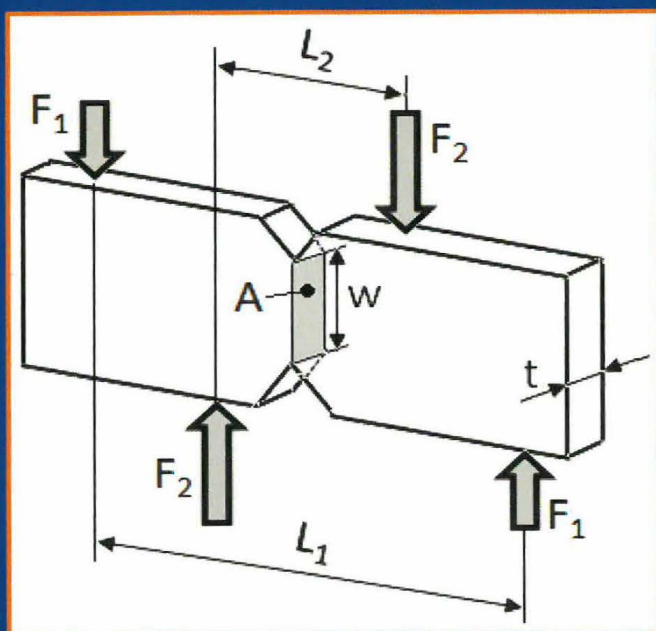


Paul-Doru Bârsănescu

Rezistența Materialelor

Vol. I



Editura TEHNOPRESS
Str. Lascăr Catargi nr. 38
700107 Iași
Tel./fax: 0232 260092
E-mail: tehnopress@yahoo.com
<http://www.tehnopress.ro>
Editură acreditată CNCIS, cod 89

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
BÂRSĂNESCU, PAUL-DORU
Rezistența materialelor / Bârsănescu Paul-Doru, Ciobanu Olivian. —
Iași : Editura Gheorghe Asachi, 2001- vol.
ISBN 973-8292-04-2
Vol. 1 : Solicități simple / Paul-Doru Bârsănescu. - Iași :
Tehnopress, 2025. - Conține bibliografie. - ISBN
978-606-687-533-2

539.4

Paul-Doru Bârsănescu

Rezistența Materialelor

Vol. I

Solicitări simple


editura
Tehnopress
Iași – 2025

CUPRINS

Abrevieri	8
Notății principale	9
Prefață	11
1. Noțiuni fundamentale	13
1.1. Obiective	13
1.2. Clasificarea corpurilor solide	13
1.3. Forțe și momente exterioare	15
1.3.1. Reazeme și reacțiuni	15
1.3.2. Încărcări	22
1.4. Forțe și momente interioare	31
1.4.1. Metoda secțiunilor	34
1.5. Relații diferențiale între încărcări și eforturi	41
1.6. Tensiuni	42
1.7. Relații între eforturi și tensiuni (ecuații de echivalență)	44
1.8. Deplasări și deformații	45
1.8.1. Deformații absolute și deformații specifice	46
1.9. Starea generală de tensiuni și deformații	48
1.10. Solicitări simple	51
2. Încercarea materialelor. Metode de calcul	53
2.1. Obiective	53
2.2. Încercarea materialelor	53
2.2.1. Introducere	53
2.2.2. Solicitarea la tracțiune	54
2.2.3. Solicitarea la compresiune	65
2.2.4. Solicitarea la forfecare. Solicitarea la torsiune	68
2.2.5. Încercarea la încovoiere simplă	71
2.3. Factori care influențează caracteristicile elastice și mecanice	71
2.3.1. Influența compoziției chimice	72
2.3.2. Influența factorilor tehnologici	73

2.3.3. Influența dimensiunilor epruvetei.....	74
2.3.4. Influența vitezei de încărcare.....	76
2.3.5. Influența temperaturii.....	77
2.3.6. Influența timpului	79
2.3.7. Influența stării de tensiuni	80
2.4. Încercări tehnologice	82
2.4.1. Determinarea durității	82
2.4.2. Determinarea rezilienței	83
2.5. Ipoteze simplificatoare	85
2.6. Metode de calcul în rezistența materialelor	88
2.6.1. Metoda tensiunilor admisibile	88
2.6.2. Metoda coeficienților de siguranță parțiali	91
2.6.3. Metoda încărcărilor limită.....	91
2.6.4. Metode probabilistice	92
2.6.5. Alte condiții	92
3. Teoreme și metode energetice	95
3.1. Obiective	95
3.2. Teoremele lui Clapeyron.....	95
3.3. Energia specifică de deformare elastică	100
3.4. Principiul suprapunerii efectelor (Boltzmann).....	102
3.5. Teorema reciprocității lucrului mecanic virtual (Betti)	103
3.6. Teorema reciprocității deplasărilor (Maxwell)	105
3.7. Teoremele lui Castigliano.....	105
3.8. Teorema energiei potențiale minime (Menabrea)	108
3.9. Metoda Maxwell-Mohr.....	110
3.10. Metoda de integrare grafo-analitică Mohr-Vereșceaghin	112
3.11. Metoda eforturilor.....	114
4. Solicități axiale (tracțiune/compresiune)	119
4.1. Obiective	119
4.2. Introducere	119
4.3. Bare solicitate cu forțe concentrate	121

4.3.1. Calculul tensiunilor.....	121
4.3.2. Dimensionare și verificare.....	122
4.3.3. Calculul deformațiilor și al deplasărilor	122
4.3.4. Energia potențială de deformare elastică	124
4.3.5. Trasarea diagramei de efort axial N	125
4.4. Bare solicate cu forțe distribuite	134
4.4.1. Bare de lungime mare, aflate în câmp gravitațional.....	134
4.4.2. Bare solicate în câmp inerțial	146
4.5. Probleme static nedeterminate (SN)	152
4.5.1. Sisteme SN cu bare în serie	153
4.5.2. Sisteme SN cu bare în paralel.....	171
4.5.3 sisteme SN cu bare în serie și în paralel	176
4.5.4. Sisteme SN cu bare elastice și rigide	177
4.5.5. Sisteme SN cu bare (fire) concurente.....	180
4.5.6. Sisteme SN supuse la variații de temperatură.....	192
5. Calculul convențional la forfecare.....	199
5.1. Obiective	199
5.2. Introducere	199
5.3. Realizarea solicitării la forfecare.....	200
5.4. Calculul de rezistență convențional	202
5.5. Dualitatea tensiunilor tangențiale	205
5.6. Calculul deplasărilor.....	206
5.7. Energia potențială de deformare elastică.....	207
5.8. Calculul convențional al îmbinărilor	208
5.8.1. Îmbinări cu șuruburi sau nituri	208
5.8.2. Calculul îmbinărilor sudate	216
5.8.3. Calculul îmbinărilor cu adezivi.....	221
5.8.4. Calculul consolei.....	224
5.8.5. Probleme static nedeterminate	229
6. Torsiunea barelor cu secțiune circulară	233
6.1. Obiective	233

6.2. Introducere	233
6.3. Calculul momentului funcție de putere și turație	235
6.4. Deformații și tensiuni.....	236
6.4.1. Calculul deformațiilor	236
6.4.2. Calculul de rezistență	240
6.4.3. Secțiunea rațională	241
6.5. Energia potențială de deformare elastică.....	242
6.6. Trasarea diagramei de efort M_x	246
6.7. Metoda elementelor finite	248
6.8. Probleme.....	249
6.8.1. Probleme static determinate	249
6.8.2. Probleme static nedeterminate	255
6.8.3. Probleme care implică mai multe solicitări	265
7. Încovoiere	275
7.1. Obiective	275
7.2. Introducere	275
7.3. Studiul deformării grinzilor	277
7.4. Eforturi	278
7.5. Calculul tensiunilor	279
7.5.1. Tensiuni normale. Formula lui <i>Navier</i>	279
7.5.2. Tensiuni tangențiale. Formula lui <i>Juravski</i>	286
7.6. Energia potențială de deformare elastică.....	298
7.7. Trasarea diagramelor de eforturi.....	300
7.7.1. Etape	300
7.7.2. Exemple	304
7.8. Calculul deplasărilor la încovoiere	320
7.8.1. Definirea deplasărilor	320
7.8.2. Ecuația axei neutre deformate (<i>Euler</i>)	321
7.8.3. Calculul deplasărilor prin metode energetice	334
7.8.4. Influența forțelor tăietoare	341
7.8.5. Calculul deplasărilor la grinzi cu tronsoane	342

7.9. Grinzi static nedeterminate	351
7.9.1. Ridicarea nedeterminării prin metoda <i>Clebsch</i>	352
7.9.2. Metoda eforturilor	355
7.9.3. Metoda elementelor finite	363
7.10. Raționalizare și optimizare.....	367
7.10.1. Secțiuni raționale pentru încovoiere	367
7.10.2. Grinzi de egală rezistență	369
7.10.3. Optimizarea amplasării reazemelor	372
7.11. Grinzi cu secțiune compusă	375
7.11.1 Lunecare longitudinală.....	376
8. Probleme recapitulative	387
9. Anexe	405
Anexa 1. Caracteristici geometrice ale secțiunilor plane	405
Anexa 2. STAS 75-90 Dimensiuni liniare normale (extras)	417
Bibliografie.....	419

ABREVIERI

GN	Grad de nedeterminare
NN	Numărul necunoscutelor
NE	Numărul ecuațiilor
SN	Static nedeterminat
MEF	Metoda elementelor finite
EF	Element finit
CG	Centrul de greutate
SB	Sistem de bază

NOTAȚII PRINCIPALE

<i>Simbol</i>	<i>Mărime, unități de măsură</i>
α, β, φ	Unghiuri [rad], [°]
α	Coeficient de dilatare termică liniară [°C ⁻¹]
δ	Deplasare [mm], coeficienți de influență
ε	Alungire specifică
Φ	Coeficient de performanță a formei secțiunii
γ	Lunecare [rad]; greutate specifică [N/mm ³]
ν	Coeficientul Poisson
ω, Ω	Viteza unghiulară [rad/sec.]; suprafața unei diagramei
θ	Rotire specifică [rad/mm]
ρ	Rază de curbură [mm], densitate [kg/m ³]
σ, τ	Tensiune normală, tensiune tangențială [MPa]
$\sigma_c, \tau_c, \sigma_r, \tau_r$	Tensiuni de curgere, Tensiuni de rupere [MPa]
σ_a, τ_a	Tensiuni admisibile [MPa]
a, b, h, L	Lungimi [mm]
a, g	Accelerație; accelerație gravitațională [m/sec. ²]
D, d	Diametre [mm]
e	Eroare relativă
i_1, i_2	Raze de inerție [mm]
k	Constantă [-]; rigiditate [N/mm]
m	Masa [kg]; moment fictiv al unei încărcări unitare [Nmm]
n	Turație [rot/min]; forță axială fictivă [N]
p	Tensiune [MPa], presiune [MPa]
q	Intensitate a forței distribuite [N/mm]
R, r	Rază [mm]
u, v, w	Componentele deplasării [mm]
A	Aria [mm ²]
E	Modul de elasticitate longitudinală (Young) [MPa]
F	Forță [N]
G	Modul de elasticitate transversală (Coulomb) [MPa]; centru de greutate
H	Reacțiuni de directei orizontală [N]
I_y, I_z, I_{zy}, I_p	Momente de inerție [mm ⁴]
I_1, I_2	Momente de inerție principale [mm ⁴]
K, K_d	Reziliență [J/mm ²]; factor de scară
L	Lungime [mm]; lucru mecanic [J]
M	Moment al unei forțe [Nmm]
M_t	Moment de torsiune [Nmm]
M_x, M_y, M_z	Componentele momentului (eforturi) [Nmm]
N	Forță axială (efort) [N]
P	Putere [W]

S_z, S_y	Momente statice [mm ³]
T_y, T_z	Forțe tăietoare (eforturi) [N]
U	Energie potențială de deformare elastică [J]
U_1	Energie potențială specifică de deformare elastică [J/mm ³]
V	Volum [mm ³]; reacțiune pe direcție verticală [N]
W_y, W_z, W_p	Module de rezistență [mm ³]
X, Y, Z	Componente ale forței [N]

FORMULE UZUALE

Solicitări axiale

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad (1.2)$$

Forfecare

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \quad (1.3)$$

Torsiune

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \quad (1.4)$$

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (1.5)$$

Încovoiere

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} \approx -\frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (1.8)$$

Prefață

Enzo Ferrari obișnuia să spună că „Mașina de curse ideală este cea care trece prima linia de sosire și se defectează imediat după aceea.” Această afirmație, aparent paradoxală, exprimă extrem de plastic conceptul de proiectare optimală. Prima parte a afirmației se referă la maximizarea performanțelor tehnice, iar a doua la alocarea unor resurse minime în acest scop, sau la consumarea cvasi-totală a resurselor alocate atingerii obiectivului. Conceptul de proiectare optimală este utilizat frecvent și în Rezistența Materialelor.

În câteva zeci de ani numai, Mecanica Solidului Deformabil a făcut mari progrese: s-au dezvoltat noi metode de calcul numeric, au apărut noi materiale și noi modelări matematice. Această lucrare încearcă să prezinte, în limita spațiului disponibil, atât metode tradiționale de rezolvare, cât și unele metode mai noi. Caracteristicile geometrice ale secțiunilor plane sunt considerate cunoscute de la disciplina Mecanica Solidului Rigid, dar noțiunile fundamentale sunt reamintite pe scurt în *Anexe*.

În lucrare s-a adoptat o regulă de semn pentru eforturi care este în concordanță cu cea pentru tensiuni. Din acest motiv, semnul forțelor tăietoare este diferit față de convențiile clasice. Totuși, pentru a nu afecta aspectul diagramelor cvasi-unanim acceptat, s-a considerat forța tăietoare pozitivă sub abscisă, la fel ca la diagrama momentului încovoietor. Se prezintă, de asemenea, un procedeu original pentru extinderea aplicării metodelor energetice la calculul deplasărilor la încovoiere.

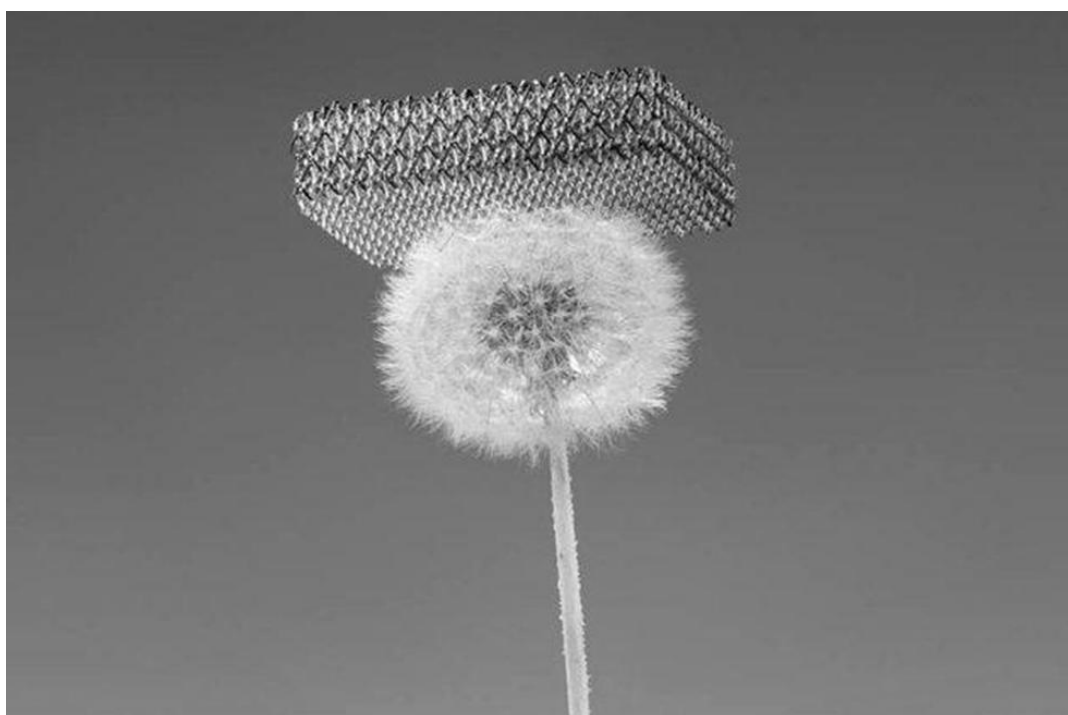
Acest manual a fost publicat inițial în forma “Barsanescu Paul, Ciobanu Olivian, Rezistența Materialelor, vol. 1, Ed. Venus, Iași, 1998”. În prezenta lucrare revizuită, munca celor doi autori a fost separată. Împreună cu „P.D. Barsanescu, Rezistența Materialelor, vol. 2, Ed. Tehnopress, Iași, 2022”, cele două manuale cuprind cea mai mare parte din materia predată studenților de la profilul Inginerie mecanică, dar pot fi folosite și de studenții de la Inginerie civilă. După studiul Rezistenței Materialelor studenții vor înțelege altfel ingineria și modul de realizare a multor corpuri solide care ne înconjoară.

Coperta prezintă o schiță a epruvetei *Iosipescu* care, alături de metoda cu același nume, reprezintă contribuție românească majoră la încercarea materialelor la forfecare pură.

Autorul

CAPITOLUL

1



Noțiuni fundamentale

Sursa: 2011-11-18T090512Z_1967641113_GM1E7BI1BPV01_RTRMADP_3_USA

1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

1.1. OBIECTIVE

În acest capitol se definesc noțiunile fundamentale din Rezistența Materialelor. În prima parte a capitolului corpul este considerat rigid și se operează numai cu forțe și momente exterioare corpului.

În partea a doua se prezintă metoda secțiunilor, se pun în evidență forțele și momentele interioare și tensiunile și se deduc relațiile dintre aceste mărimi. Sunt prezentate solicitările simple. Pentru corpul deformabil se studiază deformațiile specifice și fenomenul de contracție transversală. Pe parcursul capitolului se face deseori apel la ecuațiile staticii. Corecta însușire a noțiunilor prezentate condiționează abordarea capitolelor care urmează.

1.2. CLASIFICAREA CORPURILOR SOLIDE

În Rezistența Materialelor corpurile pot fi clasificate funcție de forma lor. Această clasificare nu are numai un scop didactic, deoarece pentru fiecare categorie de corpuri există relații specifice de calcul.

Părțile componente ale mașinilor și ale structurilor (organele de mașini și elementele de construcții) au forme diverse, funcție de rolul lor. Având în vedere raportul dintre cele trei dimensiuni de gabarit, putem deosebi:

- *Corpuri lungi, care au o dimensiune mult mai mare decât celelalte două;*
- *Corpuri subțiri, care au o dimensiune mult mai mică decât celelalte două;*
- *Corpuri masive, la care cele trei dimensiuni au valori comparabile.*

La rândul lor, aceste categorii de corpuri pot fi clasificate după cum se prezintă în *figura 1.1*.

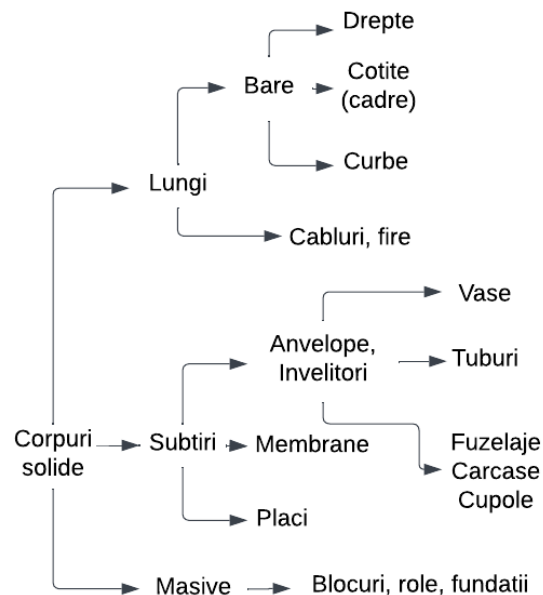


Fig.1.1. Clasificarea corpurilor solide funcție de raportul dimensiunilor

Cablurile sau firele flexibile sunt solicitate numai la tracțiune. Unele cabluri (conductori de înaltă tensiune, cabluri de macara, de remorcare) sunt cvasi-rigide când au lungimi mici, dar pot fi considerate flexibile când au lungimi mari.

Barele drepte pot fi de secțiune constantă pe toată lungimea, variabilă continuu sau în trepte (bare cu tronsoane). În acest volum sunt studiate numai barele drepte, supuse la solicitări simple (tracțiune sau compresiune,

forfecare, torsiune sau încovoiere). În categoria barelor drepte pot fi asimilate piese ca biele, palete de turbină, cuțite de strung, osii, grinzi, stâlpi, arbori de transmisie, tijele șuruburilor sau niturilor etc. În mod convențional, barele vor fi prezentate prin axa lor generică, trasată cu linie groasă. Barele drepte sunt denumite funcție de solicitarea la care sunt supuse (*fig. 1.2*)

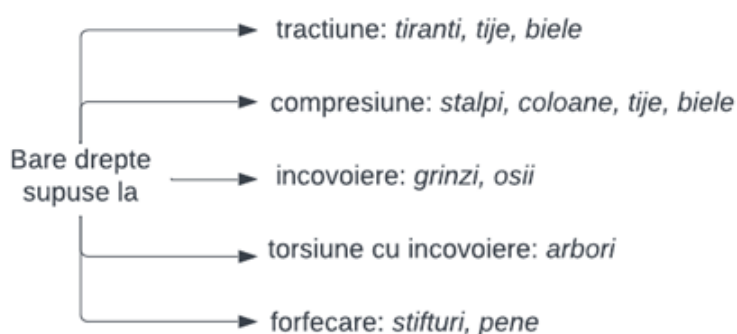


Fig. 1.2. Clasificarea barelor drepte funcție de solicitări

1.3. FORȚE ȘI MOMENTE EXTERIOARE

1.3.1. Reazeme și reacțiuni

Tipuri de reazeme

În Rezistența Materialelor corpurile nu sunt studiate izolate de cele înconjurătoare, ci în legătură cu acestea. Altfel spus, ele sunt figurate împreună cu *legăturile* sau *reazemele* lor. Rolul reazemelor este de a suprima anumite grade de libertate ale corpului. Funcție de numărul gradelor de libertate preluate, în plan (2D) avem trei tipuri de reazeme:

- *Rezemarea (suprimă translația pe o direcție);*
- *Articulația cilindrică sau articulația simplă (suprimă translația pe două direcții);*
- *Încastrarea (preia translația pe două direcții și rotirea).*

Un corp așezat pe alt corp se poate spune că este *simplu rezemat*. Practic rezemarea simplă se poate realiza prin lagăre, prin intermediul unor role

(cum ar fi cele montate între conducte și stâlpi pentru a permite deplasările produse de dilatările termice etc.). Rezemarea simplă suprimă un grad de libertate (tab. 1.1).

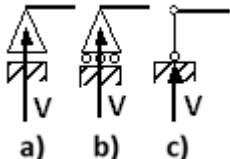
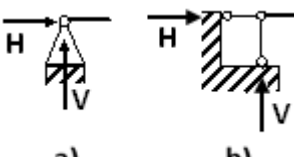
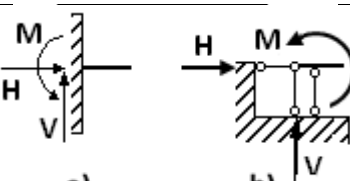
Articulația cilindrică (simplă) se materializează prin lagăre (de alunecare sau rostogolire) și suprimă două grade de libertate. Biela unui motor realizează o *articulație cilindrică (simplă)* față de arborele cotit și respectiv față de piston (prin intermediul bolțului).

Încastrarea nu permite nici o deplasare (preia toate gradele de libertate). O bară sudată de un bloc masiv fix, o paletă de turbină, un cuțit de strung prins în dispozitivul port-cuțit, o grindă fixată în zid, pot fi considerate bare încastate. Barele încastate la un capăt și libere la celălalt se numesc *bare în consolă*.

Reazemele prezentate mai sus au în multe cazuri deformații mult mai mici decât corpurile pe care le fixează și în consecință vor fi considerate *perfect rigide*, ceea ce reprezintă o idealizare. În practică pot fi întâlnite uneori și reazeme cu deformații mari: pneurile unui automobil, suspensii pe arcuri, perne de aer sau blocuri de cauciuc, rezemarea șinelor pe traverse și sol etc. Reazemele de acest tip sunt numite *reazeme tasabile*. Deformația lor nu poate fi neglijată. Rolul reazemelor este acela de a suprima anumite grade de libertate. Acest lucru se realizează prin apariția în reazem a unor forțe (care împiedică una sau două translații) și/sau momente (care împiedică rotirea). *Forțele și momentele care apar în reazeme se numesc reacțiuni*.

Se admit mai multe reprezentări schematizate ale reazemelor. *Reprezentarea pendulară* este generală și are la bază următoarea regulă: în punctul de rezare se prezintă atâtea pendule (sau bare articulate la capete) atașate de corp, câte grade de libertate sunt suprimate de reazemul respectiv. În *tabelul 1.1* se prezintă schematic reazemele cu reacțiunile care apar în plan (2D). Cu linie groasă s-a reprezentat o porțiune de bară. Nu sunt prezentate încărcările. În acest volum reazemele vor fi notate cu cifre încercuite. Se vor utiliza în special reprezentările din figurile notate cu a) în *Tabelul 1.1*.

Tab. 1.1. Reazeme și reacțiuni în plan (2D)

Denumirea reazemului	Deplasări		Reprezentări schematizate
	Suprimate	Permise	
Rezemare	Una (translația pe o direcție)	Două (translația pe o direcție și rotirea)	 a) b) c)
Articulație cilindrică (simplă)	Două (translația pe două direcții)	Una (rotirea)	 a) b)
Încastrare	Trei (translația pe două direcții și rotirea)	Zero	 a) b)

Observație: Reprezentarea pendulară este cea din figurile notate cu: c) pentru rezemare; b) pentru articulație și încastrare.

Reacțiunile trebuie să fie calculate de către proiectant. Calculul reacțiunilor reprezintă o problemă importantă în Rezistența Materialelor și Statică. Funcție de condiții, reacțiunile pot fi calculate ținând cont de anumite teorii. Primele două dintre acestea sunt prezentate pe scurt în cele ce urmează.

Teoria de ordinul I

După cum se va vedea în capitolul următor, deformațiile elastice sunt în general mici în raport cu dimensiunile corpurilor. Dacă deformațiile și deplasările mici nu influențează sensibil valoarea reacțiunilor, atunci ele pot fi neglijate. *Ecuatiile de echilibru sunt scrise pentru corpul nedeformat sau, altfel spus, considerat rigid în această fază.* De exemplu, grinda din figura 1.3

este articulată în stânga și simplu rezemată în dreapta. În urma încărcării cu forța F , grinda se deformează și reazemul simplu se deplasează din 2 în 2', cu o cantitate foarte mică, u . Această deplasare afectează brațul momentului forțelor V_2 și F , scris față de reazemul 1. Dar, deoarece există relația

$$u \ll L \quad (1.1)$$

influența deplasării u poate fi neglijată și momentul forței V_2 față de reazemul 1 va fi scris $V_2 L$ și nu $V_2(L - u)$. Cu linie continuă s-a prezentat axa geometrică a grinzii nedeformate, iar cu linie întreruptă cea a grinzii deformate. Axa geometrică (neutră) nu își schimbă lungimea la încovoiere.

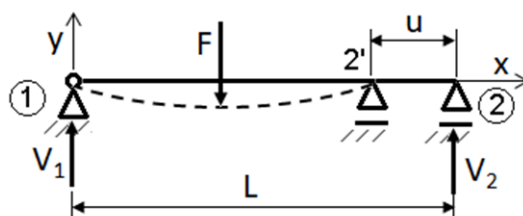


Fig. 1.3. Deformarea unei grinzi (reazemul 2 se deplasează în 2')

Teoria de ordinul al II-lea

În anumite cazuri speciale, cum ar fi cel al unor deplasări elastice mari, *ecuațiile de echilibru pot fi scrise pentru poziția finală a corpului deformat*. Această teorie este aplicată, de exemplu, în cazul barelor lungi, supuse la compresiune, la care, la o anumită valoare a forței, apare fenomenul de *flambaj longitudinal* (bara părăsește forma rectilinie). În figura 1.4 se prezintă flambajul unei bare (fenomen de pierdere a stabilității). Forța din stânga este considerată fixă, iar punctul de aplicare al celei din dreapta se deplasează cu cantitatea u . *Flambajul este un fenomen, nu o solicitare*. El este studiat în al doilea volum.

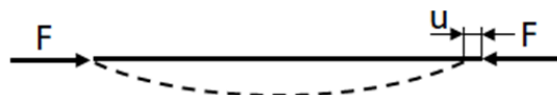


Fig. 1.4. Apariția flambajului la o bară dreaptă comprimată

Sisteme static determinate

Dacă numărul reacțiunilor este cel mult egal cu numărul ecuațiilor de echilibru, acestea pot fi calculate din ecuațiile staticii. Asemenea sisteme se numesc *static determinate*. În plan, un corp are trei grade de libertate: translații după două axe și o rotație. Cele trei legături devin critice atunci când sunt toate paralele (fig. 1.5a) sau concurente (fig. 1.5b). În cazul din figura 1.5a, se pierde ecuația de proiecție a forțelor pe orizontală, care devine identic nulă și sistemul permite deplasări pe această direcție. În cazul din figura 1.5b se pierde ecuația de moment, care devine identic nulă. Este evident că reacțiunile R_1 , R_2 și R_3 nu dau moment față de punctul P , (deoarece brațele sunt nule). Când momentul forței F nu este nul, se vor produce rotații. Dacă suportul forței F trece prin P , ecuația de moment devine identic nulă (față de P sau față de oricare punct din plan). Ecuația de moment se pierde și în cazul în care toate forțele sunt coliniare. În practică se recomandă evitarea sistemelor critice, care pot deveni instabile. Condiția pentru ca un sistem să fie static determinat poate fi scrisă:

$$NN \leq NE \quad (1.2)$$

unde

NN = numărul necunoscutelor (reacțiuni sau eforturi);

NE = numărul ecuațiilor staticii care nu sunt identic nule.

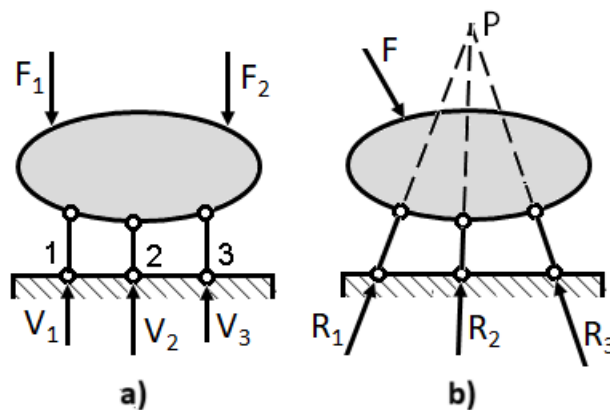


Fig. 1.5. Sisteme critice: cele trei reacțiuni sunt paralele (a) sau concurente (b)

Exemplul 1.1

Să se determine reacțiunile pentru grinda în consolă din *figura 1.6*.

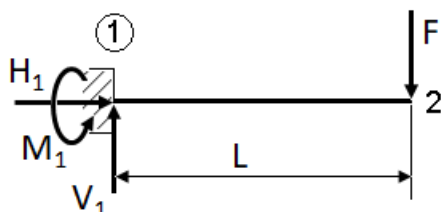


Fig. 1.6. Grindă în consolă, încărcată cu o forță concentrată

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 , M_1 din încastrare și se scriu ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 - F = 0 \Rightarrow V_1 = F \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow F \cdot L - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = FL\end{aligned}\quad (1.3)$$

Exemplul 1.2

Să se determine reacțiunile pentru grinda din *figura 1.7*. Momentul M a fost prezentat convențional prin sensul de rotire, însă el este un vector paralel cu axa Oz (sensul este dat de regula burghiului drept).

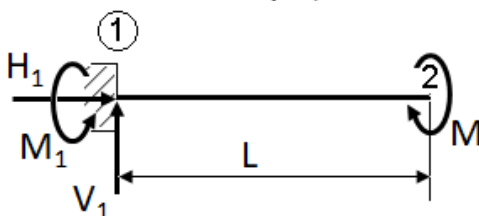


Fig. 1.7. Grindă în consolă, încărcată cu un moment concentrat

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 , M_1 din încastrare și se scriu ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow M - M_1 = 0 \Rightarrow M = M_1\end{aligned}\quad (1.4)$$

Exemplul 1.3

Să se determine reacțiunile pentru grinda din *figura 1.8*.

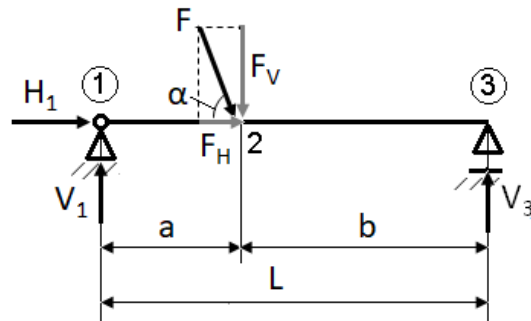


Fig. 1.8. Grindă încărcată cu o forță înclinată

Forța F are componentele

$$F_H = F \cos \alpha; \quad F_V = F \sin \alpha \quad (1.5)$$

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 , V_3 și se scriu ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Rightarrow H_1 + F_H = 0 \Rightarrow H_1 = -F_H \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow V_1 - F_V + V_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ultima ecuație are două necunoscute. Pentru a evita rezolvarea unui sistem, se vor scrie două ecuații de moment față de reazemele 1 și 3, deoarece astfel dispar momentele date de V_1 și respectiv V_3

$$\begin{aligned} \sum M_{(1)} = 0 &\Rightarrow V_3 L - F_V a = 0 \Rightarrow V_3 = \frac{F_V a}{L} \\ \sum M_{(3)} = 0 &\Rightarrow V_1 L - F_V b = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{F_V b}{L} \end{aligned} \quad (1.7)$$

În plan (2D) pot fi scrise numai trei ecuații independente.

Aceste ecuații de echilibru pot fi scrise sub una dintre formele:

- Două ecuații de proiecție a forțelor (pe două direcții oarecare) și o ecuație de momente (față de un punct din plan).

- O ecuație de proiecție a forțelor și două de momente, cu condiția ca proiecția să nu se facă pe normala la dreapta determinată de punctele față de care se scriu momentele;
- Trei ecuații de momente, cu condiția ca cele trei puncte față de care se scriu momentele să nu fie coliniare.

În exemplul de față a fost mai avantajos să se aleagă a doua variantă. Reacțiunile astfel calculate vor fi înlocuite în a doua relație (1.6), pe care o transformă într-o identitate, dacă au fost corect determinate. Înlocuind (1.7) în ecuația de proiecție a forțelor pe verticală (1.6) rezultă

$$\frac{F_v b}{L} - F_v + \frac{F_v a}{L} = \frac{F_v (a+b)}{L} - F_v = \frac{F_v L}{L} - F \equiv 0 \quad (1.8)$$

Astfel se verifică dacă reacțiunile au fost corect calculate. Reacțiunile negative au sens contrar celui adoptat inițial.

Sisteme static nedeterminate

La sistemele static nedeterminate, numărul necunoscutelor (reacțiunilor) depășește pe cel al ecuațiilor de echilibru

$$NN > NE \quad (1.9)$$

Sistemul format din ecuațiile de echilibru este completat cu un număr corespunzător de ecuații scrise în urma studierii deformațiilor corpului. Rezolvând sistemul compatibil astfel format, se determină reacțiunile.

Observație:

Practic nu există reazeme perfect rigide, așa cum se consideră în mod ideal. Ele permit mici deplasări și uneori nu pot fi încadrate perfect în una din cele trei categorii prezentate (rezemare, articulație cilindrică, încastrare). Există și reazeme elastice (tasabile) care permit deplasări mari (arcuri, tamponi de cauciuc etc.).

1.3.2. Încărcări

Forțele și momentele care încarcă corpul se numesc *sarcini* sau *încărcări*. La disciplina Mecanică, forțele și momentele sunt prezentate prin vectori, care

acționează într-un punct (forte și momente *concentrate*). Toate corpurile sunt însă deformabile. În consecință, un corp va acționa asupra altuia prin intermediul unei suprafețe, chiar dacă aceasta este de dimensiuni foarte mici. De exemplu, bilele unui rulment se deformează elastic în urma încărcării și sunt în contact cu căile de rulare prin intermediul unor suprafețe foarte mici.

În cazurile în care suprafețele pe care acționează forțele și momentele sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului, aceste încărcări vor fi considerate concentrate.

În practică se întâlnesc însă și forțe care acționează asupra unor suprafețe mari și care nu mai pot fi considerate concentrate, cum ar fi forțele care apar ca urmare a acțiunii presiunii, sau cele care apar la prelucrarea pământului etc. Asemenea forțe se numesc *distribuite*. Forțele de greutate și de inerție, care fac parte din categoria forțelor *masice*, sunt de asemenea forțe distribuite. Este evident că forța gravitațională acționează asupra fiecărui element volum al corpului, considerat teoretic infinit mic. La disciplina Mecanică însă, ea a fost înlocuită cu o forță rezultantă concentrată, *static echivalentă*, care acționează în centrul de greutate al corpului (fig. 1.9).

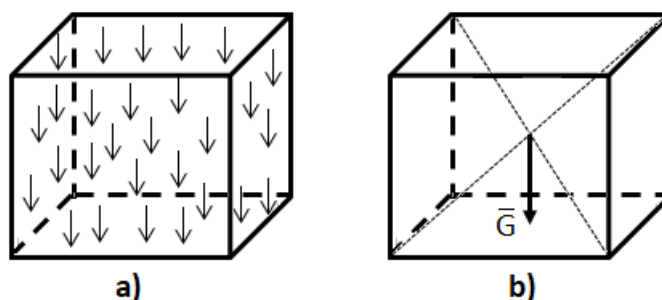


Fig. 1.9. Greutatea este o forță distribuită în întreg volumul (a), dar în Mecanica rigidului ea este înlocuită cu o forță concentrată static echivalentă (b)

Înlocuirea forțelor distribuite cu forțe concentrate nu este posibilă în Mecanica solidului deformabil decât într-un număr limitat de situații, cum ar fi calculul reacțiunilor (în cadrul teoriei de ordinul I), când corpul încă este

considerat rigid. Ulterior această înlocuire nu mai este admisă, deoarece ar modifica modul de deformare al corpului.

În Mecanica solidului deformabil apar următoarele deosebiri față de cea a solidului rigid:

- Forțele și momentele concentrate sunt vectori legați (nu este permisă deplasarea punctului de aplicare pe dreapta suport);
- Două forțe egale și de sensuri contrare, care acționează asupra unui corp, sunt în echilibru doar până când corpul se rupe;
- În general, un sistem de forțe nu poate fi înlocuit prin rezultanta sa (cu excepțiile menționate mai sus), deoarece corpul se deformează diferit în cele două situații.

În Rezistența Materialelor se operează mai mult cu modulul forțelor sau momentelor. Din acest motiv, de cele mai multe ori, ele nu vor fi notate ca vectori (se va scrie forța F și nu $\vec{F}$). Intensitatea „forțelor” distribuite pe volum (în spațiul 3D) va fi măsurată în $[N/mm^3]$. „Forțele” distribuite pe suprafețe (spațiul 2D) pot proveni din presiune, de exemplu. Ele se măsoară în $[N/mm^2]$. În reprezentare uniaxială (1D), intensitatea acestor „forțe” se exprimă în $[N/mm]$. După cum se va arăta ulterior, modul de lucru reduce „forțele distribuite” la forțe reale, măsurate în $[N]$.

Pentru o bară de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, *greutatea* este o *forță uniform distribuită*. Intensitatea acestei *forțe distribuite* poate fi aflată împărțind greutatea barei la lungimea acesteia $[N/mm]$ și reprezintă *greutatea unității de lungime*. Se știe că presiunea apei variază liniar cu adâncimea. În consecință, forța distribuită care acționează asupra unui baraj variază liniar pe verticală. În practică pot fi întâlnite și forțe distribuite după alte legi (parabolic, exponențial, sinusoidal etc.).

După modul lor de repartizare, încărcările pot fi clasificate ca în *figura 1.10*. Momentele concentrate pot fi reprezentate fie ca M_1 , fie ca M_2 , la care segmentul de dreaptă intersectează grinda în punctul de aplicare al momentului. Momentele pot fi și ele distribuite uniform, liniar sau după alte

legi. *Momentele distribuite* în spațiul (1D) se măsoară în [Nmm/mm=N]. Ele se întâlnesc rar și nu au fost abordate în prezenta lucrare.

Determinarea intensității forței rezultante, static echivalentă cu cea distribuită, se poate face cu ajutorul schemei din *figura 1.11*. Grinda este încărcată cu o forță distribuită după o lege oarecare, funcția $q(x)$ fiind cunoscută. Cu G s-a notat centrul de greutate al suprafeței 1BC2, iar cu $\bar{Q}$ forța static echivalentă. Ambele încărcări determină aceleași reacțiuni.

