ddot{d}_3 + (m_1 + m_2 + m_3) g \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 (\dot{\theta}_1^2 c_1 + \ddot{\theta}_1 s_1) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_{12} + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_{12} \right] \\ -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 (\dot{\theta}_1^2 s_1 - \ddot{\theta}_1 c_1) - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_{12} - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_{12} \right] \\ -m_3 \ddot{d}_3 + (m_1 + m_2 + m_3) g \end{bmatrix} \quad (8.244)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{M}_{0,1} &= {}^1\mathbf{M}_{1,2} + \left({}^1\mathbf{p}_{0,1} + {}^1\mathbf{p}_{1,C_1} \right) \times {}^1\mathbf{F}_{0,1} - {}^1\mathbf{p}_{1,C_1} \times {}^1\mathbf{F}_{1,2} - {}^1\mathbf{M}_1^* = \\
 &= \begin{bmatrix} m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_2 - \right. \\ \left. - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 \right] - \frac{l_2}{2} \left[2m_3 \ddot{d}_3 - \right. \\ \left. - (m_2 + 2m_3) g \right] s_2 \\ m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_2 + \right. \\ \left. + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 \right] + \frac{l_2}{2} \left[2m_3 \ddot{d}_3 - \right. \\ \left. - (m_2 + 2m_3) g \right] c_2 + \\ \frac{l_2}{2} \left[(m_2 + 2m_3) l_1 (\dot{\theta}_1^2 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \cdot c_2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \right] + \frac{1}{12} m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} +
 \end{bmatrix}$$

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \cdot c_2 + \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) s_2 \right] \\ \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) l_1 \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) l_2 \left[\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \cdot s_2 - \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) c_2 \right] \\ -m_3 \ddot{d}_3 + (m_1 + m_2 + m_3) g \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 \left[\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 c_2 + \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \cdot s_2 \right] \\ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot \ddot{\theta}_1 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right) \cdot l_2 \left[\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \cdot s_2 - \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \cdot c_2 \right] \\ -m_3 \cdot \ddot{d}_3 + (m_2 + m_3) \cdot g \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) (l_1 + l_2 c_2) + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 l + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 l c_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ + \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 l c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - 2m_3 \frac{l_2}{2} s_2 \ddot{d}_3 - \\ - \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 + (m_2 + 2m_3) \frac{l_2}{2} g s_2 \\ \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 s_2 \ddot{\theta}_1 + \\ + \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 s_2 \ddot{\theta}_2 + 2m_3 \frac{l_2}{2} s_2 \ddot{d}_3 + \\ + m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 \right] + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 l \dot{\theta}_1^2 + \\ + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 l (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 - (m_2 + 2m_3) \frac{l_2}{2} g c_2 \\ \left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l_1^2 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ + \left[\left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

Bazele Roboticii

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) (l_1 + l_2 c_2) + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 l + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 l c_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 l c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - 2m_3 \frac{l_2}{2} s_2 \ddot{d}_3 - \\ - \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_2 + (m_2 + 2m_3) \frac{l_2}{2} g s_2 \\ \\ \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 s_2 \ddot{\theta}_1 + \\ + \left[m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l \right] l_2 s_2 \ddot{\theta}_2 + 2m_3 \frac{l_2}{2} s_2 \ddot{d}_3 + \\ + m_3 \left(d_3 - \frac{l_3}{2} \right) \left[l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 \right] + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 l \dot{\theta}_1^2 + \\ + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) l_2 l (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_2 - (m_2 + 2m_3) \frac{l_2}{2} g c_2 \\ \\ \left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l_1^2 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ + \left[\left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - \\ - \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \end{bmatrix} \quad (8.245)
 \end{aligned}$$

$${}^0\mathbf{M}_{0,1} = {}^0_1\mathbf{R} \cdot {}^1\mathbf{M}_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^1\mathbf{M}_{0,1}. \quad (8.246)$$

Momentul de torsiune al cuplei A (cuplul actuatorului ce acționează această cuplă) va fi:

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= {}^0\mathbf{z}_0^T \cdot {}^0\mathbf{M}_{0,1} = [0 \ 0 \ 1] \cdot {}^0\mathbf{M}_{0,1} = ({}^0\mathbf{M}_{0,1})_z = ({}^1\mathbf{M}_{0,1})_z = \\
 &= \left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l_1^2 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\
 &+ \left[\left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - \\
 &- \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)
 \end{aligned} \quad . \quad (8.247)$$

8.5.7 Ecuațiile dinamice de mișcare

Conform celor rezultate în paragraful anterior, cuplul celor trei actuatori poate fi determinat folosind relațiile:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3 \right) l_1^2 + (m_2 + 2m_3) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\
 &+ \left[\left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 \right] \ddot{\theta}_2 - \\
 &- \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 s_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)
 \end{aligned} \quad , \quad (8.248)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 &= \left[\left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3 \right) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + \\
 &+ \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s_2
 \end{aligned} \quad , \quad (8.249)$$

$$\tau_3 = m_3 \cdot (\ddot{d}_3 - g) . \quad (8.250)$$

Sub formă matriceală, aceste ecuații pot fi scrise după cum urmează,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G} , \quad (8.251)$$

unde:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} , \quad (8.252)$$

Bazele Roboticii

reprezintă vectorul momentelor de torsiune;

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix}, \quad (8.253)$$

este vectorul accelerațiilor cuplelor cinematice;

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3\right)l_1^2 + \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)l_1l_2c_2 + 0 \\ + (m_2 + 2m_3)l_1l_2c_2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3\right)l_2^2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3\right)l_2^2 \\ \left(\frac{m_2}{3} + m_3\right)l_2^2 + \left(\frac{m_2}{3} + m_3\right)l_2 \\ + \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)l_1l_2c_2 \\ 0 \quad 0 \quad m_3 \end{bmatrix}, \quad (8.254)$$

reprezintă matricea maselor;

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)l_1l_2s_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \left(\frac{m_2}{2} + m_3\right)l_1l_2\dot{\theta}_1^2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.255)$$

este o matrice neliniară a vitezelor;

8. Dinamica roboților de tip manipulator

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 \cdot g \end{bmatrix}, \quad (8.256)$$

este matricea forțelor de gravitație.

9

GENERAREA TRAIECTORIEI

9.1 Generalități

Pentru realizarea unei anumite operații în spațiul tridimensional, efectorul final al manipulatorului trebuie să descrie o anumită traiectorie în interiorul spațiului de lucru, ceea ce înseamnă o modificare în timp a poziției și orientării sistemului de axe atașat acestui efector (Fig. 9.1). Pentru manipulator, acest lucru presupune o modificare în timp a matricei omogene totale 0_nT , matrice scrisă în raport cu sistemul de referință fix.

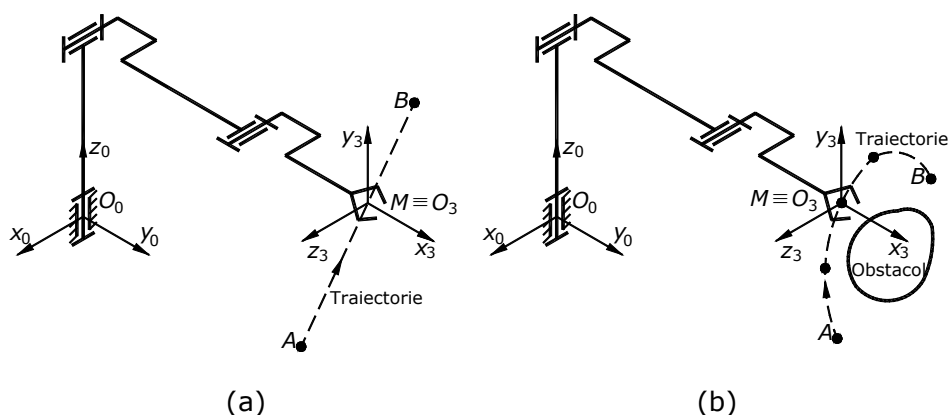


Fig. 9.1 Generarea traiectoriei: a) numai puncte extreme impuse; b) puncte intermediare impuse

Dacă prezintă importanță numai punctele extreme ale traiectoriei (poziția și orientarea inițială, respectiv finală, ale efectorului), atunci este suficientă rezolvarea cinematicii inverse a pozițiilor pentru cele două extremități impuse și de a genera traiectoria în spațiul cuplelor cinematice (Fig. 9.1.a). Aceasta se numește *mişcare punct cu punct*.