În *figura 1.11a* se mai poate marca printr-un mic cerc (balustrare) originea lui x . Intensitatea “forței” distribuite $q(x)$ se măsoară în [N/mm]. Se dorește să se determine reacțiunile V_1 și V_2 . Pe lungimea dx intensitatea “forței” distribuite $q(x)$ poate fi considerată constantă și se poate determina modulul forței elementare care acționează asupra elementului de grindă

$$dF = q(x) dx \quad (1.10)$$

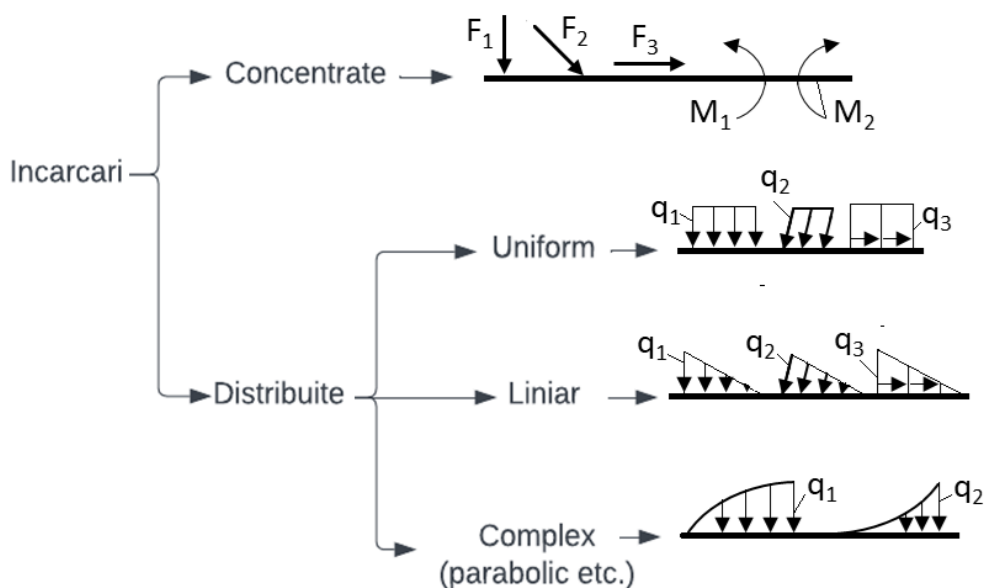


Fig. 1.10. Clasificarea încărcărilor funcție de modul de repartizare

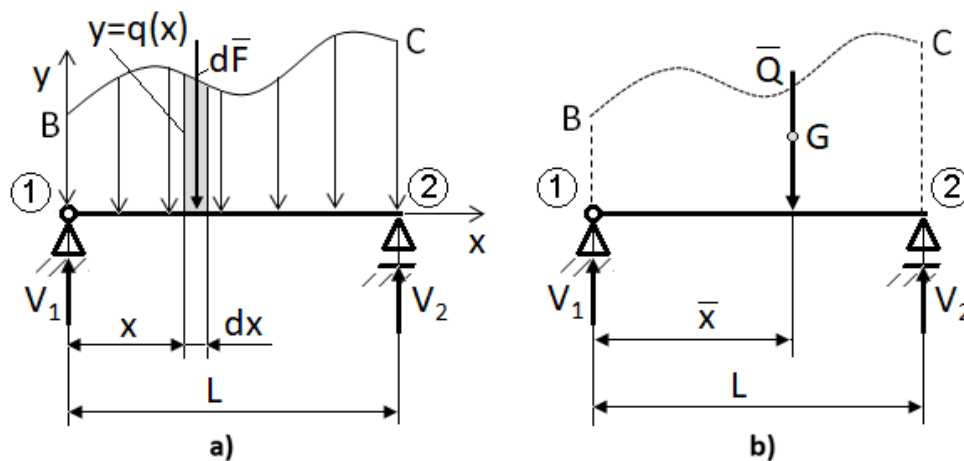


Fig. 1.11. Grindă încărcată cu o forță distribuită (a) și cu o forță concentrată static echivalentă (b)

Modulul forței static echivalente care încarcă grinda poate fi determinat prin integrare

$$Q = \int_0^L dF; \quad Q = \int_0^L q(x) dx \quad (1.11)$$

Atât forță elementară dF , cât și rezultanta Q , sunt “forțe adevărate”, care se măsoară în [N]. Ținând cont de interpretarea geometrică a integralei, se poate spune că *intensitatea forței rezultante Q este numeric egală cu suprafața A , cuprinsă între curba $q(x)$ și grindă*. Scriind ecuațiile de proiecție a forțelor pe verticală și de momente pentru cazul din figura 1.11a, se obține

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - Q = 0 \quad (1.12)$$

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 L - \int_0^L x \cdot dF = 0 \Rightarrow V_2 L = \int_0^L q(x) x dx \quad (1.13)$$

Termenul din dreapta reprezintă momentul dat de către forța distribuită. Se scrie apoi ecuația de momente pentru cazul din figura 1.11b

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 L - Q \bar{x} = 0 \Rightarrow V_2 L = Q \bar{x} \quad (1.14)$$

Din (1.13) și (1.14) rezultă succesiv

$$Q\bar{x} = \int_0^L q(x)xdx \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{Q} \int_0^L q(x)xdx \quad (1.15)$$

Se observă că momentul forței distribuite, calculat prin integrare, reprezintă *momentul static al suprafeței 1BC2* (notată mai jos cu A) față de axa Oy . Deși forțele axiale acționează pe axa geometrică a grinzii, ele se prezintă în vecinătatea acesteia pentru a fi mai ușor remarcate. Ținând cont și de interpretarea geometrică a rezultantei Q , (1.15) poate fi rescrisă

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{Ax_G}{A} = x_G \quad (1.16)$$

S-a demonstrat astfel că *forța rezultantă Q acționează asupra grinzii în punctul de abscisă $\bar{x} = x_G$, care este cea a centrului de greutate G al suprafeței A , cuprinsă între curba $q(x)$ și grindă.*

În figura 1.12 se prezintă porțiuni de bară încărcate cu diverse forțe distribuite, figurând și forțele concentrate static echivalente Q .

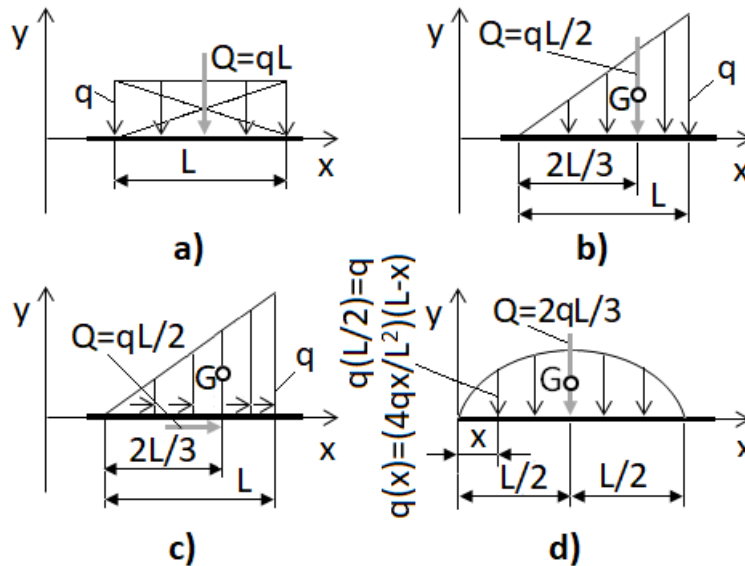


Fig. 1.12. Încărcări distribuite uniform (a), liniar (b) și (c), parabolic (d) și forțele static echivalente corespunzătoare Q

Încărcările din *figurile 1.12a,b* pot proveni, de exemplu, din acțiunea presiunii. În *figura 1.12c* s-au prezentat forțe axiale distribuite liniar. Deși aceste forțe acționează pe axa geometrică a grinzii, ele se prezintă în vecinătatea acesteia, pentru a fi mai ușor remarcate. Și în aceste cazuri rămân valabile observațiile de mai sus privind calculul intensității forței rezultante Q și a punctului său de aplicare. Modulul forței static echivalente Q , numeric egal cu suprafața segmentului de parabolă din *figura 1.12d*, se poate calcula prin integrare.

Aceleași observații sunt valabile și în cazul prezentat în *figura 1.13a*, dacă ne raportăm la sistemul de referință $x'Oy'$. Un alt mod de abordare îl constituie descompunerea intensității maxime q în două componente, q_v și q_H (*fig. 1.13b*), cu cele două încărcări liniar distribuite (una perpendiculară pe axa barei și cealaltă paralela cu ea) acționând simultan.

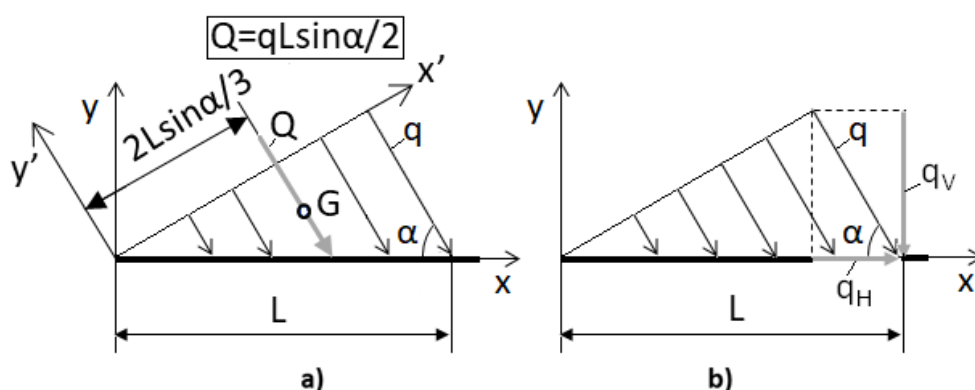


Fig. 1.13. Porțiune de bară încărcată cu o forță liniar distribuită: forța static echivalentă Q (a) și descompunerea în două încărcări liniar distribuite (b)

Pentru o bară curbă încărcată cu o forță distribuită, orientată pe direcția normalei la o curbă (*fig. 1.14*), se poate scrie forța elementară

$$dF = q \cdot ds \quad (1.17)$$

Asemenea forțe distribuite pot proveni, de exemplu, din acțiunea presiunii hidrostatice a unui fluid asupra unui solid.

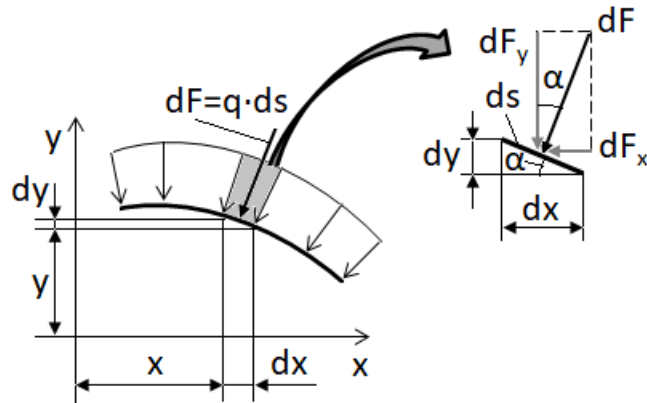


Fig. 1.14. Porțiune de bară curbă încărcată cu o forță distribuită

Forța elementară are componentele

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \sin \alpha = dF \frac{dy}{ds} = q dy \\ dF_y &= dF \cos \alpha = dF \frac{dx}{ds} = q dx \end{aligned} \quad (1.18)$$

Componentele rezultantei static echivalente pot fi calculate cu relațiile

$$Q_x = \int_S dF_x; \quad Q_y = \int_S dF_y \quad (1.19)$$

Intensitatea rezultantei va fi

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \quad (1.20)$$

iar direcția acesteia este dată de

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Q_y}{Q_x} \quad (1.21)$$

Intensitatea rezultantei poate fi calculată direct cu relația

$$Q = \int_S q(s) ds \quad (1.22)$$

Momentele distribuite se întâlnesc mai rar în practică și din acest motiv nu au fost prezentate în lucrare.

Încărcările (sarcinile) mai pot fi clasificate și funcție de variația lor în timp (fig. 1.15). Exista încărcări statice, la care intensitatea crește într-un timp relativ îndelungat (de ordinul zecilor de secunde) și rămâne constantă după ce s-a atins o valoare maximă. Încărcarea fiind lentă, accelerațiile se pot neglija.

Exista, de asemenea, încărcări dinamice prin șoc, care se aplică cu viteză mare, caz în care accelerațiile nu mai pot fi neglijate. Asemenea situații pot să apară în cazul ciocnirii corpurilor. Tot în categoria încărcărilor dinamice se încadrează cele periodice sau aperiodice. În cazul acestor încărcări poate să apară fenomenul de oboseală a materialelor (corpurile cedează după un număr de cicluri, la o tensiune mai mică decât cea de rupere statică).

Calculul de rezistență ținând cont de modul de acțiune a încărcărilor în timp (static, prin șoc, alternant etc.). În acest volum se vor discuta numai solicitările statice.

Funcție de importanța lor, încărcările pot fi clasificate ca în figura 1.16.

Din punctul de vedere al Rezistenței Materialelor, scopul unui organ de mașină sau al unei structuri este de a prelua încărcările principale, secundare și cele extraordinare prevăzute.

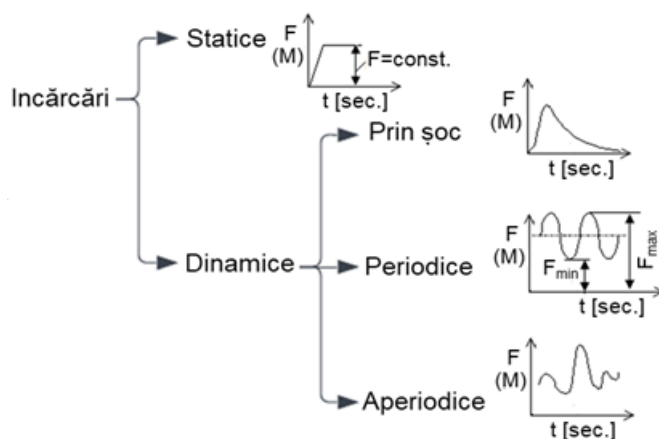


Fig. 1.15. Clasificarea încărcărilor funcție de variația lor în timp

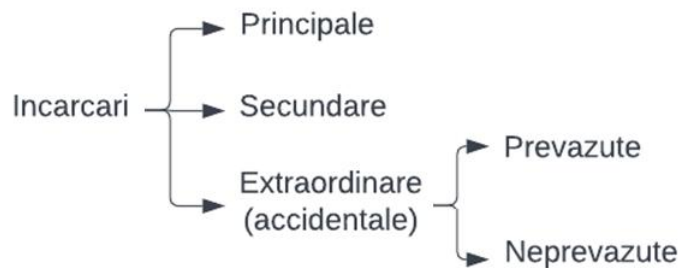


Fig. 1.16. Clasificarea încărcărilor după importanța lor

În categoria *încărcărilor secundare* pot fi menționate greutatea proprie a structurii, forțele de frecare, forțele provenite din presiunea vântului etc. Proiectantul trebuie să aibă în vedere ambele categorii de încărcări.

Încărcările extraordinare (accidentale) apar întâmplător, la intervale de timp care nu pot fi precizate, acționând deci intermitent. Ele pot avea însă efecte catastrofale. Unele încărcări accidentale pot fi prevăzute, altele nu. Din motive economice, tehnologice sau funcționale, chiar și pentru încărcările accidentale prevăzute se admit, în calculele de rezistență, intensități care în practică pot fi uneori depășite. Astfel, construcțiile civile sunt calculate pentru seisme de o anumită intensitate și durată, deși nu poate fi exclusă posibilitatea depășirii acestor valori, mai ales într-un interval mare de timp.

1.4. FORȚE ȘI MOMENTE INTERIOARE

Corpurile solide au o formă și un volum propriu. Acest lucru este o consecință a forțelor de atracție puternice existente între atomi. Încărcând corpul, acesta se deformează ca urmare a variației distanțelor interatomice. Ruperea corpului înseamnă de fapt desfacerea legăturilor dintre perechile de atomi. În *figura 1.17* se prezintă diagrama de variație a energiei potențiale dintre cei doi atomi de hidrogen, funcție de distanța interatomică. Distanța de echilibru R_0 corespunde energiei potențiale minime, numită energie de legătură (U_{leg}). În vederea ruperii legăturii, o energie trebuie să fie introdusă din exterior, pentru a scoate atomii din "groapa de potențial". Dacă încărcările nu depășesc anumite valori, deplasarea atomilor se face în jurul poziției de echilibru (porțiunea marcată cu linie groasă în *figura 1.17*),

ei revin în poziția inițială după descărcare și corpul are un comportament *perfect elastic*. Solicitând corpul la tracțiune, se mărește distanța interatomică până când, pentru o anumită valoare a forțelor toate legăturile se desfac într-o anumită secțiune și corpul se rupe (punctul B din fig. 1.17). Compresiunea micșorează distanța dintre atomi. Sunt necesare forțe mult mai mari pentru apropierea atomilor. Se poate arăta că și în cazul sistemelor cu mai mulți atomi, care formează o rețea, se obțin curbe asemănătoare cu cea din figura 1.17, deși fenomenele sunt mult mai complexe [Drăgănescu M., 1972]. Încărcând un corp solid se vor produce modificări ale distanțelor interatomice iar între perechile de atomi apar forțe suplimentare, în afara celor care asigură volumul și forma proprie a corpului.

Făcând o secțiune imaginară cu un plan π , printr-un corp solid aflat în echilibru (fig.1.18a), se pun în evidență forțele interatomice de legătură rezultante, care sunt perechi, egale și de sensuri contrare, conform legii acțiunii și reacțiunii.

Rezultanta tuturor forțelor de legătură de pe secțiunea transversală a uneia dintre părți este o forță rezultantă $\vec{R}$. Reducând această forță la centrul de greutate al secțiunii, se va obține rezultanta $\vec{R}$ și momentul resultant $\vec{M}_R$, numite *eforturi* (fig. 1.18b). Eforturile $\vec{R}$ și $\vec{M}_R$ de pe cele două părți ale corpului sunt egale și de sensuri contrare.

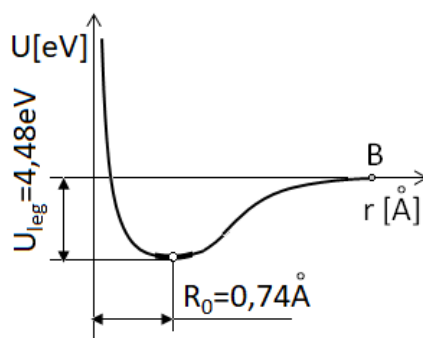


Fig. 1.17. Variația energiei potențiale funcție de distanța dintre doi atomi de hidrogen

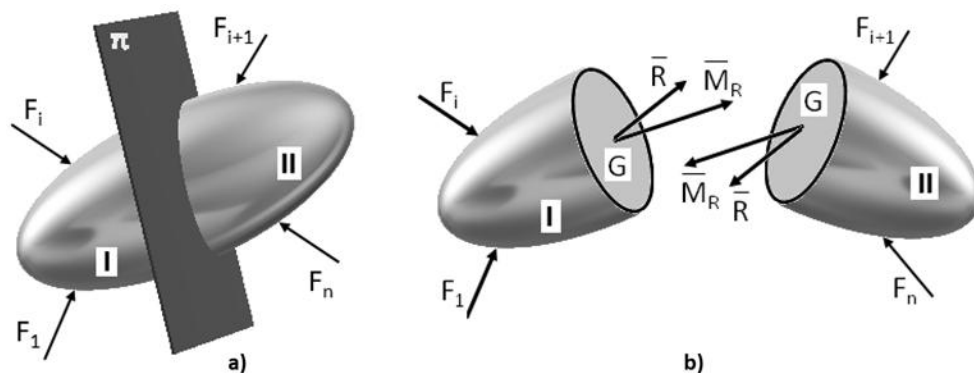


Fig. 1.18. Secțiune imaginară printr-un corp aflat în echilibru (a) și punerea în evidență a eforturilor (b)

Admițând un sistem de referință triortogonal drept, cu originea în centrul de greutate al suprafeței rezultată prin secționare, componentele eforturilor după cele trei axe vor fi notate $\bar{R}(N, T_y, T_z)$ și $\bar{M}(M_x, M_y, M_z)$, ca în figura 1.19. Convențional, axa Ox coincide cu axa geometrică a barei drepte.

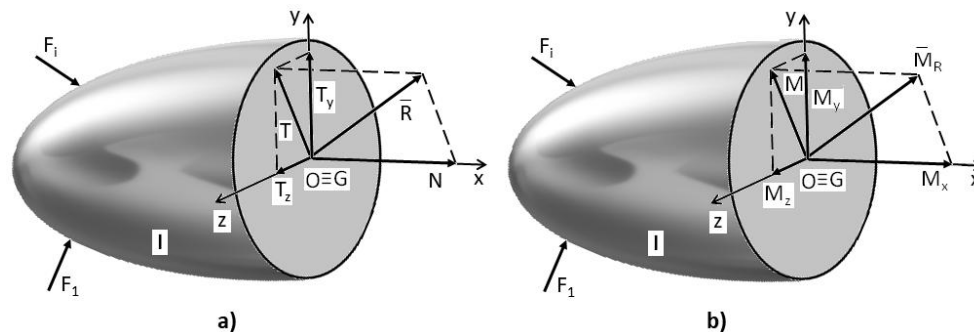


Fig. 1.19. Descompunerea eforturilor: componentele forței rezultante $\bar{R}$ (a) și ale momentului resultant $\bar{M}_R$ (b), care pot să apară simultan

Componenta N , normală la secțiune, se numește *forță axială* și apare în cazul solicitărilor la tracțiune sau compresiune (solicitări axiale). Componentele T_y și T_z sunt în planul secțiunii. Ele se numesc *forțe tăietoare* deoarece, așa cum se va arăta ulterior, apar la tăierea (forfecarea) barelor.

Componenta M_x este normală pe secțiune, apare la torsiunea (răsucirea) barelor și se numește *moment de torsiune*. Componentele M_z și M_y sunt în planul secțiunii, apar la încovoierea barelor și se numesc *momente încovoietoare*.

1.4.1. Metoda secțiunilor

Metoda secțiunilor este utilizată pentru evidențierea și determinarea celor șase componente ale eforturilor. În plan se există cel mult trei componente nenule. *Deoarece corpul (sau sistemul de corpuri) se află inițial în echilibru, atunci orice parte a sa se va afla în echilibru după secționarea imaginară, dacă se figurează acțiunea părții îndepărtate asupra celei rămase. Astfel se reprezintă eforturile din secțiune.* Eforturile se determină scriind ecuațiile de echilibru pentru o porțiune de corp rezultată după secționarea imaginară. *Metoda secțiunilor transferă eforturile din categoria forțelor și momentelor interioare în cea a forțelor și momentelor exterioare.*

Scriind ecuațiile de echilibru pentru o porțiune din corpul secționat imaginar, eforturile vor fi determinate după cum urmează:

- Forța axială N este egală cu suma algebrică a tuturor proiecțiilor forțelor exterioare pe axa Ox (axa barei);
- Forțele tăietoare T_y și T_z sunt egale cu suma algebrică a proiecțiilor tuturor forțelor exterioare pe axa Oy și respectiv Oz ;
- Momentele încovoietoare M_z și M_y sunt egale cu suma algebrică a tuturor momentelor exterioare față de axa Oz și respectiv Oy .

Eforturile se stabilesc față de un sistem de axe principal central (cu originea în centrul de greutate al secțiunii transversale). Curbele lor de variație sunt numite *diagrame de eforturi* și trasarea lor va fi prezentată în capitolele următoare.

Se face o secțiune imaginară printr-o bară aflată în echilibru sub acțiunea încărcărilor și a reacțiunilor, raportată la un sistem de axe triortogonal drept, cu axa Ox orientată după axa geometrică a barei. Pe fiecare dintre cele două fațete rezultate prin secționare se duce versorul normalei (notat cu $\vec{n}$), plecând din secțiune. Se consideră pozitivă fațeta care are $\vec{n}$ orientată în

sensul axei Ox și negativă cea cu $\bar{n}$ orientată în sens contrar (fig. 1.20a). Astfel, prin secționare se obțin două fațete: una pozitivă și alta negativă. Eforturile de pe fațeta pozitivă, orientate în sensul pozitiv al axelor, vor fi considerate pozitive și negative dacă sunt orientate în sens contrar. Eforturile de pe fațeta negativă, orientate în sensul negativ al axelor, vor fi considerate pozitive iar în sensul axelor, sunt negative (fig. 1.20b,c). Această regulă de semn este similară cu cea folosită la produsul algebric (tab. 1.2).

Tab. 1.2. Regula de semn pentru eforturi

Semnul fațetei	Sensul axei spre care este orientat efortul	Semnul efortului
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

Solicitările care produc o singură componentă a eforturilor se numesc *simple*. Acestea sunt: solicitări axiale (tracțiune sau compresiune), forfecare, torsiune și respectiv încovoiere. Când apar mai multe componente ale eforturilor, se produc *solicitări compuse*. Semnele eforturilor pentru diferite solicitări, simple, precum și încărcările care determină eforturi pozitive și negative, sunt prezentate în figura 1.21.

Atunci când există mai multe componente ale eforturilor în secțiune, însă o componentă este cu mult mai mare decât celelalte, acestea din urmă se neglijează și se consideră că apare doar o solicitare simplă. Astfel, tija unui șurub este calculată la tracțiune, deși este supusă și la mici momente de torsiune, datorită frecărilor. Dacă suprafețele pe care calcă capul șurubului și piulița nu sunt plane și paralele, tija va fi supusă și la încovoiere. Când momentele încovoietoare sunt semnificative, se pot utiliza șaibe în formă de pană sau *șaibe speciale*, cu articulație sferică, pentru a împiedica solicitarea tijei șurubului la încovoiere.

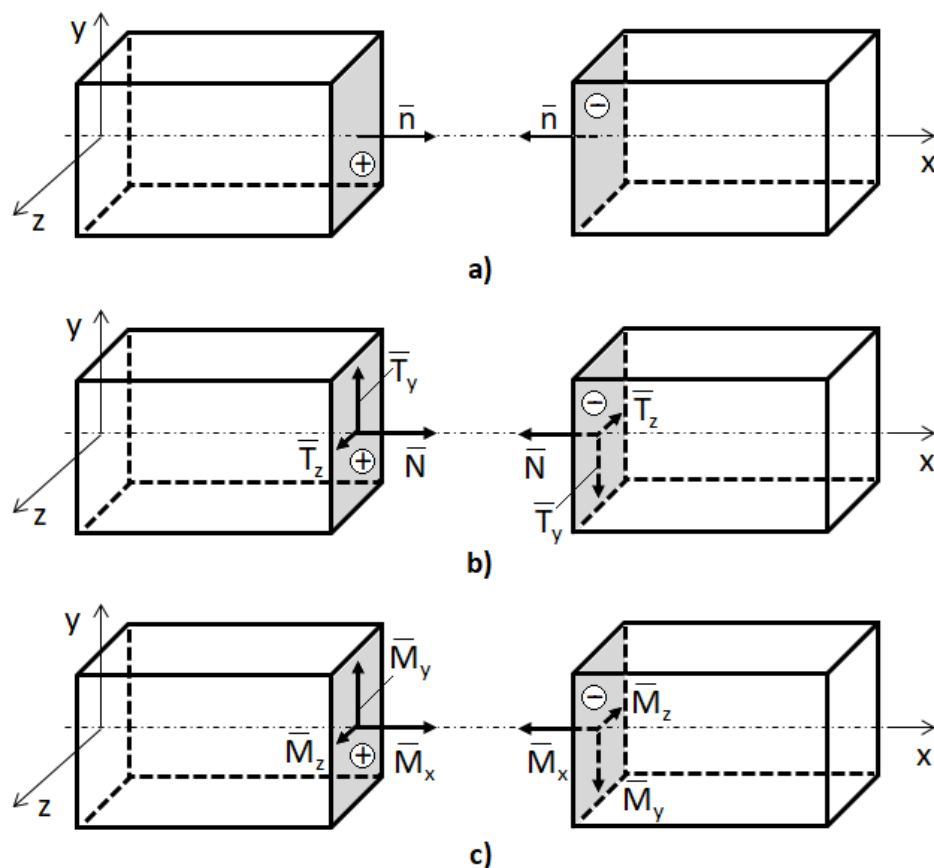


Fig. 1.20. Stabilirea semnului fațetelor rezultate după secționare (a) și a semnelor eforturilor (b, c) (toate eforturile sunt pozitive și nu sunt prezentate încărcările).

Aceste reguli de semn sunt necesare pentru trasarea diagramelor de eforturi. În fig. 1.21 sunt arătate mai multe tipuri de reprezentări pentru forțele tăietoare și momentele încovoietoare cu semnele acestora. Pentru solicitarea la forfecare, regula de semn pentru forțele exterioare poate fi enunțată astfel: forțele care acționează la stânga secțiunii de sus în jos, sau la dreapta secțiunii de jos în sus, determină forțe tăietoare pozitive (fig. 1.21c, h). Aceste încărcări dau un cuplu în sens trigonometric. Multe manuale consideră arbitrar ca acest sens este negativ, deși nu este în concordanță cu regulile prezentate mai sus și nici cu sensul tensiunilor tangențiale τ , care va fi prezentat ulterior.

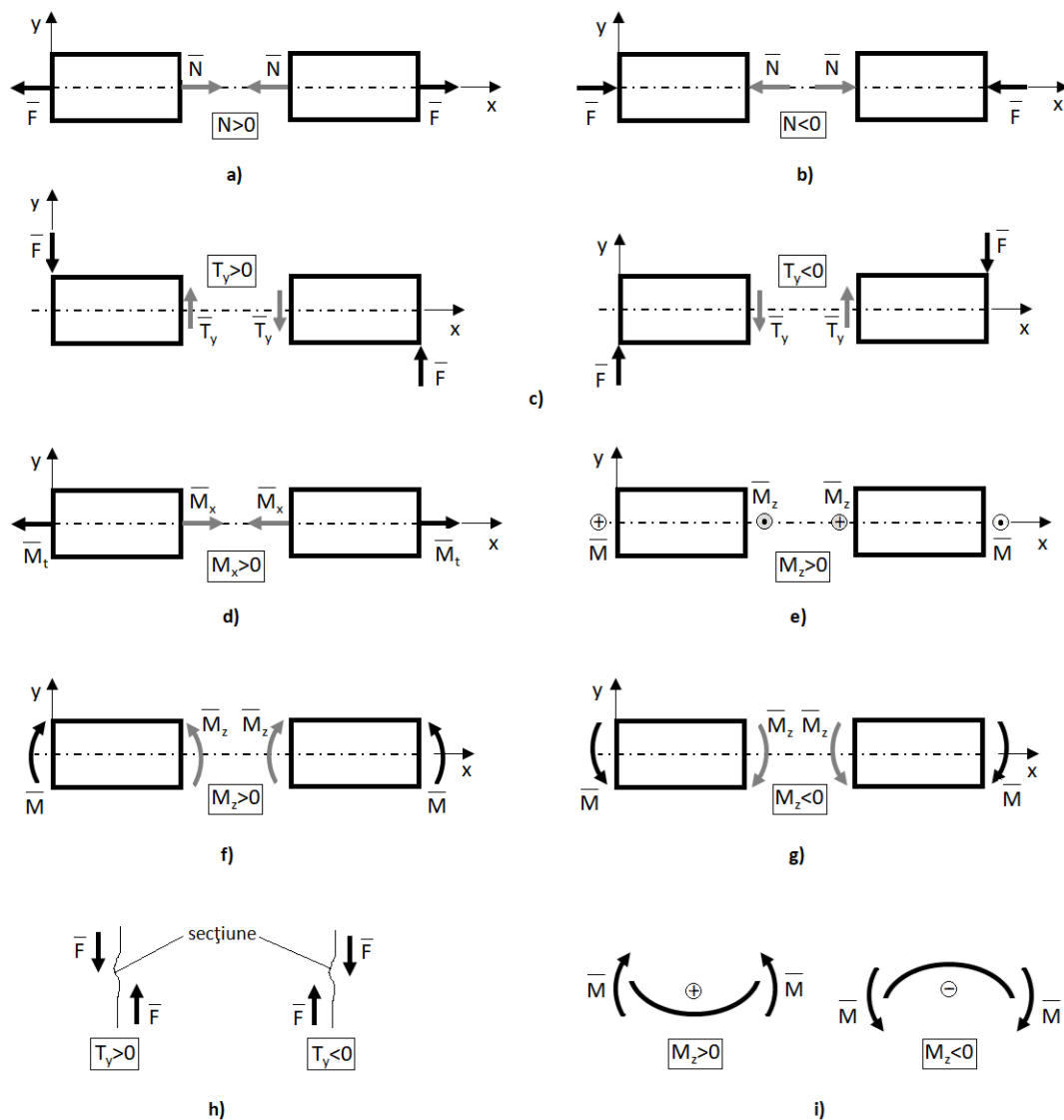


Fig. 1.21. Bara secționată și semnele eforturilor pentru diferite solicitări: tracțiune (a); compresiune (b); forfecare (c); torsiune (d); încovoiere-cu momente reprezentate după regula burghiului drept (e) și respectiv figurând sensurile lor de rotire (f, g). Mod simplificat de reprezentare a încărcărilor care determină eforturi pozitive și negative: forfecare (h); încovoiere (i)

Pentru încovoiere, momentele exterioare care deformează grinda cu concavitatea orientată spre sensul pozitiv al axei Oy („ține apa”) determină eforturi (momente încovoietoare) pozitive (*fig. 1.21f, i*), iar în sens contrar determină eforturi negative (*fig. 1.21g, i*). Momentele pot fi reprezentate ca vectori sau prin sensul lor de rotire, determinat cu regula burghiului drept. În *figura 1.21e*, vectorii moment sunt perpendiculari pe planul foii și au fost reprezentați cu simboluri utilizate în electrotehnică (+ indică ampenajul săgeții care intră în planul foii). O altă reprezentare a aceleiași solicitări la încovoiere, utilizând sensul de rotire al momentelor, se vede în *figura 1.21f*. În *figura 1.21g* se arată momentele încovoietoare negative.

Regulile de semn de mai sus vor fi utilizate la trasarea diagramelor de eforturi, cu ajutorul cărora se stabilește secțiunea periculoasă, cea în care corpul poate să cedeze. Se calculează apoi dimensiunile secțiunii transversale, astfel încât corpul să reziste la încărcările propuse sau, altfel spus, se face *dimensionarea* corpului. *Regulile de semn pentru eforturi diferă cea utilizată în statică.*

Exemplul 1.4

La grinda din Exemplul 1.3 se determină eforturile în secțiunea x (*fig. 1.22*).

După secționare eforturile au fost prezentate astfel încât porțiunile de bară să fie în echilibru (*fig. 2.19*). Când nu se poate intui direcția eforturilor, ele pot fi figurate pozitive, urmând ca semnul lor real să fie determinat. Pentru porțiunea de grindă de lungime x, eforturile rezultă din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned} N - H_1 &= 0 \Rightarrow N = H_1; \\ T_y + V_1 &= 0 \Rightarrow T_y = -V_1; \\ M_z - V_1 x &= 0 \Rightarrow M_z = V_1 x \end{aligned} \quad (1.23)$$

Reacțiunile H_1 și V_1 au fost calculate la *Exemplul 1.3*. Eforturile negative sunt de sens contrar celor prezentat în *figura 1.22*. În regiunea 1-2 grinda este solicitată la tracțiune (forța axială N), forfecare (forța tăietoare T_y) și încovoiere (moment M_z). În regiunea 2-3 nu există forță axială N .

Atunci când în secțiunea unui corp apar mai multe componente ale eforturilor simultan, se spune că acel corp este supus la *solicitări compuse*.

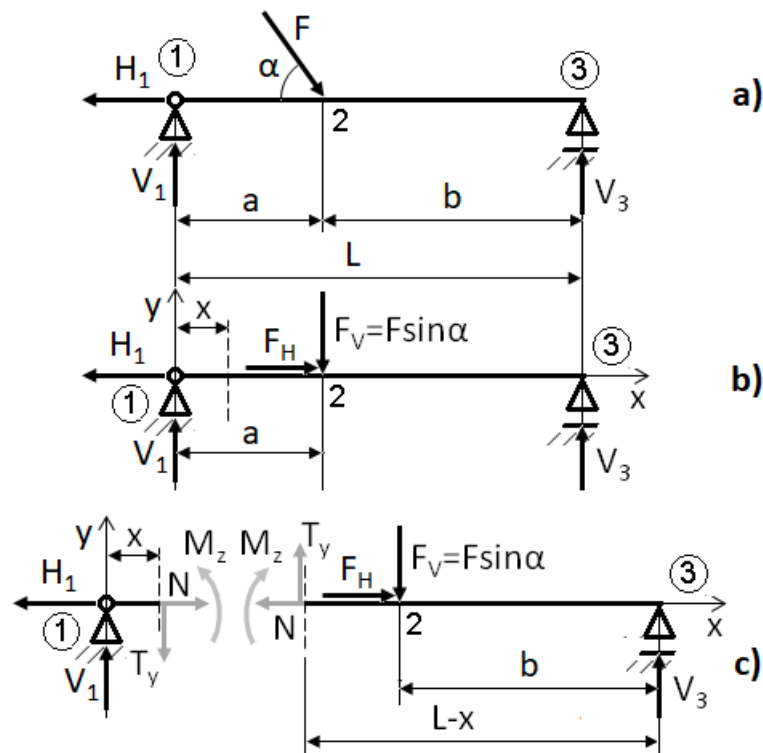


Fig. 1.22. Grindă încărcată cu o forță înclinată (a); componentele forței F (b) și eforturile în secțiunea x , cu porțiunile de grindă în echilibru (c)

Determinarea eforturilor din bare cu încărcări distribuite

Fie o bară în consolă, încărcată cu o forță $q(x)$, distribuită după o lege cunoscută. Se izolează porțiunea de bară de lungime x și se determină eforturile (fig. 1.23), care au fost prezentate pozitive. Înainte de abordarea acestei probleme se recomandă să se revadă exemplul grinzii din figura 1.11.

Din figura 1.23b se observă că nu există încărcări pe direcție axială și în consecință $N = 0$. Pentru a determina eforturile $T_y(x)$ și $M_z(x)$, se face secțiunea ajutătoare t și i se dă o creștere infinit mică dt .

Suprafața elementară marcată cu gri în *figura 1.23b* este asimilată cu un dreptunghi cu laturile $q(t)$ și dt .

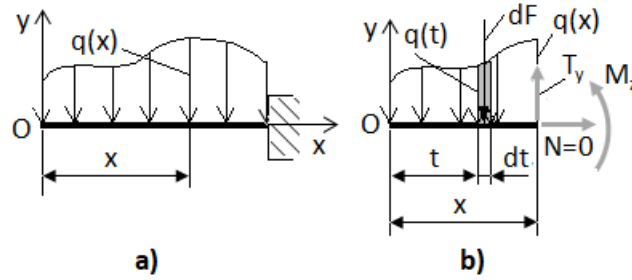


Fig.1.23. Grindă încărcată cu o forță distribuită (a) și izolarea unei porțiuni (b)

Pentru elementul de grindă de lungime dt , forța $q(x)$ poate fi considerată practic uniform distribuită, iar forța elementară concentrată static echivalentă este

$$dF = q(t) dt \quad (1.24)$$

unde $q(t)$ se obține înlocuind x cu t în funcția cunoscută $q(x)$.

Forța tăietoare este dată de

$$T_y = \int_0^x dF; \quad T_y = \int_0^x q(t) dt \quad (1.25)$$

Momentul forței elementare față de secțiune este

$$dM \approx dF(x-t) \quad (1.26)$$

Momentul încovoietor se determină cu relația

$$M_z(x) = \int_0^x dM; \quad M_z(x) = \int_0^x q(t)(x-t) dt \quad (1.27)$$

În relațiile (1.25) și (1.27) integrarea se face după t (considerând x constant). Abia după efectuarea integralei definite x va fi considerat variabil.

Se observă că *forța tăietoare* determinată cu relația (1.25) reprezintă *suprafața* cuprinsă între curba $q(x)$ și axa Ox (luată între O și x), iar *momentul*

încovoietor dat de (1.27) reprezintă *momentul static* al aceleiași suprafețe, față de secțiune. Se poate proceda similar în cazul forțelor distribuite axial.

1.5. RELĂȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE ÎNCĂRCĂRI ȘI EFORTURI

Dintr-o bară încărcată cu $q_y(x)$ și $q_x(x)$, cu distribuție oarecare, se izolează un element de lungime dx (fig. 1.24a), se figurează eforturile (fig. 1.24b) și se scriu ecuațiile staticii, considerând $q_y(x)$ și $q_x(x)$ constante pe lungimea dx

$$\begin{aligned}\sum X_i = 0 &\Rightarrow (N + dN) + q_x(x)dx - N = 0 \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow (T_y + dT_y) - q_y(x)dx - T_y = 0\end{aligned}\quad (1.28)$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow M_z - T_y dx - q_y(x)dx \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0$$

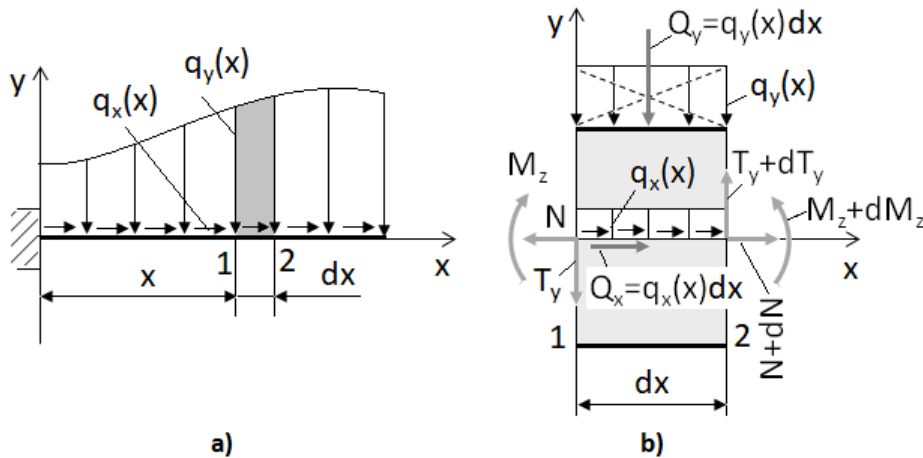


Fig. 1.24. Bară în consolă, cu două încărcări distribuite (a) și izolarea unui element din bară (b)

Neglijând infiniții mici de ordinul al doilea, din ecuațiile (1.28) rezultă relațiile diferențiale între încărcări și eforturi (1.29). Aceste relații sunt utile la trasarea diagramelor de eforturi. Forța tăietoare este derivata momentului încovoietor. În consecință, când T_y se anulează, funcția $M_z(x)$ prezintă un punct de extrem. Din acest motiv, diagrama T_y este bine să se traseze prima.

$$\frac{dN}{dx} = -q_x(x); \quad \frac{dT_y}{dx} = q_y(x); \quad \frac{dM_z}{dx} = T_y \quad (1.29)$$

Din ultimele două relații (1.29) rezultă

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y(x) \quad (1.30)$$

1.6. TENSIUNI

Dacă după secționarea corpului forțele interatomice ar fi uniform distribuite pe suprafața secțiunii A , intensitatea acestora ar fi (fig. 1.18)

$$\vec{p}_{med} = \frac{1}{A} \vec{R} \quad (1.31)$$

Această mărime se numește *tensiune medie* sau efort unitar mediu și se măsoară în unități de presiune [MPa]. Repartiția forțelor de legătură este aproximativ constantă numai în unele cazuri particulare. De cele mai multe ori, abaterile locale de la valoarea medie sunt semnificative. Valoarea medie nu mai poate fi relevantă în asemenea situații deoarece ruperea va începe din punctele cele mai solicitate. În consecință, trebuie să se ia în considerare valorile locale ale tensiunii. Acest lucru poate fi realizat prin considerarea unei mici suprafețe finite ΔA din jurul punctului P și nu a întregii suprafețe a secțiunii. Rezultanta forțelor de legătură de pe suprafața ΔA se notează $\Delta \vec{R}$. Similar se poate calcula tensiunea medie pe suprafața ΔA (fig. 1.25a, b)

$$\vec{p}_{med \Delta A} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \quad (1.32)$$

Considerând materia continuă și nu discretă, ipoteza admisă la scară macro-mecanică, se poate restrânge oricât de mult elementul de suprafață în jurul punctului P , trecerea la limită fiind permisă în aceste condiții. Se obține astfel valoarea tensiunii în punctul P

$$\vec{p}_P = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA} \quad (1.33)$$

Tensiunea se măsoară în unități de presiune [$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$] și depinde atât de $d\vec{R}$, cât și de *orientarea elementului de suprafață* dA . În consecință, tensiunea este o mărime mai complexă decât un vector, care este definit doar prin punct de aplicație, direcție, sens și modul. Tensiunea est o *mărime tensorială*.

Tensiunea din punctul P poate fi descompusă prin proiecție pe direcția normalei (componenta σ_x , numită *tensiune normală*) și respectiv pe planul secțiunii (componenta τ , numită *tensiune tangențială*).

La rândul său, componenta τ poate fi descompusă în planul yOz , obținând componentele τ_{xy} și τ_{xz} (fig. 1.26). Astfel, cele trei componente ale tensiunii sunt $\vec{p}(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$.