9. Generarea traiectoriei

Uneori, însă, este necesară specificarea mișcării mult mai în detaliu, ceea ce presupune impunerea unor puncte (poziții și orientări) intermediare între punctele extreme ale traiectoriei (Fig. 9.1.b). În aceste situații, sistemul de axe atașat efectorului final trebuie să treacă prin fiecare punct impus. Punctele intermediare respective presupun o anumită poziție și o anumită orientare a acestui sistem de axe. Aceasta se numește *mișcare după o traiectorie*.

De obicei, manipulatorul trebuie să efectueze o mișcare lină, continuă. Pentru aceasta, vom defini o funcție continuă, care să aibă și prima derivată continuă. Uneori se cere ca și derivata a doua să aibă aceeași calitate. Mișcările sacadate și bruște cauzează o creștere a uzurii sistemului mecanic, dar și vibrații ale acestuia. În scopul asigurării unei traiectorii line, trebuie impuse anumite condiții în ceea ce privește calitățile acesteia între punctele intermediare.

Există mai multe opțiuni în ceea ce privește alegerea funcției care să asigure o traiectorie continuă. Toate aceste funcții asigură trecerea prin punctele intermediare impuse.

În acest capitol vor fi discutate unele funcții, ce pot fi impuse pentru traiectorie.

9.2 Generarea în spațiul cuplelor cinematice

În acest paragraf vom considera metodele de generare a traiectoriei, a cărei formă (în spațiu și timp) este o funcție de variabilele cuplelor cinematice.

Fiecare punct al traiectoriei din spațiul de lucru este de obicei impus în ceea ce privește poziția și orientarea sistemului de axe atașat efectorului final, în raport cu sistemul de referință (atașat elementului fix), vezi Fig. 9.1.b. Fiecare dintre aceste puncte este convertit într-un set de valori pentru variabilele cuplelor cinematice, prin rezolvarea cinematicii inverse a pozițiilor. Apoi, se găsește câte o funcție continuă pentru fiecare din cele n cuple cinematice, funcții ce permit trecerea acestora din punctul inițial, prin toate punctele intermediare, în punctul final impus (puncte rezultate din rezolvarea cinematicii inverse). Timpul cerut pentru parcurgerea fiecărui segment dintre două puncte intermediare succesive este același pentru fiecare cuplă cinematică, astfel încât toate cuplele cinematice vor atinge punctul intermediar corespunzător în același timp, rezultând trecerea efectorului final prin fiecare punct intermediar impus al traiectoriei din spațiul de lucru.

9.2.1 Polinoame de ordinul trei

Considerăm problema generală a deplasării efectorului final din poziția inițială într-o poziție finală, într-un anumit interval de timp. Cinematica inversă permite determinarea valorilor variabilelor cuplelor cinematice, corespunzătoare pozițiilor și orientărilor respective. Ceea ce se cere este găsirea unei funcții pentru fiecare cuplă cinematică, a cărei valori la timpul t_0 este poziția inițială a sistemului de axe atașat cuplei respective, iar la timpul t_f este poziția finală a acestuia. Așa cum se observă în Fig. 9.2, există multe funcții continue, $\theta(t)$ sau $d(t)$, care pot fi utilizate pentru interpolarea valorii variabilei cuplei cinematice. În cele ce urmează, se va considera că toate cuplele cinematice ale manipulatorului sunt de rotație (variabila cuplelor va fi $\theta(t)$).

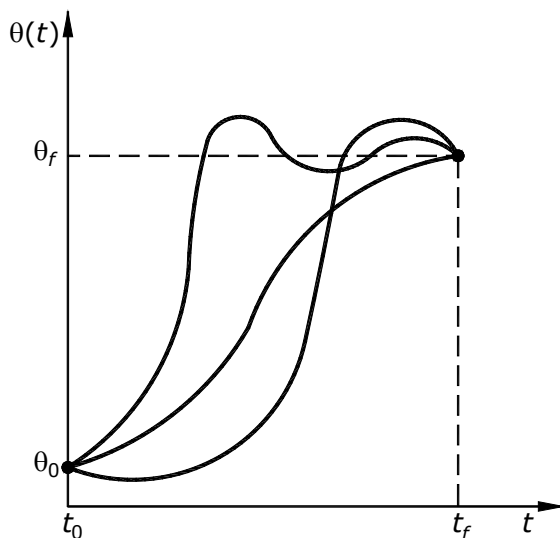


Fig. 9.2 Forme posibile ale traiectoriei pentru o singură cuplă cinematică

Pentru a asigura o mișcare lină, continuă, trebuie impuse cel puțin patru condiții pentru funcția respectivă. Primele două condiții privind valoarea funcției sunt valorile, inițială și finală, impuse:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (9.1)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f. \quad (9.2)$$

9. Generarea traiectoriei

Celelalte două condiții constau în faptul că funcția trebuie să fie continuă și în viteză, ceea ce înseamnă ca viteza inițială și cea finală să fie egale cu zero:

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad (9.3)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0. \quad (9.4)$$

Aceste patru condiții pot fi satisfăcute de un polinom de cel puțin gradul trei. O funcție polinomială cubică are forma

$$\theta(t_f) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3, \quad (9.5)$$

iar derivatele de ordinul unu și doi sunt

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2, \quad (9.6)$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot t. \quad (9.7)$$

Combinând ecuațiile (9.5), (9.6) și (9.7) cu cele patru condiții menționate anterior, rezultă un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 \end{cases} \quad (9.8)$$

Rezolvând acest sistem de ecuații pentru necunoscutele a_i , obținem

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2} \cdot (\theta_f - \theta_0) \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3} \cdot (\theta_f - \theta_0) \end{cases} \quad (9.9)$$

Utilizând soluțiile (9.9), se poate determina funcția polinomială cubică ce leagă orice poziție inițială a originii unei cuple cinematice de orice poziție finală impusă. Aceste soluții sunt valabile pentru cazul în

care cupla cinematică are valoarea zero pentru viteza inițială și cea finală (Fig. 9.3).

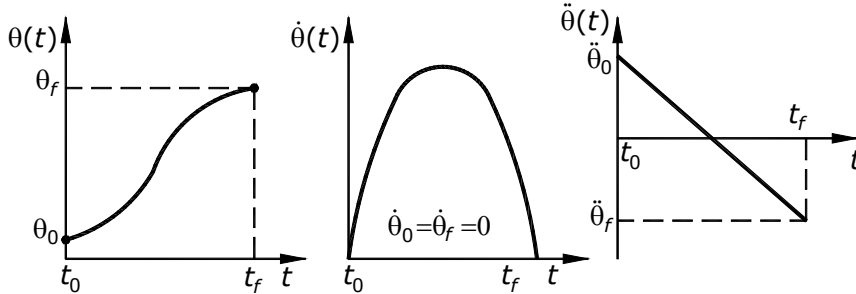


Fig. 9.3 Forme posibile ale traiectoriei pentru

9.2.2 Funcții polinomiale cubice pentru o traiectorie cu puncte intermediare

În paragraful anterior s-au considerat mișcări descrise pentru o durată impusă și un punct final al traiectoriei. În general, dorim generarea unor traiectorii ce includ și puncte intermediare. De obicei, dorim trecerea prin punctele respective fără opriri.

Ca și în cazul cu un singur punct țintă, fiecare punct intermediar este de obicei specificat în ceea ce privește poziția și orientarea sistemului de axe atașat efectorului final, în raport cu sistemul de referință. Fiecare dintre aceste puncte intermediare este convertit într-un set de unghiuri ale cuplelor cinemate, rezolvând problema cinematicii inverse a pozițiilor. Pentru aceasta, vom considera problema determinării funcțiilor cubice care conectează punctele intermediare pentru fiecare cuplă cinematică.

Dacă vitezele impuse cuplelor în punctele intermediare sunt cunoscute, putem construi polinoamele cubice ca în paragraful anterior. Însă, acum vitezele la extremitățile segmentelor nu sunt zero, ci au anumite valori cunoscute. Condițiile (9.3) și (9.4) devin

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad (9.10)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f, \quad (9.11)$$

iar sistemul de patru ecuații, ce descrie funcția cubică generală este

9. Generarea traiectoriei

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 = a_1 \\ \dot{\theta}_f = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 \end{cases} \quad (9.12)$$

Rezolvarea acestui sistem conduce la soluțiile

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = \dot{\theta}_0 \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2} \cdot (\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f} \cdot \dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f} \cdot \dot{\theta}_f \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3} \cdot (\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2} \cdot (\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0) \end{cases} \quad (9.13)$$

Utilizând soluțiile (9.13), putem determina funcțiile polinomiale cubice care conectează orice poziții inițiale și finale, cu orice viteze inițiale și finale.

Dacă avem vitezele necesare pentru fiecare punct intermediar, atunci aplicăm ecuațiile (9.13) pentru fiecare segment, în scopul obținerii funcțiilor polinomiale cubice. Există mai multe posibilități pentru de a putea specifica vitezele în punctele intermediare:

- Utilizatorul specifică vitezele necesare pentru fiecare punct intermediar, în funcție de viteza liniară și unghiulară a efectorului final din momentul respectiv;
- Sistemul de comandă alege automat vitezele în punctele intermediare aplicând o metodă euristică potrivită, atât în spațiul cartezian (de lucru), cât și în spațiul cuplei;
- Sistemul de comandă alege automat vitezele în punctele intermediare, în așa fel încât accelerația în punctele intermediare să fie continuă.

Pentru primul caz, vitezele în punctele intermediare sunt obținute utilizând inversa matricei Jacobiene a manipulatorului, corespunzătoare fiecărui punct intermediar. Dacă manipulatorul este într-o configurație de singularitate în punctul intermediar considerat, atunci utilizatorul nu poate specifica o viteză arbitrară pentru punctul respectiv. O rezolvare convenabilă, în acest caz, este aplicarea uneia dintre celelalte două opțiuni.

Pentru cea de a doua posibilitate, sistemul alege automat viteze intermediare convenabile, utilizând metode euristice. Considerăm, spre exemplificare, că traiectoria impusă $\theta(t)$ pentru o

anumită cuplă cinematică este specificată de punctele intermediare impuse, ca în Fig. 9.4. În această figură s-a făcut o alegere rezonabilă a vitezelor cuplei cinematice în punctele intermediare, reprezentate de segmentele de dreaptă tangente la traiectorie în fiecare punct. Această alegere este rezultatul aplicării unei metode euristice simple de calcul. Să presupunem că punctele intermediare sunt conectate prin segmente de dreaptă (segmentele cu linie întreruptă). Dacă panta acestor drepte își modifică semnul în fiecare punct intermediar, se alege viteza zero (de exemplu, θ_B , θ_C), iar dacă panta nu-și modifică semnul, ci doar valoarea, se alege media celor două pante (de exemplu, θ_A).

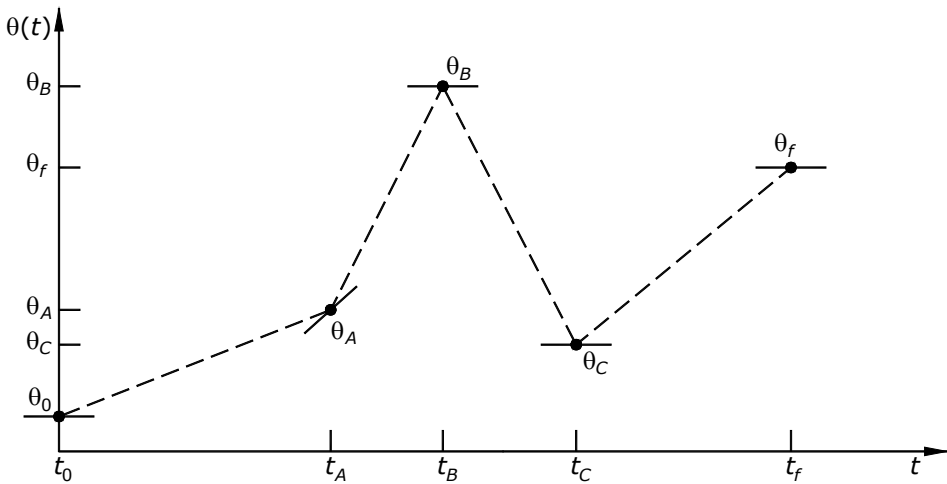


Fig. 9.4 Punctele intermediare ale unei traiectorii impuse

În cel de al treilea caz, sistemul alege vitezele în punctele intermediare, în așa fel încât accelerația este constantă în fiecare punct. Pentru a exemplifica, vom considera cazul pentru care unghiul cuplei cinematice în punctul inițial este θ_0 , în punctul intermediar θ_i , iar în punctul final impus θ_f . Pentru rezolvarea problemei se utilizează două funcții polinomiale:

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11} \cdot t + a_{12} \cdot t^2 + a_{13} \cdot t^3, \quad (9.14)$$

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21} \cdot t + a_{22} \cdot t^2 + a_{23} \cdot t^3. \quad (9.15)$$

Fiecare funcție va fi evaluată pentru intervalul $t = 0 \div t_{fi}$, $i = 1, 2$.

9. Generarea traiectoriei

Condițiile pe care le impunem sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = a_{10} \\ \theta_i = a_{10} + a_{11} \cdot t_{f1} + a_{12} \cdot t_{f1}^2 + a_{13} \cdot t_{f1}^3 \\ \theta_f = a_{20} + a_{21} \cdot t_{f2} + a_{22} \cdot t_{f2}^2 + a_{23} \cdot t_{f2}^3 \\ 0 = a_{11} \\ 0 = a_{21} + 2 \cdot a_{22} \cdot t_{f2} + 3 \cdot a_{23} \cdot t_{f2}^2 \\ a_{11} + 2 \cdot a_{12} \cdot t_{f1} + 3 \cdot a_{13} \cdot t_{f1}^2 = a_{21} \\ 2 \cdot a_{12} + 6 \cdot a_{13} \cdot t_{f1} = 2 \cdot a_{22} \end{array} \right. \quad (9.16)$$

Aceste condiții reprezintă un sistem de opt ecuații liniare cu opt necunoscute, care conduc la următoarele soluții:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = \theta_0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{12} = \frac{12 \cdot \theta_i - 3 \cdot \theta_f - 9 \cdot \theta_0}{4 \cdot t_f^2} \\ a_{13} = \frac{-8 \cdot \theta_i - 3 \cdot \theta_f + 5 \cdot \theta_0}{4 \cdot t_f^3} \\ a_{20} = \theta_i \\ a_{21} = \frac{3 \cdot \theta_f - 3 \cdot \theta_0}{4 \cdot t_f} \\ a_{22} = \frac{12 \cdot \theta_i + 6 \cdot \theta_f + 6 \cdot \theta_0}{4 \cdot t_f^2} \\ a_{23} = \frac{8 \cdot \theta_i - 5 \cdot \theta_f - 3 \cdot \theta_0}{4 \cdot t_f^3} \end{array} \right. \quad (9.17)$$

Pentru cazul general, ce implică n funcții polinomiale de ordinul trei, ecuațiile ce rezultă din impunerea unor accelerații constante în punctele intermediare pot fi scrise sub formă matriceală, ce sunt apoi rezolvate pentru a determina vitezele în aceste puncte.