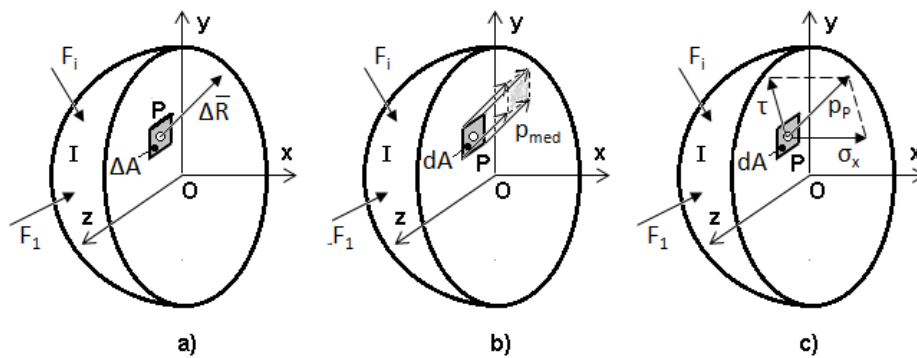


Fig. 1.25. Izolarea unei porțiuni dintr-un corp, figurarea rezultantei forțelor care acționează pe suprafața ΔA (a), a tensiunilor medii pe dA (b) și a tensiunii din punctul P, cu componentele sale (c)

Semnificația indicilor este următoarea:

- Pentru tensiunea tangențială τ , primul indice desemnează axa normală la planul secțiunii, iar al doilea axa cu care tensiunea este paralelă;
- Tensiunea normală σ poate fi notată cu doi indici, respectând aceeași regulă. Deoarece acești indici sunt întotdeauna identici, se mai obișnuiește să se noteze tensiunea normală cu un singur indice.

Astfel, pentru componentele tensiunii din figura 1.26 se observă că: σ_x este orientată pe direcția axei Ox și mai poate fi scrisă σ_{xx} ; τ_{xy} și τ_{xz} sunt în planul yOz (la care normala este Ox) și sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz . Totalitatea componentelor tensiunii definesc *tensorul tensiunilor* într-un punct al corpului solid, [Buzdugan Gh. ș.a., 1973; Beer F., 2012; Hibbeler R. C., 2018].

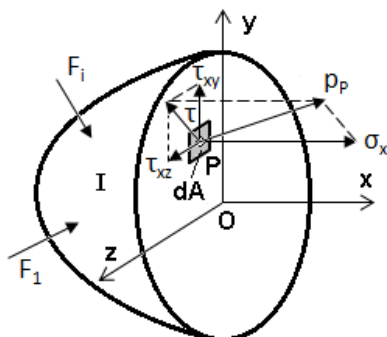


Fig. 1.26. Tensiunea p_p din punctul P și componentele sale

1.7. RELAȚII ÎNTRE EFORTURI ȘI TENSIUNI (ECUAȚII DE ECHIVALENȚĂ)

Se izolează o porțiune dintr-un corp aflat în echilibru și se admite un sistem de referință cu originea în centrul de greutate al secțiunii transversale. Se figurează eforturile și tensiunile într-un punct oarecare P al secțiunii. Deși, în cazul general, în secțiune apar șase componente ale efortului (trei forțe și trei momente), în *figura 1.27* acestea au fost despărțite și s-au prezentat numai forțele (N, T_y, T_z) în *figura 1.27a*, iar momentele (M_x, M_y, M_z) în *figura 1.27b*, pentru a nu complica prea mult desenul.

Pentru porțiunea de corp din *figura 1.27* se scriu ecuațiile de echilibru în secțiune (trei ecuații de proiecții ale forțelor pe axe și trei ecuații de moment față de axe); forțele elementare fiind egale cu produsul dintre tensiuni și elementul de suprafață

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA; \quad T_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad T_z = \int_A \tau_{xz} dA \\ M_x &= \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA = \int_A \tau r dA; \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x y dA \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ecuațiile de echilibru (1.34) stabilesc relații între eforturi și tensiuni și se numesc *ecuații de echivalență*. Deoarece nu conțin caracteristici fizice de material, sunt valabile pentru orice corp solid. Ecuațiile de echivalență mai pot fi deduse pornind de la componentele rezultantei forțelor de legătură

$d\vec{R}$ de pe elementul de suprafață dA , notate cu dN, dT_y, dT_z . Componentele tensiunii $\vec{p}_p$ din punctul P sunt

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}; \quad \tau_{xy} = \frac{dT_y}{dA}; \quad \tau_{xz} = \frac{dT_z}{dA} \quad (1.35)$$

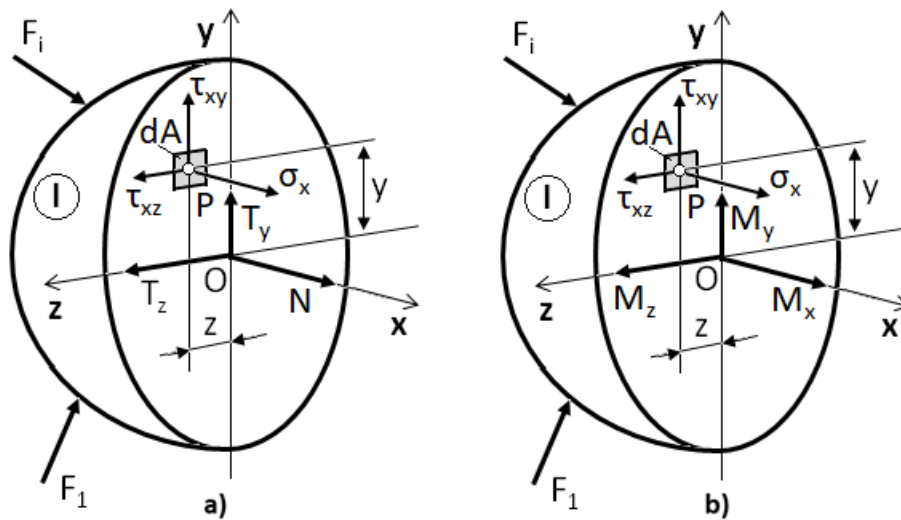


Fig. 1.27. Tensiuni și eforturi în secțiune: forțe (a) și momente (b). În cazul general toate componentele apar simultan

1.8. DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII

Există următoarele tipuri de deplasări:

- *Deplasări cinematice*, atunci când legăturile permit deplasări mari și corpul își poate modifica poziția în spațiu;
- *Deplasări elastice sau elasto-plastice*, produse ca urmare a deformării corpului, atunci când acesta își modifică dimensiunile și forma geometrică inițială.

Mecanica solidului deformabil (grup de discipline care include și Rezistența Materialelor) se ocupă numai de ultima categorie de deplasări. Dacă deformările dispar după înlăturarea încărcărilor (corpul revine la forma și dimensiunile inițiale), se spune că *deformațiile* sunt *elastice*. Pentru majoritatea materialelor utilizate la structuri de rezistență, deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor.

Există materiale care, după îndepărtarea încărcărilor, nu revin la forma și dimensiunile inițiale și rămân cu deformații preponderent plastice. Aceste materiale se numesc *inelastice*. În continuare se vor avea în vedere deplasările elastice mici.

Fie un punct O din interiorul unui corp elastic. După aplicarea încărcărilor, corpul se deformează și punctul O ajunge în O' (fig. 1.28). *Deplasarea totală* a punctului va fi dată de vectorul $\vec{\Delta}$, cu originea în O și vârful în O'. Proiecțiile lui $\vec{\Delta}$ pe axele sistemului de referință se notează cu u , v , w și se numesc *componentele deplasării*. Este evident că între aceste mărimi există relația

$$\Delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (1.36)$$

În afara deplasărilor liniare există și *deplasări unghiulare*, ilustrate prin modificarea unghiurilor. Deplasările liniare se măsoară în unități de lungime [mm], iar cele unghiulare în radiani [rad].

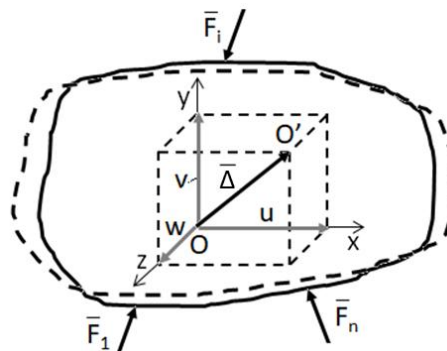


Fig. 1.28. Deplasarea totală Δ și componentele sale

1.8.1. Deformații absolute și deformații specifice

Fie punctele A, B interioare corpului solid, care determină segmentul [AB] și punctele C, O, D, cu segmentele [OC] și [OD] formând un unghi drept. După deformare, punctele se deplasează în A', B', C', D' și respectiv O' (fig. 1.29).

Se numește *deformație liniară absolută* variația lungimii segmentului [AB]:

$$\delta = \Delta l = [A'B'] - [AB] = L - L_0 \quad (1.37)$$

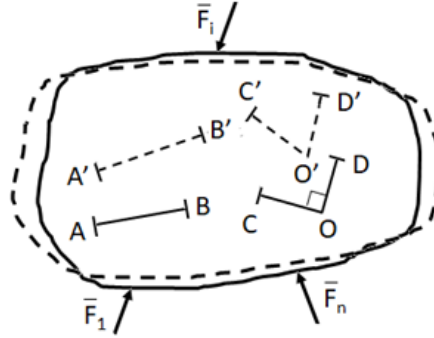


Fig. 1.29. Deplasări ale punctelor care aparțin unui corp deformat

Se numește *deformație liniară specifică* sau *alungire specifică* limita raportului dintre deformația liniară absolută și lungimea inițială a segmentului [AB]

$$\varepsilon = \lim_{[AB] \rightarrow 0} \frac{[A'B'] - [AB]}{[AB]} \quad (1.38)$$

Ținând cont de relația (1.37), (1.38) se poate scrie

$$\varepsilon = \lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{\delta}{L_0} \quad (1.39)$$

Alungirea specifică este o *mărime adimensională*, care reprezintă *alungirea unității de lungime*. Ea se mai poate înmulți cu 100 și exprima în procente [%]. Termenul *alungire specifică* nu precizează dacă segmentul [AB] își mărește sau micșorează dimensiunile după deformarea corpului. Dacă se fac aceste precizări, termenul general va fi înlocuit cu unul dintre termenii:

- *Lungire specifică*, când dimensiunile cresc, ($[A'B'] > [AB]$ și $\varepsilon > 0$);
- *Scurtare specifică*, când dimensiunile scad, ($[A'B'] < [AB]$ și $\varepsilon < 0$).

Se numește *deformație unghiulară* sau *lunecare specifică* mărimea cu care variază unghiul drept construit în vecinătatea unui punct O din interiorul corpului

$$\gamma = \lim_{\substack{[OC \rightarrow 0] \\ [OD \rightarrow 0]}} (\angle COD - \angle C'O'D') \quad (1.40)$$

Pentru un corp prismatic din *figura 1.30*, ΔS se numește *lunecare absolută*. Deoarece lunecarea specifică γ este foarte mică, se poate scrie

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a} \approx \gamma \quad (1.41)$$

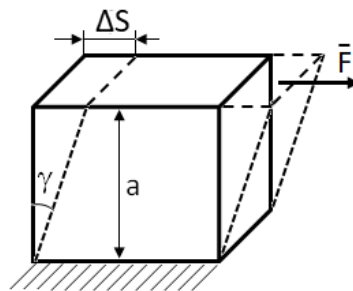


Fig. 1.30. Deformații unghiulare ale unui mic corp paralelipedic

Lunecarea specifică γ se măsoară în radiani, deci este tot o mărime adimensională. Convențional se consideră γ pozitiv atunci când corespunde micșorării unghiului drept făcut de direcțiile pozitive ale axelor [Bia C. ș.a., 1967].

Deformațiile specifice, la fel ca tensiunile, sunt mărimi locale, determinate în vecinătatea unui punct. Totalitatea componentelor deformațiilor specifice definesc tensorul deplasărilor specifice într-un punct al corpului, [Buzdugan Gh. ș.a., 1973; Horbaniuc D., 1993]. La fel ca tensiunile, deformațiile specifice sunt desemnate prin indici care au următoarea semnificație:

- ε_i sau ε_{ii} = alungirea specifică pe direcția axei O_i ;
- γ_{ij} = lunecarea specifică în planul iOj .

1.9. STAREA GENERALĂ DE TENSIUNI ȘI DEFORMĂȚII

În *figura 1.31* se prezintă starea generală de tensiuni. Fațetelor paralelipipedului elementar (detașat dintr-un corp) li se atribuie semne, cu aceeași regulă ca la eforturi (*fig. 1.20*): sunt pozitive fațetele pentru care versorul normalei, orientat spre exteriorul paralelipipedului, este îndreptat în sensul pozitiv al unei axe și negative fațetele cu versorul orientat în sensul negativ al unei axe. Fațete care se văd în *fig. 1.31* sunt pozitive, iar celelalte

sunt negative. Tensiunile care acționează pe o fațetă pozitivă sunt considerate pozitive dacă sunt orientate în sensul pozitiv al unei axe și negative dacă sunt orientate în sens contrar. Tensiunile care acționează pe o fațetă negativă sunt considerate pozitive dacă acționează în sensul negativ al unei axe și negative dacă acționează în sensul pozitiv. Toate tensiunile prezentate în figura 1.31 sunt pozitive. Pe fațetele care nu se văd acționează tensiuni egale și de sensuri contrare, care de asemenea sunt pozitive. Semnele eforturilor și cele ale tensiunilor trebuie să fie în concordanță, pentru a satisface *relațiile de echivalență* (1.35). Tensiunilor normale le corespund alungiri specifice de același semn: pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune (fig. 1.32).

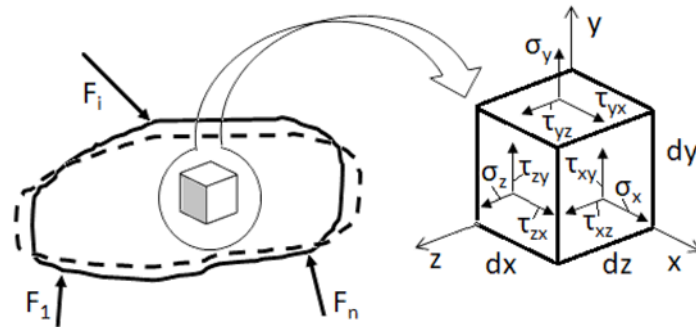


Fig.1.31. Starea generală de tensiuni (pe fațetele care nu se văd acționează tensiuni egale și de sens contrar și toate tensiunile sunt pozitive)

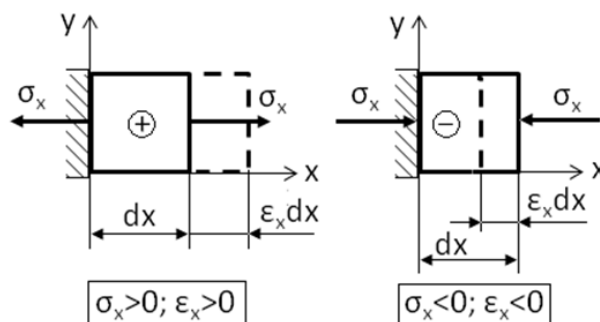


Fig. 1.32. Tensiunile și alungirile specifice sunt pozitive la tracțiune și negative la compresiune

În *figura 1.33* se prezintă componentele deformațiilor specifice ale unui paralelipiped elementar izolat dintr-un corp elastic [Voinea R. ș.a., 1989]. La fel ca tensiunile, deformațiile specifice sunt notate cu indici, care au semnificația:

- ε_i sau ε_{ii} = alungirea specifică pe direcția axei O_i ;
- γ_{ij} = lunecarea specifică în planul iOj .

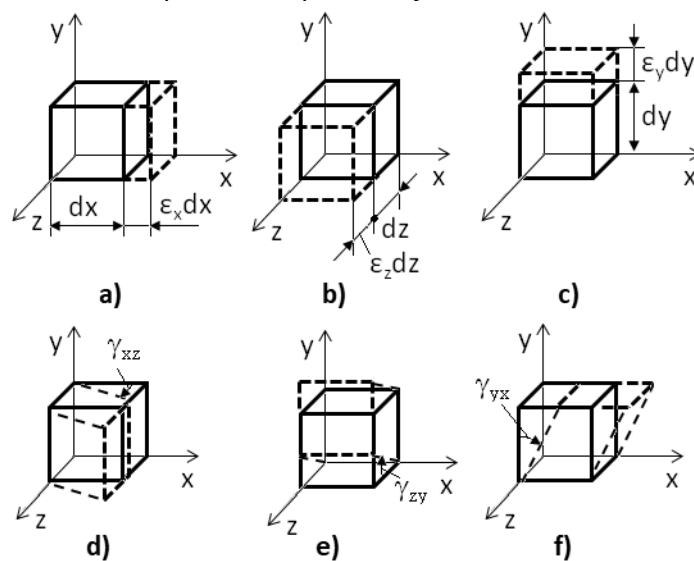


Fig. 1.33. Componentele deformațiilor specifice

Tensiunile și deformațiile specifice sunt *mărimi tensoriale*. Componentele acestor tensori pot fi prezentate matriceal [Ponomariov S.D. ș.a., 1964]:

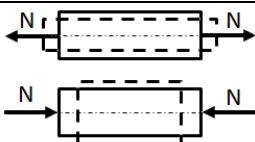
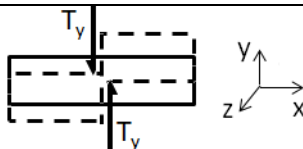
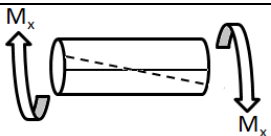
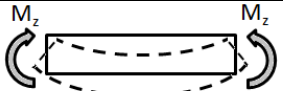
$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

În Teoria Elasticității se arată că, în cazul corpurilor omogene și izotrope, aceste matrice sunt simetrice față de diagonala principală și se justifică și coeficienții $\frac{1}{2}$ din matricea deformațiilor specifice. (vezi volumul al doilea al lucrării). Se observă că tensiunilor normale σ le corespund alungiri specifice ε , iar tensiunilor tangențiale τ lunecări $\gamma/2$.

1.10. SOLICITĂRI SIMPLE

În cazul *solicitărilor simple*, în care în orice secțiune apare o *singură componentă a eforturilor și respectiv a tensiunilor* (tab. 1.3). Tracțiunea și compresiunea sunt clasificate împreună, cu denumirea de *solicități axiale*, deoarece între ele diferă numai semnul eforturilor, tensiunilor și alungirilor specifice (pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune). *Solicitățile compuse* se produc când apar simultan mai multe componente ale eforturilor și tensiunilor. Acestea sunt frecvent întâlnite la mașini și structuri și sunt prezentate în al doilea volum al lucrării.

Tab. 1.3. Solicități simple

Solicitări	Efort nenul	Schema solicitării	Tensiunea
Axiale (tracțiune/ compresiune)	$N > 0$		$\sigma > 0$
	$N < 0$		$\sigma < 0$
Forfecare (tăiere)	T_y sau T_z		τ
Torsiune (răsucire)	M_x		τ
Încovoiere pură	M_z sau M_y		σ

De reținut:

- Tipuri de reazeme, reacțiuni și calculul reacțiunilor;
- Calculul rezultantei static echivalente pentru încărcările distribuite;
- Componentele eforturilor, tensiunilor și deformațiilor, semnele lor;
- Relații între încărcări și eforturi și între eforturi și tensiuni (ecuațiile de echivalență).

CAPITOLUL

2



Încercarea materialelor

Metode de calcul în RM

Sursa: <https://www.veryst.com/services/testing/material-test-library/uniaxial-tension-testing>

2. ÎNCERCAREA MATERIALELOR. METODE DE CALCUL

2.1. OBIECTIVE

În acest capitol se definesc caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor, care sunt utilizate în modelarea matematică a solidului elastic și în calculele din Rezistența Materialelor și Teoria Elasticității. Aceste caracteristici sunt determinate în urma unor încercări mecanice, efectuate în laborator, pe mașini speciale. Materialele utilizate în construcția mașinilor și a structurilor de rezistență prezintă caracteristici fizice extrem de variate. În cele ce urmează, atenția principală va fi acordată materialelor metalice, în special oțelului, care este cel mai utilizat material în construcția de mașini precum și la realizarea structurilor metalice (poduri, platforme de foraj marin, construcții civile și industriale, macarale etc.). Pentru aprofundarea cunoștințelor se recomandă consultarea literaturii de specialitate [Mocanu D.R. ș.a. 1982].

2.2. ÎNCERCAREA MATERIALELOR

2.2.1. Introducere

Caracteristicile mecanice și elastice ale unui material se determină pe probe sau *epruvete* prelevate din semifabricate (lingouri, laminate, blocuri). Se fac și încercări pe produse finite (sârme, cabluri). Încercările se realizează pe mașini de încercat specializate, capabile să înregistreze variația forței funcție de deplasare până la ruperea acestora și să traseze diagramele forță-

deplasare și tensiune-alungire specifică. Deformația se determină mai precis cu ajutorul unor dispozitive speciale numite *extensometre*, montate pe epruvetă. Pe mașina universală de încercat se pot efectua încercările de bază: *tracțiune* sau *compresiune*, iar cu ajutorul unor dispozitive suplimentare pot fi efectuate și încercările la *încovoiere*, *forfecare* și chiar *torsiune*.

Caracteristicile mecanice depind de mai mulți factori (viteza de încărcare, temperatură, tipul epruvetei etc.). Cele mai utilizate sunt încercările statice, la temperatura mediului. Forța crește relativ lent pe parcursul unei asemenea încercări, care durează câteva minute. În cazul organelor de mașini sau a componentelor structurale utilizate în condiții deosebite (temperaturi ridicate sau coborâte, încărcări prin șoc sau variabile, medii agresive), sunt necesare încercări ale materialelor în condiții cât mai apropiate de cele întâlnite în exploatare. Se realizează, de asemenea, încercări la solicitări compuse (tracțiune biaxială, compresiune triaxială, tracțiune cu forfecare etc.). Încercările de bază sunt standardizate, respectarea standardelor fiind obligatorie.

2.2.2. Solicitarea la tracțiune

Forma și dimensiunile epruvetei depind de natura materialului, tipul semifabricatului din care este prelevată, încercarea la care este supusă etc. Pentru încercarea la tracțiune se utilizează epruvete tip "halteră", care reprezintă o porțiune centrală calibrată și două capete cu secțiunea mărită, destinată prinderii în fălcile mașinii (*figura 3.1*). Racordările între aceste porțiuni se fac cu raze mari. Pe porțiunea calibrată se pot trasa repere fine pentru montarea extensometrului sau pentru măsurarea deformațiilor. Epruvetele pot fi cilindrice (cu secțiune circulară) sau plate (cu secțiune dreptunghiulară), atunci când sunt prelevate din table. Această formă a epruvetei este necesară pentru a preveni ruperea în altă zonă decât cea cuprinsă între repere. Sârmele se încearcă așa cum sunt (ca produs finit). Pentru o bună prindere se folosesc și epruvete cu capete filetate. Cele mai utilizate sunt două tipuri de epruvete: lungi ($L_0 = 10d_0$) și normale ($L_0 = 5d_0$). Diametrul inițial poate fi, de exemplu, $d_0 = 10$ mm. Pentru încercarea la

compresiune se utilizează epruvete scurte, cu formă cilindrică, paralelipipedică sau cubică (fig. 2.1). La compresiune sunt testate în special pe materiale care au o rupere fragilă. Forma epruvetei trebuie să fie astfel aleasă, încât tensiunile să fie maxime și cât mai uniforme în secțiunea de rupere. La ruperea ductilă se observă apariția unei gâtui (stricționări) locale a epruvetei, cu puțin înaintea ruperii (fig. 3.3).

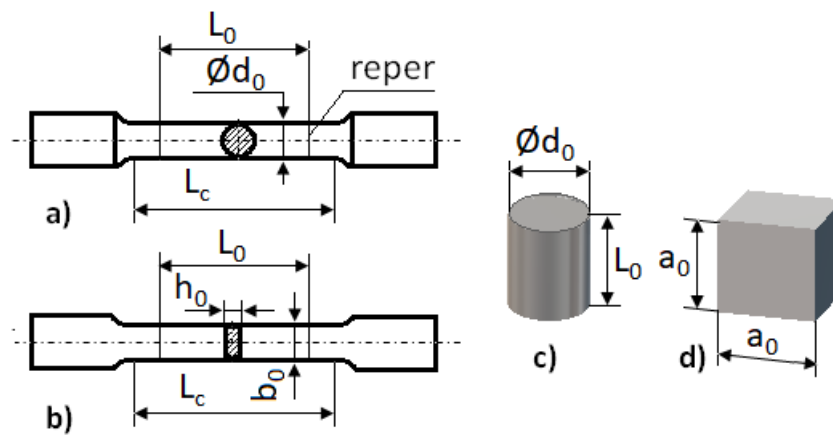


Fig. 2.1. Epruvete pentru încercarea la tracțiune: cilindrică (a), plată (b) și respectiv compresiune (c, d)

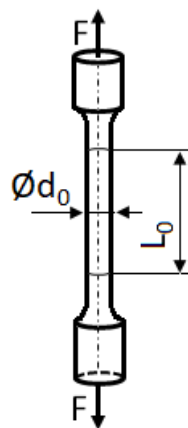


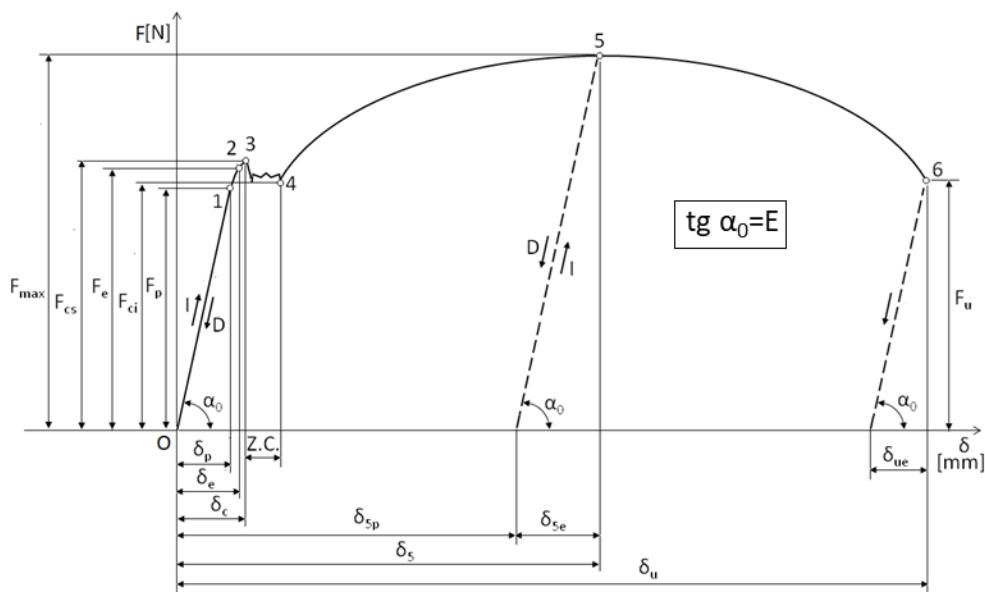
Fig. 2.2. Încărcare centrică a epruvetei



Fig. 2.3. Rupere ductilă (a) și fragilă (b)

În cazul rupei fragile nu se produce stricționarea, care este de fapt un fenomen local de pierdere a stabilității. Pentru materiale cu rupi foarte fragile se pot utiliza epruvete cu o secțiune predeterminată (diminuată) de rupere.

Înregistrând grafic variația forței funcție de deplasarea fălcii mașinii (sau, cu precizie mai mare, funcție de variația lungimii dintre două repere, măsurată cu un extensometru), se obține diagrama $F - \delta$. Pentru un oțel cu un conținut redus de carbon (0,06%-0,25%C), care are o rupere tenace la tracțiune statică, această diagramă este prezentată în *figura 2.4*.



56

Pe diagrama din *figura 2.4* se disting următoarele regiuni și puncte caracteristice:

- zonă liniară, 0-1, numită *zonă de proporționalitate*, unde deformațiile sunt proporționale cu forțele și este valabilă legea lui *Hooke* (porțiunea inițială a diagramei poate fi ușor curbată);
- *Zona de elasticitate* 0-2, în care materialul rămâne elastic (după descărcare epruveta revine la dimensiunile și forma inițială). După depășirea zonei de elasticitate ($F > F_e$), epruveta rămâne cu deformații permanente (plastice) după descărcare;
- *Zona de curgere* 3-4, unde forța se menține aproximativ constantă și crește mult deformația. Diagrama poate prezenta o serie de tranzițe (cu aspect zimțat sau vălurit), în special la solicitarea epruvetei cu viteze mici de încărcare. Punctului 3, în care se produce de o primă scădere a forței, îi corespund convențional forța de curgere F_c și deformația la curgere δ_c . Unele materiale, cum ar fi cele cu rupere fragilă, nu prezintă o zonă de curgere. În zona de curgere apare fenomenul de ecruisare (orientări ale cristalelor pe direcția de solicitare și apoi alungirea acestora). La suprafață epruvetei lustruite apar mici adâncituri, astfel aranjate încât formează o rețea de "linii" ortogonale, orientate la 45° față de direcția forței (liniile *Lüders*);
- În *zona de consolidare* 4-5, forța crește în continuare, ca urmare a ecruisării materialului. În punctul 5 se înregistrează forța maximă F_{max} , după care apare stricționarea epruvetei. Dacă se descarcă epruveta după depășirea limitei de elasticitate (de exemplu, în punctul 5), se constată că descărcarea se produce după o dreaptă paralelă cu cea dusă prin origine, determinată de punctele 0-1. Dacă epruveta este apoi solicitată din nou la tracțiune, încărcarea se face pe aceeași dreaptă pe care s-a făcut descărcarea, iar din 5 parcurge în continuare aceeași curbă, până la rupere. În urma încercării la tracțiune peste limita de elasticitate și apoi descărcare, se constată că se mărește limita de elasticitate. Acest fenomen este utilizat uneori pentru mărirea zonei liniar - elastice (de exemplu, la arcuri).

Deformația δ_M înregistrată într-un punct oarecare M, situat peste limita de elasticitate, are o componentă elastică δ^e_M , care dispare la descărcarea epruvetei, și una plastică δ^p_M , care rămâne după descărcare. Pentru orice punct din acesta zona elasto-plastică se poate scrie

$$\delta = \delta^e + \delta^p \quad (2.1)$$

- *Zona de cedare* 5-6, în care forța scade ca urmare a micșorării secțiunii epruvetei, după apariția stricționării;
- În punctul 6 epruveta se rupe. Acestui punct îi corespunde o forță ultimă (finală) F_u și o deformație ultimă δ_u . Componenta elastică δ^e_u dispare după ruperea epruvetei.

Raportul $F/\delta = k$, stabilit pentru zona de proporționalitate, se numește *rigiditate*. Suprafața cuprinsă între curbă și axa absciselor reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru ruperea epruvetei.

Diagrama $F-\delta$ prezintă dezavantajul major că depinde în mare măsură de dimensiunile epruvetei (forțele F depind de secțiunea inițială A_0 , iar alungirile δ depind de A_0 și lungimea inițială dintre repere, L_0). Se dorește obținerea unei diagrame care să nu depindă de dimensiunile epruvetei, ci să fie *caracteristică* materialului studiat. Acest deziderat poate fi îndeplinit, într-o manieră satisfăcătoare, trasând diagrama în coordonate $\sigma - \varepsilon$ și păstrând dimensiunile epruvetelor într-un interval rezonabil (indicat în standarde).

Diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$

Diagrama caracteristică convențională $\sigma-\varepsilon$ este trasată admitând următoarele ipoteze:

- Tensiunea normală σ_x este uniform distribuită pe secțiunea transversală a epruvetei, pe toată durata încercării;
- Lungirea specifică ε_x este constantă pe distanța cuprinsă între repere, pe toată durata încercării;

- Secțiunea transversală a epruvetei nu variază semnificativ pe durata încercării.

Aceste ipoteze sunt suficient apropiate de realitate în prima parte a încercării (până la apariția curgerii), dar sunt nesatisfăcătoare în ultima parte, în special după apariția stricționării, care este asociată cu o repartiție neuniformă a lungirii specifice, o scădere locală pronunțată a secțiunii și cu apariția unei stări spațiale de tensiuni neuniforme în această zonă. Datorită acestor fenomene complexe, este extrem de dificil să se calculeze o valoare locală a tensiunii σ_x și a lungirii specifice ε_x . Pot fi calculate însă cu ușurință *caracteristicile convenționale* (vezi *figurile 2.2-2.6*). Tensiunile și lungirile specifice de proporționalitate, elasticitate, curgere și rupere se scriu

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{F_p}{A_0}; \quad \varepsilon_p = \frac{\delta_p}{L_0} \cdot 100\% \\ \sigma_e &= \frac{F_e}{A_0}; \quad \varepsilon_e = \frac{\delta_e}{L_0} \cdot 100\% \\ \sigma_c &= \frac{F_c}{A_0}; \quad \varepsilon_c = \frac{\delta_c}{L_0} \cdot 100\% \\ \sigma_r = \sigma_{\max} &= \frac{F_{\max}}{A_0}; \quad \varepsilon_r = \frac{\delta_u^p}{L_0} \cdot 100\%\end{aligned}\tag{2.2}$$

unde secțiunea inițială a epruvetei și lungirea la rupere sunt

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}; \quad \delta_u^p = L_u - L_0\tag{2.3}$$

Lungirea L_u se măsoară între repere, după alăturarea celor două părți ale epruvetei rupte. Diametrul cel mai mic din zona tracționată se notează d_u (*fig. 2.5*). Pentru epruvete cilindrice, aria minimă a secțiunii transversale este

$$A_u = \frac{\pi d_u^2}{4}\tag{2.4}$$

Se poate calcula coeficientul de gătuire la rupere

$$Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100\%\tag{2.5}$$

Datorită caracterului convențional al acestor mărimi, se mai obișnuiește ca, pentru solicitările axiale, “tensiunile” astfel calculate să se noteze cu R (rezistență), iar alungirile specifice cu A_t (alungirea totală după rupere). Astfel, se va nota $\sigma_c = R_e$ și $\sigma_r = R_m$ (rezistența maximă la tracțiune) etc. [Mocanu D.R. ș.a., 1982]. În prezenta lucrare se vor păstra notațiile cu σ și ε pentru mărimile de mai sus, având însă permanent în vedere caracterul lor convențional.

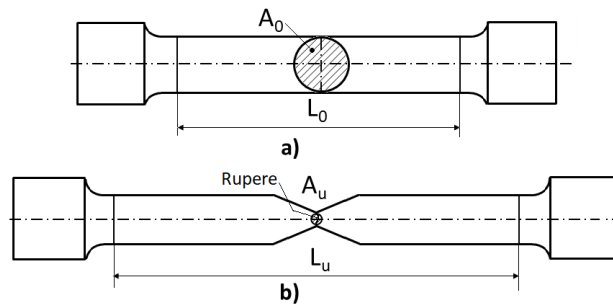


Fig. 2.5. Epruveta (a) și refacerea ei după rupere (b)

Tensiunile σ_e , σ_p , σ_c , σ_r reprezintă *caracteristicile mecanice* ale materialului. Mărimile convenționale de mai sus se utilizează în calculele de Rezistența Materialelor și din acest motiv se mai numesc *inginerești*. Ele se raportează la valorile inițiale ale epruvetei A_0 și L_0 , care variază pe durata încercării. Pentru deformații mari se pot utiliza mărimi mai realiste, numite *adevărate*, *reale* sau *naturale*. Astfel, tensiunea normală naturală (reală) σ_N poate fi calculată ca raportul dintre forța și secțiunea instantanee a epruvetei. Alungirea specifică naturală (reală) poate fi calculată incremental pentru orice moment al încercării și se obține valoarea sa naturală („reală”)

$$\varepsilon_N = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.6)$$

Pentru un material incompresibil și o distribuție uniformă a alungirii specifice în porțiunea în care se măsoară, tensiunea naturală σ_N este

$$\sigma_N = \sigma(1 + \varepsilon) \quad (2.7)$$

Se poate trasa așa-zisa *diagramă reală (sau corijată)*, în coordonate σ_N - ϵ_N , care este prezentată cu linie întreruptă în figura 2.6.

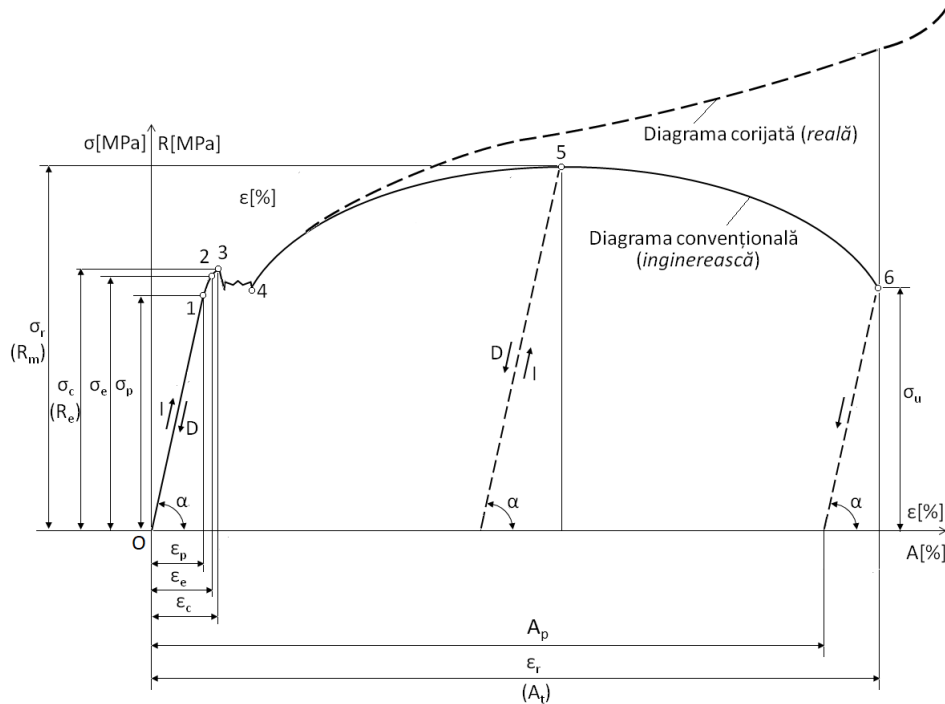


Fig. 2.6. Diagrama caracteristică convențională (inginerescă) σ - ϵ și diagrama corijată (reală sau naturală) σ_N - ϵ_N

Regiunea de proporționalitate 0-1 este liniară. Panta acestei drepte se notează cu E , se numește *modul de elasticitate longitudinală* (Young) și se măsoară în [MPa]:

$$\operatorname{tg} \alpha = E \quad (2.8)$$

Ecuția dreptei prin origine este cunoscută sub numele de *legea lui Hooke*

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (2.9)$$

Modulul de elasticitate longitudinală este o caracteristică de material. El ar mai putea fi numit "rigiditatea materialului". Cu cât E are valori mai mari, cu atât deformațiile epruvetei sunt mai mici, la aceeași tensiune. Modulul de

elasticitate al oțelurilor are valori extrem de ridicate: $E_{OL} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} = 210 \text{ GPa}$. În consecință, oțelul este un material apt pentru realizarea de construcții rigide (mașini unelte, scule și dispozitive pentru mașini unelte, rulmenți, roți dințate etc.). Alumiuniul are un modul de elasticitate mult mai mic, $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa} = 70 \text{ GPa}$. Modulul de elasticitate se determină numai pe epruvete lungi, cu ajutorul extensometrelor. Pentru oțeluri, lungirile specifice în prima porțiune a diagramei foarte mici [Bia C. ș.a., 1983]:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_c \approx 0,2\% \quad (2.10)$$

Lungirea specifică la rupere poate avea valori $\varepsilon_r \geq 20\%$ pentru oțeluri cu un conținut scăzut de carbon (rupere ductilă) și $\varepsilon_r \geq 7 \div 10\%$ pentru oțeluri cu un conținut ridicat de carbon (rupere fragilă). La ruperea ductilă ε_r și Z au valori mai mari. Unele metale care prezintă rupere ductilă la tracțiune statică la temperatura mediului: Cu, Al, Sn, Pb etc. În aceleași condiții, alte materiale prezintă o rupere fragilă (fonta, oțelurile de scule, betonul, rocile, sticla), ε_r nu depășește 1% și practic nu se înregistrează o gătuire a epruvetei înaintea ruperii. Pentru materiale care nu prezintă o zonă de curgere se determină în mod *convențional* o tensiune, plecând de la limita de curgere de 0,2% (notată $\varepsilon_{0,2}$), înregistrată la oțelurile cu rupere ductilă. Punctul în care o paralelă la dreapta prin origine intersectează diagrama, determină tensiunea $\sigma_{0,2}$ (fig. 2.7). Tensiunea $\sigma_{0,2}$ (notată și $R_{0,2}$), numită *limită de curgere off set*, înlocuiește în mod convențional tensiunea de curgere [Mocanu D.R. ș.a., 1982]. Există materiale (aluminiiu, fonta) la care diagrama caracteristică nu prezintă practic o porțiune liniară. Acestea nu ascultă de legea lui Hooke "clasică", iar modulul de elasticitate E variază pe durata încercării. Convențional se pot defini modulele de elasticitate (fig. 2.8):

- modul de elasticitate inițial, care reprezintă panta tangentei la diagramă, trasată prin origine - dreapta (d_1);
- modul de elasticitate secant, egal cu panta coardei (d_3) într-un punct;
- modul tangent pentru un punct oarecare, egal cu panta tangentei (d_2)

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (2.11)$$

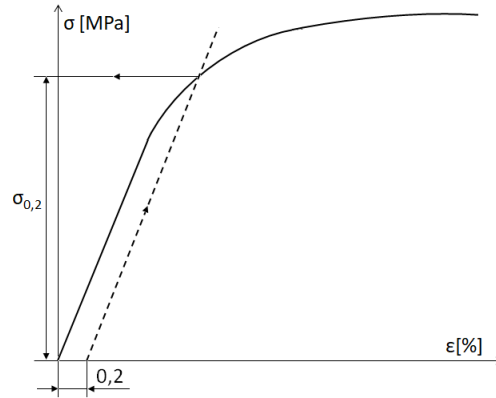


Fig. 2.7. Determinarea limitei convenționale off-set

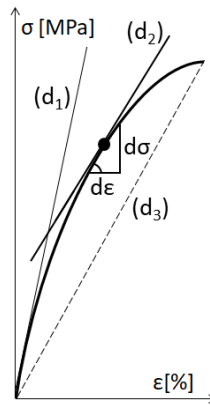


Fig. 2.8. Stabilirea modului de elasticitate tangent

Pentru asemenea materiale se poate căuta o relație între tensiuni și deformații specifice de forma

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_{med}} \quad (2.12)$$

unde n este un coeficient ($n > 1$ pentru curbe cu concavitatea în jos și $n < 1$ la curbe cu concavitatea în sus), iar E_{med} este o valoare medie a modului de elasticitate. Relația (2.12) ar putea înlocui legea lui Hooke, deși complică mult calculele de rezistență. Pentru reducerea volumului de calcul, curba poate fi înlocuită cu o dreaptă convențională [Buzdugan, 1973].

Contrația transversală. Coeficientul Poisson

Se constată experimental că, odată cu lungirea unei bare supuse la tracțiune în domeniul elastic, se produce o micșorare a dimensiunilor secțiunii transversale. Acest fenomen se numește *contrație transversală*. Lungirea specifică pe direcția solicitării (longitudinală) se notează ε_{long} iar scurtarea specifică pe direcție transversală cu $\varepsilon_{transv.}$. Se observă experimental că raportul acestor alungiri este constant

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{transv.}}{\varepsilon_{long.}} \right| \quad (2.13)$$

Pentru tracțiune se consideră convențional $\varepsilon_{long} > 0$ iar $\varepsilon_{transv} < 0$. *Coeficientul lui Poisson* ν este pozitiv și adimensional. Din (2.13) rezultă, pentru tracțiune

$$|\varepsilon_{transv.}| = \nu \varepsilon_{long.} \quad (2.14)$$

Fie un cub cu latura unitară, cu volumul $V_0 = 1$. În urma tracționării, cubul devine un paralelipiped (*fig. 2.9*) al cărui volum este

$$V = (1 - |\varepsilon_{transv.}|) \cdot (1 - |\varepsilon_{transv.}|) \cdot (1 + \varepsilon_{long.}) \quad (2.15)$$

Pentru un *material incompresibil* volumul rămâne constant

$$V_0 = V \Rightarrow 1 = (1 - \nu \varepsilon_{long})^2 \cdot (1 + \varepsilon_{long}) \quad (2.16)$$

Deoarece alungirile specifice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului ($\varepsilon_{long} \ll 1$), iar coeficientul lui Poisson este subunitar ($\nu < 1$), se poate neglija ε^2 și din (2.16) rezultă

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

Această valoare corespunde păstrării unui volum constant și poate fi considerată ca limita superioară a lui ν pentru materiale izotrope. Materiale ortotrope (cum ar fi compozitele), pot avea pe unele direcții $\nu > 0,5$ sau $\nu < 0$. Aceste valori reflectă modul în care variază volumul elementar încărcat.

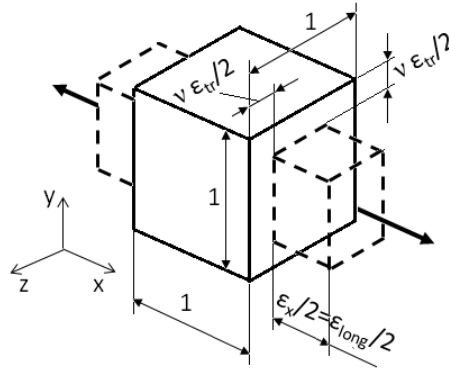


Fig. 2.9. Deformarea unui cub cu latura unitară, supus la tracțiune

Se reamintește că această valoare a fost dedusă pentru un *material incompresibil*, cum ar fi lichidele. Gazele perfecte ar avea însă $\nu = 0$. Coeficientul lui *Poisson* este o constantă de material. Pentru multe materiale metalice el are valori în jur de 0,3. Unele materiale au o comportare mai apropiată de cea incompresibilă (plumbul cu $\nu = 0,45$, cauciucul cu $\nu = 0,47$), altele mai îndepărtată (fonta maleabilă cu $\nu = 0,17$, betonul cu $\nu = 0,15$).

Raportul dintre variația volumului și volumul inițial se numește *deformație specifică volumică*

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_o} = \frac{V - V_o}{V_o} \quad (2.18)$$

În Teoria Elasticității, pentru cazul deformațiilor mici, se demonstrează relația

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x (1 - 2\nu) \quad (2.19)$$

unde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, sunt alungirile specifice pe direcțiile axelor [Ponomariov S.D. ș.a., 1964].

2.2.3. Solicitarea la compresie

Încercarea la compresie se efectuează pe epruvete scurte ($L_0 \leq 5 \cdot d_0$), pentru a evita fenomenul de flambaj. Epruvetele executate din materiale tenace se deformează în formă de butoi în cursul încercărilor, datorită frecărilor care apar între capetele epruvetei și platanele mașinii, între care

are loc compresiunea. Pentru diminuarea acestui fenomen, capetele epruvetei pot fi lubrificate. Numai epruvetele executate din materiale cu comportament fragil pot fi rupte la compresiune. Cele executate din materiale cu rupere tenace (ductilă) pot suporta deformații mari, fără să se ajungă la ruperea efectivă a acestora, dar încercarea poate fi considerată încheiată la apariția unor fisuri cu o mărime prescrisă în standarde (fig. 2.10).

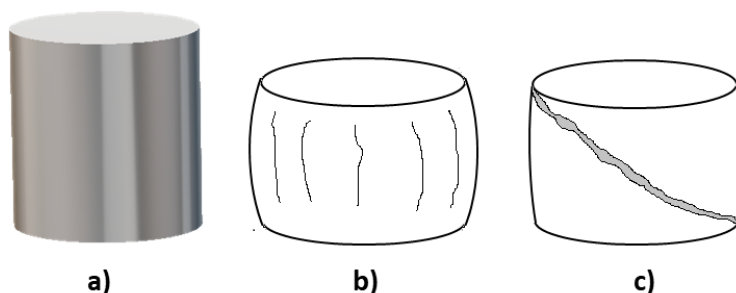


Fig. 2.10. Încercarea la compresiune: epruveta inițială (a); oprirea încercării la fisurarea epruvetei cu comportament ductil (b); ruperea fragilă (c)

În figura 2.11 se prezintă diagramele caracteristice obținute la compresiunea unor materiale.

Unele materiale au modulul de elasticitate la tracțiune diferit de cel obținut la compresiune. Însă pentru multe materiale cu rupere ductilă modulul E și limita de curgere au aproximativ aceleași valori la tracțiune și la compresiune.

În cazul materialelor cu rupere înalt fragilă, tensiunea de rupere la tracțiune este mult mai mică decât cea de rupere la compresiune σ_{rc} , considerată în modul (fig. 2.12). Deoarece $\sigma < 0$ și $\varepsilon < 0$ la compresiune, diagrama s-a prezentat în cadranul III. Pentru beton sau ceramici, de exemplu, $\sigma_{rt} \approx 0,1\sigma_{rc}$. Pentru îmbunătățirea comportării la tracțiune, grinzile de beton se armează cu bare din oțel, în special pe partea inferioară, care este întinsă. Dar în timpul unor cutremure curbura grinzilor se poate modifica periodic, astfel încât și partea lor superioară poate fi supusă la tracțiune.

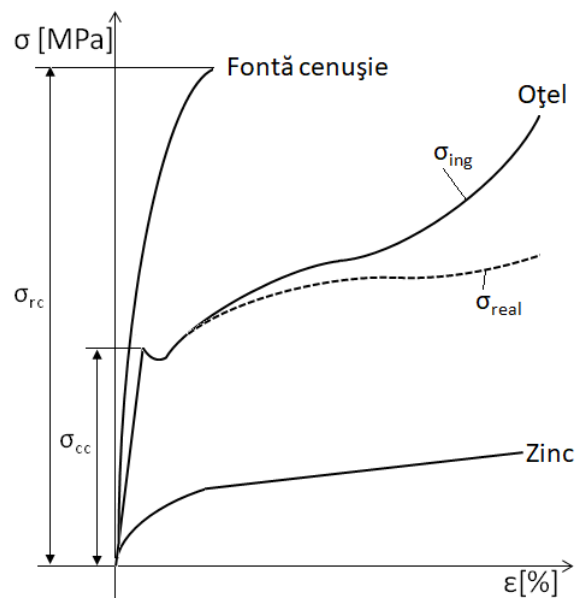


Fig. 2.11. Diagrame caracteristice obținute pentru încercarea la compresiune a unor materiale metalice ($\sigma < 0$, $\epsilon < 0$)

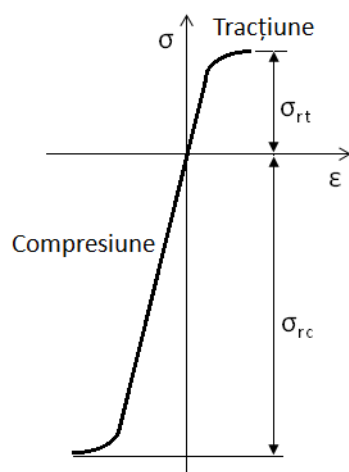


Fig. 2.12. Diagrama caracteristică la tracțiune și compresiune pentru un material cu rupere fragilă

Dacă epruveta este solicitată la tracțiune, încercarea este oprită înainte de rupere și este apoi supusă la compresiune, se constată scăderea limitei de curgere la compresiune, fiind valabilă relația între segmentele $[PR] = [MN]$ (fig. 2.13). Acest fenomen se numește efectul *Bauschinger*. El apare și la alte solicitări (torsiune, încovoiere) și poate fi utilizat pentru mărirea zonei de proporționalitate, când încărcările nu își schimbă sensul în timpul funcționării (arcuri de tracțiune sau de compresiune etc.).

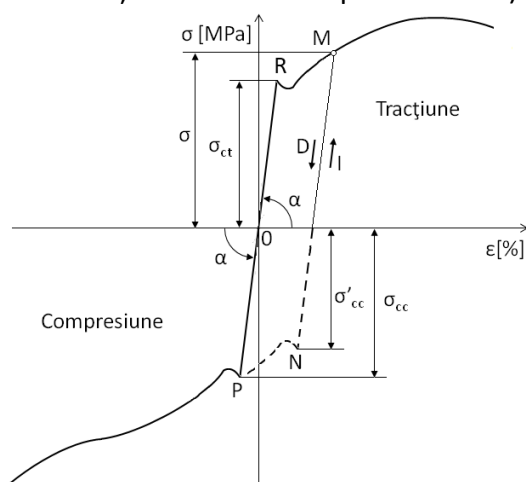


Fig. 2.13. Ilustrarea efectului Bauschinger

2.2.4. Solicitarea la forfecare. Solicitarea la torsiune

În majoritatea cazurilor forfecarea este însoțită de încovoiere, dar tensiunile normale σ sunt relativ mici (forfecare tehnică). Solicitarea la forfecare pură se poate efectua cu metoda *Iosipescu*, care utilizează epruvete plate, cu secțiune predeterminată de rupere, cu suprafața $w \times t$ (fig. 2.14). Deși epruveta este solicitată la încovoiere, datorită încărcării antisimetrice, în secțiunea slăbită eforturile vor fi $M_z = 0$ și $T_y \neq 0$ și în această secțiune există o solicitare la forfecare pură. Adâncimea celor două creștături (d_2) este astfel aleasă încât tensiunea tangențială să fie cât mai uniformă în secțiunea slăbită. Epruvetele sunt prinse într-un dispozitiv montat pe mașina universală de încercat, care poate lucra la tracțiune sau la compresiune. Se trasează diagrama forță - deplasare și apoi diagrama caracteristică $\tau - \gamma$.

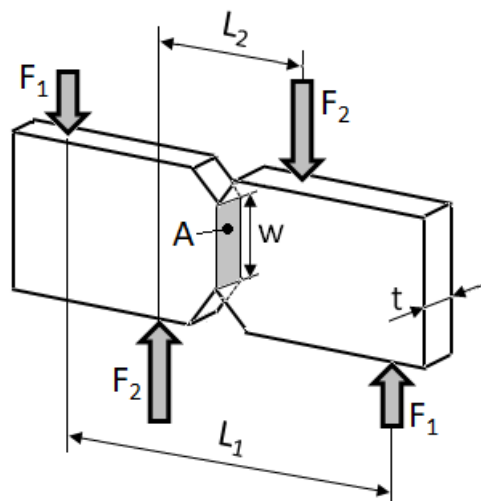
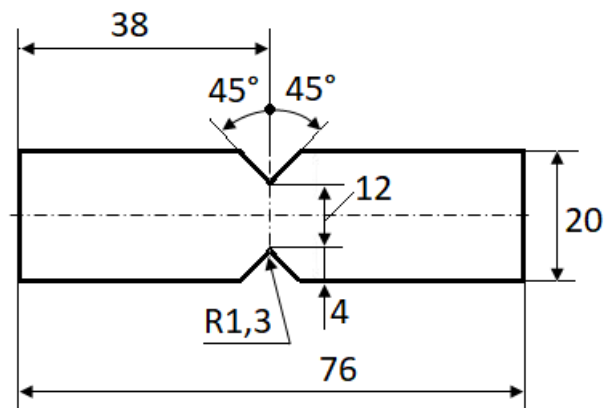


Fig. 2.14. Epruveta pentru încercarea la forfecare (metoda Iosipescu)

Pentru materiale cu rupere ductilă diagrama caracteristică are o alură similară cu cea de la torsiune (fig. 2.15). Panta drepte prin origine este însă mai mică decât la tracțiune. Ea se numește *modul de elasticitate transversală (Coulomb)* și se notează cu G .

Cele două module de elasticitate E , G și coeficientul lui Poisson ν caracterizează comportarea elastică a unui material și se numesc *caracteristici elastice*. Un material care are aceleași caracteristici fizice în

orice direcție se numește *izotrop*. În Teoria Elasticității (vol. II) se arată că, pentru un material izotrop, între cele trei caracteristici elastice există relația

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.20)$$

Rezultă că un material izotrop prezintă numai două caracteristici elastice independente.

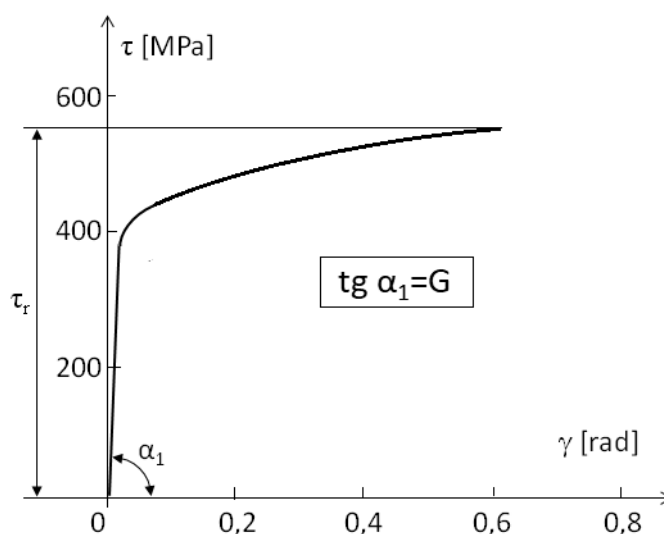


Fig. 2.15. Diagrama caracteristică pentru încercarea la forfecare

La *materialele anizotrope*, valorile caracteristicilor elastice și mecanice depind de direcția de prelevare a epruvetei. Un material complet anizotrop prezintă 21 caracteristici elastice independente. *Materialele ortotrope* prezintă trei plane de simetrie ortogonale pentru caracteristicile elastice și mecanice și au nouă caracteristici elastice independente.

Solicitarea la torsiune este mai puțin utilizată pentru încercarea materialelor și nu este standardizată, datorită dezavantajelor pe care le prezintă: starea de tensiuni nu este uniformă în secțiunea epruvetei, având o distribuție liniară și necesită mașini sau dispozitive speciale, care nu fac parte din dotarea standard a mașinilor universale de încercat. O distribuție mai

uniformă a tensiunilor se poate obține prin utilizarea unor epruvete tubulare. Fabricarea acestora este însă mai dificilă și atunci când grosimea pereților este prea mică apare flambajul la torsiune. Totuși, încercarea la torsiune prezintă și avantaje, ce constau în special în starea particulară de tensiune care apare în epruvetă, prinderea mai ușoară a epruvetei și evitarea lunecărilor în bacuri, lipsa fenomenului de stricționare înainte de rupere. La această încercare se înregistrează diagrama moment de torsiune - unghi de rotire a secțiunii, $M_t - \varphi$. Pe baza acestor mărimi, se trasează prin calcul diagrama caracteristică convențională $\tau - \gamma$.

Similar cu încercarea la tracțiune, *caracteristicile mecanice* care caracterizează încercările la forfecare sau torsiune sunt: limita de proporționalitate τ_p , de elasticitate τ_e , de curgere τ_c și cea de rupere τ_r .

Legea lui *Hooke* pentru torsiune sau forfecare este dată de ecuația dreptei prin origine care conține porțiunea liniară a diagramei caracteristice

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.21)$$

2.2.5. Încercarea la încovoiere simplă

Încovoierea este ușor de realizat pe orice mașină de încercat universală. Se aplică în special pentru materiale cu rupere fragilă, deoarece în cazul celor cu rupere tenace se produce îndoirea, fără a se ajunge la rupere. Un dezavantaj al acestei încercări îl reprezintă faptul că tensiunile normale nu sunt uniform distribuite pe secțiune. Fibrele epruvetei de la exteriorul curburii sunt supuse la tracțiune, iar cele de la interior la compresiune. Din aceste motive, încercarea la încovoiere este mai puțin utilizată pentru determinarea caracteristicilor mecanice și elastice ale materialelor.

2.3. FACTORI CARE INFLUENȚEAZĂ CARACTERISTICILE ELASTICE ȘI MECANICE

Pentru un material dat, caracteristicile mecanice și elastice sunt influențate, în mod *real* sau *aparent*, de către anumiți factori, care vor fi enumerați în cele ce urmează.

În mod *aparent*, aceste caracteristici pot fi influențate de tehnologiile de elaborare a materialului și de confecționare a epruvetei, de dimensiunile epruvetei și de viteza de încărcare. Rezistența la rupere în regim dinamic poate fi mai mare decât cea obținută în regim static. De aici s-ar putea trage concluzia greșită că ar fi preferabil să încărcăm structurile și mașinile în regim dinamic. Din acest motiv, se consideră că viteza de încărcare are o influență aparentă.

În mod *real*, temperatura, timpul, ecruisarea și tratamentele termice sunt factori care influențează în cea mai mare măsură caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor.

2.3.1. Influența compoziției chimice

În *figura 2.16* se prezintă variația tensiunilor de rupere σ_r , de curgere σ_c și a alungirii A_t și găturii la rupere Z , funcție de conținutul de carbon al oțelurilor. Se observă că oțelurile cu un conținut scăzut de carbon au rezistență la rupere mai mică, dar deformații specifice mai mari [Buzdugan Gh., 1973; 1986].

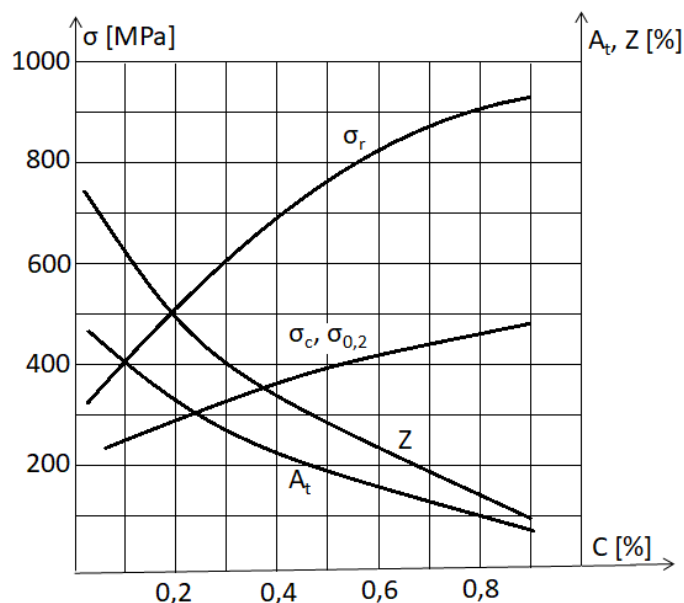


Fig. 2.16. Variația caracteristicilor oțelurilor funcție de conținutul de carbon

2.3.2. Influența factorilor tehnologici

La elaborarea unui material, compoziția chimică și parametrii tehnologici prezintă anumite variații, care trebuie să fie cât mai mici posibil, pentru a putea garanta caracteristicile mecanice și elastice. Totuși, anumite variații sunt inevitabile. Astfel, încercând peste 6000 de epruvete confecționate din oțel tenace OL 42, provenit dintr-un mare număr de șarje, s-a determinat tensiunea de curgere σ_c . Prelucrând statistic datele experimentale, s-a obținut distribuția din *figura 2.17* [Stepine P., 1986]. Deși valorile cele mai frecvente sunt cuprinse în intervalul $\sigma_c = 290 \div 300$ MPa, s-au înregistrat și unele valori extreme ($\sigma_c = 200$ MPa și $\sigma_c = 390$ MPa), care nu pot fi excluse.

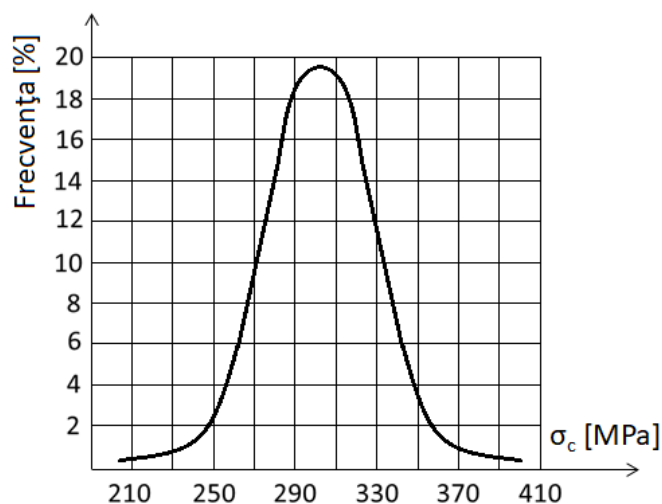


Fig. 2.17. Curba de distribuție a tensiunii de curgere σ_c pentru un oțel OL42

Aceste curbe de distribuție reflectă și gradul de omogenitate al materialului. La materiale omogene (cum ar fi sticla) dispersia este mai mică, pe când la materiale mai puțin omogene (cum ar fi polimerii) și în special la cele neomogene (beton, materiale compozite), dispersia caracteristicilor elastice și mecanice este mai mare. Curbele de distribuție stau la baza unor metode statistice de calcul. Pentru piese de mare răspundere, cum ar fi arbori de turbină, sunt prelevate epruvete din fiecare semifabricat. Alți factori tehnologici pot influența semnificativ caracteristicile elastice și mecanice ale

materialului. De exemplu, același oțel are tensiunea la rupere mai ridicată dacă este forjat, mai scăzută dacă este laminat și mai scăzută dacă este turnat. Aceasta se explică prin faptul că oțelul turnat are defecte mai numeroase și mai importante și este mai puțin omogen. Similar, polimerii au tensiunea de rupere și densitatea mai mare dacă sunt turnați sub presiune decât dacă sunt turnați liber.

Tratamentele termice și ecruisarea influențează în mod real caracteristicile mecanice și elastice ale materialului. Prin călire crește duritatea, rezistența la rupere, dar și fragilitatea și scade alungirea la rupere. Revenirea păstrează duritatea obținută prin călire, dar scade fragilitatea. Recoacerea de înmuiere anulează efectul călirii.

Deformările plastice (în special cele făcute la rece) produc ecruisări. Ecruisarea conduce la creșterea semnificativă a limitei de elasticitate, după cum s-a văzut la diagramele caracteristice cu descărcarea și reîncărcarea epruvetelor (*figurile 2.4, 2.13*).

Un material metalic poate trece de la rupere tenace la una fragilă în urma ecruisării. Prin laminare, trefilare etc., se obțin semifabricate ecruisate la suprafață, sau chiar în tot volumul. În urma ecruisării, oțelul nu mai este izotrop. Materialele compozite armate cu fibre lungi pot fi ortotrope sau anizotrope. Însă în acest ultim caz este vorba de realizarea intenționată a unei anumite structuri *dirijate* a materialului.

2.3.3. Influența dimensiunilor epruvetei

Deși este considerată o caracteristică de material, tensiunea de rupere la tracțiune mai este influențată într-o anumită măsură și de dimensiunile epruvetei. Pentru același material, elaborat prin aceeași tehnologie, se obțin valori mai mici pentru σ_r la încercarea unor epruvete de dimensiuni mai mari. Acest fenomen poate fi explicat prin faptul că ruperea materialului este amorsată de către micro-defecte (defecțiuni locale ale rețelei cristaline, incluziuni, micro-sufluri etc.) ale materialului, de la care pornesc micro-fisuri și apoi fisuri care conduc la secționarea epruvetei. Cu creșterea volumului de

material crește și numărul micro-defectelor și deci probabilitatea apariției unor micro-defecte importante care vor amorsa micro-fisurile la tensiuni mai mici. Acest efect poate fi evaluat prin coeficientul de scară

$$K_d = \frac{\sigma_{r,d}}{\sigma_{r,10}} \quad (2.22)$$

unde

- $\sigma_{r,10}$ = tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete cu diametrul de 10 mm;
- $\sigma_{r,d}$ = tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete proporționale cu cele utilizate la determinarea tensiunii $\sigma_{r,10}$, având diametrul părții calibrate $d_0 \neq 10$ mm.

În figura 2.18 se prezintă variația factorului de scară K_d funcție de diametrul epruvetei d . Pentru o anumită liniarizare a curbelor, s-a utilizat o scală logaritmică pe axa absciselor [Mocanu D.R., 1980].

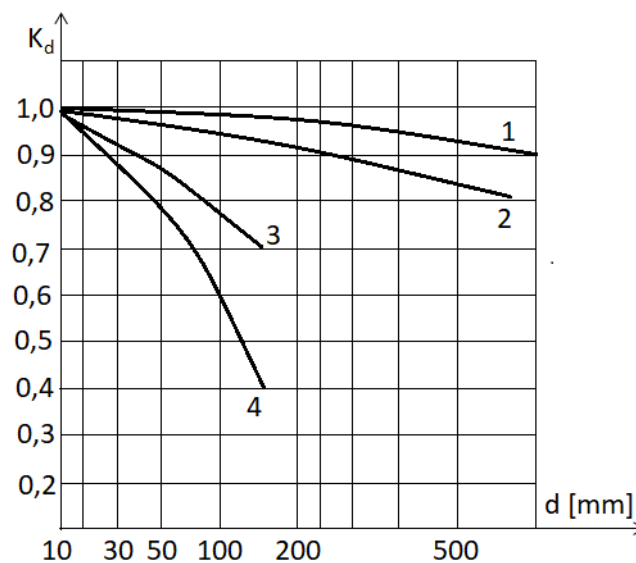


Fig. 2.18. Variația factorului de scară K_d funcție de dimensiunile epruvetei:
1-oțel cu conținut ridicat de C și Mn; 2-oțel aliat; 3-fontă maleabilă;
4-fontă cenușie

Se observă că dimensiunea epruvetei are o influență mai mică la oțeluri însă foarte mare la fonte, care au mai multe micro-defecte. Fenomenul de scară trebuie să fie luat în considerație la proiectarea utilajelor și structurilor de mari dimensiuni. S-a constatat că tensiunea la rupere determinată pe sârme subțiri are valori mult mai mari decât cea determinată pe epruvete normale, confecționați din același material. La alte materiale, mai puțin omogene (cum ar fi polimerii armați cu fibre), efectul de scară este mult mai important ca la oțel [Mocanu D.R., 1980]. Distanța între repere influențează valorile obținute pentru alungirea la rupere. Alungirile determinate pe epruvete $A_{t.5}$ sunt mai mari decât cele determinate pe epruvete lungi, $A_{t.10}$. Modulul de elasticitate se determină numai pe epruvete lungi.

2.3.4. Influența vitezei de încărcare

La multe materiale caracteristicile mecanice cresc la viteze mari de încărcare. Se consideră că această *creștere* este doar *aparentă*, deoarece încărcarea dinamică a mașinilor și structurilor nu este recomandabilă. La unele materiale cu rupere înalt fragilă, cum ar fi ceramice tehnice, se constată însă o scădere a caracteristicilor mecanice cu creșterea vitezei de încărcare [Mocanu D.R. ș.a., 1982]. Un material care prezintă o rupere tenace la solicitări statice se poate rupe fragil la viteze mari de încărcare. Acest fenomen se observă la oțeluri, polimeri (*fig. 2.19*) și la alte materiale [Crawford R.J., 1987; Buzdugan Gh. s.a., 1973]. Caracteristicile mecanice uzuale se determină la viteze de încărcare relativ mici (*încărcări statice*).

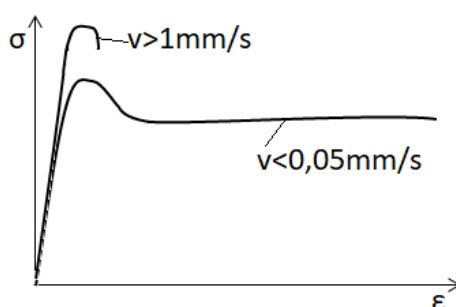


Fig. 2.19. Influența vitezei de încărcare asupra diagramei caracteristice a polimerului PVC

2.3.5. Influența temperaturii

Există mașini și structuri care lucrează la temperaturi extreme. Temperatura influențează în mare măsură caracteristicile elastice și mecanice ale materialelor. Analiza comportării materialelor funcție de temperatură și timp este complexă și dificilă. În *figura 2.20* se prezintă variația caracteristicilor mecanice și elastice cu temperatura, pentru un oțel inoxidabil [Buzdugan Gh., 1986].

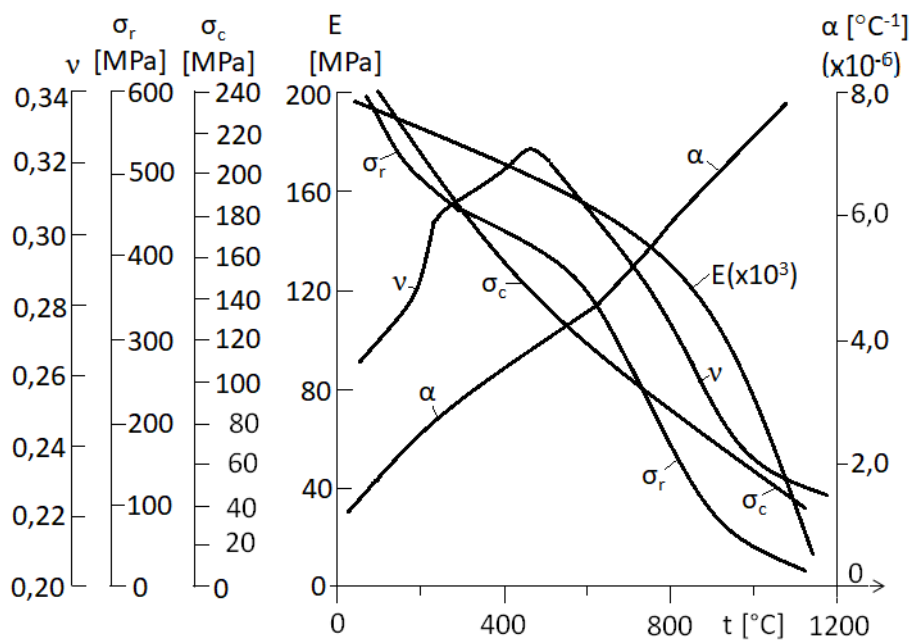


Fig. 2.20. Variația caracteristicilor mecanice și elastice cu temperatura (oțel inoxidabil)

Se observă că σ_r scade mai lent până la circa 400 $^{\circ}\text{C}$, iar apoi scade brusc. La oțelurile carbon rezistența la rupere prezintă un maxim iar alungirea la rupere un minim în jurul temperaturii de 300 $^{\circ}\text{C}$, când oțelul are o comportare fragilă și capătă o culoare albastră (fenomenul numit *fragilizare la albastru*). Modulul de elasticitate scade continuu cu temperatura. Deformarea plastică la cald a materialelor metalice se bazează tocmai pe scăderea tensiunii de curgere și a modulului de elasticitate la temperaturi

ridicate. La oțelurile inoxidabile coeficientul lui Poisson are un maxim în jurul temperaturii de circa 400°C după care scade, pe când la oțelurile carbon crește continuu, până la circa 0,38 [Buzdugan Gh. ș.a., 1973].

La temperaturi scăzute tensiunile de rupere ale oțelurilor cresc. Multe materiale cu rezistentă la rupere ridicată prezintă însă o tranziție de la rupere ductilă la rupere fragilă, odată cu scăderea temperaturii. Tenacitatea unui material poate fi apreciată prin încercarea tehnologică de încovoiere prin șoc. La acest test se determină raportul dintre energia absorbită de epruvete crestate și secțiunea lor transversală, numit *reziliență* (vezi *paragraful 2.4*). Diagrama de variație a rezilienței unui oțel funcție de temperatură cuprinde trei zone, ca în *figura 2.21* [Neatherley R., 1982] :

- Zona reziliențelor înalte, căreia îi corespund ruperi ductile;
- Zona de tranziție, în jurul unei temperaturi de fragilizare, în care ruperile au un caracter mixt (ductil-fragil);
- Zona reziliențelor scăzute, în care ruperile sunt fragile.

Unele materiale metalice trec de la ruperea ductilă la cea fragilă la temperaturi de numai -10°C. Oțelurile inoxidabile cu un conținut ridicat de Ni și metale înalt ductile (Al, Cu, Pb) păstrează o reziliență ridicată la temperaturi scăzute [Conte R.R., 1970].

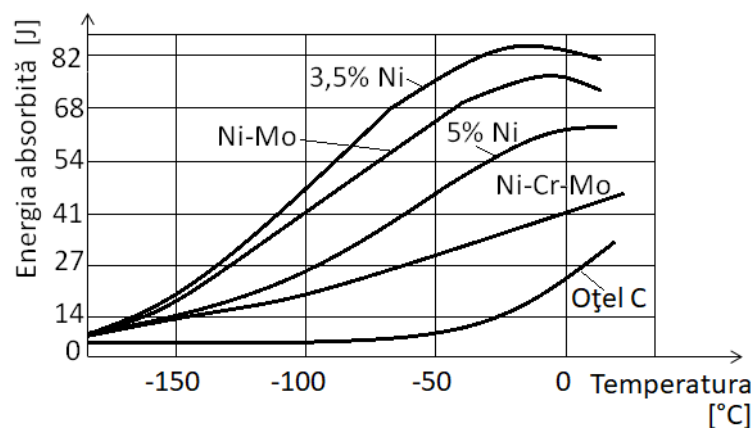


Fig. 2.21. Variația energiei consumate la testul de încovoiere prin șoc (metoda Charpy) cu temperatura, pentru unele oțeluri

2.3.6. Influența timpului

În anumite condiții, unele materiale au o comportare *vâsco-elastică*, adică își modifică starea de deformății și/sau tensiuni atunci când o sarcină acționează timp îndelungat. Tensiunile sunt funcții nu numai de alungirile specifice, dar și de timp

$$\sigma = f(\varepsilon, t) \quad (2.23)$$

Pentru simplificarea analizelor, relația (2.23) poate fi redusă la

$$\sigma = \varepsilon \cdot f(t) \quad (2.24)$$

Această ecuație stă la baza *vâscoelasticității liniare*.

În sistemul de coordonate alungire specifica-temperatura-timp, se obține o suprafață în spațiu. Intersecția acestei suprafețe cu plane paralele cu cele determinate de către axele de coordonate dau curbele de *fluaj*, *relaxare* și *izocrone*.

La încercările la *fluaj* se mențin constante temperatura și tensiunea σ din piesă și se înregistrează creșterea lui ε în timp, $\varepsilon = f(t)$. Materialul prezintă o curgere lentă. Pentru încercările la *relaxare* se mențin constante temperatura și alungirea specifică ε și se înregistrează variația tensiunii în timp $\sigma = f(t)$.

La oțeluri comportarea vâscoelastică se manifestă pregnant la temperaturi de peste 300°C, pe când la polimeri ea apare chiar la temperatura mediului. Fluajul conduce la modificarea în timp a dimensiunilor paletelor de turbină, cea a pereților conductelor instalațiilor termoeenergetice, putând conduce la ruperea lor. Relaxarea contribuie la slăbirea unor îmbinări cu șuruburi care lucrează la temperaturi ridicate și poate determina pierderea etanșărilor. Proiectantul trebuie să țină cont de aceste fenomene.

În *figura 2.22* se prezintă curbe tipice pentru încercările la fluaj și relaxare. O curbă de fluaj sau de relaxare se trasează păstrând anumiți

parametri constanți (temperatură și tensiune, respectiv temperatură și alungire specifică). În exploatarea mașinilor și utilajelor termice există numeroase situații când toți parametrii variază și cele două fenomene se manifestă simultan. Calculul de rezistență al organelor de mașini care lucrează la temperaturi ridicate ține cont de fenomenele de fluaj și relaxare.

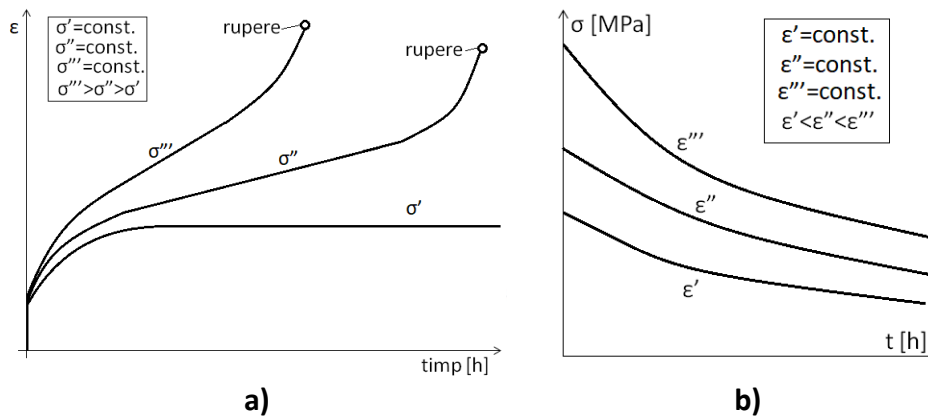


Fig. 2.22. Curbe tipice: fluaj (a); relaxare (b)

2.3.7. Influența stării de tensiuni

Organele de mașini și elementele structurilor prezintă deseori variații de secțiune. În aceste regiuni se produc salturi în diagrama tensiunilor și stări compuse de tensiuni, iar acest fenomen influențează comportarea materialelor, în special la solicitări variabile.

Se admite, de exemplu, cazul unei platbande cu gaură, solicitată la tracțiune. Diametrul găurii este mic în comparație cu lățimea platbandei ($d \ll a$). Tensiunile nu au aceeași valoare în orice secțiune: la distanțe suficient de îndepărtate de gaură, tensiunea σ este uniform distribuită; în vecinătatea găurii se produce un salt în diagrama tensiunilor și tensiunea maximă este tangentă la gaură ($\sigma_{\max} = 3\sigma$), ca în figura 2.23. Prezența găurii „focalizează” sau „concentrează” tensiunile în vecinătatea ei. Variația brusca a secțiunilor transversale ale organelor de mașini produc asemenea salturi în diagrama tensiunilor și, din acest motiv, se numesc *concentratori de tensiuni*.

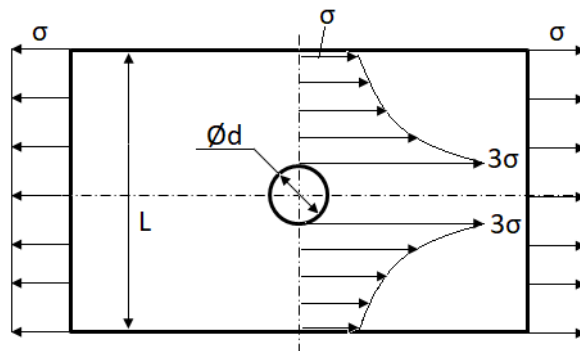


Fig. 2.23. Efectul concentrării tensiunilor la o placă cu gaură de mici dimensiuni, supusă la tracțiune

În figura 2.24 se prezintă o comparație între diagramele caracteristice obținute la tracționarea a două epruvete plate, confecționate din același oțel. Lățimea epruvetei cu gaură a fost mărită, astfel încât cele două epruvete să aibă aceeași secțiune netă. Se observă că pentru ambele epruvete se obține aceeași tensiune de rupere σ_r , însă ruperea are un caracter ductil pentru epruveta 1 și fragil pentru epruveta 2 [Ponomariov ș.a., 1964]. Efecte similare pot fi obținute în cazul solicitărilor compuse.

Principalii factori care determină tranziția de la ruperea ductilă la cea fragilă sunt prezentați schematic în figura 2.25.

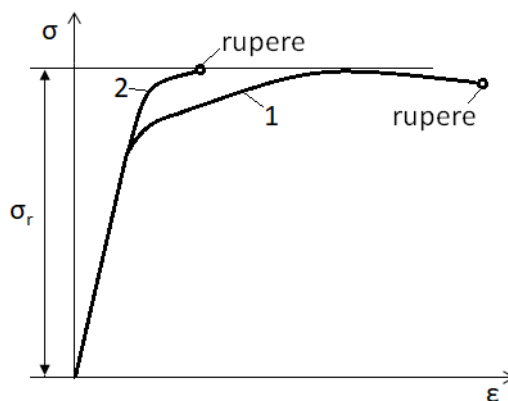


Fig. 2.24. Diagramele σ - ϵ pentru două epruvete plate din același oțel, cu aceeași secțiune netă: epruveta standard (1); epruveta cu gaură

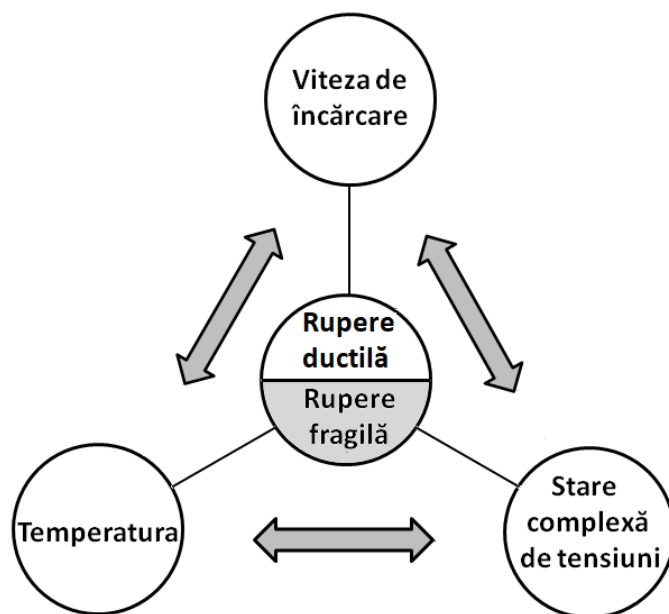


Fig. 2.25. Principalii factori care influențează tranziția de la ruperea ductilă la cea fragilă

2.4. ÎNCERCĂRI TEHNOLOGICE

Încercările tehnologice furnizează date care nu sunt folosite în calculele de Rezistența Materialelor, dar dau indicații utile privind utilizarea materialelor.

2.4.1. Determinarea durității

Determinarea industrială a durității se bazează în special pe metode de penetrare. Cele mai utilizate metode sunt *Brinell*, *Rockwell* și *Vickers* pentru materiale metalice și *Shore* pentru polimeri sau cauciuc [Curtu I. ș.a., 1988]. Determinarea durității poate fi privită ca o *metodă nedistructivă* pentru estimarea tensiunii de rupere. Luând duritatea în mai multe puncte, se poate verifica omogenitatea tratamentului termic al materialului.