9.2.3 Polinoame de ordin mai mare ca trei

Uneori, pentru segmentele de traiectorie se utilizează polinoame de ordin mai mare. Spre exemplu, dacă dorim să specificăm poziția, viteza și accelerația la începutul și sfârșitul segmentului, este necesar un polinom de ordinul cinci,

$$\theta(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5, \quad (9.18)$$

pentru care condițiile ce se impun sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 \cdot t_f + a_2 \cdot t_f^2 + a_3 \cdot t_f^3 + a_4 \cdot t_f^4 + a_5 \cdot t_f^5 \\ \dot{\theta}_0 = a_1 \\ \dot{\theta}_f = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot t_f + 3 \cdot a_3 \cdot t_f^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t_f^3 + 5 \cdot a_5 \cdot t_f^4 \\ \ddot{\theta}_0 = 2 \cdot a_2 \\ \ddot{\theta}_f = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot t_f + 12 \cdot a_4 \cdot t_f^2 + 20 \cdot a_5 \cdot t_f^3 \end{array} \right. \quad (9.19)$$

Aceste condiții, ce reprezintă un sistem de șase ecuații liniare cu șase necunoscute, conduc la următoarele soluții:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = \dot{\theta}_0 \\ a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_3 = \frac{-20 \cdot \theta_0 + 20 \cdot \theta_f - (8 \cdot \dot{\theta}_f + 12 \cdot \dot{\theta}_0) \cdot t_f - (3 \cdot \ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^3} \\ a_4 = \frac{30 \cdot \theta_0 - 30 \cdot \theta_f + (14 \cdot \dot{\theta}_f + 16 \cdot \dot{\theta}_0) \cdot t_f - (3 \cdot \ddot{\theta}_0 - 2 \cdot \ddot{\theta}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^4} \\ a_5 = \frac{-12 \cdot \theta_0 + 12 \cdot \theta_f - (6 \cdot \dot{\theta}_f + 6 \cdot \dot{\theta}_0) \cdot t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f) \cdot t_f^2}{2 \cdot t_f^5} \end{array} \right. \quad (9.20)$$

9.2.4 Funcții liniare cu segmente parabolice

O altă posibilitate o constituie adoptarea unei traiectorii liniare (segment de dreaptă) pentru fiecare cuplă cinematică, Fig. 9.5. Trebuie notat faptul că, deși mișcarea fiecărei cuple este liniară, în general efectorul final nu se deplasează după un segment de dreaptă în spațiu.

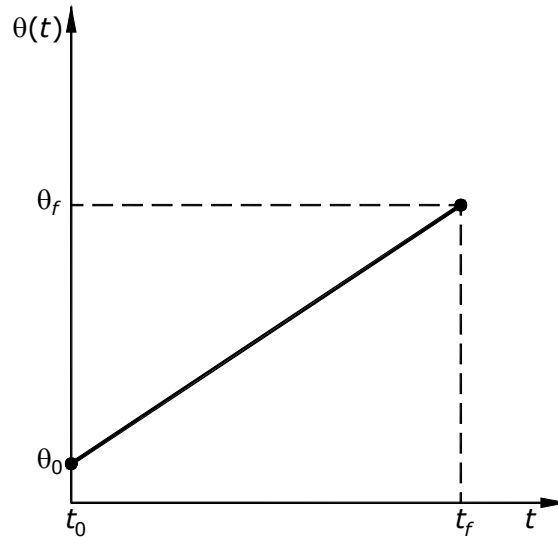


Fig. 9.5 Interpolare liniară, ce presupune accelerații infinite

Interpolarea după un segment de dreaptă va cauza o discontinuitate a vitezei la începutul și sfârșitul segmentului de traiectorie. Pentru a realiza o deplasare lină, cu viteză continuă, vom utiliza o funcție liniară dar vom introduce porțiuni parabolice la începutul și sfârșitul fiecărui segment.

În zona parabolică a traiectoriei, este utilizată o accelerație constantă. În Fig. 9.6 este prezentată o traiectorie simplă de acest gen.

Pentru a construi acest segment, presupunem că zonele parabolice se întind pe același interval de timp, de aceea este utilizată aceeași valoare constantă pentru ambele zone. Așa cum se indică în Fig. 9.7, există mai multe modalități de rezolvare a problemei, dar segmentul de traiectorie este tot timpul simetric în raport cu verticala ce trece prin punctul corespunzător mijlocului intervalului de timp alocat segmentului respectiv t_m , și în raport cu orizontala ce trece

prin valoarea medie a poziției unghiulare, θ_m . Viteza la sfârșitul segmentului parabolic trebuie să fie egală cu viteza corespunzătoare segmentului de dreaptă, de unde rezultă

$$\ddot{\theta} \cdot t_p = \frac{\theta_m - \theta_p}{t_m - t_p}, \quad (9.21)$$

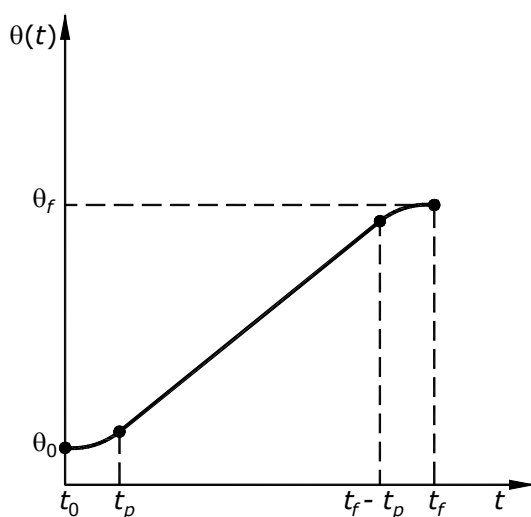


Fig. 9.6 Segment liniar cu zone parabolice

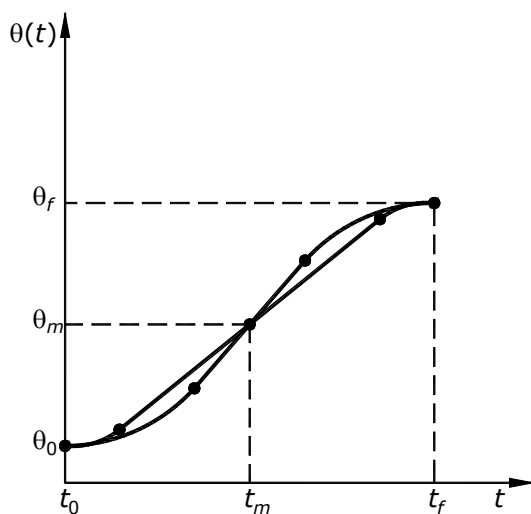


Fig. 9.7 Soluții diferite de segment liniar cu zone parabolice

9. Generarea traiectoriei

unde $\ddot{\theta}$ este accelerația corespunzătoare segmentului parabolic. Valoarea unghiului corespunzător sfârșitului zonei parabolice va fi

$$\theta_p = \theta_0 + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\theta} \cdot t_p^2. \quad (9.22)$$