Metoda Brinell utilizează drept penetrator o bilă din oțel foarte dur. În urma apăsării bilei de diametru D cu o forță F , pe suprafața lustruită a probei

rămâne o amprentă sub forma unei calote sferice de diametru d , ca urmare a depășirii locale a limitei de curgere la compresiune. Duritatea, exprimată în unități (grade) *Brinell* reprezintă raportul dintre forța F [daN] și suprafața S [mm²] a calotei sferice

$$HB = \frac{F}{S} \quad (2.25)$$

Cunoscând duritatea *Brinell*, se poate aprecia rezistența la rupere cu relația empirică

$$\sigma_r \approx 0,35HB \left[daN/mm^2 \right] \quad (2.26)$$

Standardele precizează valori pentru D , F , durata menținerii apăsării etc.

Metoda Rockwell utilizează ca penetrator o bilă de oțel extradur cu $D = 1/16$ inch și o forță $F = 100$ daN (duritatea HRB) sau un con de diamant cu unghiul la vârful de $\alpha = 120^\circ$ și $F = 150$ daN (duritatea HRC).

La *metoda Vickers* se măsoară diagonala amprenteii lăsate de penetrator, care este o piramidă de diamant cu baza pătrată și $\alpha = 136^\circ$. Forța de încărcare este de 5 - 80 daN.

La *metoda Shore* penetratorul de diamant este montat pe o greutate care cade de la o înălțime dată.

2.4.2. Determinarea rezilienței

Pentru a aprecia capacitatea materialelor de a fisura la încărcarea prin șoc, se utilizează încercarea la încovoire, efectuată pe epruvete cu o secțiune predeterminată de rupere (cu creștătură), care sunt lovite de către un pendul de formă specială.

La *metoda Charpy*, epruveta este montată orizontal, simplu rezemată la capete și este lovită de către pendul, în spatele creștăturii. La *metoda Izod* epruveta este montată în consolă (fixată la un capăt și liberă la celălalt) în poziție verticală și este lovită de către pendul la capătul liber, dinspre partea

crestăturii, (fig. 2.26). În figura 2.27 se prezintă pendulul Charpy care lovește epruveta. Măsurând unghiul inițial de lansare a pendulului α_0 și apoi unghiul α_1 , la care se ridică după lovirea epruvetei, se poate calcula energia U_d consumată pentru ruperea (totală sau parțială) a acesteia.

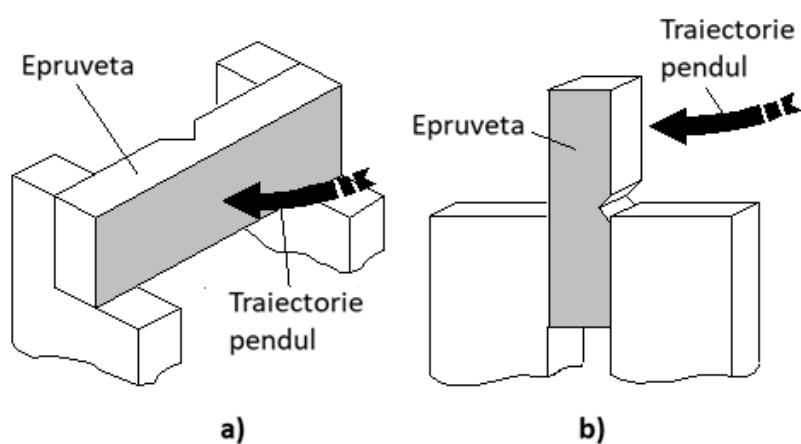


Fig. 2.26. Determinarea rezilienței prin metodele: Charpy (a); Izod (b)

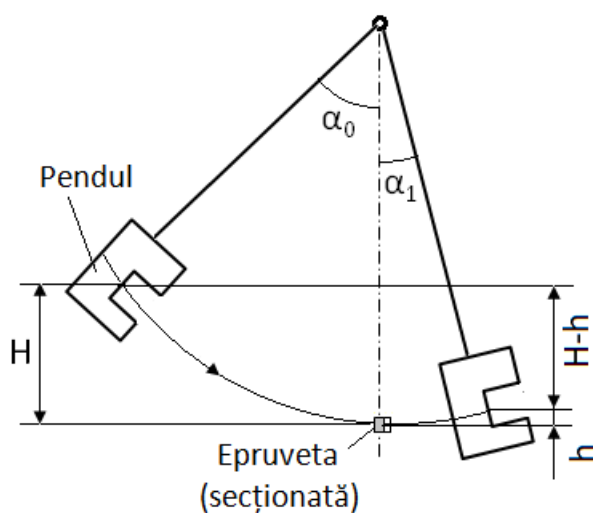


Fig. 2.27. Pendulul Charpy (prezentare schematică)

Reziliența materialului K se calculează cu relația

$$K = \frac{U_d}{A} \quad (2.27)$$

unde A este aria secțiunii slăbite a epruvetei (din dreptul creștăturii).

Reziliența se exprimă de obicei în $[J/cm^2]$. Inversul rezilienței ($1/K$) se numește *fragilitate*. De regulă, fragilitatea unui material crește cu duritatea.

2.5. IPOTEZE SIMPLIFICATOARE

În construcția de mașini și a structurilor se utilizează o mare varietate de materiale. Comportarea diferitelor materiale în aceleași condiții de solicitare poate fi extrem de variată. Pentru a putea prevedea comportarea unui material în condiții date, trebuie să avem o *modelare matematică* a acesteia.

Nu poate exista un model unic pentru o varietate atât de mare de materiale, condiții de încercare și stări de tensiuni. Nici măcar pentru un singur material nu poate exista un singur model care să “prezică” comportarea sa în orice situație care ar putea fi întâlnită în practică. Astfel, putem avea modele diferite pentru comportarea materialului în domeniul liniar-elastic, peste limita de elasticitate, pentru comportarea vâscoelastică etc.

Cel mai simplu model este cel elaborat pentru materialele liniar-elastice. Orice model matematic reține numai factorii care au o influență majoră și nu ține cont de cei care au o influență nesemnificativă și a căror considerare ar aduce complicații de calcul însemnate. Reținerea factorilor esențiali pentru modelarea matematică se face prin adoptarea unor *ipoteze simplificatoare*.

Modelul clasic, care stă la baza Rezistenței Materialelor și a Teoriei Elasticității, este adecvat comportării oțelului și a altor materiale metalice, solicitate în domeniul de proporționalitate. Asemenea materiale sunt utilizate pe scară largă în construcția de mașini și a structurilor de rezistență.

Ipotezele simplificatoare care stau la baza acestui model sunt următoarele:

1. *Ipoteza mediului continuu*. La scară macromecanică materia poate fi considerată continuă, nu discretă cum este în realitate, formată din atomi și molecule. Adoptarea acestei ipoteze permite utilizarea funcțiilor continue, trecerea la limită și înlătură marile dificultăți de calcul întâlnite în fizica corpului solid;
2. *Ipoteza omogenității mediului*. Materialul este considerat omogen, având aceleași proprietăți fizico-chimice în tot volumul său;
3. *Ipoteza mediului izotrop*. Materialul este considerat izotrop, (caracteristicile elastice și mecanice sunt aceleași în orice direcție). De studiul materialelor anizotrope se ocupă un capitol special al Rezistenței Materialelor și Teoriei Elasticității;
4. *Ipoteza elasticității perfecte*. Materialul studiat este considerat perfect elastic, adică revine la forma și dimensiunile inițiale după înlăturarea încărcărilor. Această ipoteză este echivalentă cu cea a mediului adiabatic, care nu face schimb de energie cu exteriorul;
5. *Ipoteza deformațiilor mici*. Experimental se constată că deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor. La oțeluri curgerea începe la $\varepsilon_c = 0,2\%$. Asemenea deformații specifice pot fi considerate practic infinit mici. Această ipoteză conduce la simplificarea calculelor (infiniții mici de ordin superior pot fi neglijate etc.). Un capitol special al Teoriei Elasticității se ocupă de studiul corpurilor elastice cu deformații finite sau chiar mari, cum ar fi cele confecționate care au un comportament hipereleastic (cauciuc etc.);
6. *Ipoteza proporționalității între tensiuni și deformații*. Pentru o curbă caracteristică cu o porțiune inițială liniară este valabilă legea lui Hooke. Ca o consecință a acestei legi se poate aplica principiul suprapunerii efectelor, care va fi prezentat în capitolul al treilea. Pentru materiale elastice care au o curbă caracteristică neliniară, legea lui Hooke poate fi înlocuită cu relații de tip exponențial, dar aceasta complică mult analiza tensiunilor și deformațiilor;
7. *Principiul lui Saint-Venant*. Înlocuirea unui sistem de încărcări cu un alt sistem static echivalent, produce diferențe considerabile în starea

de tensiuni și deformații din vecinătatea încărcărilor, dar rămâne fără efect (sau cu efecte neglijabile) la distanțe suficient de mari de punctele lor de aplicare. Acest principiu este ilustrat în *figura 2.28*. Forța distribuită care acționează asupra grinzii în consolă a fost înlocuită cu o forță concentrată static echivalentă. Această înlocuire produce modificări mari în starea de tensiuni și deformații în zona încărcărilor, dar în secțiunea A-A, aflată la o distanță suficient de mare de forță, modificările sunt neglijabile;

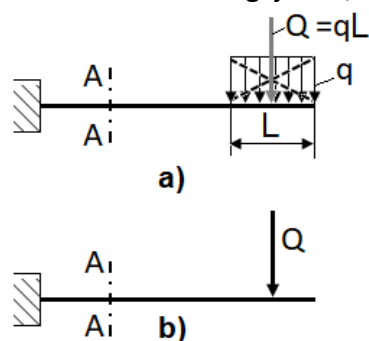


Fig. 2.28. Ilustrarea principiului Saint-Venant

8. *Ipoteza stării naturale*. Aceasta presupune că în corpurile solide nu există tensiuni în lipsa încărcărilor. În realitate, toate operațiile tehnologice, care produc încălziri și deformații plastice neuniforme introduc tensiuni care rămân în corp în lipsa încărcărilor, numite tensiuni remanente. Aceste tensiuni influențează semnificativ comportarea la sollicitări variabile. În cazul sollicitărilor statice, ele pot avea un efect benefic dacă sunt de sens contrar tensiunilor create de către încărcări, conducând la creșterea capacității portante;
9. *Ipoteza lui Bernoulli* sau ipoteza secțiunilor plane este admisă în Rezistența Materialelor dar nu și în Teoria Elasticității. Ea nu se verifică riguros în toate cazurile studiate, însă aduce o scădere semnificativă a volumului de calcul. Ipoteza este formulată astfel: secțiuni plane, normale pe axa geometrică a barei nedeformate, rămân plane și perpendiculare pe axa barei deformată. În *figura 2.29* este ilustrată această ipoteză pentru sollicitarea la tracțiune și

respectiv la încovoiere. Calculul barelor drepte supuse la încovoiere simplă este mult mai laborios în Teoria Elasticității, care nu face apel la ipoteza lui *Bernoulli*, dar rezultatele obținute sunt mai precise.

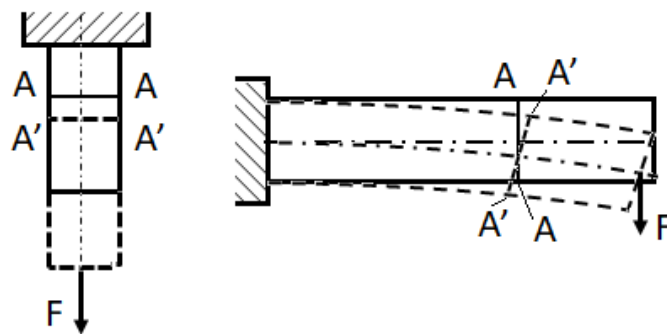


Fig. 2.29. Ilustrarea ipotezei lui *Bernoulli* pentru tracțiune și respectiv încovoiere

2.6. METODE DE CALCUL ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

2.6.1. Metoda tensiunilor admisibile

Calculule de rezistență au drept scop asigurarea siguranței în exploatare a mașinilor, utilajelor și structurilor, chiar în condițiile cele mai nefavorabile. Pentru a realiza acest deziderat, proiectantul trebuie să-și ia precauțiile ce se impun. Tensiunile care apar într-o piesă nu trebuie să depășească o anumită limită, considerată periculoasă. Altfel spus, tensiunea maximă care poate fi admisă în exploatare, numită *tensiune admisibilă*, trebuie să fie de c ori mai mică decât tensiunea periculoasă

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{peric}}{c}; \quad \tau_a = \frac{\tau_{peric}}{c}; \quad c > 1 \quad (2.28)$$

Tensiune periculoasă poate fi considerată una dintre cele de mai jos:

- Tensiunea de rupere (σ_r sau τ_r);
- Tensiunea de curgere (σ_c , τ_c).

Tensiunea de rupere poate fi considerată ca limită periculoasă în cazul materialelor cu rupere fragilă, dar și pentru materiale cu ruperi tenace, atunci când apariția unor deformații plastice locale nu afectează buna

funcționare a ansamblului. Un exemplu în acest sens îl constituie structurile mari, confecționate din oțel (grinzi cu zăbrele, poduri metalice etc.). În construcția de mașini însă, atunci când piesele formează ajustaje (cu strângere sau alunecătoare), toleranțele de execuție sunt de același ordin de mărime cu deformațiile elastice. Apariția deformațiilor plastice împiedică buna funcționare a ansamblului și poate conduce la griparea mecanismului, urmată de distrugerea acestuia. În acest caz, tensiunea periculoasă trebuie aleasă cea de curgere.

Tensiunile maxime care apar în piese nu pot depăși tensiunile admisibile, (fig. 2.30), din motive de siguranță

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a; \quad \tau_{\max} \leq \tau_a \quad (2.29)$$

Relațiile de mai sus stau la baza calcului de rezistență prin metoda tensiunilor admisibile. Acesta metodă este frecvent utilizată în calculele ingineresti.

în figura 2.30 au fost suprapuse două diagrame caracteristice: pentru materiale cu rupere fragilă și respectiv cu rupere ductilă. Pentru fiecare dintre ele s-a evidențiat tensiunea admisibilă.

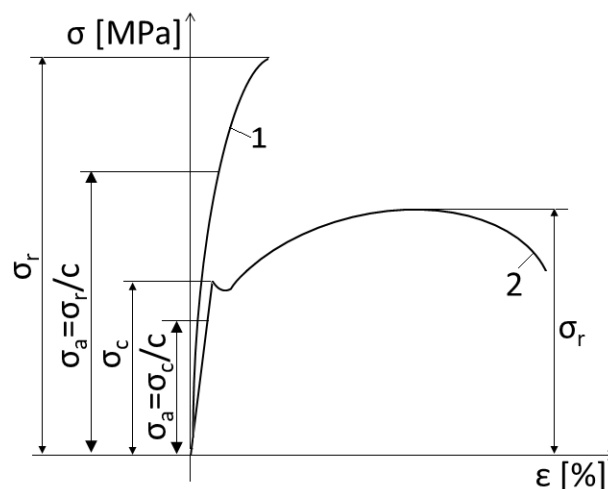


Fig. 2.30. Tensiuni admisibile pentru materiale cu rupere fragilă (1) și respectiv ductilă (2)

Coeficientul de siguranță c nu apare explicit în calcule. El trebuie să fie ales de către proiectant, având în vedere un număr mare de factori de influență și fenomene, între care se menționează:

- *Precizia evaluării încărcărilor* și a posibilităților de apariție, pe durata exploatării, a unor suprasarcini accidentale;
- *Tipul solicitării* (solicitări simple, compuse) și modul de acțiune al încărcărilor (static, dinamic, alternant);
- *Precizia modelului de calcul* adoptat (cât de mult se poate îndepărta de realitate);
- *Mediul* în care lucrează piesa sau structura (temperaturi ridicate sau coborâte, prezența agenților corozivi etc.);
- *Natura materialului* (cu rupere ductilă sau fragilă, gradul de dispersie al valorilor experimentale pentru caracteristicile mecanice și elastice, omogenitate);
- Eventualele *tratamente* termice, termochimice, mecanice sau acoperiri metalice/nemetalice ale piesei;
- *Micșorarea secțiunilor* nominale ca urmare a toleranțelor de execuție negative, a uzurii și coroziunii;
- *Importanța piesei*, durata ei de funcționare și ce s-ar întâmpla dacă aceasta ar ceda (amplizarea pagubelor materiale, pierderi de vieți omenești, poluare etc.).

În consecință, *coeficientul de siguranță* este acoperitor pentru tot ceea ce proiectantul nu cunoaște cu precizie și, într-un anumit sens, ar putea fi numit la fel de bine și *coeficient de ignoranță*.

Pentru piese din oțel cu rupere ductilă supuse la solicitări statice simple, la temperatura mediului, coeficientul de siguranță poate fi $c = 1,2 \div 1,6$ (supradimensionare cu 20%-60 %). Pentru piese din materiale cu rupere fragilă se poate alege $c = 2,5 \div 3$, conform [Buzdugan Gh., 1986].

Deși există normative privind alegerea coeficienților de siguranță, adoptarea acestora necesită experiență în domeniu, dar conține și o anumită doză de subiectivism.

2.6.2. Metoda coeficienților de siguranță parțiali

Această metodă își propune să limiteze subiectivismul în alegerea coeficienților de siguranță. Metoda exprimă coeficientul de siguranță global ca produs al unor coeficienți de siguranță parțiali

$$c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \dots \quad (2.30)$$

Fiecare coeficient parțial reflectă influența unui factor sau grup de factori. Metoda nu este tratată unitar de către diverși autori. În literatură există recomandări pentru utilizarea a 2 ÷ 10 coeficienți parțiali. Se prezintă în continuare un exemplu de utilizare a trei coeficienți de siguranță parțiali:

- c_1 ține cont de precizia evaluării încărcărilor și tensiunilor (pentru o precizie ridicată $c_1 = 1,2 \div 1,5$, pentru una mai scăzută $c_1 = 2 \div 3$);
- c_2 ține cont de neomogenitatea materialului și de posibilitatea apariției unor defecte la prelucrare. Pentru materiale cu rupere ductilă se recomandă $c_2 = 1,2 \div 1,8$, pentru materiale cu rupere fragilă $c_2 = 3 \div 4$, iar pentru materiale cu rupere foarte fragilă $c_2 = 4 \div 6$;
- c_3 ține cont de importanța piesei și de condițiile de exploatare ($c_3 = 1 \div 1,5$).

2.6.3. Metoda încărcărilor limită

Metoda tensiunilor admisibile consideră drept stare limită atingerea tensiunii periculoase (σ_c sau σ_r) într-un singur punct, deși piesa are o capacitate portantă mai mare. În asemenea situații, încărcarea maximă admisibilă pentru o structură F_{max} va fi dată de relația

$$F_{max} \leq \frac{F_{peric}}{c} \quad (2.31)$$

unde F_{peric} este încărcarea la care cedează structura (de exemplu, prin pierderea stabilității).

Metoda introduce un coeficient de siguranță global care, deși nu ține cont de influența diferiților factori, prezintă avantajul că aplicarea sa conduce la economii de material. Ea este utilizată în cazul calculului la flambaj (vol. II).

2.6.4. Metode probabilistice

Studiul statistic al datelor experimentale permite stabilirea unor legi de distribuție. Pe baza acestor legi, Teoria Probabilităților dă posibilitatea să se prevadă ce valori va avea mărimea studiată într-un experiment viitor. Prevederea se realizează cu o probabilitate aleasă aprioric. Este posibil să se *estimeze* valorile extreme pe care le va lua o variabilă aleatoare, cu probabilitatea aleasă. Analizării statistice a variabilelor aleatoare i se adaugă o mărime de tip probabilistic de apreciere a siguranței: *probabilitatea de cedare*. Ea reprezintă probabilitatea ca valoarea S a răspunsului să depășească valoarea probabilă a răspunsului limită, ceea ce se notează $P(S > S_{min})$. Condiția de rezistență se scrie sub forma

$$P(S > S_{min}) \leq P_a \quad (2.32)$$

unde P_a este probabilitatea admisă pentru cedare, stabilită pe baza unor considerente economice, sociale etc. [Mocanu D.R., 1980].

2.6.5. Alte condiții

În afara *condițiilor de rezistență*, care limitează tensiunile, organele de mașini și structurile trebuie să satisfacă și alte condiții, cum ar fi cele de rigiditate, stabilitate etc. Câteva dintre acestea vor fi prezentate pe scurt în cele ce urmează.

Condiții de rigiditate

Condițiile de rigiditate limitează deformațiile liniare sau unghiulare ale corpurilor solide. Pentru asemenea situații, dimensiunile pieselor vor fi stabilite prin limitarea rigidității și deci a deplasărilor sau deformațiilor

$$k_{max} \geq k_a; \delta_{max} \leq \delta_a; \theta_{max} \leq \theta_a \quad (2.33)$$

unde mărimile admisibile sunt de c ori mai mici decât cele periculoase

$$k_a = \frac{k_{peric}}{c}; \delta_a = \frac{\delta_{peric}}{c}; \theta_a = \frac{\theta_{peric}}{c} \quad (2.34)$$

Condiții de stabilitate

Chiar dacă sunt satisfăcute condițiile de rezistență, în anumite cazuri, cum ar fi compresiunea barelor zvelte, depășirea unor valori critice pentru încărcări conduce la apariția fenomenului de pierdere a stabilității (flambaj). Dimensionarea la flambaj a barelor drepte supuse la compresiune este prezentată în volumul al doilea al lucrării.

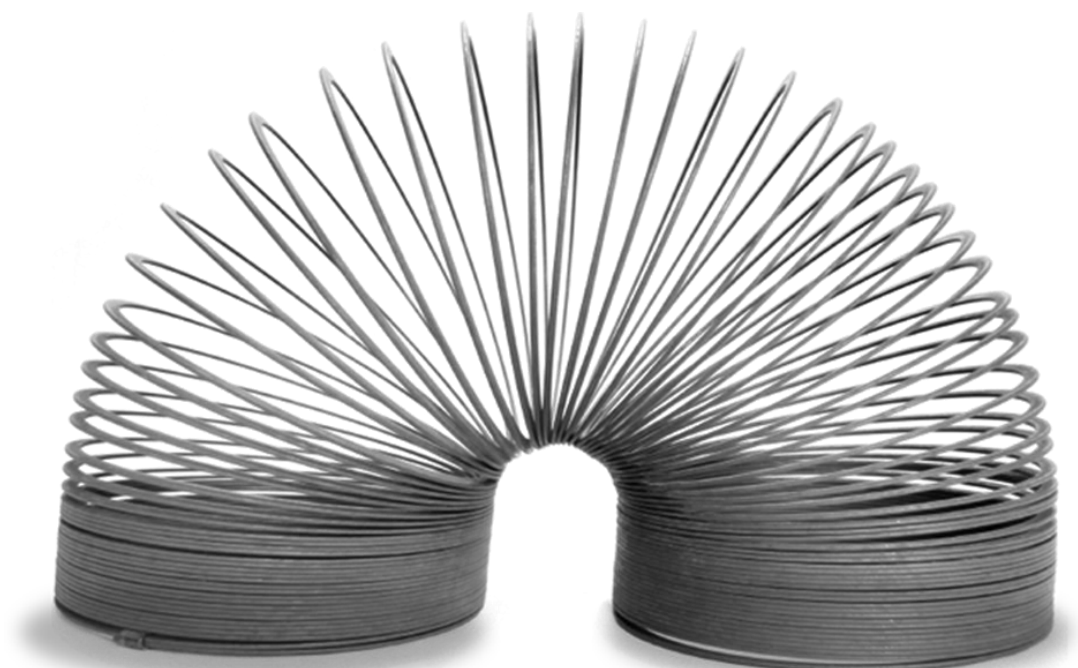
Condițiile de rezistență, rigiditate și stabilitate trebuie să fie satisfăcute simultan de către orice organ de mașină, element structural sau structură.

De reținut:

- Tipurile de epruvete pentru tracțiune, compresiune și forfecare;
- Încercări ale materialelor, diagrama caracteristică pentru materiale cu rupere tenace și respectiv fragilă;
- Caracteristicile elastice și mecanice ale materialelor și factorii de influență;
- Încercări tehnologice;
- Ipoteze simplificatoare în Rezistența Materialelor și Teoria Elasticității;
- Metode de calcul în Rezistența Materialelor.

CAPITOLUL

3



Teoreme și metode energetice

Sursa: <https://www.pngall.com/slinky-png/download/16639/>

3. TEOREME ȘI METODE ENERGETICE

3.1. OBIECTIVE

Corpurile elastice se deformează sub acțiunea încărcărilor, acumulând astfel o *energie potențială de deformare elastică*. În Rezistența Materialelor și Teoria Elasticității există multe metode pentru calculul deplasărilor, ridicarea nedeterminărilor, calculul la solicitări compuse, la stabilitate elastică etc., bazate pe legea conservării energiei, care implică determinarea energiei de deformare elastică. În acest capitol se determină expresiile de bază ale energiei potențiale de deformare elastică și sunt prezentate principalele teoreme referitoare la energia elastică, precum și metode de calcul care fac apel la aceasta (metode energetice). Însușirea acestor metode permite abordarea unor probleme complexe, care vor fi prezentate pe parcursul lucrării.

3.2. TEOREMELE LUI CLAPEYRON

În cele ce urmează, corpurile solide vor fi considerate perfect elastice. Se vor neglija efectele termice, piezoelectrice, emisiile ultrasonore, care însoțesc fenomenul deformării corpurilor, energia disipată de aceste fenomene fiind mult mai mică decât cea de deformare elastică. Așa după cum s-a arătat în

capitolul al doilea, ipoteza corpului perfect elastic este echivalentă cu cea a mediului adiabatic.

Fie sistemele elastice din *figura 3.1*. Atunci când asupra barei acționează în mod static forța F , ea se lungește cu cantitatea δ . Energia cinetică a sistemului deformat, aflat în echilibru static, este neglijabilă. Deplasarea forței F pe distanța δ produce un lucru mecanic. Acesta provine din variația de energie potențială și se numește *lucru mecanic al forțelor exterioare* L_e .

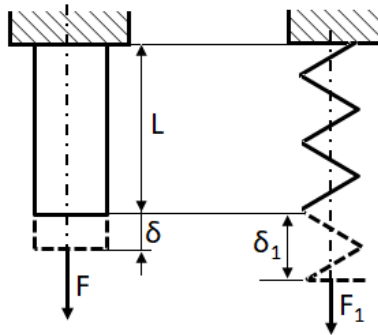


Fig. 3.1. Deformarea unor sisteme elastice (bară și arc elicoidal)

În lipsa unor schimbări de energie cu mediul, în baza legii conservării energiei, se poate spune că acest lucru mecanic este egal cu energia potențială de deformare elastică a barei

$$L_e = U \quad (3.1)$$

Pentru un corp elastic încărcat, aflat în repaus, lucrul mecanic exterior produs de către încărcări este egal cu energia potențială de deformare elastică acumulată de acel corp. Aceasta reprezintă prima teoremă a lui Clapeyron.

La descărcarea corpului, energia potențială de deformare elastică se transformă în lucru mecanic, aducând corpul la forma și dimensiunile inițiale. Pentru corpul descărcat energia de deformare elastică este nulă. În cele ce urmează, se va stabili expresia lucrului mecanic exterior, pentru cazul deformațiilor liniar-elastice.

Fizica stabilește expresia lucrului mecanic ca fiind produsul dintre proiecția forței pe direcția deplasării și deplasarea acestei componente

$$L = F \cdot \delta \quad (3.2)$$

Relația (3.2) este scrisă în ipoteza că forța este constantă pe toată durata deplasării. Această ipoteză poate fi admisă în cazul deplasării libere a unor corpuri, pe distanțe relativ mari. În *figura 3.2a* se observă că acest lucru mecanic este numeric egal cu suprafața dreptunghiului de laturi F și δ .

În cazul deformațiilor elastice însă, forța variază pe toată durata deplasării (*fig. 3.2b*).

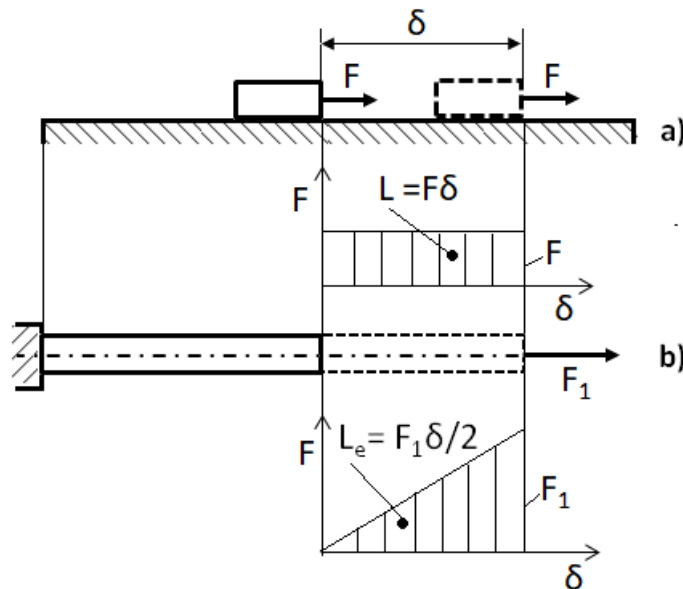


Fig. 3.2. Lucrul mecanic produs la deplasarea liberă a unei forțe constante (a) și în cazul deformării liniar-elastice (b)

Când forța variază pe durata deplasării, relația (3.2) poate fi aplicată la deplasări incrementale, pe parcursul cărora forța poate fi considerată aproximativ constantă (*fig. 3.3*):

$$dL_e \approx F \cdot d\delta \quad (3.3)$$

Între F și δ există o relație de proporționalitate

$$F = k \cdot \delta \quad (3.4)$$

unde $k = F/\delta$ este panta dreptei prin origine (fig. 3.3) și se numește *rigiditate*.

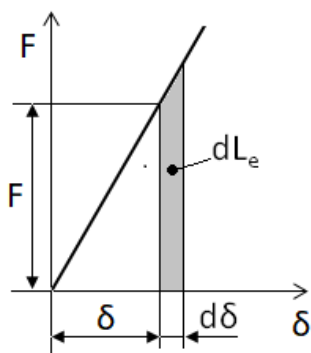


Fig. 3.3. Determinarea lucrului mecanic L_e în domeniul liniar-elastic

Din (3.4) rezultă succesiv

$$\delta = \frac{1}{k} F; \quad d\delta = \frac{1}{k} dF \quad (3.5)$$

Din (3.3) și (3.5) se obține

$$dL_e \approx \frac{1}{k} \cdot F \cdot dF \quad (3.6)$$

Lucrul mecanic L_e , efectuat pe durata creșterii forței de la zero la F se obține prin integrare

$$L_e = \int_0^F dL_e = \frac{1}{k} \int_0^F F dF = \frac{1}{k} \cdot \frac{F^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{F}{k} \quad (3.7)$$

Din (3.5) și (3.7) rezultă

$$L_e = \frac{F\delta}{2} \quad (3.8)$$

Se observă că lucrul mecanic al forțelor exterioare L_e este numeric egal cu aria triunghiului hașurat în diagrama $F-\delta$ (fig. 3.2b). Deplasarea elastică δ se măsoară pe direcția forței.

Dacă o forță constantă F se deplasează pe un arc de cerc de lungime s (fig. 3.4) , se poate scrie succesiv, atunci când unghiul la centru φ este exprimat în radiani

$$L_e = Fs; \quad L_e = FR\varphi; \quad L_e = M\varphi \quad (3.9)$$

Lucrul mecanic L_e este egal cu produsul dintre momentul forței M față de centrul cercului și unghiul la centru φ [rad] corespunzător arcului s . Pentru cazul în care forța variază liniar pe durata deplasării, se poate demonstra similar relația

$$L_e = \frac{M\varphi}{2} \quad (3.10)$$

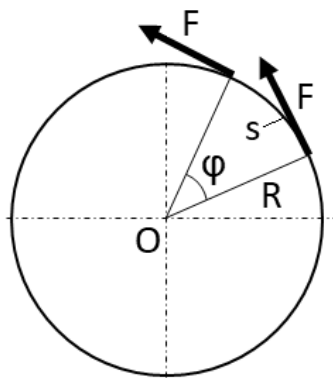


Fig. 3.4. Deplasarea unei forțe pe un arc de cerc

În relațiile (3.8) și (3.10), coeficientul $1/2$ este caracteristic materialelor cu un comportament liniar-elastic și ele reprezintă cea de-a doua teoremă a lui *Clapeyron*.

Lucrul mecanic efectuat pentru ruperea unei epruvete la tracțiune este numeric egal cu suprafața de sub curba $F-\delta$. (fig. 3.5).

3.3. ENERGIA SPECIFICĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ

Se determină în continuare *energia de deformare elastică înmagazinată de unitatea de volum*, care va fi numită *energie specifică de deformare*. Fie diagrama caracteristică σ - ϵ (fig. 3.5). Se izolează o suprafață foarte mică, cu laturile $\Delta\sigma$ și $\Delta\epsilon$. Se calculează suprafața, ținând cont de faptul că $F=N$ la o bară supusă la tracțiune

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon = \frac{\Delta F}{A} \cdot \frac{\Delta\delta}{L} = \frac{\Delta(F\delta)}{AL} = \frac{\Delta L}{V} \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (3.11)$$

unde cu V s-a notat volumul barei.

Se observă că suprafața de sub curba caracteristică reprezintă lucrul mecanic consumat pentru ruperea unității de volum a epruvetei (barei). Ținând cont de (3.1), se poate spune că suprafața de sub toată curba caracteristică reprezintă energia consumată pentru ruperea unității de volum a epruvetei. Această energie va fi notată cu U_1 .

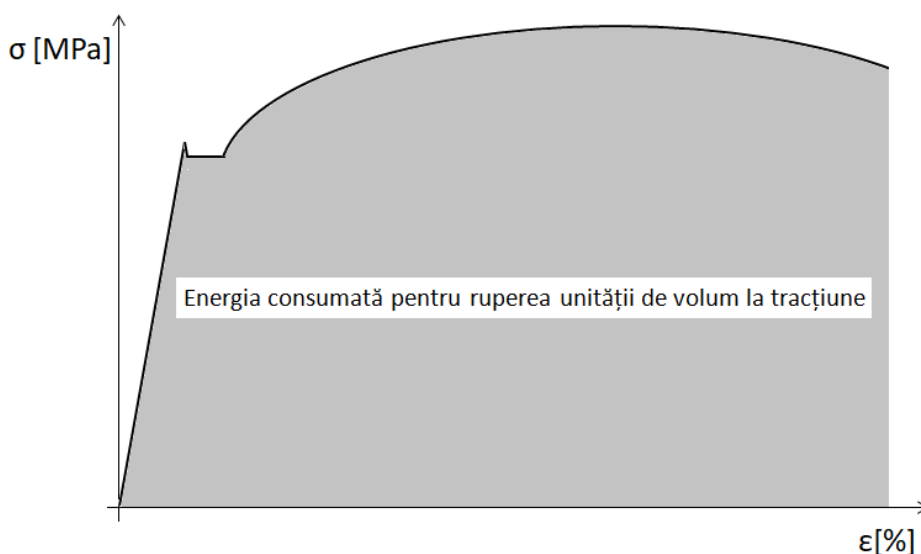


Fig. 3.5. Suprafața de sub diagrama caracteristică este numeric egală cu raportul dintre energia consumată pentru ruperea epruvetei și volumul acesteia

Dintr-un corp elastic se izolează un cub cu latura unitară (unitatea poate fi infinit mică). Acesta este supus la tracțiune cu tensiunea σ (fig. 3.6).

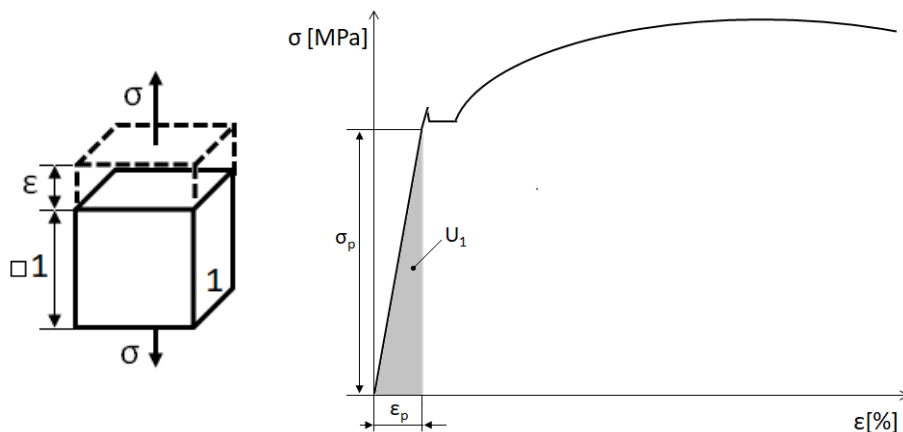


Fig. 3.6. Cub cu latura unitară, supus la tracțiune

Fig. 3.7. Energia specifică de deformare pentru domeniul de proporționalitate

În relația (3.8) se înlocuiește forța F cu produsul dintre tensiunea σ și suprafața A pe care acționează (v. rel. 1.35), iar $\delta = \epsilon \cdot 1$ și rezultă

$$L_{el} = \frac{\sigma \cdot (1 \cdot 1) \cdot \epsilon}{2} \quad (3.12)$$

Ținând cont de relația (3.1), rezultă expresia energiei specifice de deformare elastică

$$U_1 = \frac{\sigma \cdot \epsilon}{2} \quad (3.13)$$

Energia specifică U_1 este numeric egală cu aria triunghiului hașurat din figura 3.7.

Similar, pentru forfecare sau torsiune se poate scrie

$$U_1 = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} \quad (3.14)$$

Înlocuind în relațiile (3.13) și (3.14) legea lui Hooke din relațiile (2.9) și (2.21), rezultă:

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad U_1 = \frac{\tau^2}{2G} \quad (3.15)$$

Energia potențială de deformare elastică înmagazinată într-un element infinitezimal poate fi calculată ca produsul dintre energia specifică de deformare U_1 și volumul elementului

$$dU = U_1 \cdot dV \quad (3.16)$$

Din (3.15) și (3.16) rezultă relațiile pentru determinarea energiei potențiale de deformare elastică, înmagazinată într-un corp de volum V

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV; \quad U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (3.17)$$

3.4. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII EFECTELOR (BOLTZMANN)

Acest principiu, care aduce importante simplificări ale calculelor, poate fi aplicat în toate cazurile în care există o relație liniară între două mărimi fizice. În cazul diagramelor cu o primă porțiune liniară, asemenea relații există între forțe și deplasări, între momente și rotiri, precum și între tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke).

În cele ce urmează, se ilustrează principiul suprapunerii efectelor printr-un exemplu.

Fie un sistem de forțe $F_1 \dots F_n$, care se aplică simultan asupra unui corp elastic, astfel încât fiecare forță să ajungă de la zero la valoarea maximă în același timp.

Aceleași forțe se aplică apoi pe rând asupra corpului. Starea finală de tensiuni, deformații specifice și deplasări va fi aceeași ca în primul caz de încărcare și nu depinde de ordinea aplicării forțelor. Se încarcă apoi corpul

cu câte o forță din sistemul inițial, obținând astfel n cazuri de încărcare independente.

Starea finală de tensiuni, deformații specifice și deplasări dintr-un punct va fi egală cu suma algebrică a tensiunilor, deformațiilor specifice și respectiv deplasărilor din cele n cazuri de încărcare. Energia finală de deformare elastică nu este egală însă cu suma energiilor din cele n cazuri de încărcare, deoarece energia nu este funcție liniară de tensiuni (fig. 3.8).

Problemele la care se poate aplica principiul suprapunerii efectelor se numesc probleme cu *liniaritate fizică*.

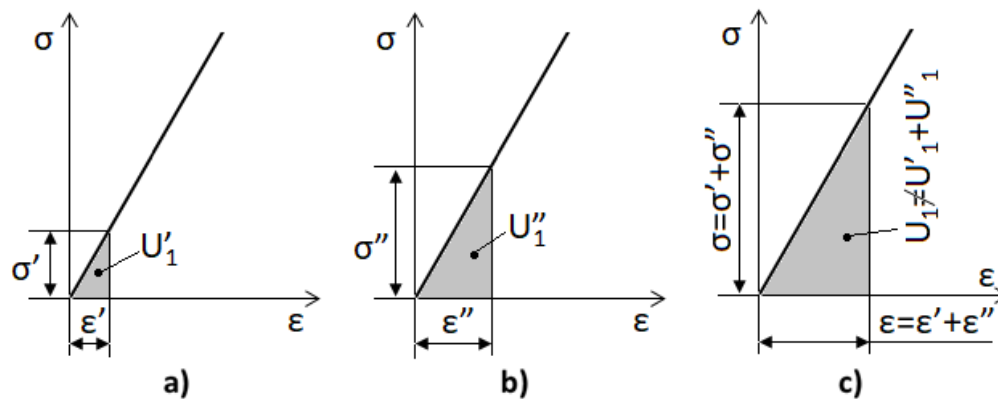


Fig. 3.8. Principiul suprapunerii efectelor în cazul diagramei caracteristice σ - ϵ : tensiunile acționează separat (a, b) și apoi simultan (c)

3.5. TEOREMA RECIPROCITĂȚII LUCRULUI MECANIC VIRTUAL (BETTI)

Demonstrația acestei teoreme este una dintre cele mai frumoase din Mecanica solidului deformabil. Teorema reciprocității deplasărilor este o consecință directă a teoremei lui *Betti*.

Fie un corp elastic încărcat în punctele 1, 2 cu forțele F_1 , F_2 . Se va studia deformația corpului aplicând principiul suprapunerii efectelor. Se notează cu δ_{ij} deplasarea punctului i pe direcția forței F_i , produsă de către forță F_j , care acționează în j . Se încarcă corpul cu forța F_1 și apoi F_2 . Se inversează apoi

ordinea aplicării forțelor. Se va scrie lucrul mecanic al forțelor exterioare pentru cele două cazuri de încărcare (fig. 3.9).

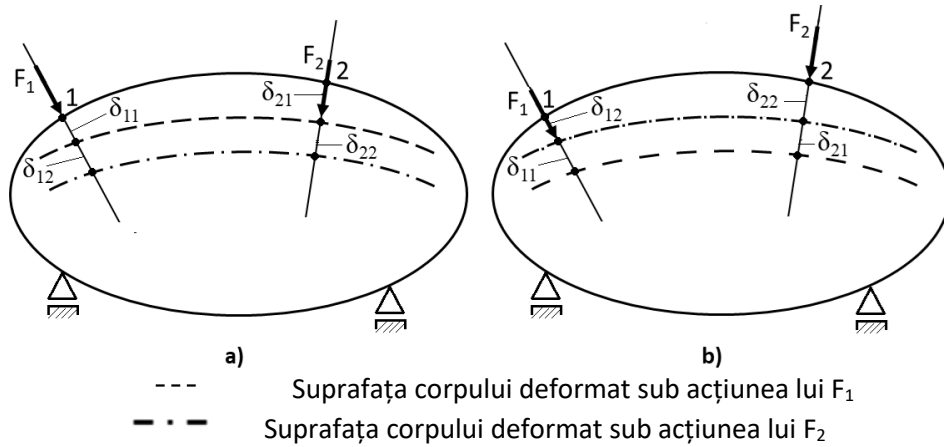


Fig. 3.9. Încărcarea unui corp elastic: cu forța F_1 și apoi cu F_2 (a);
încărcarea cu F_2 și apoi cu F_1

Încărcând corpul cu forța F_1 (fig. 3.9a), se înregistrează deformațiile δ_{11} (în 1) și δ_{21} (în 2). Se încarcă apoi corpul cu forța F_2 și se produc deformațiile δ_{12} (în 1) și δ_{22} (în 2). Lucrul mecanic al forțelor exterioare va fi

$$L'_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_1 \delta_{12} \quad (3.18)$$

Ultimul termen nu se înmulțește cu coeficientul 1/2 deoarece la aplicarea forței F_2 forța F_1 atinsese deja valoarea maximă și în consecință F_1 este constantă pe durata deplasării δ_{12} . Aplicând mai întâi forța F_2 (fig. 3.9b) se înregistrează deformațiile δ_{12} (în 1) și δ_{22} (în 2). Aplicând apoi forța F_1 , rezultă deformațiile δ_{11} (în 1) și δ_{21} (în 2) și lucrul mecanic al forțelor exterioare va fi

$$L''_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{22} + F_2 \delta_{21} \quad (3.19)$$

Deoarece valoarea lucrului mecanic al forțelor exterioare nu depinde de ordinea aplicării forțelor, se pot egala (3.18) și (3.19) și rezultă

$$F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21} \quad (3.20)$$

Relația (3.20) mai poate fi scrisă convențional

$$L_{12} = L_{21} \quad (3.21)$$

Relațiile (3.20) și (3.21) reprezintă expresia matematică a teoremei lucrului mecanic virtual (*Betti*), care este enunțată mai jos.

Dacă asupra unui corp elastic se aplică succesiv două stări de încărcare, atunci lucrul mecanic virtual efectuat de către încărcările din prima stare cu deplasările din cea de a doua, este numeric egal cu lucrul mecanic virtual efectuat de încărcările din a doua stare cu deplasările din prima stare de încărcare.

3.6. TEOREMA RECIPROCITĂȚII DEPLASĂRILOR (MAXWELL)

Dacă în relația (3.20) se admite că cele două forțe sunt egale

$$F_1 = F_2 = F \quad (3.22)$$

rezultă simplu

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (3.23)$$

Deplasarea produsă în punctul 1 al unui corp elastic, de către o forță aplicată în punctul 2, este egală cu deplasarea produsă în punctul 2 de către aceeași forță care acționează în punctul 1, ambele deplasări fiind pe direcția forței.

3.7. TEOREMELE LUI CASTIGLIANO

Teoremele lui *Castigliano* fac apel la energia potențială de deformare elastică a corpurilor și sunt utilizate pe larg pentru determinarea deplasărilor și ridicarea nedeterminărilor. Fie un corp elastic încărcat cu un sistem de forțe $F_1...F_i...F_n$, sub acțiunea cărora corpul se deformează, înmagazinând energia potențială

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (3.24)$$

unde δ_i reprezintă deplasarea punctului i , pe direcția forței F_i , produsă de sistemul de forțe. Energia de deformare elastică este o funcție de încărcări:

$$U = f(F_1 \dots F_i \dots F_n) \quad (3.25)$$

După încărcarea corpului cu sistemul de forțe, se dă o creștere infinit mică dF_i forței F_i (fig. 3.10a). Ca urmare a acestui fapt, energia potențială de deformare elastică va crește cu o cantitate infinit mică dU și energia înmagazinată de către corpul elastic va fi

$$U' = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i \quad (3.26)$$

Se inversează apoi ordinea aplicării forțelor. Aplicând mai întâi forța dF_i , corpul înmagazinează energia de deformare elementară

$$\frac{1}{2} dF_i \cdot d\delta_i \quad (3.27)$$

unde $d\delta_i$ este deplasarea punctului i , pe direcția forței dF_i .

Aplicând apoi sistemul de încărcări, acesta deplasează forța dF_i cu δ_i (fig. 3.10b) și energia înmagazinată de către corp va fi

$$U'' = U + \frac{1}{2} dF_i \cdot d\delta_i + dF_i \delta_i \quad (3.28)$$

Ultimul termen din (3.28) nu se înmulțește cu coeficientul $1/2$ deoarece forța dF_i nu variază pe durata deplasării δ_i (dF_i era la intensitatea maximă când s-a aplicat sistemul de încărcări). Deoarece valoarea energiei potențiale de deformare elastică nu depinde de ordinea aplicării forțelor, egalând (3.26) cu (3.28) și neglijând infiniții mici de ordinul al doilea, rezultă succesiv:

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = U + \frac{1}{2} dF_i d\delta_i + dF_i \delta_i \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i \quad (3.30)$$

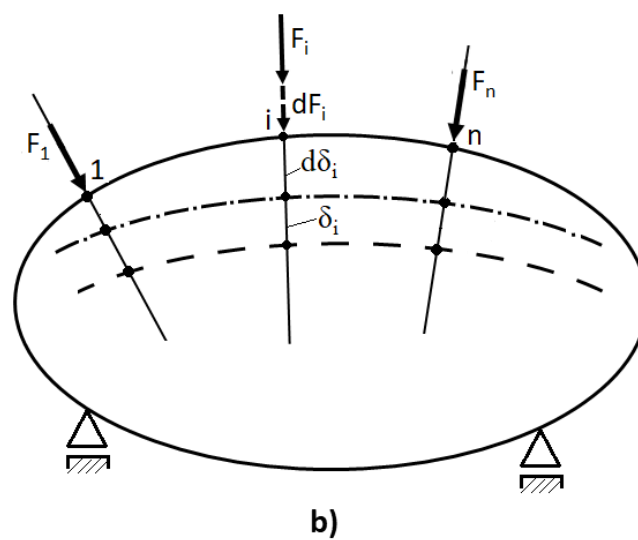
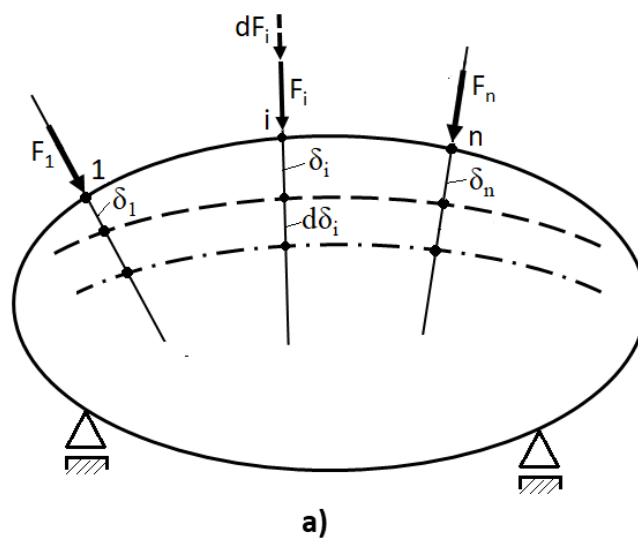


Fig. 3.10. Încărcarea unui corp elastic pentru demonstrarea primei teoreme a lui Castigliano

Relația (3.30) este expresia primei teoreme a lui *Castigliano*, enunțată mai jos.

Derivata parțială a energiei potențiale de deformare elastică înmagazinată într-un corp în raport cu o forță concentrată este numeric egală cu deplasarea punctului de aplicare a forței, în sensul și pe direcția forței.

Încărcând corpul cu un sistem de momente concentrate, se poate demonstra similar a doua teoremă a lui *Castigliano*

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \varphi_i \quad (3.31)$$

Derivata parțială a energiei de deformare elastică în raport cu un moment concentrat este numeric egală cu rotirea punctului de aplicare al momentului, în sensul de rotire al acestuia.

Observație

Deplasarea δ_i dată de relația (3.30) are loc în sensul forței F_i dacă este pozitivă și în sens contrar forței dacă este negativă. Rotirea φ_i dată de relația (3.31) are loc în sensul momentului M_i dacă este pozitivă și în sens contrar dacă este negativă.

3.8. TEOREMA ENERGIEI POTENȚIALE MINIME (MENABREA)

Fie un corp elastic de n ori static nedeterminat, încărcat cu un sistem de sarcini S (figura 3.11a). Se îndepărtează n legături, astfel încât sistemul să devină static determinat. Reazemele înlăturate se înlocuiesc cu reacțiunile $X_1...X_n$ (figura 3.11b). Se scrie prima teoremă a lui *Castigliano* pentru fiecare reacțiune, considerând deplasările din reazeme nule (reazeme perfect rigide):

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \dots \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0; \dots \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (3.32)$$

Aceste ecuații, împreună cu cele de echilibru, formează un sistem ale cărui soluții sunt reacțiunile.

Relațiile (3.32) reprezintă o condiție necesară pentru ca funcția $U = f(X_1, \dots, X_n)$ să aibă un punct de extrem (maxim sau minim). Deoarece $U > 0$ și derivatele de ordinul doi sunt pozitive

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i^2} > 0 \quad (3.33)$$

Această condiție este necesară, dar nu și suficientă. *Bertrand de Fontviolant* a demonstrat că funcția de mai multe variabile U are într-adevăr un minim [Tripa M., 1967]. Notând

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = d_{ij} \quad (3.34)$$

și scriind determinantul format în toți coeficienții d_{ij} , funcția U va avea un minim deoarece toți determinanții care pot fi formați din acesta sunt pozitivi [Gellert W., ș.a., 1980].

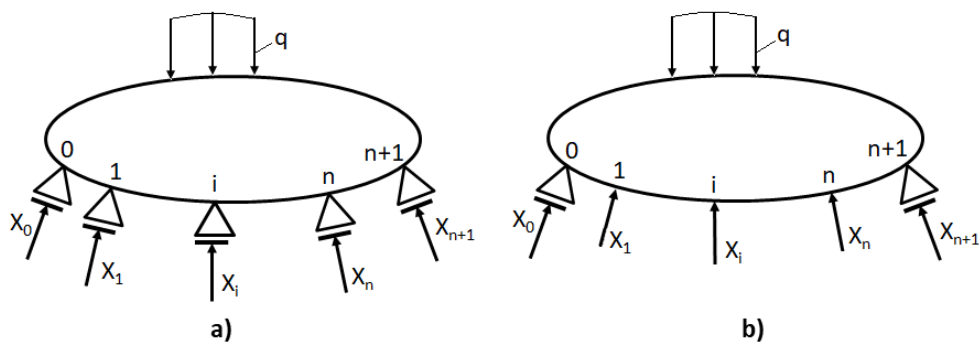


Fig. 3.11. Încărcarea unui corp elastic pentru demonstrarea teoremei Menabrea

Teorema lui *Menabrea* poate fi enunțată astfel:

Într-un sistem static nedeterminat, necunoscutele static nedeterminate iau asemenea valori încât energia potențială de deformare elastică a sistemului să fie minimă.

Necunoscutele static nedeterminate sunt cele care nu pot fi determinate din ecuațiile staticii.

Uzual se utilizează consecința teoremei, care face apel la relația (3.32):
Derivata parțială a energiei de deformare elastică a unui sistem static nedeterminat, în raport cu o necunoscută static nedeterminată, este nulă.

Aceasta teorema poate fi aplicată și în cazul sistemelor static nedeterminate interior, la care necunoscutele sunt eforturi [Bia C. ș.a., 1983; Posea N., 1979].

3.9. METODA MAXWELL-MOHR

După cum se va arăta la studiul solicitărilor simple, aplicarea teoremelor lui *Castigliano* sau *Menabrea* va conduce la calculul derivatelor parțiale ale eforturilor din secțiunea curentă în raport cu o forță concentrată sau un moment concentrat. În anumite situații, calculul derivatelor unei funcții de mai multe variabile poate prezenta anumite dificultăți. Metoda *Maxwell-Mohr* simplifică determinarea acestor derivate și permite evitarea unor greșeli. Fie, de exemplu, expresia momentului încovoietor dintr-o secțiune curentă

$$M_z(x) = M_1 + \dots + M_i + \dots + M_n + F_1 b_1 + \dots + F_j b_j + \dots + F_m b_m + q_1 l_1^2 + q_2 l_2^2 + \dots \quad (3.35)$$

unde s-a notat

$M_1 \dots M_n$ = momentele concentrate care încarcă grinda;

$F_1 \dots F_m$ = forțele concentrate care încarcă grinda;

$b_1 \dots b_m$ = brațele forțelor care dau momente;

q_1, q_2 = intensitățile forțelor distribuite;

l_1, l_2 = brațele forțelor static echivalente (constante).

Derivând funcția $M_z(x)$, dată de (3.35), în raport cu F_j și respectiv M_i rezultă

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = b_j; \quad \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = 1 \quad (3.36)$$

La aceleași soluții se poate ajunge dacă egalăm cu unitatea încărcarea în raport cu care se face derivarea și anulăm toate celelalte încărcări (inclusiv cele distribuite).

Aplicând aceste observații pentru (3.35), se obține succesiv, pentru forțe și momente, relația (3.36)

$$\begin{aligned}
 F_j &= 1; \quad F_1 = F_2 = \dots = F_{j-1} = F_{j+1} = \dots = F_m = 0 \\
 M_1 &= \dots = M_i = \dots = M_n = 0 \\
 q_1 &= q_2 = \dots = 0 \\
 M_z(x) &= b_j = \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = m(x)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 M_i &= 1; \quad M_1 = M_2 = \dots = M_{i-1} = M_{i+1} = \dots = M_n = 0 \\
 F_1 &= \dots = F_j = \dots = F_m = 0 \\
 q_1 &= q_2 = \dots = 0 \\
 M_z(x) &= 1 = \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = m(x)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Se vor folosi următoarele notații:

$M_z(x)$ = momentul încovoietor în secțiunea x , pentru încărcări reale;
 $m(x)$ = momentul încovoietor fictiv, *determinat în aceeași secțiune ca M_z , cu toate încărcările nule, cu excepția celei în raport cu care se face derivarea, care este egală cu unitatea.*

Determinat în aceste condiții, momentul fictiv $m(x)$ este numeric egal cu derivata parțială

$$m(x) = \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} \quad \text{sau} \quad m(x) = \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} \tag{3.39}$$

Metoda poate fi aplicată similar pentru celelalte eforturi. Pentru forțele axiale și tăietoare se va nota

$$n(x) = \frac{\partial N(x)}{\partial F_i}; \quad t(x) = \frac{\partial T_y(x)}{\partial F_i} \tag{3.40}$$

3.10. METODA DE INTEGRARE GRAFO-ANALITICĂ MOHR-VEREȘCEAGHIN

După cum se va vedea ulterior, aplicarea teoremelor lui *Castigliano* sau *Menabrea* va conduce la rezolvarea unor integrale de tipul

$$I_1 = \int M_z(x) \cdot m(x) dx; \quad I_2 = \int N(x) \cdot n(x) dx; \quad \text{etc.} \quad (3.41)$$

Integrarea se poate face analitic dar, în unele situații, calculul poate fi mult simplificat prin aplicarea metodei de integrare grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin*.

În relația (3.41), $M_z(x)$ poate fi o funcție oarecare. Funcția $m(x)$ este momentul încovoietor dat de către un moment concentrat sau o forță concentrată unitară și în consecință poate fi constantă sau poate avea cel mult o variație liniară. În cele ce urmează, se va evalua integrala I_1 din relația (3.41). Variația funcțiilor $M_z(x)$ și $m(x)$ este prezentată în *figura 3.12*.

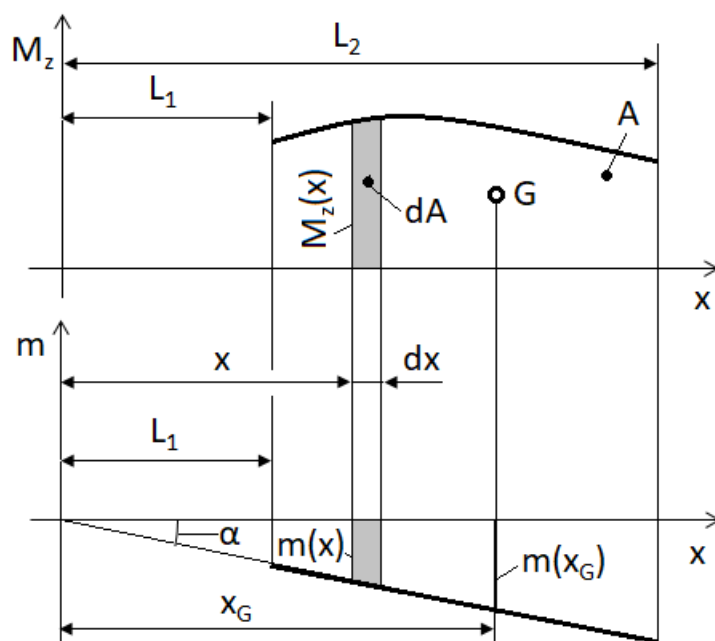


Fig. 3.12. Diagramele $M_z(x)$ și $m(x)$ pentru o porțiune de grindă

Se evaluează integrala

$$I_1 = \int_{L_1}^{L_2} M_z(x) m(x) dx \quad (3.42)$$

Din figura 3.12 rezultă

$$M_z(x) dx = dA; \quad m(x) = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (3.43)$$

Înlocuind (3.43) în (3.42) se obține

$$I_1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \int_A x dA = \operatorname{tg} \alpha \cdot S_y \quad (3.44)$$

Momentul static al suprafeței diagramei $M_z(x)$ față de axa Oy mai poate fi scris

$$S_y = x_G \cdot A \quad (3.45)$$

Din (3.44) și (3.45) rezultă

$$I_1 = x_G \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot A \quad (3.46)$$

Din diagrama $m(x)$ (fig. 3.12) se observă că

$$x_G \operatorname{tg} \alpha = m(x_G) \quad (3.47)$$

Înlocuind (3.47) în (3.46) și ținând cont de (3.42) se obține

$$\int_{L_1}^{L_2} M_z(x) m(x) dx = A \cdot m(x_G) \quad (3.48)$$

Rezultă că integrala definită din produsul funcțiilor $M_z(x) \cdot m(x)$ este numeric egală cu produsul dintre suprafața diagramei $M_z(x)$, luată între limitele de integrare, și valoarea funcției $m(x)$, calculată în dreptul centrului de greutate al aceleiași suprafețe.

Metoda de integrare grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin*, așa cum a fost prezentată mai sus, se aplică numai la bare drepte sau cotate, dar nu se poate utiliza la bare curbe.

3.11. METODA EFORTURILOR

Fie un corp elastic de n ori static nedeterminat, supus sistemului de încărcări q (fig. 3.13a). Înlocuind n reazeme cu reacțiunile care apar în ele, $X_1...X_n$, se obține un sistem static determinat, numit *sistem de bază* (fig. 3.13b). Se studiază sistemul de bază încărcat numai cu q , necunoscutele static nedeterminate fiind nule ($X_1 = ... = X_n = 0$), deplasarea punctului de aplicare a forței X_i , pe direcția acesteia, fiind δ_{i0} ($i = 1...n$), ca în figura 3.13c.

Se studiază apoi sistemul de bază fără încărcările reale q , încărcat pe rând numai cu câte una din necunoscutele static nedeterminate, care devine egală cu unitatea. Astfel, pentru $X_i = 1$ se înregistrează deplasările punctelor de aplicare ale necunoscutelor static nedeterminate, pe direcția acestora, $\delta_{1i}... \delta_{ni}$, ca în figura 3.13d.

Ca urmare a proporționalității dintre încărcări și deformații, rezultă că deplasările produse de către $X_i \neq 1$, care acționează singură asupra sistemului de bază, vor fi $\delta_{1i}X_1, ..., \delta_{ii}X_i, \delta_{ji}X_i, ..., \delta_{ni}X_i$ (fig. 3.14).

Atunci când necunoscuta considerată egală cu unitatea este aplicată succesiv în punctele $1...n$, deplasările punctului j , pe direcția necunoscutei X_j , vor fi $\delta_{j1}... \delta_{jn}$. Deplasările corespunzătoare produse de către necunoscutele static nedeterminate, vor fi $\delta_{j1}X_1... \delta_{jn}X_n$ (fig. 3.14).

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, se determină deplasarea punctului j sub acțiunea simultană a tuturor necunoscutelor static nedeterminate $X_1...X_n$

$$\delta'_j = \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + ... + \delta_{jn}X_n \quad (3.49)$$

Deoarece punctul j se află la contactul cu un reazem rigid, deplasarea sa totală (sau suma algebrică a tuturor deplasărilor din acest punct) trebuie să fie nulă

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + ... + \delta_{jn}X_n + \delta_{j0} = 0 \quad (3.50)$$

Scriind ecuații similare și pentru celelalte reazeme, se obține sistemul:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

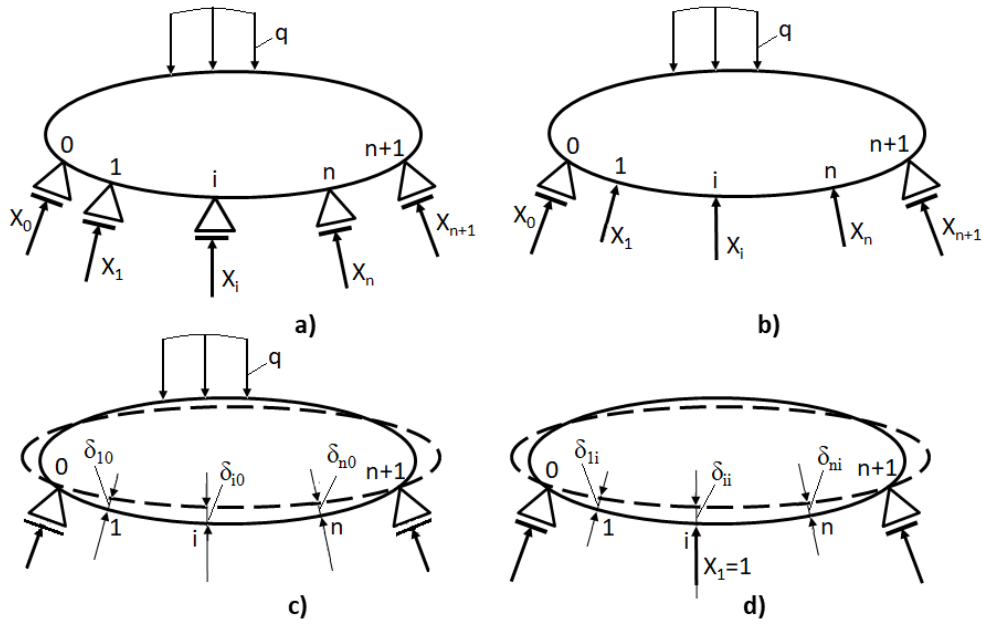


Fig. 3.13. Schemă pentru demonstrarea metodei eforturilor

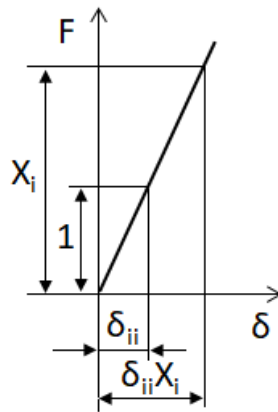


Fig. 3.14. Proportionalitatea dintre forțe și deplasări

Sistemul de ecuații (3.51) este folosit de metoda eforturilor pentru determinarea necunoscutelor static nedeterminate $X_1...X_n$. El poate fi scris astfel, indiferent de forma corpului sau de sistemul de încărcări.

Coeficienții de influență δ_{ij} reprezintă deplasări fictive. Ca o consecință a teoremei reciprocității deplasărilor, în sistemul (3.51), se poate scrie

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (3.52)$$

Calculul coeficienților de influență va fi prezentat în capitolele care urmează. Dilatările termice împiedicate produc tensiuni în corpuri sau sisteme de corpuri. Pentru un corp încărcat și supus la dilatări termice împiedicate, sistemul (3.51) devine [Anghel A., 2001]:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} + \delta_{1t} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} + \delta_{nt} = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

unde termenii $\delta_{1t}... \delta_{nt}$ reprezintă deplasările fictive produse de temperatură în punctele $1...n$ ale sistemului de bază, pe direcția necunoscutelor $X_1...X_n$.

În cazul sistemelor plane, neglijând influența forței tăietoare, termenii sistemului (3.53) pot fi determinați cu relațiile [Pissarenko G. ș.a., 1975]

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_i \left(\int_{l_i} \frac{m_i m_j}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{n_i n_j}{EA} dx_i \right) \\ \delta_{i0} &= \sum_i \left(\int_{l_i} \frac{M_0 m_i}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{N_0 n_i}{EA} dx_i \right) \\ \delta_{it} &= \sum_i \int_{l_i} n_i \alpha_i \Delta t_i \cdot dx_i \end{aligned} \quad (3.54)$$

- M_0, N_0 = momentul încovoiator și forța axială produse de încărcările reale, în sistemul de bază;
- m_i, n_i = momentul încovoiator și forța axială produse în sistemul de bază, încărcat numai cu $X_i = 1$

Observații

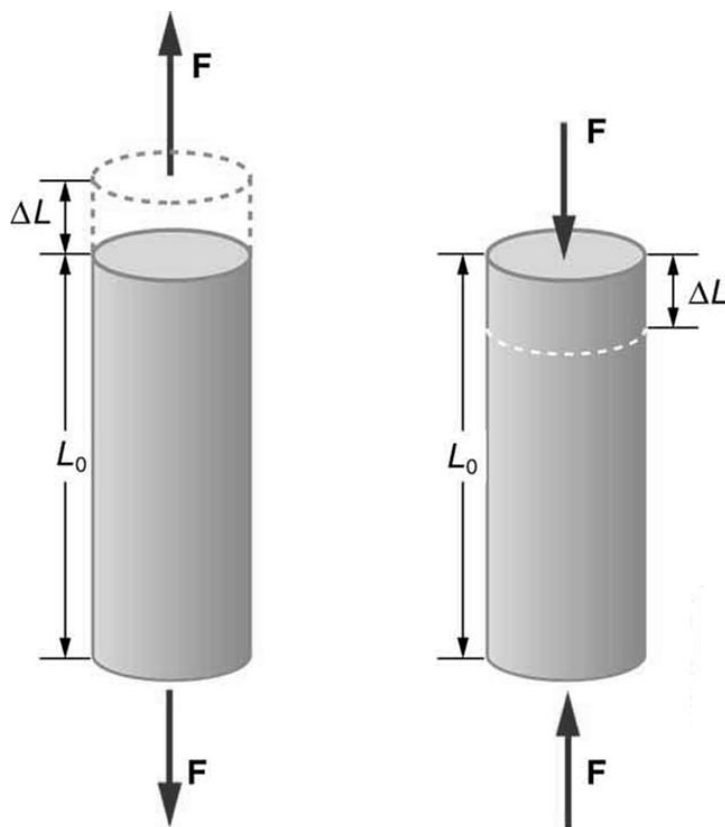
În Mecanica solidului rigid se ține cont numai de lucrul mecanic al încărcărilor exterioare, iar lucrul mecanic interior este nul. În Mecanica solidului deformabil, cât timp tensiunile sunt sub limita de elasticitate, lucrul mecanic exterior se înmagazinează în corpuri sub formă de energie potențială de deformare elastică și într-un sistem adiabatic lucrul mecanic exterior este egal cu energia potențială de deformare elastică.

De reținut:

- Metodele energetice, care sunt pe larg utilizate la determinarea deplasărilor, rezolvarea problemelor static nedeterminate, calculul la solicitări compuse, studiul stabilității elastice (flambaj) etc.;
- Relațiile deduse în acest capitol sunt valabile numai pentru corpuri confecționate din materiale perfect elastice, solicitate în domeniul de proporționalitate, în care este valabilă legea lui Hooke;
- Principiul suprapunerii efectelor conduce la simplificarea calculelor și poate fi aplicat numai pentru materiale cu diagrama caracteristică liniară;
- În capitolele care urmează se vor utiliza teoremele lui Castigliano și Menabrea, metodele Maxwell-Mohr, Mohr-Vereșceaghin și metoda eforturilor. Alte precizări vor fi făcute pe parcurs.

CAPITOLUL

4



Solicitări axiale

4. SOLICITĂRI AXIALE (TRACȚIUNE/COMPRESIUNE)

4.1. OBIECTIVE

În acest capitol se prezintă calculul de rezistență și calculul deformațiilor pentru bare supuse la solicitări axiale centrice (tracțiune și/sau compresiune). Se va neglija fenomenul de flambaj, care apare la comprimarea barelor lungi. Se discută numai cazul solicitărilor statice. Sunt abordate atât probleme static determinate, cât și static nedeterminate. În scop didactic, acestea din urmă au fost clasificate pe categorii. Pentru fiecare categorie, unele dintre metodele de ridicare a nedeterminării prezentate conduc la un volum de calcul mai mic, fiind deci preferate altor metode. Sunt prezentate, de asemenea, bare solicitate axial cu forțe distribuite (greutate proprie, forțe centrifuge).

4.2. INTRODUCERE

O componentă structurală este supusă la tracțiune simplă (uniaxială) sau la compresiune atunci când este solicitată doar cu două forțe axiale centrice, opuse și egale. Este vorba despre piese "lungi", din categoria barelor sau cablurilor. Exemple de piese supuse preponderent la solicitări axiale sunt:

cabluri, bieie, șuruburi, bare ale grinzilor cu zăbrele, palete de turbină, stâlpi (fig. 4.1) etc.

Rareori se întâlnesc organe de mașini sau elemente ale structurilor supuse numai la solicitări simple. Totuși, atunci când o solicitare introduce tensiuni cu mult mai mari decât celelalte, acestea din urmă se neglijează și se consideră că există doar o solicitare simplă. În acest sens pot fi date următoarele exemple:

- Tija unui șurub este supusă în special la tracțiune, dar și la torsiune (produsă de forțele de frecare, la strângerea piuliței). Anumite erori de construcție sau montaj pot să introducă și solicitarea la încovoiere;
- Paleta unei turbine cu gaze este supusă în special la tracțiune, dar și la torsiune și încovoiere;
- Biela unui motor cu ardere internă este supusă la compresiune (în momentul exploziei), la tracțiune (la sfârșitul evacuării), dar între aceste momente ea este solicitată și la încovoiere, produsă de forțele de inerție care apar la mișcarea plan - paralelă.

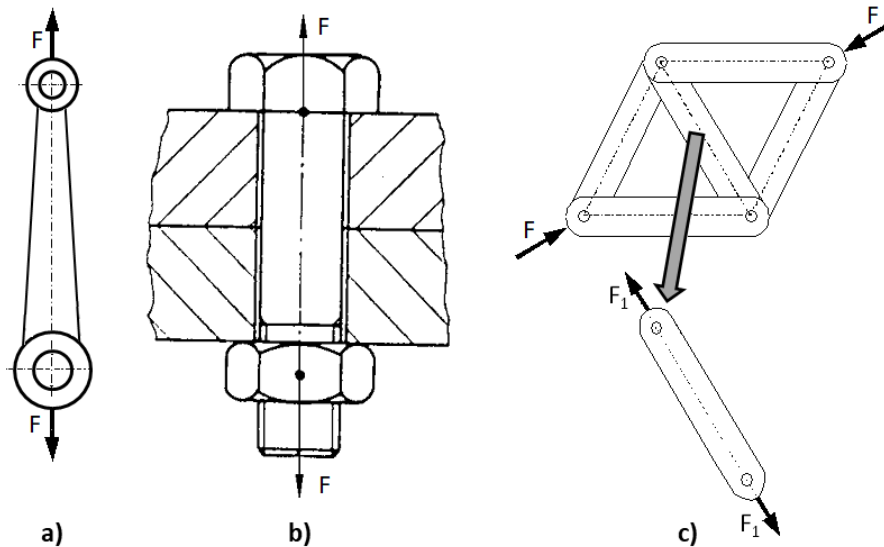


Fig. 4.1. Exemple de solicitări axiale: bielă (a); șurub (b); elemente structurale

Pe suprafața unei bare prismatice se trasează o rețea cu ochiuri pătrate (fig. 4.2). Ca urmare a solicitării cu forța axială F , bara se deformează și ochiurile rețelei devin dreptunghiulare (pe direcția forței distanțele între linii se măresc, iar pe direcție normală se micșorează). Unghiurile drepte nu se modifică după deformarea piesei. Experimentul arată faptul că, în urma acestei solicitări, apar numai tensiuni normale și se verifică ipoteza lui *Bernoulli* la suprafața corpului. Pentru verificări pe întreaga secțiune transversală se utilizează tehnici experimentale complexe.

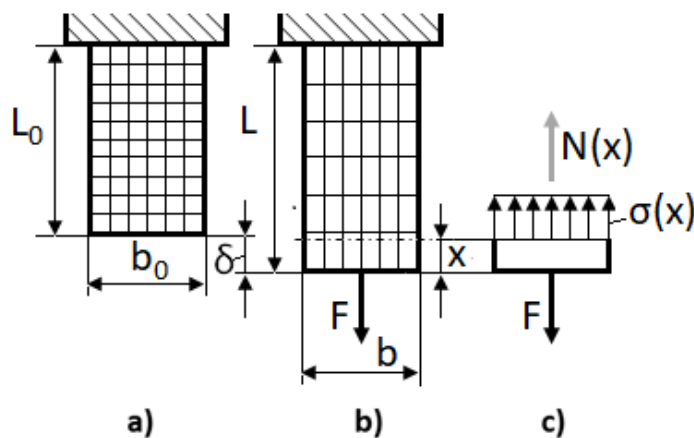


Fig. 4.2. Deformarea unei bare supuse la tracțiune: rețea nedeformată (a); rețea deformată (b); izolarea unei porțiuni și evidențierea tensiunilor

4.3. BARE SOLICITATE CU FORȚE CONCENTRATE

4.3.1. Calculul tensiunilor

Deoarece $\sigma_x = \text{constant}$ pe secțiunea transversală, prima ecuație de echivalență (1.34) poate fi rescrisă

$$N = \sigma_x \int_A dA \quad (4.1)$$

de unde rezultă succesiv

$$N = \sigma_x A \quad (4.2)$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (4.3)$$

Forța axială N se determină din diagrama de eforturi N . Modul de trasare al acestei diagrame este prezentat în *paragraful 4.3.5*.

4.3.2. Dimensionare și verificare

Calculul de dimensionare se face la proiectarea pieselor și constă în stabilirea dimensiunilor minime ale secțiunilor transversale, astfel încât acestea să reziste la încărcările date. Dimensionarea prin metoda tensiunilor admisibile presupune că tensiunile maxime din piesă, luate în modul, nu vor depăși pe cele admisibile, conform relației

$$\sigma_{x, \max} \leq \sigma_a \quad (4.4)$$

Relațiile (4.3) și (4.4) permit stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale a piesei solicitate axial (*calculul de dimensionare*). *Calculul de verificare* se face pentru piese la care se cunosc dimensiunile secțiunii transversale. De obicei, acest calcul constă în verificarea inegalității din relația (4.4). Dacă inegalitatea se verifică, piesa rezistă la încărcările propuse. O altă variantă a acestui calcul presupune determinarea încărcării (sarcinii) maxime pe care o poate suporta piesa, numită *sarcină capabilă*.

Pentru materiale cu comportament liniar-elastic este valabilă *Legea lui Hooke*, dată de relația (2.9).

4.3.3. Calculul deformațiilor și al deplasărilor

Tensiuni constante pe lungimea barei

Pentru bare sau porțiuni de bară cu secțiune constantă, supuse la eforturi axiale constante, alungirea specifică poate fi determinată cu relația

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} \quad (4.5)$$

În relația (4.5.) ε_x are semnul lui σ_x : pozitiv pentru tracțiune și negativ la compresiune. Din relațiile (4.5), (2.9) și (4.3) rezultă:

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad (4.6)$$

Tensiuni variabile pe lungimea barei

Se izolează un element de bară de lungime infinitesimală dx (fig. 4.3). Pe această distanță tensiunile pot fi considerate aproximativ constante și se pot aplica relațiile (4.5) și (4.6)

$$\delta(dx) = \varepsilon_x dx = \frac{Ndx}{EA} \quad (4.7)$$

Alungirea totală a barei se obține integrând expresia (4.7) pe lungimea L

$$\delta = \int_0^L \varepsilon_x(x) dx; \quad \delta = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (4.8)$$

Relația (4.8) poate fi rescrisă sub forma

$$\delta(x) = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{A(x)} dx = \frac{1}{E} \int_0^L \sigma_x(x) dx = \frac{\Omega}{E} \quad (4.9)$$

$$\delta(x) = \frac{N}{A} \cdot \frac{L}{E} = \frac{\sigma_x L}{E}; \quad \sigma_x = \text{const.} \quad (4.10)$$

unde cu Ω s-a notat suprafața cuprinsă între curba $\sigma_x(x)$ și axa Ox .

Această interpretare geometrică poate fi utilă la calculul deplasărilor.

Relațiile (4.9) și (4.10) pot fi folosite pentru calculul deplasării relative, adică deplasarea unei secțiuni a barei față de altă secțiune.

Observație

Pentru unghiuri $2\alpha \leq 10^\circ$ (fig. 4.3), Rezistența Materialelor furnizează rezultate acceptabile privind starea de tensiuni și deformații din bară. Pentru unghiuri mai mari, starea corectă de tensiuni și deformații se determină în Teoria Elasticității.

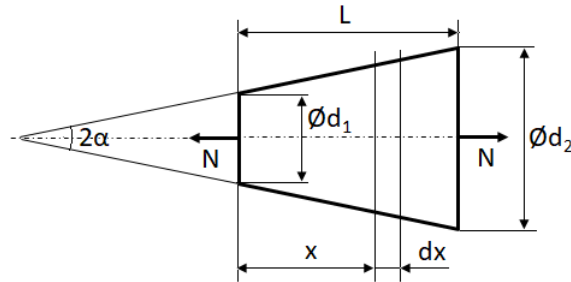


Fig. 4.3. Tracțiunea unei bare cu secțiune variabilă

Bare cu mai multe regiuni

Deplasările absolute ale secțiunilor acestor bare față de un reper fix se calculează prin însumarea algebrică a deplasărilor porțiunilor de bară

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (4.11)$$

unde δ_i se calculează cu (4.6) sau (4.8) iar i reprezintă numărul curent al regiunii analizate. Pe fiecare regiune deplasările au semnul tensiunilor.

4.3.4. Energia potențială de deformare elastică

Expresia energiei specifice de deformare elastică (3.17) va fi particularizată pentru cazul solicitărilor axiale centrice. Pentru o regiune a barei se poate scrie

$$U = \int_0^L U_1 dV = \int_0^L \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (4.12)$$

Ținând cont de relația (4.3) și de faptul că $dV = A(x)dx$, rezultă

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2A(x)E} dx \quad (4.13)$$

Dacă pentru regiunea studiată N și A sunt constante (nu depind de x), expresia energiei devine

$$U = \frac{N^2 L}{2AE} \quad (4.14)$$

Dacă bara are mai multe regiuni, energia totală acumulată va fi suma algebrică a energiilor corespunzătoare de pe cele n regiuni:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (4.15)$$

4.3.5. Trasarea diagramei de efort axial N

În cele ce urmează se va prezenta trasarea diagramei de efort (forță axială N), tensiune σ_x și deplasare δ . Acest lucru va fi făcut pe un exemplu care implică efectuarea calculului de rezistență.

Prin metoda secțiunilor se pun în evidență eforturile și tensiunile. La solicitări axiale tensiunile normale σ sunt uniform distribuite în secțiune (*fig. 4.4*). În *figura 4.5* se prezintă regulile de semn: eforturile și tensiunile sunt considerate pozitive pentru tracțiune (sau dacă pleacă din secțiune) și negative pentru compresiune (sau dacă intră în secțiune).

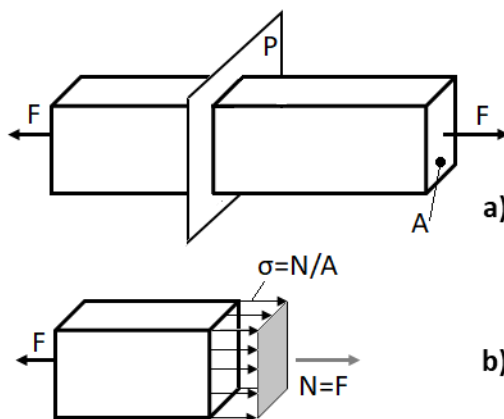


Fig. 4.4. Secționarea barei tracționate (a); echilibrul unei porțiuni de bară

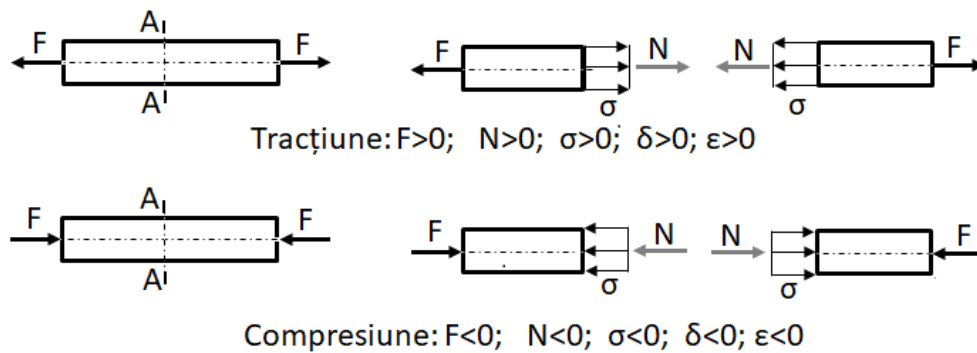


Fig. 4.5. Reguli de semn pentru solicitări axiale

Aplicația 4.1

Să se dimensioneze bara de oțel din figura 4.6, știind că: $F = 150 \text{ kN}$, $L = 400 \text{ mm}$, $\sigma_a = 180 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Se vor trasa diagramele N , σ_x și δ .

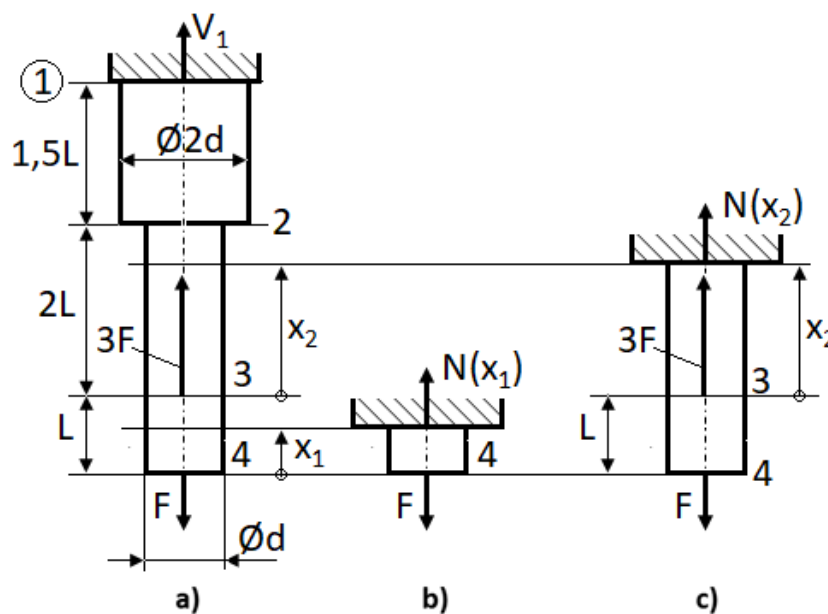


Fig. 4.6. Bară solicitată axial (a), secționarea și izolarea unor porțiuni de bară (b, c)

Rezolvarea problemei cuprinde mai multe etape, care sunt prezentate în continuare.