Combinând relațiile (9.21), (9.22) și $t = 2 \cdot t_m$, obținem

$$\ddot{\theta} \cdot t_p^2 - \ddot{\theta} \cdot t \cdot t_p + (\theta_f - \theta_0) = 0, \quad (9.23)$$

unde t este intervalul de timp necesar efectuării mișcării. Fiind date θ_0 , θ_f și t , putem realiza orice traiectorie prin alegerea parametrilor $\ddot{\theta}$ și t_p , care satisfac relația (9.23). De obicei, este adoptată accelerația $\ddot{\theta}$ și rezolvată ecuația (9.23) pentru obținerea lui t_p . Accelerația adoptată trebuie să fie destul de mare, altfel nu vor exista soluții pentru ecuația menționată.

$$t_p = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 \cdot t^2 - 4 \cdot \ddot{\theta} \cdot (\theta_f - \theta_0)}}{2 \cdot \ddot{\theta}} \quad (9.24)$$

Condiția impusă pentru accelerația în zona parabolică este

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4 \cdot (\theta_f - \theta_0)}{t^2}. \quad (9.25)$$

9.2.4 Funcții liniare cu segmente parabolice, pentru traiectorii cu puncte intermediare

Considerăm acum o traiectorie liniară cu zone parabolice la extremități, pentru cazul în care se specifică un anumit număr de puncte intermediare (Fig. 9.8). Funcțiile liniare leagă între ele punctele intermediare, iar zonele parabolice sunt adăugate în jurul acestor puncte.

În cele ce urmează, se vor folosi următoarele notații: considerând punctele vecine intermediare i , j și k , cu t_k se notează durata zonei parabolice din punctul k ; durata segmentului liniar dintre punctele j și k se notează cu t_{jk} ; durata totală a segmentului ce leagă punctele j și k se notează cu t_{djk} ; viteza pe porțiunea liniară o

notăm cu $\dot{\theta}_{jk}$; accelerația pe durata zonei parabolice în punctul j va fi notată cu $\ddot{\theta}_j$.

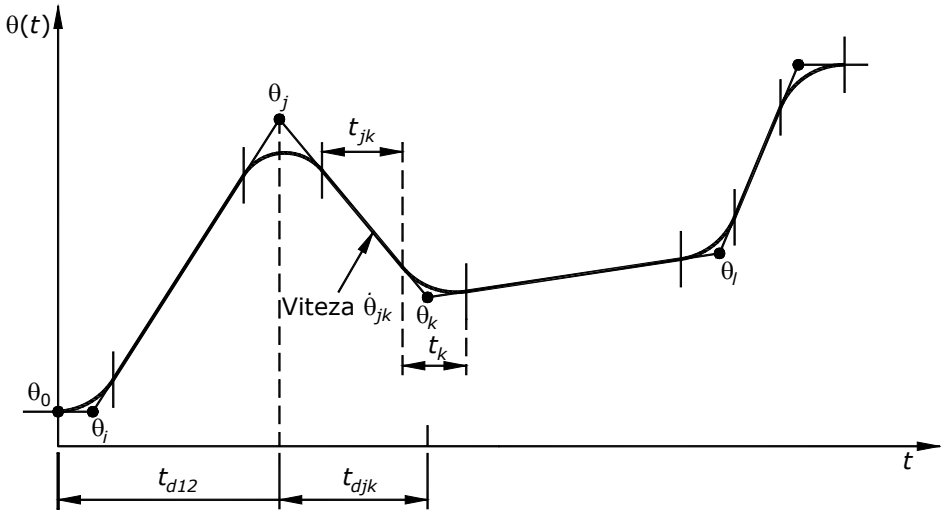


Fig. 9.8 Traiectorie din mai multe segmente liniare, cu zone parabolice

Ca și în cazul unei traiectorii cu un singur segment, există mai multe soluții, ce depind de valoarea accelerației utilizată în fiecare zonă parabolică. Fiind date toate punctele intermediare ale traiectoriei, θ_k , duratele t_{djk} și valoarea accelerației pentru fiecare punct, $|\ddot{\theta}_k|$, se pot determina timpii t_k . Pentru punctele interioare traiectoriei, se poate scrie

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{jk} = \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k = \text{sign}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) \cdot |\ddot{\theta}_k| \\ t_k = \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2} \cdot t_j - \frac{1}{2} \cdot t_k \end{array} \right. \quad (9.26)$$

Primul și ultimul segment trebuie tratate diferit, deoarece trebuie luat în considerare o întreagă zonă parabolică la unul din capetele acestor segmente.

9. Generarea traiectoriei

Pentru primul segment, t_1 se determină rezolvând ecuația

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2} \cdot t_1} = \ddot{\theta}_1 \cdot t_1. \quad (9.27)$$

Dacă se determină t_1 , atunci pot fi calculați simplu parametrii $\dot{\theta}_{12}$ și t_{12} ,

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \text{sign}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \cdot |\ddot{\theta}_1| \\ t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2} \cdot t_1} \\ t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2} \cdot t_2 \end{cases}. \quad (9.28)$$

Asemănător, pentru ultimul segment, avem

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} \cdot t_n} = \ddot{\theta}_n \cdot t_n \quad (9.29)$$

și

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_n = \text{sign}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) \cdot |\ddot{\theta}_n| \\ t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2 \cdot (\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} \cdot t_n} \\ t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2} \cdot t_{n-1} \end{cases}. \quad (9.30)$$

Utilizând relațiile (7.26 - 7.30), putem determina duratele și vitezele zonelor parabolice ale unei traiectorii cu mai multe segmente. De obicei, utilizatorul specifică doar punctele intermediare și durata fiecărui segment al traiectoriei. În acest caz, sistemul folosește valori oarecare pentru accelerațiile în fiecare punct intermediar. Uneori, pentru a simplifica problema, sistemul va calcula timpii necesari

segmentelor pe baza unor viteze impuse. În fiecare zonă parabolică trebuie să se utilizeze valori suficient de mari pentru accelerație.

Trebuie notat faptul că punctele intermediare nu sunt atinse în cazul traiectoriilor multi-segment cu zone parabolice, cu excepția cazului în care manipulatorul se oprește. Adesea, dacă accelerația este suficient de mare traiectoria se va apropia mult de punctul intermediar. Dacă dorim neapărat să trecem printr-un asemenea punct, cu oprire, acesta trebuie simplu repetat în specificarea traiectoriei.

Dacă operatorul dorește ca manipulatorul să treacă *exact* prin punctul intermediar, fără oprire, se aplică aceeași procedură, menționată anterior, la care se adaugă următorul aspect: sistemul înlocuiește automat punctul prin care trebuie trecut cu două *pseudo-puncte intermediare* (Fig. 9.9).

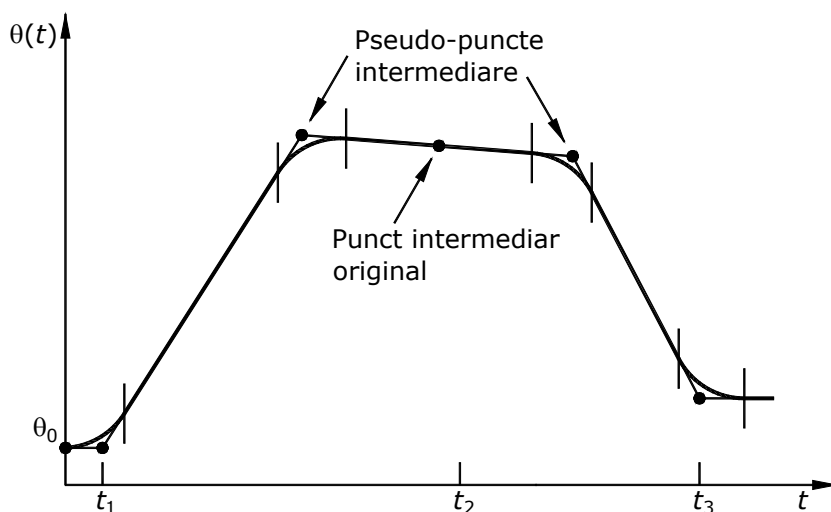


Fig. 9.9 Utilizarea de pseudo-puncte intermediare

9.3 Generarea în spațiul cartezian de lucru

Așa cum s-a menționat în paragraful 9.2, traiectoriile determinate în spațiul cuplelor cinematice pot asigura că punctele intermediare și punctul țintă vor fi atinse. Totuși, traiectoria efectorului final în spațiul de lucru nu este o dreaptă, dacă traiectoriile cuplelor sunt liniare, ci poate avea o formă complexă, ce depinde de cinematica manipulatorului. În acest paragraf, vor fi considerate metode de generare a traiectoriei în care formele acestea

9. Generarea traiectoriei

sunt descrise utilizând funcții ce permit determinarea poziției și orientării efectorului în funcție de timp. În acest fel, putem specifica și o formă spațială traiectoriei între două puncte. Cea mai obișnuită traiectorie este o linie dreaptă, dar pot fi utilizate traiectorii circulare, sinusoidale sau cu alte forme.

Fiecare punct al traiectoriei este specificat în funcție de situarea (poziția și orientarea) necesară a efectorului final în raport cu sistemul de referință.

9.3.1 Mișcare după o dreaptă

Adesea, dorim specificarea unei traiectorii care să determine deplasarea punctului caracteristic după o dreaptă. Bineînțeles, dacă specificăm mai multe puncte intermediare apropiate pe dreapta respectivă, atunci punctul caracteristic va urmări acea dreaptă. Totuși, este mult mai convenabil dacă efectorul final descrie o dreaptă chiar dacă punctele intermediare sunt îndepărtate. Acest mod de specificare și realizare a traiectoriei este numit *mișcare după o dreaptă în spațiul cartezian*.

În planificarea și generarea unei traiectorii după o dreaptă, sunt potrivite funcțiile liniare cu zone parabolice.

9.4 Probleme geometrice la generarea traiectoriilor în spațiul de lucru

Deoarece există o corespondență permanentă între forma traiectoriei descrisă de punctul caracteristic și parametrii de poziție ai cuplelor cinematice, traiectoriile în spațiul de lucru sunt predispuse la apariția unor probleme datorate spațiului de lucru și singularităților.

9.4.1 Probleme de tipul 1: puncte intermediare din afara spațiului de lucru

Deși punctul inițial, respectiv punctul țintă sunt din spațiul de lucru, este posibil ca unele puncte intermediare ale traiectoriei impuse să nu se afle în interiorul acestui spațiu (Fig. 9.10). Deplasarea de punctul *A* în punctul *B* poate să nu fie o problemă în spațiul cuplelor cinematice, dar dacă se cere descrierea unei traiectorii drepte în spațiul cartezian de lucru, unele puncte

intermediare nu pot fi atinse. Acesta este un exemplu de situație în care o traiectorie în spațiul cuplei poate fi ușor realizată, dar în spațiul de lucru ar fi imposibil de realizat.

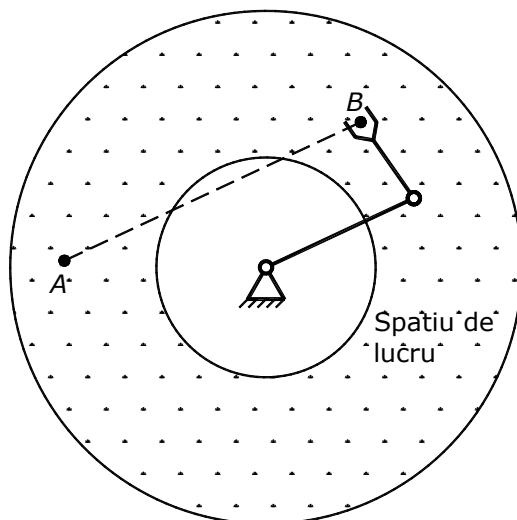


Fig. 9.10 Problemă de tipul 1 în spațiul de lucru

9.4.2 Probleme de tipul 2: viteze mari ale cuplelor în vecinătatea singularităților

Așa cum se știe din studiul singularităților, în apropierea acestora cuplele cinematice trebuie să realizeze unghiuri mari într-un timp foarte scurt, ceea ce înseamnă viteze unghiulare mari ale acestora (Fig. 9.11, manipulator cu două elemente având lungimile egale). Chiar dacă toate punctele de pe traiectoria dreaptă pot fi atinse de efectorul final, pentru a evita poziția de singularitate (atunci când cele două elemente se suprapun, iar unghiul dintre ele devine zero), la un moment dat aceasta trebuie să efectueze un unghi foarte mare, astfel încât punctul caracteristic să urmărească în continuare traiectoria impusă.

Pentru a pune în evidență cele menționate anterior, în Fig. 9.11 s-a reprezentat manipulatorul în mai multe poziții intermediare. O posibilitate de rezolvare a problemei este de a reduce viteza cu care trebuie urmărită traiectoria impusă, astfel ca vitezele cuplelor cinematice să nu depășească limitele extreme posibile.

9. Generarea traiectoriei

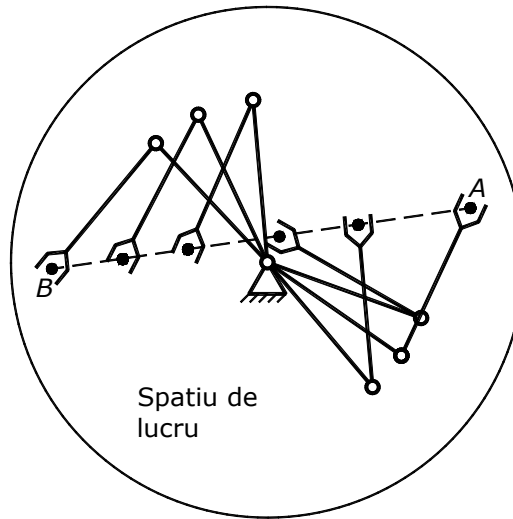


Fig. 9.11 Problemă de tipul 2 în spațiul de lucru

9.4.3 Probleme de tipul 3: soluții diferite de atingere a punctului inițial și final

Al treilea tip de probleme ce poate să apară este prezentat în Fig. 9.12, în care se reprezintă un manipulator plan cu două grade de mobilitate având ambele elemente de aceeași lungime și ale cărei cuple au limite mecanice, care restricționează numărul posibilităților de atingere a unui punct în spațiu. În particular, va apărea o problemă dacă punctul țintă nu poate fi atins în aceeași soluție fizică precum în punctul de start. În Fig. 9.12, manipulatorul poate atinge toate punctele de pe traiectoria impusă într-o anumită soluție, dar nu în orice soluție. În această situație, sistemul de planificare a traiectoriei manipulatorului poate detecta această problemă, fără a încerca să deplaseze robotul pe traiectorie și poate semnala operatorului eroarea respectivă.

Pentru a veni în întâmpinarea unor astfel de probleme în spațiul de lucru, majoritatea sistemelor roboților industriali suportă generarea traiectoriei atât în spațiul cuplelor cinematice, cât și în spațiul de lucru. Operatorul învață repede faptul că, datorită dificultăților ce apar la traiectoriile în spațiul de lucru, ar trebui utilizate traiectoriile în spațiul cuplelor ca primă opțiune, iar generarea în spațiul de lucru să fie utilizată numai dacă o impune aplicația respectivă.