Etapa 1. Împărțirea barei în regiuni

Axa Ox coincide cu axa barei, dar originea sistemului va fi luată cât mai convenabil, după caz. Din punctul de vedere al încărcărilor, bara prezintă numai două regiuni: 1-3 și 3-4. Prin fiecare regiune se face câte o secțiune (x_1 și x_2). Cu un cerc mic (balustrare) s-a marcat originea secțiunii. Din punctul de vedere al tensiunilor și deformațiilor bara prezintă trei regiuni, deoarece aceste mărimi depind și de valoarea ariei secțiunii transversale.

Etapa 2. Figurarea și calculul reacțiunilor

Deoarece bara este solicitată numai cu forțe axiale, *în încastrare apare doar reacțiunea V_1* . În *figura 4.6* sensul lui V_1 a fost ales arbitrar. Pentru bare în consolă, cum este cea din prezenta aplicație, calculul reacțiunilor poate fi evitat dacă se izolează numai porțiuni de bară dinspre capătul liber. În scop didactic, se va calcula totuși reacțiunea V_1 , scriind proiecția forțelor pe axa Ox și admitând sensul lui F pozitiv

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F - 3F - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -2F \quad (4.16)$$

Semnul minus arată că sensul lui V_1 este opus celui din *figura 4.6*.

Etapa 3. Trasarea diagramei de efort N

Din regiunea 3-4 se izolează porțiunea de lungime x_1 , (*fig. 4.6b*), cu $x_1 \in [0, L]$. Se consideră încastrare în secțiune. În acest caz efortul $N(x_1)$ poate fi determinat din ecuațiile de echilibru

$$N(x_1) = F \quad (4.17)$$

Din regiunea 1-3 se izolează porțiunea de bară de lungime $L+x_2$, cu $x_2 \in [0, 3,5L]$ și se procedează ca mai sus. În *figura 4.6c*, sensul lui $N(x_2)$ a fost figurat pozitiv. Scriind ecuațiile de echilibru, se obține

$$N(x_2) = F - 3F = -2F \quad (4.18)$$

Forța $3F$ a fost considerată negativă deoarece este de sens contrar lui F . Efortul $N(x_2)$ rezultă de asemenea negativ (porțiunea de bară de lungime x_2 este supusă la compresiune).

Reprezentarea grafică a funcțiilor $N(x_1)$ și $N(x_2)$ dă diagrama de efort N (fig. 4.7). Porțiunea dintre grafic și axa Ox se hașurează perpendicular pe axa barei. În secțiunea 1 s-a regăsit valoarea reacțiunii V_1 . Se observă că salturile care apar în diagrama N sunt egale cu forțele concentrate care acționează în secțiunile 3 și respectiv 4.

Ca regulă generală, orice forță axială concentrată produce în diagrama N un salt egal în modul cu valoarea forței. Aceste salturi permit o verificare a diagramei N .

Etapă 4. Trasarea diagramei σ_x

Pentru trasarea acestei diagrame se utilizează diagrama N și relația (4.3). Secțiunile barei în cele două regiuni sunt

$$A_{2-4} = \frac{\pi d^2}{4} = A; \quad A_{1-2} = \frac{\pi(2d)^2}{4} = 4A \quad (4.19)$$

Pentru tensiuni se vor considera trei regiuni pe bară, după cum urmează:

- În regiunea 3-4, cu $x_1 \in [0, L]$

$$\sigma_x(x_1) = \frac{N(x_1)}{A} = \frac{F}{A} \quad (4.20)$$

- În regiunea 2-3, cu $x_2 \in [0, 2L]$

$$\sigma_x(x_2) = \frac{N(x_2)}{A} = \frac{-2F}{A} \quad (4.21)$$

- În regiunea 1-2, cu $x_2 \in [2L, 3,5L]$

$$\sigma_x(x_2) = \frac{N(x_2)}{A_{1-2}} = \frac{-2F}{4A} = -\frac{F}{2A} \quad (4.22)$$

În figura 4.7 se vede reprezentarea grafică a funcțiilor σ_x .

Etapă 5. Dimensionarea barei

Diametrul d se determină cu inecuația (4.4). Din diagrama σ (fig. 4.7) rezultă

$$\sigma_{x.\max} = \max \left\{ \left| \frac{F}{A} \right|, \left| -\frac{2F}{A} \right|, \left| -\frac{F}{2A} \right| \right\} = \frac{2F}{A} \quad (4.23)$$

Din (4.23) și (4.4) se obține

$$\frac{2F}{A} \leq \sigma_a \quad (4.24)$$

Înlocuind A din (4.19) rezultă succesiv

$$2 \cdot \frac{4F}{\pi d^2} \leq \sigma_a \quad (4.25)$$

$$d \geq \sqrt{\frac{8F}{\pi \sigma_a}} \quad (4.26)$$

Înlocuind valorile numerice se obține

$$d \geq \sqrt{\frac{8 \cdot 150 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180}} \Rightarrow d \geq 46,06 \text{ mm} \quad (4.27)$$

Valoarea diametrului d se rotunjește, de obicei prin adaos. Rotunjirea prin lipsă este admisă numai dacă astfel σ_a va fi depășit cu cel mult 3%. Această mică depășire a tensiunii admisibile este acceptată prin alegerea corespunzătoare a coeficientului de siguranță c . Valorile adoptate pentru dimensiuni trebuie să fie alese dintre cele recomandate de către standarde. Deoarece valoarea calculată a diametrului este cuprinsă între dimensiunile standardizate de 45 și 50 mm, se adoptă $d = 50 \text{ mm}$. [STAS 75-90]

Etapă 6. Trasarea diagramei δ

Pentru porțiuni de bară, deplasările δ se calculează cu relațiile (4.6), (4.9), (4.10) sau (4.11). Aceste relații dau deplasarea relativă a capetelor unei porțiuni de bară. Când un capăt este fix, ele dau deplasarea absolută.

În diagrama δ se trec însă deplasările absolute, adică raportate la un sistem fix. Acesta va fi ales cu originea în 1 (în încastrare). În aceste condiții, pentru secțiunea x_1 din *figura 4.6* se determină deplasarea

$$\delta(x_1) = \frac{Fx_1}{AE} \quad (4.28)$$

Se observă că deplasările sunt funcții liniare de x . În consecință, se vor calcula deplasările absolute numai în secțiunile 2, 3 și 4 (în încastrare deplasarea este nulă) și apoi valorile astfel obținute vor fi unite prin segmente de dreaptă, pentru a trasa diagrama δ .

Se calculează deformațiile porțiunilor de bară 2-1, 3-2 și 4-3

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0 \\ \delta_{2-1} = \delta_2 &= \frac{\Omega_{1-2}}{E} = \frac{N(x_2) \cdot 1,5L}{A_{1-2}E} = -\frac{2F \cdot 1,5L}{4AE} = -\frac{3}{4} \frac{FL}{AE} \\ \delta_{3-2} &= \frac{\Omega_{2-3}}{E} = \frac{N(x_2) \cdot 2L}{AE} = -\frac{2F \cdot 2L}{AE} = -4 \frac{FL}{AE} \\ \delta_{4-3} &= \frac{\Omega_{3-4}}{E} = \frac{N(x_1) \cdot L}{AE} = \frac{F \cdot L}{AE} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Cu un indice s-au notat în (4.29) deplasările absolute și cu doi indici cele relative (deformațiile). Deplasările absolute vor fi

$$\begin{aligned} \delta_{3-1} = \delta_3 &= \delta_2 + \delta_{3-2} = -\frac{19}{4} \frac{FL}{AE} \\ \delta_{4-1} = \delta_4 &= \delta_3 + \delta_{4-3} = -\frac{15}{4} \frac{FL}{AE} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Diagrama δ este prezentată în *figura 4.7*. Pe diagramă se poate figura semnul (+ pentru tracțiune, - pentru compresiune) sau sensul deplasării (cu săgeată).

Înlocuind valorile numerice în (4.30), se obține

$$\delta_2 = -0,11 \text{ mm}; \delta_3 = -0,69 \text{ mm}; \delta_4 = -0,55 \text{ mm} \quad (4.31)$$

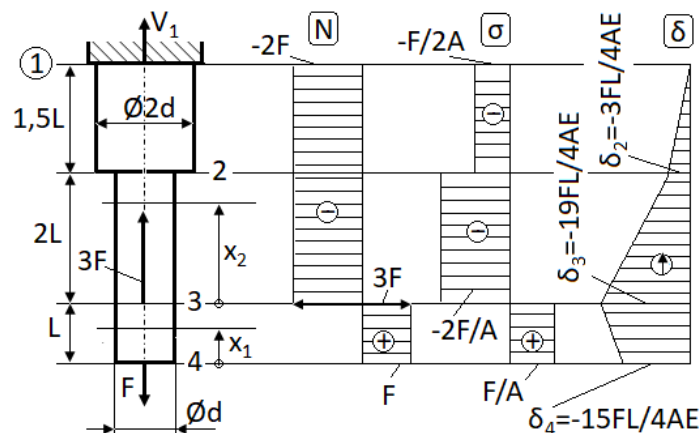


Fig. 4.7. Bară solicitată axial și diagramele N , σ și δ

Observații:

- În diagrama δ nu pot exista salturi, deoarece un salt are ca semnificație fizică ruperea barei în secțiunea respectivă;
- Din figura 4.7 se observă că numai în regiunea 2-3 tensiunile sunt apropiate de valoarea admisibilă, iar în celelalte regiuni tensiunile sunt mult mai mici. De aici rezultă un consum excesiv de material, dar o creștere a rigidității;
- La materiale cu rupere fragilă se face o dimensionare pentru regiunile compresate (cu σ_{ac}) și alta pentru cele tracionate (cu σ_{at}).

Aplicația 4.2

Pornind de la observația a doua, se cere să se reproiecteze bara de la Aplicația 4.1, astfel încât consumul de material să fie minim. Se vor trasa aceleași diagrame.

Pentru un consum minim de material se va dimensiona fiecare regiune în parte, obținând astfel o *bară de egală rezistență* (fig. 4.8). Aceasta este o problemă de optimizare. Vor fi parcurse aceleași etape ca la Aplicația 4.1, cu excepția faptului că diagrama tensiunilor este impusă (în orice secțiuni a barei tensiunea σ trebuie să fie egală în modul cu cea admisibilă σ_a). Valoarea reacțiunii V_1 și diagrama N nu se modifică, dar se renunță la condiția ca diametrul din regiunea 1-2 să fie $2d$.

Dimensionarea barei

Se dimensionează regiunea 3-4, notând diametrul cu d_1

$$\sigma_x(x_1) = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq \sigma_a \Rightarrow d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \sigma_a}} \quad (4.32)$$

Înlocuind cu valorile numerice se obține

$$d_1 \geq 32,6 \text{ mm} \quad (4.33)$$

Pentru dimensionarea regiunii 1-3, unde există efortul $N=2F$ (*fig. 4.7*), diametrul acestei regiuni d rămâne cel calculat cu (4.27). Pentru a obține bara cu volum minim nu se va ține cont de [STAS 75-90] și se adoptă

$$d_1 = 33 \text{ mm}; \quad d = 46 \text{ mm} \quad (4.34)$$

Dacă însă se ține cont de [STAS 75-90], se adoptă $d_1=36\text{mm}$ și $d=50\text{mm}$. Majorarea diametrelor conduce la o scăderea tensiunilor σ , la creșterea volumului corpului și a rigidității sale.

Calculul deplasărilor δ

În încastrare $\delta_1 = 0$, iar celelalte deplasări vor fi

$$\begin{aligned} \delta_{3-1} = \delta_3 &= -\frac{2F \cdot 3,5L \cdot 4}{\pi d^2 E} \approx -\frac{\sigma_a \cdot 3,5L}{E} \\ \delta_{4-3} &= \frac{FL}{AE} = \frac{4FL}{\pi d_1^2 E} \approx \frac{\sigma_a L}{E} \\ \delta_4 &= \delta_3 + \delta_{4-3} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Înlocuind cu valori numerice se obține

$$\delta_3 = -1,20 \text{ mm}; \quad \delta_4 = -0,86 \text{ mm} \quad (4.36)$$

Desenul barei astfel dimensionate și diagramele N , σ și δ sunt prezentate în *figura 4.8*. Se observă că deplasările secțiunilor 3 și 4 sunt sensibil mai mari (în modul) în comparație cu cele de la *Aplicația 4.1*.

Bara de egală rezistență are volumul minim, dar deformațiile sale sunt maxime. Dacă aceste deformații sunt inacceptabile pentru buna funcționare,

se va reface calculul de dimensionare din condiții de rigiditate, impunându-se o alungire specifică admisibilă ε_a .

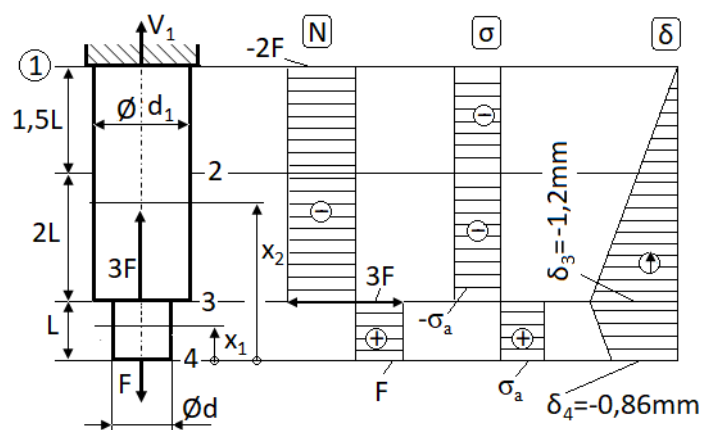


Fig. 4.8. Optimizarea barei din figura 4.7 și diagramele N , σ , δ

Aplicația 4.3

Să se verifice bara de oțel din figura 4.9a, știind că $L = 1\text{m}$, $F = 10\text{ kN}$, $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $A = 100\text{ mm}^2$, $\sigma_a = 160\text{ MPa}$. Să se traseze diagramele N , σ , δ și să se determine secțiunile cu deplasare nulă.

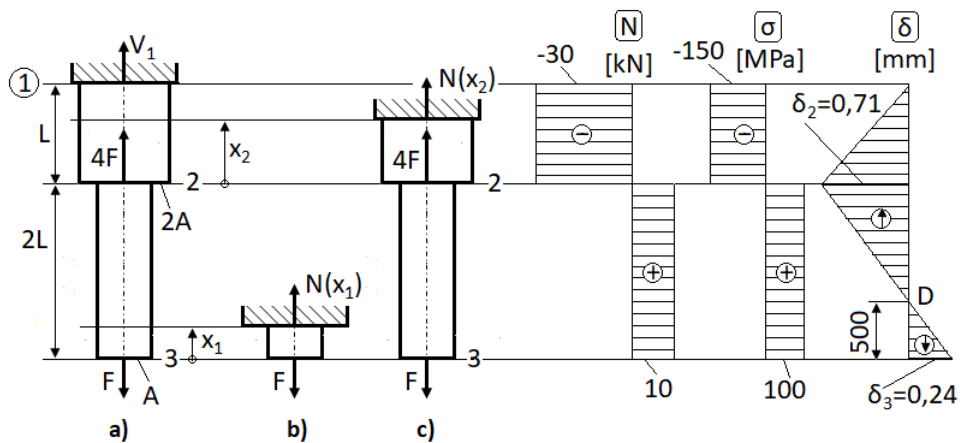


Fig. 4.9. Bară cu tronsoane solicitată axial: secționare și diagramele N , σ și δ

Pentru trasarea diagramelor se parcurg aceleași etape ca la *Aplicația 4.1*.
 În regiunea 1-2 tensiunea este

$$\sigma_{x.\max} = |\sigma_x(x_2)| = \frac{|N(x_2)|}{A_{1-2}} = \frac{|-3F|}{2A}$$

$$\sigma_{x.\max} = \frac{|-3 \cdot 10^4|}{200} = 150 \text{ MPa} < \sigma_a = 160 \text{ MPa}$$
(4.37)

Rezultă că bara rezistă la încărcarea propusă.

Determinarea deplasărilor

$$\delta_2 = \frac{\Omega_{1-2}}{E} = \frac{\sigma_x(x_2)L}{E} = \frac{N(x_2)L}{2AE};$$

$$\delta_2 = -\frac{3 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{200 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -0,714 \text{ mm}$$

$$\delta(x_1) = \delta_2 + \frac{N(x_1)(2L - x_1)}{AE}$$

$$\delta(x_1) = -0,714 + \frac{10^4(2 \cdot 10^3 - x_1)}{100 \cdot 2,1 \cdot 10^5} = 0,238 - 0,476 \cdot 10^{-3} x_1$$

$$\delta_3 = \delta(0) \approx 0,238 \text{ mm}$$
(4.38)

Punând condiție deplasării nule rezultă

$$\delta(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 500 \text{ mm}$$
(4.39)

Această cotă corespunde secțiunii de deplasare nulă D.

4.4. BARE SOLICITATE CU FORȚE DISTRIBUITE

4.4.1. Bare de lungime mare, aflate în câmp gravitațional

În cazul acestor bare greutatea proprie nu mai poate fi neglijată în raport cu forțele concentrate. Pentru o bară de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, forța axială produsă de către câmpul gravitațional va fi uniform distribuită. Ea poate fi calculată împărțind greutatea barei la lungimea ei și reprezintă deci *greutatea unității de lungime* $[N/m]$.

Bare cu secțiune constantă

Fie bara de secțiune constantă din *figura 4.10a*, încărcată cu forța F și cu greutatea proprie. În cele ce urmează, se vor determina relațiile pentru calculul de rezistență și cel al deformațiilor la această bară. Cu G s-a notat greutatea totală a barei.

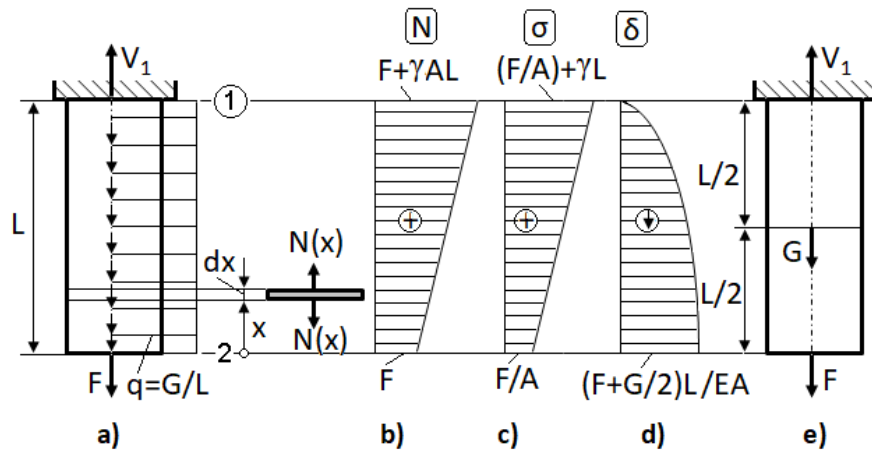


Fig. 4.10. Bară încărcată cu greutatea proprie și o forță concentrată F (a), diagramele N , σ și δ (b, c, d); greutatea considerată ca forță concentrată (e)

Calculul de rezistență

Intensitatea forței distribuite este egală cu greutatea unității de lungime

$$q = \frac{G}{L} \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (4.40)$$

Pentru calculul forței axiale se observă că în secțiunea x acționează forță F și greutatea porțiunii de bară de sub secțiune, de lungime x

$$N(x) = F + \gamma Ax \quad (4.41)$$

unde γ este greutatea specifică a materialului.

Funcția $N(x)$ are deci o variație liniară (*fig. 4.10b*). În încastrare apare reacțiunea V_1 , aleasă arbitrar pozitivă în sus. Din ecuațiile staticii rezultă

$$V_1 = F + \gamma AL = F + G \quad (4.42)$$

Deoarece secțiunea barei este constantă, funcția $\sigma_x(x)$ va prezenta tot o variație liniară (*fig. 4.10c*):

$$\sigma_x(x) = \frac{F + \gamma Ax}{A} = \frac{F}{A} + \gamma x \quad (4.43)$$

Valoarea maximă a tensiunii normale σ se obține în încastrare, pentru $x = L$

$$\sigma_{x.\max} = \frac{F}{A} + \gamma L \quad (4.44)$$

Dimensionarea se va face punând condiția ca tensiunea maximă să nu o depășească pe cea admisibilă

$$\frac{F}{A} + \gamma L \leq \sigma_a \quad (4.45)$$

Din această inecuație rezultă

$$A_{nec} \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma L} \quad (4.46)$$

Calculul deplasărilor

Deplasarea absolută a secțiunii x față de încastrare este egală cu lungirea barei de deasupra secțiunii, de lungime $L - x$. Deplasarea poate fi determinată cu relația (4.10), care devine

$$\delta(x) = \int_x^L \frac{N(x)}{EA} dx = \frac{1}{E} \int_x^L \sigma(x) dx = \frac{\Omega_{x-L}}{E} \quad (4.47)$$

Din (4.43) și (4.47) rezultă succesiv

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{E} \left(\frac{F}{A} \int_x^L dx + \gamma \int_x^L x dx \right) \\ \delta(x) &= \frac{1}{EA} \left[F(L-x) + \frac{\gamma A}{2} (L^2 - x^2) \right] \\ \delta(x) &= \frac{L-x}{EA} \left[F + \frac{\gamma A}{2} (L+x) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Se observă că $\delta(x)$ este o parabolă (fig. 4.10d).

Deplasarea maximă se obține pentru $x = 0$, adică la capătul liber al barei

$$\delta_{\max} = \frac{L}{EA} \left(F + \frac{\gamma AL}{2} \right) \quad (4.49)$$

Se observă că aceeași deformație maximă se obține pentru bara la care greutatea proprie se consideră că acționează ca o forță concentrată în centrul de greutate (fig. 4.10e).

Caz particular: Bară solicitată numai de greutatea proprie ($F=0$)

O particularizare interesantă a problemei de mai sus se obține pentru $F = 0$, când bara este solicitată numai de greutatea proprie. Diagramele sunt trasate în figura 4.11.

Calculul de rezistență

Pentru bara din figura 4.11 tensiunea maximă este

$$\sigma_{\max} = \gamma L \quad (4.50)$$

Se observă că tensiunea nu depinde de secțiunea barei și, în consecință, nu se poate face un calcul de dimensionare. Din (4.50) și (4.4) rezultă

$$\gamma L \leq \sigma_a \quad (4.51)$$

În loc să se determine dimensiunea secțiunii transversale, în acest caz se va stabili lungimea maximă a barei

$$L \leq \frac{\sigma_a}{\gamma} \quad (4.52)$$

Lungimea pentru care se atinge σ_r în bară o vom numi lungime admisibilă

$$L_a = \frac{\sigma_a}{\gamma} \quad (4.53)$$

Dacă în relația (4.53) se înlocuiește tensiunea admisibilă cu cea de rupere, se obține *lungimea de rupere* a barei *sub greutatea proprie*:

$$L_r = \frac{\sigma_r}{\gamma} \quad (4.54)$$

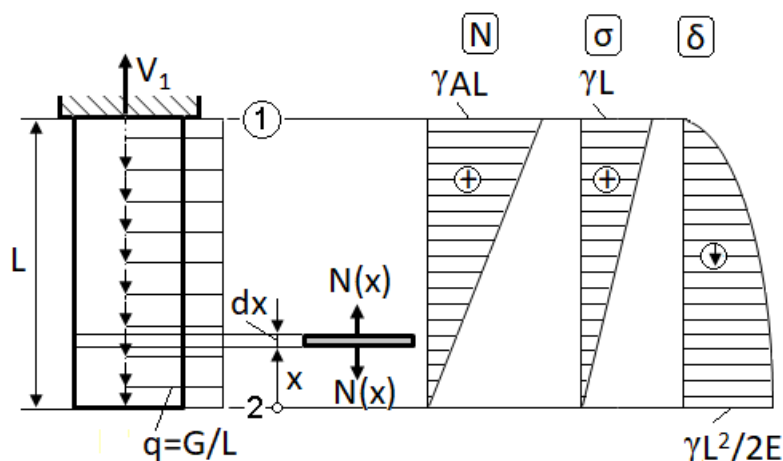


Fig. 4.11. Bară solicitată numai de greutatea proprie și diagramele N , σ și δ

Se observă că L_r nu depinde de secțiunea transversală. Cu alte cuvinte, ruperea sub greutatea proprie a barei/firului dintr-un material se produce întotdeauna la aceeași lungime, indiferent de mărimea secțiunii transversale. Lungimea de rupere sub greutatea proprie reprezintă o importantă *caracteristică de material*. Comparând lungimile de rupere sub greutatea proprie a două materiale, se poate trage concluzia că din materialul cu L_r mai mare pot fi confecționate structuri mai ușoare, având aceeași capacitate portantă. Pentru construcții aerospațiale, de exemplu, vor fi preferate materiale care au lungimea de rupere cât mai mare. În *tabelul 4.1* se prezintă lungimile de rupere sub greutate proprie pentru câteva materiale uzuale. După cum reiese din tabel, unele materiale au lungimea de rupere mare, dar modul de elasticitate scăzut în comparație cu oțelul. Aceste materiale vor fi preferate la construirea unor structuri ușoare (fuzelaje, caroserii, grinzi cu zăbrele), la care deformațiile mai mari, introduse ca urmare a unui modul E mai scăzut, nu modifică buna funcționare.

În cazul pieselor care trebuie să fie cât mai rigide vor fi alese materiale cu modul de elasticitate cât mai mare. Oțelul carbon are un modul de elasticitate foarte ridicat ($E \approx 200 - 210 \text{ GPa}$) și este preferat pentru asemenea aplicații (scule, dispozitive, rulmenți etc.). Oțelul aliat are $E \approx 180 - 210 \text{ GPa}$, tungstenul $E \approx 400 - 410 \text{ GPa}$, iar aluminiul $E \approx 69 - 70 \text{ GPa}$.

Tab. 4.1. Lungimea de rupere sub greutate proprie a unor materiale

Material	$E \times 10^5$ [MPa]	$\gamma \times 10^{-5}$ [N/mm ³]	σ_r [MPa]	$L_r = \sigma_r / \gamma$ [km]
Fontă	1	7,25	150 ÷ 350 (tracțiune)	2,1 ÷ 4,8
Oțel C cu rezistență mare	2,1	7,85	600 ÷ 900	7,6 ÷ 11,5
Oțel aliat	2,1	7,85	800 ÷ 1600	10,2 ÷ 20,4
Aliaje de Al	~ 0,8	2,7	150 ÷ 450	5,6 ÷ 16,7
Magneziu	0,45	1,76	300	17
Poliamidă 6 (Nylon)	0,124	1,06	80	7,6
Epoxi + fibre de sticlă (60%)	0,05	2	1288	64,4
Epoxi + fibre C (60%)	0,15	1,6	1708	106,7

Calculul deplasărilor

Alungirea totală a barei este dată de particularizarea relației (4.49):

$$\delta_{\max} = \frac{\gamma L^2}{2E} \quad (4.55)$$

Pentru construirea unor tiranți lungi, ușori și rigizi, se utilizează indicele de performanță al materialului

$$C_\delta = \frac{E}{\gamma} \quad (4.56)$$

Pentru realizarea unui tirant cu greutate cât mai mică și o rigiditate admisibilă aleasă, C_δ trebuie să fie cât mai mare. Există diagrame care permit alegerea optimă a materialelor utilizate pentru realizarea de structuri ușoare și rigide sau ușoare și rezistente. [Dieter G. ș.a., 1997].

Bare cu secțiune variabilă

Calculul de rezistență

După cum reiese și din *figura 4.10*, la bara verticală cu secțiune constantă, aflată în câmp gravitațional, tensiunea maximă se află în încastrare, secțiunea în care se face dimensionarea. În consecință, materialul barei nu este rațional utilizat, deoarece tensiunea admisibilă se atinge într-o singură secțiune. Pentru a obține bara de volum minim, tensiunea σ_x ar trebui să fie constantă pe toată lungimea și egală cu tensiunea admisibilă. Acest lucru poate fi realizat dacă secțiunea barei variază după o lege care va fi determinată în cele ce urmează. Se obține astfel un corp numit *solid (bară) de egală rezistență* (*fig. 4.12*). În această figură diagrama σ este impusă. Volumul barei de egală rezistență este minim, dar deformarea sa este maximă.

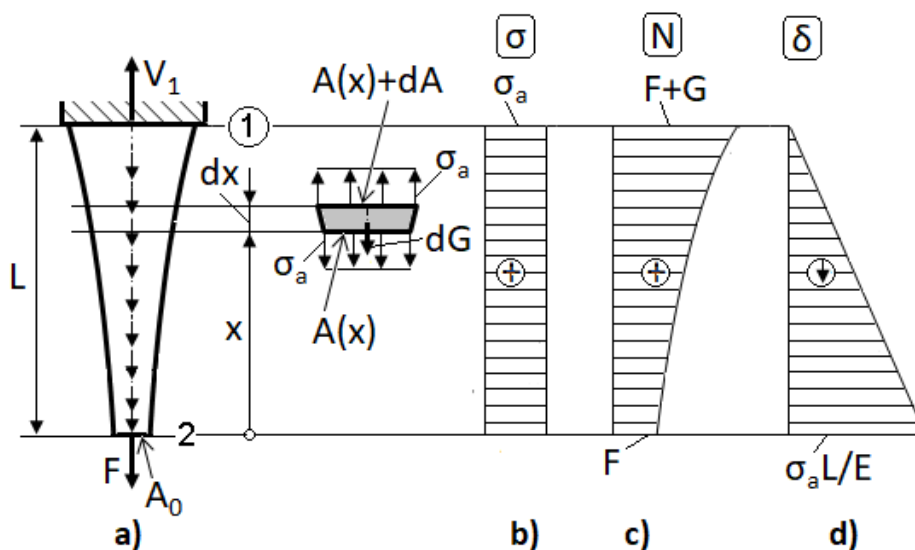


Fig. 4.12. Bară de egală rezistență, izolarea unui element de volum (a) și diagramele σ , N și δ

Pentru un element de volum detașat din bară (*fig. 4.12a*) se scrie ecuația de echilibrul forțelor:

$$\begin{aligned}\sigma_a \cdot [A(x) + dA] - \sigma_a \cdot A(x) - dG &= 0 \\ dG = \gamma dV &\approx \gamma A(x) dx\end{aligned}\tag{4.57}$$

de unde rezultă ecuația diferențială

$$\frac{dA}{A(x)} = \frac{\gamma}{\sigma_a} dx\tag{4.58}$$

Integrând, se obține

$$\ln A(x) = \frac{\gamma}{\sigma_a} x + C\tag{4.59}$$

Constanta de integrare C se obține din condiția (vezi *fig. 4.12a*):

$$x = 0, \quad A(0) = A_0 = \frac{F}{\sigma_a}\tag{4.60}$$

Din (4.59) și (4.60) rezultă

$$\ln A_0 = C\tag{4.61}$$

Înlocuind (4.61) în (4.59) se obține

$$\ln \frac{A(x)}{A_0} = \frac{\gamma}{\sigma_a} x\tag{4.62}$$

de unde rezultă

$$A(x) = A_0 e^{x/L_a}\tag{4.63}$$

unde L_a este dat de relația (4.53), iar e este baza logaritmilor naturali.

Relația (4.63) mai poate fi scrisă

$$A(x) = A_0 \exp \left[\frac{\gamma}{\sigma_a} x \right]\tag{4.64}$$

Dacă $F = 0$, secțiunea A_0 se determină având în vedere alte condiții decât cele de rezistență (de exemplu, tehnologice).

Volumul si greutatea barei

Volumul barei se determină cu relația

$$V = \int_V dV = \int_0^L A(x) dx \quad (4.65)$$

Înlocuind $A(x)$ dat de relația (4.63) și efectuând se obține

$$V = \frac{\sigma_a}{\gamma} A_0 (e^{L/L_a} - 1) = \frac{\sigma_a}{\gamma} (A_L - A_0) \quad (4.66)$$

unde cu A_L s-a notat secțiunea maximă (din încastrare).

Greutatea barei va fi

$$G = \gamma V \quad (4.67)$$

unde V este dat de relația (4.66).

Calculul deformațiilor

Deplasarea absolută a secțiunii x va fi calculată cu relația (4.10):

$$\delta(x) = \frac{\Omega_{x-L}}{E} = \frac{\sigma_a (L-x)}{E} \quad (4.68)$$

Deplasarea maximă (a capătului liber) se obține pentru $x = 0$

$$\delta_{\max} = \frac{\sigma_a L}{E} \quad (4.69)$$

Realizarea barei de egală rezistență

Deoarece secțiunea barei variază după o lege exponențială, realizarea sa este dificilă și scumpă. Se va decide realizarea barei de egală rezistență numai dacă prețul materialului economisit depășește costul manoperei suplimentare pentru realizarea acesteia. Exemple de solide de egală rezistență: baraje (în secțiune), turnul *Eiffel* etc. În ambele cazuri există și încovoiere, produsă de presiunea apei, respectiv a vântului.

În practică, de cele mai multe ori, se preferă aproximarea solidului de egală rezistență cu bare tronconice sau cilindrice cu variația în trepte (cu tronsoane). În acest fel, costul manoperei pentru executarea barei scade substanțial, iar economia de material se apropie mult de cea realizată la solidul de egală rezistență. Ca exemple de asemenea aproximări pot fi amintite: picioarele de pod, coșuri industriale de fum, stâlpi, trenuri de prăjini de foraj. În *figura 4.13* se prezintă câteva aproximări ale barelor de egală rezistență. Se observă că în toate cazurile bara care aproximează conține solidul de egală rezistență, însă în secțiunile periculoase diferențele sunt mici.

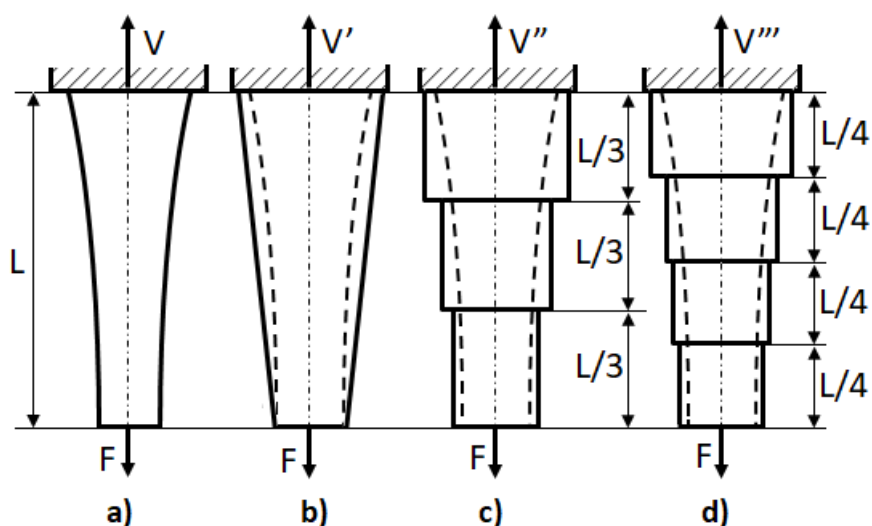


Fig. 4.13. Solidul de egală rezistență (a) și aproximarea sa cu bară tronconică (b), bară cu trei tronsoane (c) și cu patru tronsoane (d)

Se poate demonstra că, la aproximarea cu o bară cu tronsoane, economia maximă de material se obține pentru cazul în care lungimile tronsoanelor sunt egale. Realizarea barelor cu un număr mai mare de patru tronsoane nu este în general economică deoarece, în acest caz, economia de material se apropie sensibil de cea care ar fi realizată prin utilizarea solidului de egală rezistență.

Calculul barelor cu tronsoane

Fie bară cu tronsoane din *figura 4.14*. Se vor trasa diagramele făcând secțiuni cu originea spre capătul liber al barei.

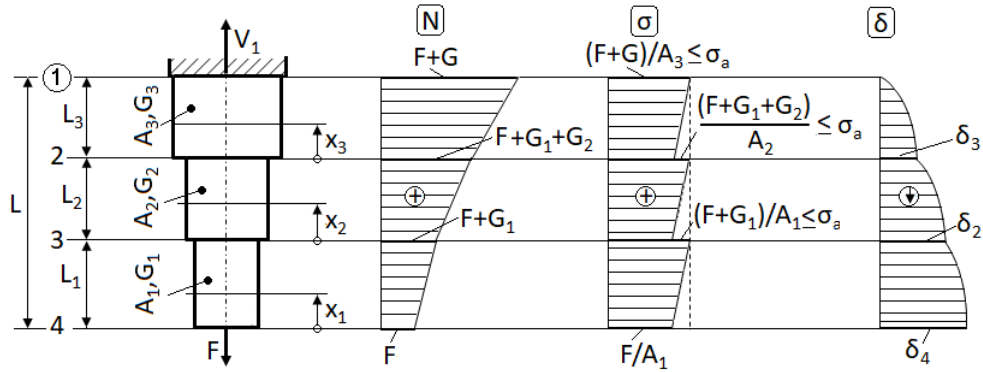


Fig. 4.14. Bară cu tronsoane și diagramele \$N\$, \$\sigma\$ și \$\delta\$

Primul tronson, de lungime \$l_1\$ se dimensionează ca o bară de secțiune constantă, încastrată la partea superioară și încărcată cu forța \$F\$ și greutatea proprie. Secțiunea periculoasă va fi deci la partea superioară a tronsonului (vezi *fig. 4.10*) iar pentru dimensionare se folosește relația (4.46), care poate fi rescrisă

$$A_1 \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma L_1} \quad (4.70)$$

Celelalte tronsoane sunt considerate bare în consolă (încastrate la partea superioară), pentru care greutatea tronsoanelor inferioare acționează ca o forță concentrată. În consecință, orice tronson va fi încărcat cu forța concentrată \$F\$, la care se adaugă greutatea tronsoanelor inferioare (considerată tot ca o forță concentrată) și încărcarea provenită din greutatea proprie a tronsonului (care este o forță distribuită). Astfel, forța concentrată care acționează asupra celui de-al doilea tronson va fi

$$F + G_1 = F + \gamma A_1 L_1 = A_1 \sigma_a \quad (4.71)$$

Dimensionarea tronsonului al doilea se face cu (4.46), care devine:

$$A_2 \geq \frac{A_1 \sigma_a}{\sigma_a - \gamma L_2} = \frac{F \sigma_a}{(\sigma_a - \gamma L_1)(\sigma_a - \gamma L_2)} \quad (4.72)$$

Pentru tronsonul i se poate stabili relația

$$A_i \geq \frac{F \sigma_a^{i-1}}{(\sigma_a - \gamma L_1)(\sigma_a - \gamma L_2) \dots (\sigma_a - \gamma L_i)} \quad (4.73)$$

Când toate cele n tronsoane au lungimi egale

$$L_1 = L_2 = \dots L_n = \frac{L}{n} \quad (4.74)$$

relația (4.73) devine

$$A_i = \frac{F \sigma_a^{i-1}}{\left(\sigma_a - \gamma \frac{L}{n}\right)^i} = \frac{F}{\sigma_a} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_a - \gamma \frac{L}{n}}\right)^i = A_0 \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_a - \gamma \frac{L}{n}}\right)^i \quad (4.75)$$

Calculul deplasărilor se face pentru fiecare tronson în parte (vezi *fig. 4.10e*):

$$\delta_i = \frac{L_i}{A_i E} \left(F + G_1 + G_2 + \dots + G_{i-1} + \frac{G_i}{2} \right) \quad (4.76)$$

Deplasarea totală se calculează cu (4.11).

Pentru bara din *figura 4.14* se calculează deplasările

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \left(F + G_1 + G_2 + \frac{G_3}{2} \right) \frac{L_3}{A_3 E} \\ \delta_3 &= \delta_2 + \left(F + G_1 + \frac{G_2}{2} \right) \frac{L_2}{A_2 E} \\ \delta_4 &= \delta_3 + \left(F + \frac{G_1}{2} \right) \frac{L_1}{A_1 E} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Se observa ca lungimea de rupere sub greutate proprie a barei de egală rezistență este mai mare decât a barei de secțiune constantă.

4.4.2. Bare solicate în câmp inerțial

Bare în rotație

Pot fi asimilate acestei categorii de corpuri paletetele de turbină, palele elicelor de avion sau elicopter etc. În cazul unor turații mari pot fi neglijate tensiunile provenite din încovoiere sau torsiune, în comparație cu cele provenite din solicitările axiale, produse de către forțele de inerție.

Bară cu secțiune constantă

Fie bara din *figura 4.15*, aflată în mișcare de rotație uniformă, cu turația n , în jurul axei orizontale Oy . Bara de lungime R_0 se consideră rigidă. Forța centrifugă este

$$F_c = m\omega^2 r \quad (4.78)$$

unde viteza unghiulară este

$$\omega = 2\pi n \quad (4.79)$$

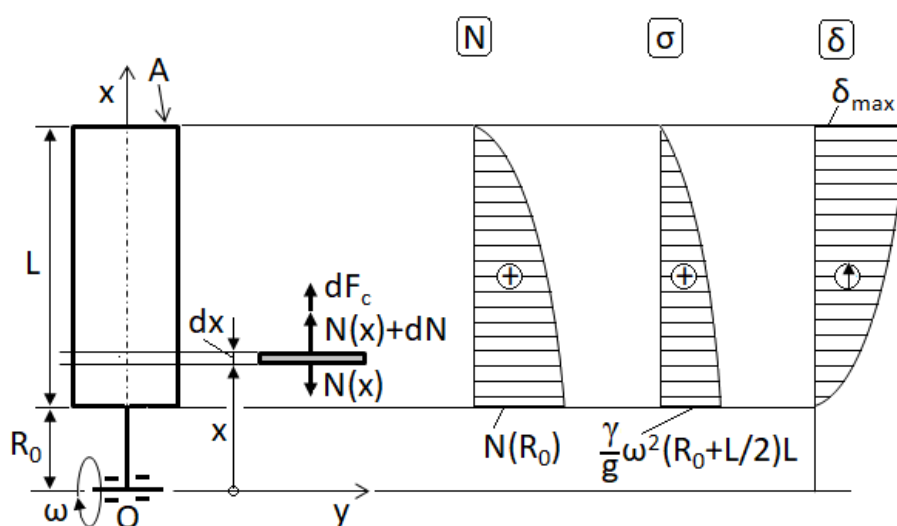


Fig. 4.15. Bară în rotație, izolarea unui element și diagramele N , σ și δ

Asupra unui element de volum izolat din bară, situat la distanța x față de axa de rotație, acționează forța centrifugă elementară

$$dF_c \approx dm\omega^2 x = \frac{\gamma}{g} dV \omega^2 x = \frac{\gamma}{g} A\omega^2 x dx \quad (4.80)$$

Forța axială $N(x)$ este

$$N(x) = \int_x^{R_0+L} dF_c = \frac{\gamma}{g} A\omega^2 \int_x^{R_0+L} x dx = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A\omega^2 [(R_0+L)^2 - x^2] \quad (4.81)$$

$$x \in [R_0, R_0 + L]$$

Funcția $N(x)$ prezintă un punct de maxim pentru $x = 0$, dar această valoare nu aparține intervalului studiat. Valorile funcției la capetele intervalului sunt

$$N(R_0) = \frac{1}{2} \gamma A\omega^2 (2R_0 + L)L; \quad N(R_0 + L) = 0 \quad (4.82)$$

Se scrie tensiunea normală în secțiunea x

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 [(R_0 + L)^2 - x^2] \quad (4.83)$$

Această funcție prezintă de asemenea un punct de maxim la $x = 0$, care nu aparține intervalului studiat. Valorile funcției la capetele intervalului sunt

$$\sigma_x(R_0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (2R_0 + L)L; \quad \sigma_x(R_0 + L) = 0 \quad (4.84)$$

Se observă că funcția $\sigma_x(x)$ *nu depinde de secțiunea barei A* . În consecință, la fel ca în cazul barelor de lungime mare aflate în câmp gravitațional, și la barele în rotație nu poate fi stabilită o dimensiune a secțiunii transversale, dar se stabilește turația maximă pentru o secțiune adoptată.