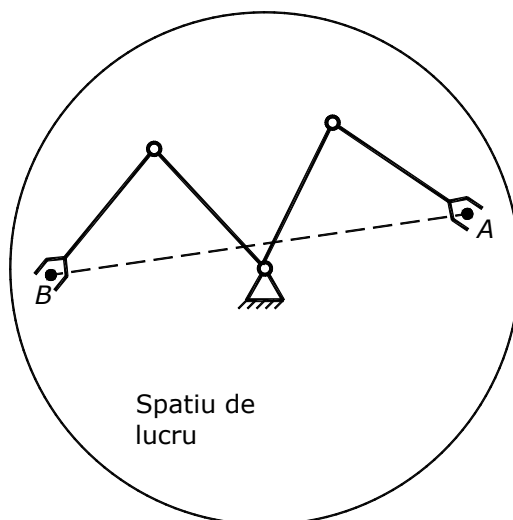


Fig. 9.12 Problemă de tipul 3 în spațiul de lucru

9. Generarea traiectoriei

A

ALGEBRĂ LINIARĂ

Deoarece modelarea și controlul roboților de tip manipulator necesită utilizarea intensă a matricelor și vectorilor, ca și a operațiilor cu vectori și matrice, scopul acestei anexe este de a reaminti unele cunoștințe de algebră liniară.

A.1 Definiții

Se numește *matrice*, un aranjament de $(m \times n)$ elemente a_{ij} (reale sau complexe), așezate într-un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad (\text{A.1})$$

Dacă $m = n$, matricea se numește pătrată, de ordin n . Atunci când $n = 1$, \mathbf{A} are o singură coloană și se numește *matrice-coloană*, reprezentând un vector de dimensiune $(m \times 1)$; când $m = 1$, \mathbf{A} are o singură linie și se numește *matrice-linie*.

Matricea pătrată de dimensiuni $(n \times n)$ se numește *matrice triunghiulară sus* dacă $a_{ij} = 0$ pentru $i > j$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Dacă matricea \mathbf{A} are elementele $a_{ij} = 0$ pentru $i < j$, atunci aceasta se numește *matrice triunghiulară jos*,

A. Algebră liniară

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

O matrice pătrată ($n \times n$) se numește *matrice diagonală* dacă $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]. \quad (\text{A.4})$$

Dacă o matrice diagonală ($n \times n$) are toate elementele de pe diagonală egale cu unitatea ($a_{ij} = 1$), atunci aceasta se numește *matrice unitate* și se notează cu \mathbf{I}_n

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Se numește *matrice nulă* și se notează cu $\mathbf{0}$ (zero), matricea care are toate elementele nule. Aceasta poate avea orice dimensiuni.

Se numește *matrice transpusă* a matricei \mathbf{A} , matricea \mathbf{A}^T de dimensiuni ($n \times m$), obținută schimbând liniile în coloane și coloanele în linii

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

O matrice \mathbf{A} pătrată ($n \times n$) se numește *matrice simetrică* dacă $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ și în consecință $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Bazele Roboticii

O matrice **A** pătrată ($n \times n$) se numește *matrice antisimetrică* dacă $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ și în consecință, $a_{ij} = -a_{ji}$ pentru $i \neq j$, respectiv $a_{ii} = 0$, ceea ce conduce la:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \vdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Se numește *matrice reciprocă* (sau *adjunctă*) a matricei **A** pătrată de ordin n , matricea

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

formată din complementele algebrice A_{ij} ale elementelor a_{ij} din matricea **A** și în care s-au schimbat liniile în coloane.

Se numește *complement algebric* A_{ij} corespunzător elementului algebric a_{ij} al matricei **A**, expresia

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij}), \quad (\text{A.10})$$

unde \mathbf{A}_{ij} este o matrice de dimensiuni $((n-1) \times (n-1))$, care se obține eliminând linia i și coloană j din matricea **A**.

Prin *partiționarea unei matrice* se înțelege împărțirea ei, prin drepte paralele cu liniile și drepte paralele cu coloanele acestuia, în *submatrice* (celule, sau *blocuri*) de dimensiuni mai mici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \vdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \vdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \vdots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

A.2 Operații cu matrice

Se spune că două matrice de aceleași dimensiuni sunt *egale* atunci când elementele corespunzătoare sunt egale. Adică, dacă

A. Algebră liniară

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; din $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ rezultă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru toate valorile indicilor i și j .

Prin *suma a două matrice* \mathbf{A} și \mathbf{B} , de aceleași dimensiuni ($m \times n$), se înțelege o matrice \mathbf{C} de dimensiuni ($m \times n$), ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice \mathbf{A} și \mathbf{B} , deci $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru orice i și j ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (\text{A.12})$$

Avem următoarele proprietăți pentru adunarea matricelor:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Pentru aceleași matrice \mathbf{A} și \mathbf{B} , se definește matricea diferență $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, care are elementele $a_{ij} = -b_{ij}$.

Prin *produsul unei matrice \mathbf{A} cu un scalar* (număr) α , se înțelege o nouă matrice, obținută prin înmulțirea tuturor elementelor lui \mathbf{A} cu scalarul α .

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \vdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \vdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \vdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

În aceste condiții, la proprietățile menționate se mai adaugă următoarele:

$$\mathbf{A} - \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A},$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}.$$

Produsul a două matrice \mathbf{A} de dimensiuni ($m \times p$) și \mathbf{B} de dimensiuni ($p \times n$), este matricea \mathbf{C} de dimensiuni ($m \times n$)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{A.14})$$

în care elementele c_{ij} se obțin făcând suma produselor elementelor din linia i a matricei \mathbf{A} cu elementele corespunzătoare din coloana j a

Bazele Roboticii

matricei \mathbf{B} , adică $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$;

$i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Acest lucru înseamnă că numărul coloanelor matricei \mathbf{A} trebuie să fie egal cu numărul liniilor matricei \mathbf{B} .

Produsul matricelor satisface următoarele proprietăți:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Pentru o matrice \mathbf{A} pătrată de dimensiune $(n \times n)$, *determinantul* acesteia este scalarul dat de expresia

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij}), \quad (\text{A.15})$$

pentru $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Pentru calculul determinantului avem următoarele proprietăți:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T),$$

$$\det(\alpha \cdot \mathbf{A}) = \alpha^n \cdot \det(\mathbf{A}),$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}),$$

unde \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt matrice pătrate de ordin n .

A.3 Matricea inversă

O matrice pătrată se numește *nesingulară* dacă determinantul ei este diferit de zero și *singulară* în caz contrar.

Se numește *matrice inversă* a unei matrice nesingulare \mathbf{A} de ordin n și se notează cu \mathbf{A}^{-1} , matricea de același ordin cu \mathbf{A} , ce satisface relația

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n, \quad (\text{A.16})$$

A. Algebră liniară

Trebuie notat faptul că numai matricele nesingulare au matrice inversă, care se calculează cu formula

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det(\mathbf{A})}. \quad (\text{A.17})$$

Determinantul matricei inverse va fi

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})},$$

deoarece $\det(\mathbf{A})^* = \det(\mathbf{A})^{n-1}$. Avem proprietățile

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{A}^{-1}; \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1};$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}; \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

Dacă inversa unei matrice pătrate este egală cu transpusa ei

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{A.18})$$

atunci matricea respectivă se numește *ortogonală*; în acest caz avem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n. \quad (\text{A.19})$$

A.4 Matricea pseudo-inversă

Fie \mathbf{A} o matrice de dimensiuni $(m \times n)$, $m \neq n$, se numește *pseudo-inversa* matricei \mathbf{A} , matricea

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{\Sigma}^+ \cdot \mathbf{Q}_1^T. \quad (\text{A.20})$$

unde: \mathbf{Q}_1 este matricea ortogonală ($\mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_m$) de dimensiuni $(m \times m)$, ale cărei coloane sunt vectorii proprii ai produsului $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$; \mathbf{Q}_2 este matricea ortogonală ($\mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_n$) de dimensiuni $(n \times n)$, ale cărei coloane sunt vectorii proprii ai produsului $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$; $\mathbf{\Sigma}^+$ este matricea de dimensiuni $(m \times n)$, având toate elementele nule, cu excepția celor de pe diagonala principală, care sunt valori singulare, adică rădăcinile pătrate a r valori proprii nenule ale produselor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ și $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$,

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_r} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{A}^+ = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T, \text{ dac\u0103 } m < n, \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_m \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \right)^{-1}, \text{ dac\u0103 } m > n, \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.23})$$

$$\left(\mathbf{A}^+ \right)^+ = \mathbf{A}.$$

A.5 Rangul unei matrice

Se numește *rang* al unei matrice, ordinul maxim al determinanților nenuli, ce se pot forma din matrice prin suprimări de linii și coloane și păstrarea ordinii elementelor rămase.

Matricele de aceleași dimensiuni și care au același rang se numesc *rațional echivalente* și între ele se trece semnul \cong . Operațiile care păstrează rangul unei matrice se numesc *transformări elementare* și sunt următoarele:

- înmulțirea unei linii cu un factor nenul;
- schimbarea între ele a două linii;
- adunarea unei linii înmulțită cu o constantă, la altă linie.

A.6 Operații cu vectori

Adunarea vectorilor și înmulțirea unui vector cu un scalar au următoarele proprietăți:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x},$$

A. Algebră liniară

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x},$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x},$$

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}.$$

Produsul scalar a doi vectori \mathbf{x} și \mathbf{y} de dimensiuni $(m \times 1)$ este scalarul obținut prin însumarea produselor componentelor vectorilor respectivi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_m \cdot y_m = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{A.24})$$

Doi vectori se numesc *ortogonali* atunci când produsul lor scalar este nul

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.25})$$

Produsul vectorial a doi vectori \mathbf{x} și \mathbf{y} în spațiul tridimensional este vectorul

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Acesta are proprietățile:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}.$$

Fiind dați trei vectori \mathbf{x} , \mathbf{y} și \mathbf{z} în spațiul tridimensional, *produsul scalar triplu* este dat de următoarea expresie

$$\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}^T \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z}^T \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}). \quad (\text{A.27})$$

Dacă oricare doi dintre cei trei vectori sunt egali, atunci produsul scalar triplu este nul,

$$\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.28})$$

B

FORMULE TRIGONOMETRICE

Formule ce au de a face cu natura periodică a funcțiilor *sin* și *cos*:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sin(-\theta) = -\cos(\theta + 90^\circ) = \cos(\theta - 90^\circ), \\ \cos \theta &= \cos(-\theta) = \sin(\theta + 90^\circ) = -\cos(\theta - 90^\circ).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Funcțiile *sin* și *cos* pentru suma și diferența unghiurilor θ_1 și θ_2 :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2, \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2, \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2, \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Suma pătratelor funcțiilor *sin* și *cos* de același unghi este egală cu unitatea:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1\tag{B.3}$$

Dacă notăm unghiurile unui triunghi oarecare cu A , B și C , unde a este unghiul opus laturii a , și așa mai departe, atunci legea cosinusului este

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A,\tag{B.4}$$

iar legea sinusului

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.\tag{B.5}$$

Făcând substituția

B. Formule trigonometriche

$$t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (\text{B.6})$$

putem scrie:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ \sin \theta &= \frac{2 \cdot t}{1 + t^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$



FORMULE UTILE PENTRU CINEMATICA INVERSĂ

Ecuția

$$\sin \theta = a \quad (C.1)$$

are două soluții, date de

$$\theta = \pm \text{Atan2}(\sqrt{1-a^2}, a). \quad (C.2)$$

De asemenea, pentru ecuația

$$\cos \theta = b \quad (C.3)$$

există două soluții

$$\theta = \text{Atan2}(b, \pm \sqrt{1-b^2}). \quad (C.4)$$

Dacă sunt date ambele ecuații (C.1) și (C.2), atunci există o soluție unică

$$\theta = \text{Atan2}(a, b). \quad (C.5)$$

Ecuția neliniară

$$a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta = 0 \quad (C.6)$$

are două soluții

$$\theta = \text{Atan2}(a, -b) \quad (C.7)$$

și

$$\theta = \text{Atan2}(-a, b). \quad (C.8)$$

Ecuția

$$a \cdot \cos \theta + b \cdot \sin \theta = c \quad (C.9)$$

C. Formule pentru cinematica inversă

are două soluții de forma

$$\theta = \text{Atan2}(b, a) \pm \text{Atan2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right). \quad (\text{C.10})$$

Setul de ecuații

$$\begin{aligned} a \cdot \cos \theta - b \cdot \sin \theta &= c, \\ a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta &= d, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

are soluția

$$\theta = \text{Atan2}(a \cdot d - b \cdot c, a \cdot c + b \cdot d). \quad (\text{C.12})$$

BIBLIOGRAFIE

- [1]. **Angeles, J.**, *Spatial Kinematic Chains. Analysis-Synthesis-Optimization*, Springer-Verlag, .1982.
- [2]. **Craig, J. J.**, *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*, Third Edition, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [3]. **Doroftei, I.**, *Arhitectura și cinematica roboților*, Ed. Tehnică, Științifică și Pedagogică CERMI, Iași, 2002.
- [4]. **Doroftei, I.**, *Robotică*, vol. I, Ed. Tehnică, Științifică și Pedagogică CERMI, Iași, 2005.
- [5]. **Doroftei, I.**, *Robotică*, vol. II, Ed. Tehnică, Științifică și Pedagogică CERMI, Iași, 2006.
- [6]. **Fuller, J., L.**, *Robotics – Introduction, Programming and Projects*, Second Edition, Prentice Hall, 1999.
- [7]. **Gorla, B., Renaud M.**, *Modeles des Robots Manipulateurs, Application a leur commande*, Cepadues-Editions, Toulouse, 1984.
- [8]. **H. Asada, H., Slotine, J.-J.**, *Robot Analysis and Control*, Wiley & Sons, 1986.
- [9]. **Koren, Y.**, *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, 1985.
- [10]. **McKerrow, Ph. J.**, *Introduction to Robotics*, Addison-Wesley, 1991.
- [11]. **Nikravesh, P. E.**, *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, 1988.

Bibliografie

- [12]. **Oprîșan, C., Popovici, Gh., Doroftei, I., Moldovanu, G.,** *Introducere în cinematica și dinamica roboților și manipuletoarelor*, Ed. Cermi, Iași, 1998.
- [13]. **Paul, P. P.,** *Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control*, The MIT Press, Cambridge, 1981.
- [14]. **Pieper, D., Roth, B.,** The Kinematics of Manipulators Under Computer Control, *Proceedings of the Second International Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 2, Zakopane, Poland, 1969, pp. 159-169.
- [15]. **Preumont, A., Doroftei, I.,** *Introduction a la robotique*, Ed. Junimea, Iași, 2002.
- [16]. **Rivin, E. I.,** *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, 1988.
- [17]. **Sciavicco, L. Siciliano, B.,** *Modelling and Control of Robot Manipulators*, Springer Verlag, London, 2000.
- [18]. **Siciliano, B., Villani, L.,** *Robot Force Control*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [19]. **Song, S. M., Waldron, K. J.,** *Machine that Walk: The Adaptive Suspension Vehicle*, The MIT Press, 1989.
- [20]. **Strang, G.,** *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich (Third edition), 1988.
- [21]. **Waldron, K., J., Kinzel, G., L.,** *Kinematics, Dynamics and Design of Machinery*, Wiley & Sons, 1999.