Dimensionarea din condiții de rezistență presupune satisfacerea inegalității

$$\sigma_{\max} = \sigma_x(R_0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (2R_0 + L)L \leq \sigma_a \quad (4.85)$$

Din (4.85) și (4.79) se determina turația maximă cu care poate fi rotită bara

$$n_{\max} \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_a}{2\rho(2R_0 + L)L}} \quad (4.86)$$

Se observă că turația maximă la care poate fi supusă bara depinde de parametrii constructivi (R_0 , L) și de materialul utilizat (σ_a , densitatea ρ). Pentru parametrii constructivi fixați, se poate afirma că turația maximă depinde practic de materialul barei.

Piese realizate din materiale la care raportul σ_a/γ este mai mare suportă turații mai mari.

Bara de egală rezistență

În *figura 4.15* se observă că materialul barei nu este rațional utilizat, deoarece există o singură secțiune periculoasă ($x=R_0$). Și în cazul barelor în rotație se poate determina un solid de egală rezistență, ca în *figura 4.16*.

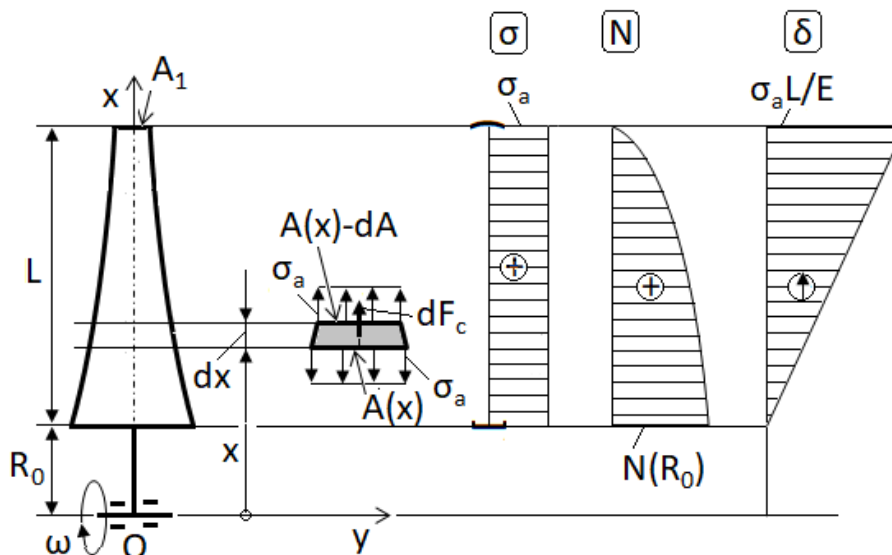


Fig. 4.16. Bară de egală rezistență în rotație, izolarea unui element de volum și diagramele σ , N și δ

Dacă nu există o forță concentrată la capătul liber al barei, situat la $x = R_0 + L$, atunci secțiunea A_1 se determină având în vedere alte condiții decât cele de rezistență (condiții tehnologice, de funcționare etc.). În orice secțiune a barei de egală rezistență tensiunea va fi

$$\sigma_x(x) = \sigma_a \quad (4.87)$$

cu excepția secțiunii de la capătul liber al barei, când aici nu acționează o forță concentrată ($F=0$). Pentru bara de egală rezistență din *figura 4.16*, diagrama σ este impusă. În diagramă s-a sugerat prin simbolul “(” secțiunea de la capătul barei în care tensiunea σ_a este nulă, și cu “[” secțiunea de la celălalt capăt, unde există tensiune $\sigma = \sigma_a$. Raționamentul este similar cu cel de la bara de egală rezistență de lungime mare, aflată în câmp gravitațional. Scriind echilibrul forțelor care acționează asupra elementului de volum din *figura 4.16*, se obține succesiv

$$\begin{aligned} \sigma_a(A(x) - dA) + dF_c - \sigma_a A(x) &= 0 \\ dF_c \approx dm \cdot \omega^2 x &= \frac{\gamma}{g} dV \omega^2 x \approx \frac{\gamma}{g} \omega^2 A(x) x dx \\ \frac{dA}{A(x)} &= \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{\sigma_a} x \cdot dx \end{aligned} \quad (4.88)$$

După integrare rezultă

$$\ln A(x) = \frac{\omega^2}{2g} \frac{\gamma}{\sigma_a} x^2 + C \quad (4.89)$$

Constanta de integrare se determină punând condițiile pe contur: pentru $x = R_0 + L$ avem $A(R_0 + L) = A_1$, care poate fi adoptată tehnologic, dacă în această secțiune nu acționează o forță concentrată F . Înlocuind, rezultă succesiv

$$\begin{aligned} \ln A_1 &= \frac{\omega^2}{2g} \frac{\gamma}{\sigma_a} (R_0 + L)^2 + C \\ \ln \frac{A(x)}{A_1} &= \frac{\omega^2}{2g} \frac{\gamma}{\sigma_a} [x^2 - (R_0 + L)^2] \end{aligned} \quad (4.90)$$

Din (4.90) rezultă

$$A(x) = A_1 \exp \left\{ \frac{\rho \omega^2}{2\sigma_a} \left[x^2 - (R_0 + L)^2 \right] \right\} \quad (4.91)$$

Executarea solidului de egală rezistență este dificilă din cauza acestei legi complexe de variație a secțiunii. El se poate realiza pe mașini cu comandă numerică. În practică este mai simplu să se aproximeze bara de egală rezistență printr-un trunchi de con. De exemplu, paletele de turbină pot fi de forma unui trunchi de con, având o secțiune transversală asemănătoare cu cea a aripilor de avion. Volumul barei de egală rezistență este minim iar deformațiile maxime, în comparație cu oricare altă bară care lucrează în condiții similare. Bara de egală rezistență poate fi supusă la o turație mai mare decât turația limită stabilită pentru bare de secțiune constantă, dată de relația (4.86). Forța axială se determină cu relația

$$N(x) = \int_x^{R_0+L} dF_c = \rho \omega^2 \int_x^{R_0+L} A(x) x dx \quad (4.92)$$

Notând

$$a = \frac{\rho \omega^2}{2\sigma_a} \quad (4.93)$$

se obține

$$N(x) = \frac{A_1}{2ae^{a(R_0+L)^2}} \cdot \left(e^{a(R_0+L)^2} - e^{ax^2} \right) \quad (4.94)$$

Calculul cablului de ascensor

Cele mai mari tensiuni din cablul de ascensor se produc la pornirea acestuia în sus, de la nivelul parterului (fig. 4.17), cu accelerația a .

Se scrie forța axială în secțiunea x

$$N(x) = F + qx + F_i \quad (4.95)$$

unde:

F este greutatea cabinei;

q = greutatea unității de lungime a cablului;
 F_i = forța de inerție.

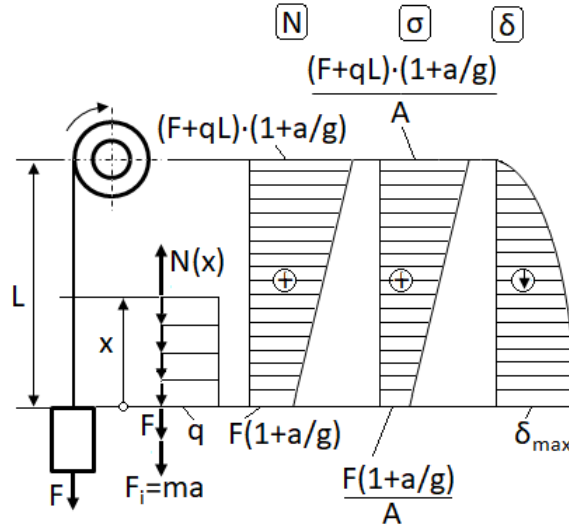


Fig. 4. 17. Cabina și cablul de ascensor, cu diagramele N , σ și δ

În ipoteza unei mișcări uniform accelerate, se obține

$$N(x) = F + qx + ma = F + qx + \frac{F + qx}{g} a \quad (4.96)$$

$$N(x) = (F + qx) \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Tensiunea σ_x din cablu va fi

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F + qx}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right) \leq \sigma_a \quad (4.97)$$

Secțiunea periculoasă se află la partea superioară a cablului, unde trebuie să fie îndeplinită condiția

$$\sigma_{x.\max} = \sigma_x(L) = \frac{F + qL}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right) \leq \sigma_a \quad (4.98)$$

Dacă greutatea cabinei este mult mai mare decât a cablului

$$F \gg qL \quad (4.99)$$

aceasta din urmă poate fi neglijată.

Factorul dinamic

$$\Psi = \frac{a}{g} \quad (4.100)$$

devine nul când mișcarea este rectilinie și uniformă ($a = 0$).

La pornirea ascensorului, deplasarea secțiunii x a cablului este

$$\delta(x) = \frac{1}{E} \int_0^{L-x} \sigma_x(x) dx = \frac{1}{EA} \left(1 + \frac{a}{g} \right) (L-x) \left[F + \frac{q(L-x)}{2} \right] \quad (4.101)$$

Se observă că $\delta(x)$ nu are un punct de extrem în intervalul $[0, L]$.

Deplasarea maximă se produce la capătul inferior al cablului, unde $x=0$

$$\delta_{\max} = \delta(0) = \frac{L}{EA} \left(1 + \frac{a}{g} \right) \left[F + \frac{qL}{2} \right] \quad (4.102)$$

4.5. PROBLEME STATIC NEDETERMINATE (SN)

La problemele static determinate (SD), reacțiunile se calculează din ecuațiile staticii. În cazul problemelor static nedeterminate numărul necunoscutelor NN (reacțiuni sau eforturi) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru NE. Diferența lor dă gradul de nedeterminare al problemei

$$GN = NN - NE \quad (4.103)$$

Pentru $GN = 1$ se spune că problema este *simplu static nedeterminată*; pentru $GN = 2$ *dublu static nedeterminată*, iar pentru $GN = n$, de n ori static nedeterminată. La problemele static nedeterminate reacțiunile se determină prin rezolvarea unui sistem format din ecuațiile staticii completate cu un număr de GN ecuații obținute din *studiul deformațiilor*

corpului. Există două mari grupe de metode pentru *determinarea* ecuațiilor de deformații:

- Metode geometrice (de compatibilitate a deformațiilor);
- Metode energetice.

Metodele geometrice sunt în general mai simple și mai intuitive. Ele nu sunt recomandate însă pentru situații complexe, când dau un volum de lucru prea mare sau chiar *rezultate eronate*, dacă nu se intuiește sensul corect al deformațiilor (la tracțiune sau compresiune). Ridicarea nedeterminării se poate face mai ușor printr-o metodă sau alta, după caz. Din acest motiv, în continuare vor fi prezentate mai multe metode de ridicare a nedeterminării. Pentru a putea face mai ușor o comparație între metode, ele vor fi aplicate pentru început pe același exemplu. Verificarea reacțiunilor se recomandă să se facă rezolvând problema prin două metode. În scop didactic, problemele static nedeterminate au fost împărțite în mai multe categorii.

4.5.1. Sisteme SN cu bare în serie

Aplicația 4.4

Să se dimensioneze bara din *figura 4.18a*, știind că $F = 120 \text{ kN}$, $L = 300 \text{ mm}$, $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Se vor trasa diagramele N , σ și δ .

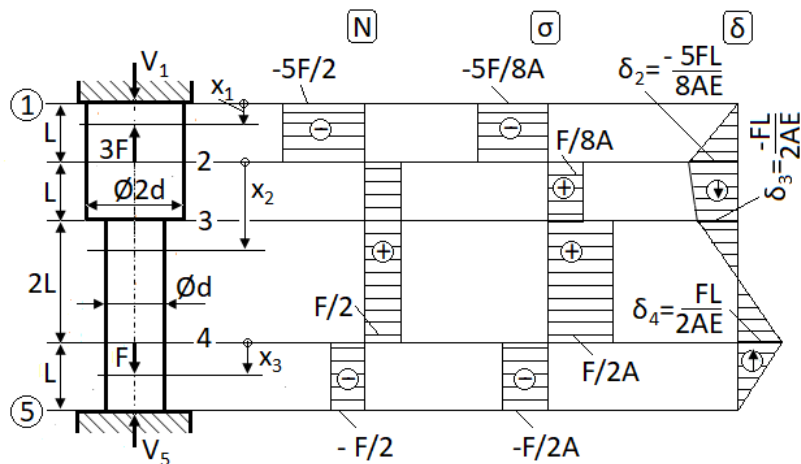


Fig. 4.18. Bară static nedeterminată și diagramele N , σ și δ

Deoarece bara este solicitată numai de către forțe axiale, reacțiunile din încastrări vor fi de asemenea forțe axiale. Se poate scrie o singură ecuație de echilibru, de proiecție a forțelor pe axa Ox, având sensurile reacțiunilor alese arbitrar, considerând că greutatea barei este neglijabilă în raport cu F

$$V_1 - 3F + F - V_5 = 0 \quad (4.104)$$

Conform (4.103) rezultă că problema este simplu static nedeterminată, deoarece NN=2 și NE=1.

În continuare vor fi prezentate câteva metode pentru ridicarea nedeterminării.

Metode geometrice

Metoda deformației totale

Capetele barei fiind încastrate (*fig. 4.18*), acestea nu se deplasează. În consecință, lungimea totală a barei rămâne constantă sau, altfel spus, alungirea totală este nulă

$$\delta_{tot} = \delta_{1-5} = \delta_{1-2} + \delta_{2-3} + \delta_{3-4} + \delta_{4-5} = 0 \quad (4.105)$$

Notând cu A suprafața secțiunii transversale în regiunile 3-5

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (4.106)$$

în regiunile 1-3 secțiunea va fi

$$\frac{\pi(2d)^2}{4} = 4A \quad (4.107)$$

Explicitând (4.105) se obține succesiv

$$\begin{aligned} \delta_{tot} &= \frac{N(x_1)L}{4AE} + \frac{N(x_2)L}{4AE} + \frac{N(x_2)2L}{AE} + \frac{N(x_3)L}{AE} = 0 \\ -\frac{V_1}{4} + \frac{3F - V_1}{4} + 2(3F - V_1) + (3F - V_1 - F) &= 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

Din (4.108) rezultă

$$V_1 = \frac{5}{2} F \quad (4.109)$$

Înlocuind în (4.104) se obține

$$V_5 = \frac{1}{2} F \quad (4.110)$$

S-au aflat toate necunoscutele sau, altfel spus, s-a ridicat nedeterminarea. Având reacțiunile, se pot trasa diagramele N și σ (fig. 4.18). Din diagrama σ se observă că regiunea periculoasă este 1-2, unde tensiunile sunt maxime în modul. Calculul de rezistență se face pentru această regiune

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{5}{8} \frac{F}{A} \right| \leq \sigma_a \quad (4.111)$$

Înlocuind A din (4.106) rezultă succesiv

$$d \geq \sqrt{\frac{5F}{2\pi\sigma_a}}; \quad d \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 12 \cdot 10^4}{2 \cdot \pi \cdot 150}}; \quad d \geq 25,2 \text{ mm} \quad (4.112)$$

Se adoptă valoarea standardizată $d = 28 \text{ mm}$, conform STAS 75-90.

Pentru trasarea diagramei δ se observă că

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_5 = 0; \quad \delta_{2-1} = \delta_2 &= \frac{N(x_1)L}{4AE} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{FL}{AE} \\ \delta_{3-2} &= \frac{N(x_2)L}{4AE} = \frac{1}{8} \cdot \frac{FL}{AE}; \quad \delta_{4-3} = \frac{N(x_3)2L}{AE} = \frac{FL}{AE} \\ \delta_{3-1} = \delta_3 = \delta_2 + \delta_{3-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{FL}{AE} \\ \delta_{4-1} = \delta_4 = \delta_3 + \delta_{3-4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{FL}{AE} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Înlocuind valorile numerice se obține

$$\delta_2 = -0,174 \text{ mm}; \quad \delta_3 = -0,139 \text{ mm}; \quad \delta_4 = 0,139 \text{ mm}.$$

Metoda îndepărtării reazemului

La bara din *figura 4.18* se îndepărtează unul dintre reazeme și se permite deformarea liberă a barei (*fig. 4.19b*). Asupra barei deformate se aplică apoi numai forța V_5 , care produce o deformăție egală și de sens contrar (*fig. 4.19d*). Reacțiunea V_5 se calculează din egalarea celor două deformații.

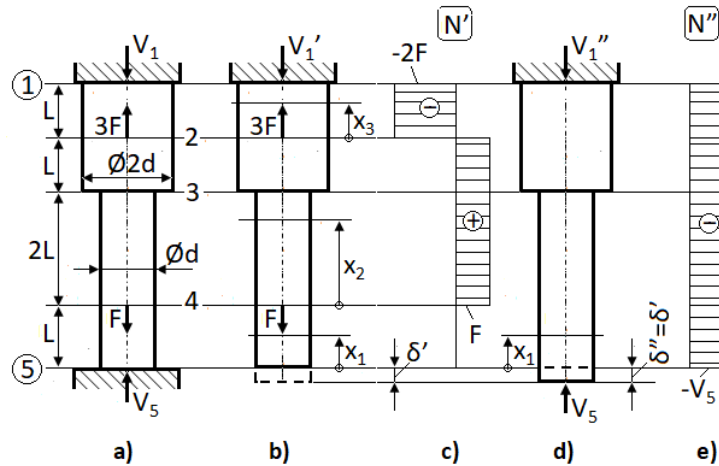


Fig. 4.19. Bară static nedeterminată (a); îndepărtarea reazemului și diagrama N' (b, c); încărcare cu V_5 și diagrama N'' (d, e)

Deoarece reazemul 5 este fix, se scrie relația între deformații

$$|\delta'| = |\delta''|$$

$$\left| \frac{F \cdot 2L}{AE} + \frac{F \cdot L}{4AE} + \frac{(-2F)L}{4AE} \right| = \left| \frac{(-V_5)3L}{AE} + \frac{(-V_5)2L}{4AE} \right| \quad (4.114)$$

de unde rezultă

$$V_5 = \frac{F}{2} \quad (4.115)$$

Deoarece $V_5 > 0$, sensul din *figura 4.19d* este corect. Reacțiunea V_1 se determină din (4.104). Diagrama N pentru bara reală se poate obține prin sumarea diagramelor N' și N'' . Altfel spus, este îndeplinită relația

$$N(x_i) = N'(x_i) + N''(x_i) \quad (4.116)$$

Metode energetice

Aplicarea teoremei Castigliano

Aplicând fie teorema lui *Castigliano*, fie teorema lui *Menabrea*, se poate scrie că deplasarea reazemului 1 este nulă

$$\frac{\partial U}{\partial V_1} = 0; \quad U = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2 A_i E} \quad (4.117)$$

Din (4.117) și (4.14) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial V_1} &= \sum_i \frac{2 N_i L_i}{2 A_i E} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial V_1} = 0 \\ \frac{N(x_1) L}{4 A E} \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} + \frac{N(x_2) L}{4 A E} \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + \frac{N(x_2) 2 L}{A E} \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + \frac{N(x_3) L}{A E} \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} &= 0 \\ \frac{1}{4} N(x_1) \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} + \frac{1}{4} N(x_2) \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + 2 N(x_2) \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + N(x_3) \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.118)$$

Se scriu forțele axiale și derivatele acestora

$$\begin{aligned} N(x_1) &= -V_1; \quad \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} = -1 \\ N(x_2) &= 3F - V_1; \quad \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} = -1 \\ N(x_3) &= 3F - F - V_1; \quad \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} = -1 \end{aligned} \quad (4.119)$$

Din (4.118) și (4.119) rezultă

$$\frac{1}{4} (-V_1)(-1) + \frac{1}{4} (3F - V_1)(-1) + 2(3F - V_1)(-1) + (2F - V_1)(-1) = 0 \quad (4.120)$$

de unde se obține

$$V_1 = \frac{5}{2} F \quad (4.121)$$

Reacțiunea V_5 se obține înlocuind V_1 în ecuația (4.104), problema continuă cu trasarea diagramelor N , σ și δ , apoi dimensionare, așa ca în exemplele mai sus.

Metoda eforturilor

La această metodă este esențial să se stabilească corect gradul de nedeterminare. Deoarece problema discutată aici este simplu static nedeterminată, sistemul de ecuații (3.51) se reduce la o singură ecuație

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (4.122)$$

Pentru determinarea coeficienților δ_{ij} trebuie să se adopte mai întâi *sistemul de bază*, care este *static determinat*.

Pentru o problemă simplu static nedeterminată sistemul de bază se obține prin înlăturarea unei legături care preia un singur grad de libertate. De asemenea, poate fi înlocuit un reazem cu altul inferior, care preia un grad de libertate mai puțin. Reacțiunea care astfel dispăre se înlocuiește cu o necunoscută X . În cazul de față se poate îndepărta, de exemplu, reazemul 5. Dacă forța $V_5 = X_1$ ar fi cunoscută, sistemul de bază din *figura 5.20b* ar fi static determinat.

Sistemul de bază este întotdeauna static determinat, dar nu este unic. De exemplu, în cazul studiat putea fi îndepărtat reazemul 1 pentru formarea acestuia. Ar fi greșit să se îndepărteze mai multe legături decât gradul de nedeterminare, deoarece sistemul de bază devine astfel mecanism și metoda eforturilor nu mai poate fi aplicată.

Numărul de indici diferiți care apar în ecuația (4.122) ne arată în câte situații distincte se studiază sistemul de bază. Deoarece în acest caz există doi indici (1 și 2), sistemul de bază se studiază în următoarele situații prestabilite:

$X_1 = 0$ și încărcările reale, conform *figurilor 4.20c, d*, rezultând diagrama N_0 ;

$X_1 = 1$ și încărcările reale nule (*fig. 4.20e, f*) obținând diagrama n_1 .

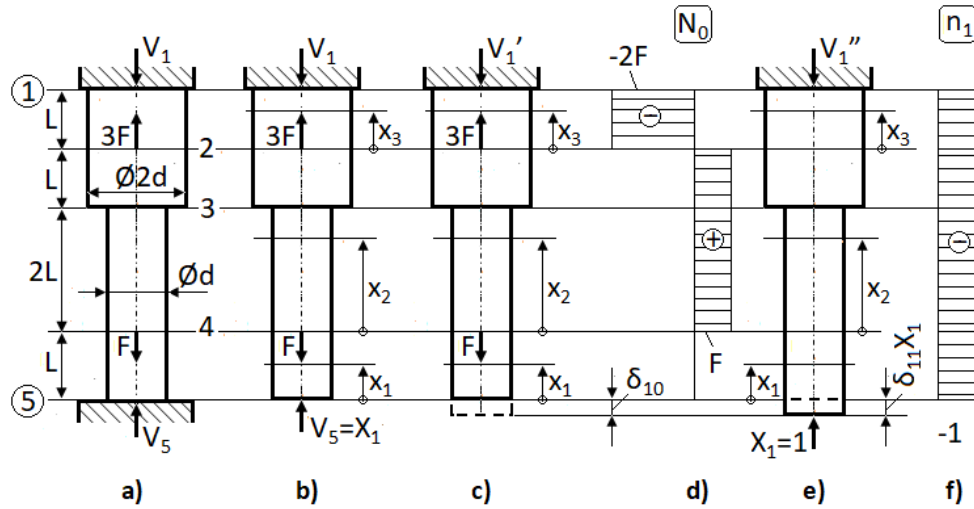


Fig. 4.20. Metoda eforturilor: bară simplu static nedeterminată (a); sistemul de bază (b); încărcări reale și $X_1=0$ (c, d); încărcări reale nule și $X_1=0$ (c, d);

Semnificația notarii convenționale a diagramelor de eforturi fictive cu N_0 și n_1 este următoarea:

- N_0 = încărcare reală (vezi litera majusculă) și $X_1=0$ (vezi indice);
- n_1 = încărcare reală nulă (vezi litera mică) și $X_1=1$ (vezi indice).

Indicii coeficienților de influență δ_{ij} indică eforturile care se folosesc pentru calculul acestora (pentru δ_{ij} se folosesc n_i și n_j): $N_0(x_i)$ și $n_1(x_i)$ pentru calculul lui δ_{10} și respectiv de două ori $n_1(x_i)$ pentru δ_{11} pentru cazul $GN=1$.

$$\delta_{10} = \frac{1}{AE} \int_0^L N_0(x_1) n_1(x_1) dx_1 + \frac{1}{AE} \int_0^{2L} N_0(x_2) n_1(x_2) dx_2 + \frac{1}{4AE} \int_0^L N_0(x_2) n_1(x_2) dx_2 + \frac{1}{4AE} \int_0^L N_0(x_3) n_1(x_3) dx_3 \quad (4.123)$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{AE} \int_0^{2L} F(-1) dx_2 + \frac{1}{4AE} \int_0^L F(-1) dx_2 + \frac{1}{4AE} \int_0^L (-2F)(-1) dx_1 + \quad (4.124)$$

$$\delta_{10} = -\frac{7}{4} \frac{FL}{AE}$$

Pentru determinarea coeficientului δ_{11} se folosește de două ori funcția $n_1(x_i)$, adică în expresia (4.123) se înlocuiește $N_0(x_i)$ cu $n_1(x_i)$

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{1}{AE} \int_0^L n_1^2(x_1) dx_1 + \frac{1}{AE} \int_0^{2L} n_1^2(x_2) dx_2 + \\ & + \frac{1}{4AE} \int_0^L n_1^2(x_2) dx_2 + \frac{1}{4AE} \int_0^L n_1^2(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (4.125)$$

La același rezultat se ajunge considerând numai două regiuni pe bara din figura 4.20e

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{1}{4AE} \int_0^{2L} (-1)^2 dx + \frac{1}{AE} \int_0^{3L} (-1)^2 dx \\ \delta_{11} = & \frac{7}{2} \frac{L}{AE} \end{aligned} \quad (4.126)$$

Din (4.122), (4.124) și (4.126) rezultă

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}; \quad X_1 = \frac{7FL}{4AE} \cdot \frac{2AE}{7L} \Rightarrow X_1 = \frac{F}{2} = V_5 \quad (4.127)$$

Reacțiunea V_1 poate fi obținută apoi din ecuația de echilibru (4.104).

Diagrama de efort $N(x_i)$ pentru bara reală (fig. 4.20a) se poate obține prin adunarea diagramelor N_0 cu n_1 înmulțită cu X_1 , conform relației

$$N(x_i) = N_0(x_i) + n_1(x_i) \cdot X_1 \quad (4.128)$$

În mod similar se poate proceda și în cazul diagramei δ

$$\delta(x_i) = \delta_0(x_i) + \delta_1(x_i) \cdot X_1 \quad (4.129)$$

Metoda elementelor finite (MEF)

Această metodă necesită explicații mai ample înainte de a fi aplicată. Ea prezintă avantaje majore, între care se amintesc următoarele:

- Este utilizată pe scară largă în programele de calculator;

- Nu face diferență între modul de abordare a problemelor static determinate și a celor nedeterminate;
- Permite abordarea unor structuri complexe.

O prezentare aprofundată a metodei depășește cu mult cadrul acestui manual. Totuși, înțelegerea conceptelor de bază poate fi făcută cu ajutorul unor exemple simple. În cadrul altor capitole (solicitarea la torsiune, încovoiere) se va reveni asupra MEF. Prin această metodă pot fi abordate, de asemenea, probleme de mecanica solidului rigid, mecanica fluidelor, transmiterea căldurii, probleme complexe (*multiphysics*) etc. Însușirea metodei este facilitată de existența unei bogate literaturi [Chandupatla T.R. ș.a., 2012; Pascariu I., 1985; Rao S.S., 2005].

Prezentarea MEF

Fie un element elastic (arc sau bară) în consolă, solicitat cu forța F (fig. 4.21). Pentru o diagramă F - δ liniară deformațiile sunt proporționale cu forțele și se poate scrie ecuația dreptei prin origine

$$F = k\delta \quad (4.130)$$

unde k este panta dreptei și se numește *rigiditate*.

Rigiditatea barelor supuse la solicitări axiale poate fi calculată cu expresia

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{L} \quad (4.131)$$

Ideea fundamentală a MEF este aceea că, pentru o structură complexă, descompusă în porțiuni mai mici (*elemente finite EF*), se poate scrie o relație similară cu (4.130), care este de forma

$$\{F\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (4.132)$$

În (4.132) s-a notat:

- $\{F\}$ = matricea coloană a forțelor nodale (care acționează numai în nodurile rețelei de EF);
- $[k]$ = matricea de rigiditate a structurii (pătratică);

- $\{\delta\}$ = matricea coloană a deplasărilor nodale.

Spre deosebire de metoda eforturilor, MEF este o metodă a deplasărilor.

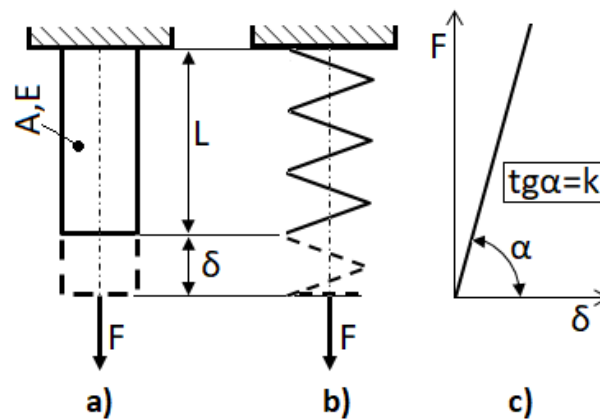


Fig. 4.21. Deformări axiale ale unor corpuri elastice (a, b) și diagrama F - δ , (c)

Deocamdată vor fi discutate numai elementele liniare (de tip bară), cuplate în serie. În mod convențional, acestea vor fi prezentate grafic sub forma unor resorturi în demonstrațiile care urmează. Pentru început se studiază cazul unui element provenind dintr-o structură, la care ambele capete (noduri) se deplasează (situație diferită de cea prezentată în figura 4.21, în care un nod este fix).

În MEF, pentru forțe și deplasări se adoptă un sens pozitiv arbitrar. În cele ce urmează, sensul pozitiv va fi considerat cel din figura 4.22b. În MEF forțele acționează numai în noduri. Pot exista însă noduri fără forțe.

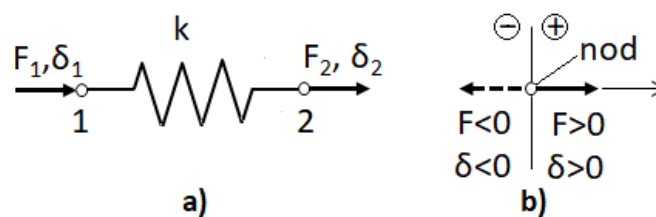


Fig. 4.22. Element finit liniar (a) și convenția de semn pentru forțe și deplasări (b)

Pentru EF din *figura 4.22* vectorul forțelor și cel al deplasărilor nodale pot fi scriși

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.133)$$

Ținând cont de (4.132), rezultă că matricea pătrată de rigiditate $[k]$ trebuie să fie de ordinul doi și relația devine

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.134)$$

unde coeficienții k_{ij} ai matricei de rigiditate sunt necunoscuți. Ei vor fi determinați studiind EF prin metoda suprapunerii efectelor (*fig. 4.23*), unde semnele (=) și (+) semnifică faptul că forțele și deplasările dintr-un nod al EF din cazul (a) sunt egale cu suma forțelor și respectiv deplasărilor din cazurile (b) și (c).

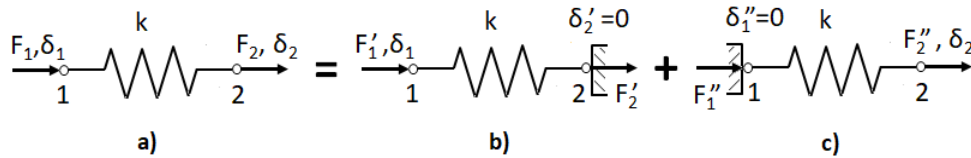


Fig. 4.23. Studiul EF liniar prin suprapunerea efectelor

În *figura 4.23* se observă că EF este studiat în două situații:

- nodul 2 este fix ($\delta_2' = 0$) și deplasarea δ_1 este impusă;
- nodul 1 este fix ($\delta_1'' = 0$) și deplasarea δ_2 este impusă.

În conformitate cu cele de mai sus, se poate scrie

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1' + F_1''; & F_2 &= F_2' + F_2'' \\ \delta_1 &= \delta_1' + \delta_1''; & \delta_2 &= \delta_2' + \delta_2'' \end{aligned} \quad (4.135)$$

Se observă că relațiile dintre deplasări sunt satisfăcute.

Pentru cazurile din *figura 4.23b* și respectiv *figura 4.23c* se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} F_1' &= k \cdot \delta_1; & F_2' &= -F_1' = -k \cdot \delta_1 \\ F_2'' &= k \cdot \delta_2; & F_1'' &= -F_2'' = -k \cdot \delta_2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

Înlocuind (4.136) în (4.135) se obține

$$\begin{cases} F_1 = k\delta_1 - k\delta_2 \\ F_2 = -k\delta_1 + k\delta_2 \end{cases} \quad (4.137)$$

Se observă că acest sistem poate fi scris matriceal

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.138)$$

Sistemul poate fi notat simbolic

$$\{F^e\} = [k^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (4.139)$$

unde s-a notat:

$\{F^e\}$ = matricea coloană a forțelor nodale ale EF;

$[k^e]$ = matricea de rigiditate a EF;

$\{\delta^e\}$ = matricea coloană a deplasărilor nodale ale EF.

Din (4.138) și (4.139) rezultă

$$[k^e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

unde k este dat de relația (4.131).

Din (4.134) și (4.138) rezultă

$$k_{11} = k_{22} = k; \quad k_{12} = k_{21} = -k \quad (4.141)$$

Se observă că matricea (4.140) este simetrică față de diagonala principală ($k_{12} = k_{21}$) și singulară (are determinantul nul).

Cu un raționament asemănător se vor determina relațiile pentru cazul a două EF („resorturi”) cuplate în serie (fig. 4.24).

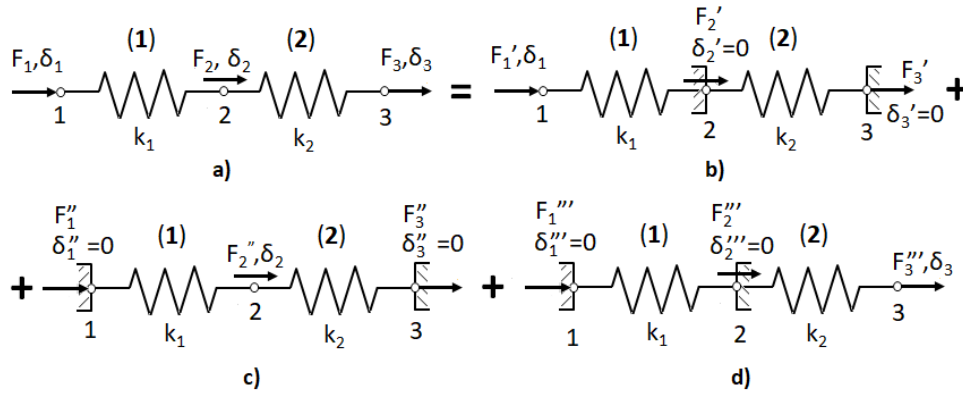


Fig. 4.24. Studiul a două EF în serie, prin suprapunerea efectelor;
cu (1) și (2) s-au notat elementele finite

Pentru ansamblul celor două EF din figura 4.24a relația (4.139) poate fi explicitată

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.142)$$

unde coeficienții k_{ij} ai matricei de rigiditate a structurii urmează să fie determinați.

Ținând cont de distribuția forței F_2 și pe cele două elemente finite (1) și (2) se scrie relația (4.138) pentru fiecare EF

$$F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \quad (4.143)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.144)$$

Deplasarea absolută δ_2 se obține ca sumă algebrică a deplasărilor relative

$$\delta_2 = \delta_2^{(1)} + \delta_2^{(2)} \quad (4.145)$$

Explicitând forțele de pe ultima coloană din *tabelul 4.2*, se rescrie relația (4.142) astfel

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.146)$$

Relația (4.146) poate fi scrisă simbolic sub forma (4.132), iar coeficienții din (4.142) au fost astfel determinați.

Tab. 4.2. Calculul forțelor din figura 4.24

Nr. crt.	Calculul forțelor din figura:			
	4.24b	4.24c	4.24d	4.24a
1	$F_1' = k_1 \delta_1$	$F_1'' = -k_1 \delta_2$	$F_1''' = 0$	$F_1 = F_1' + F_1'' + F_1'''$
2	$F_2' = -k_1 \delta_1$	$F_2'' = (k_1 + k_2) \delta_2$	$F_2''' = -k_2 \delta_3$	$F_2 = F_2' + F_2'' + F_2'''$
3	$F_3' = 0$	$F_3'' = -k_2 \delta_3$	$F_3''' = k_2 \delta_3$	$F_3 = F_3' + F_3'' + F_3'''$

Se observă că pe diagonala principală a matricei de rigiditate a structurii $[k]$ se regăsesc elemente din matricele de rigiditate a celor două EF $[k^{(1)}]$ și $[k^{(2)}]$, care sunt de forma dată în relația (4.138). Aceste matrice sunt “suprapuse” la colțuri prin adunare. La sistemul (4.146) se poate ajunge pornind de la sistemele (4.144), scrise pentru fiecare EF.

Matricele de rigiditate ale EF nu pot fi adunate direct deoarece se referă la ansambluri de deplasări diferite. Adăugând linii și coloane de 0, ambele matrice pot fi dezvoltate astfel încât să se raporteze la același sistem de deplasări. Astfel, sistemele (4.144) devin

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.147)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_2^{(2)} \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.148)$$

Adunând matricele celor două EF și ținând cont de relațiile (4.143) și (4.145) se obține sistemul (4.146). Simbolic, adunarea matricelor de rigiditate se poate scrie

$$\left[k^{(1)} \right] + \left[k^{(2)} \right] = \left[k \right] \quad (4.149)$$

Acest mod de formare a matricei $[k]$ conduce la evitarea metodei de suprapunere a efectelor care este mai laborioasă pentru structuri mai mari.

Formarea matricei de rigiditate a structurii

La formarea matricei $[k]$ se vor respecta următoarele reguli:

- Termenul k_{ii} este egal cu suma rigidităților directe ale EF care fac joncțiunea în nodul i ;
- Termenul k_{ij} este egal cu suma rigidităților indirecte (raportate la nodurile i și j) ale EF cărora le aparțin nodurile i și j .

Se observă din nou că matricea $[k]$ este simetrică față de diagonala principală și este singulară, deoarece structura nu a fost fixată în reazeme, adică nu s-a impus nici o limitare a deplasărilor δ_i . Problema poate fi rezolvată impunând aceste limitări. În urma rezolvării sistemului de tipul (4.132) se obțin întâi deplasările și apoi reacțiunile.

Etapele MEF

În aplicațiile MEF vor fi parcurse următoarele etape:

- Discretizarea structurii în EF și determinarea rigidităților k_i . Forțele acționează numai în noduri, dar pot exista noduri fără forțe;
- Se scriu matricele de rigiditate ale elementelor și apoi din acestea se assemblează matricea de rigiditate a structurii;
- Se aplică condițiile pe contur (de rezemare);
- Se calculează deplasările și apoi reacțiunile, din sistemul (4.132);
- Cu ajutorul reacțiunilor se obțin forțele corespunzătoare fiecărui element.

Având o anumită experiență, unele dintre aceste etape pot fi comprimate.

Aplicarea MEF

Pentru exemplificare, MEF va fi aplicată tot la bara din *figura 4.18*, parcurgându-se etapele prezentate mai sus.

Etapa 1. Bara este discretizată în *minimum* patru EF (*fig. 4.25*). Rigiditățile acestor EF vor fi determinate cu relația (4.131) și exprimate funcție de k

$$k_4 = \frac{AE}{L} = k; \quad k_1 = k_2 = \frac{4AE}{L} = 4k; \quad k_3 = \frac{AE}{2L} = \frac{k}{2} \quad (4.150)$$

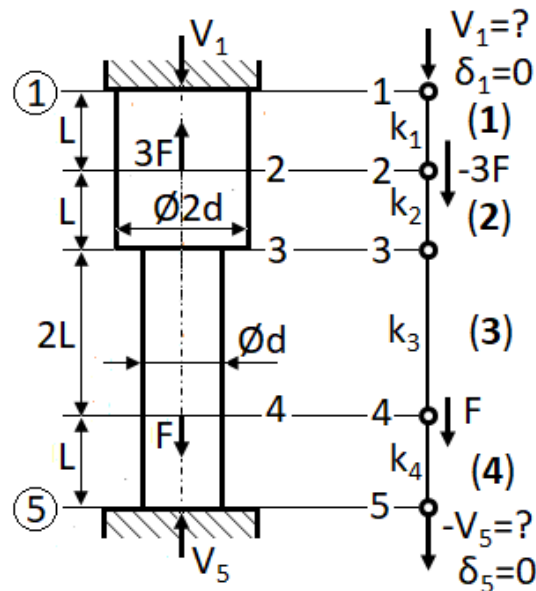


Fig. 4.25. Aplicarea MEF: bară static nedeterminată și discretizarea în EF (b)

Dacă se dorește determinarea deplasărilor și în alte secțiuni decât cele notate în *figura 4.25*, atunci se poate discretiza bara într-un număr mai mare de elemente finite. Pentru prezenta aplicație acest lucru nu este necesar, dar la nevoie, deplasările în orice secțiune pot fi ușor determinate analitic după calculul reacțiunilor și trasarea diagramei deplasărilor δ , având în vedere variația liniară a deplasărilor în regiunile dintre noduri.

Etapele 2 și 3. Condițiile de rezemare sunt $\delta_1 = \delta_5 = 0$ (deplasări nule în încastrări). Necunoscutele vor fi marcate cu semnul întrebării. S-a admis pozitiv sensul forței F . Forțele de sens contrar au fost prezentate în sensul pozitiv, dar li s-a atribuit semnul (-). Se va scrie direct sistemul (4.132), având în vedere expresia matricelor de rigiditate ale elementelor (4.140) și regulile de formare a matricei de rigiditate a structurii [k]:

$$\begin{Bmatrix} V_1 = ? \\ F_2 = -3F \\ F_3 = 0 \\ F_4 = F \\ V_5 = ? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k & -4k & 0 & 0 & 0 \\ -4k & (4k + 4k) & -4k & 0 & 0 \\ 0 & -4k & (4k + k/2) & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & -k/2 & (k/2 + k) & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = ? \\ \delta_3 = ? \\ \delta_4 = ? \\ \delta_5 = 0 \end{Bmatrix} \quad (4.151)$$

Etapă 4. Se observă că prima și ultima coloană a matricei pătrate de rigiditate a structurii vor fi anulate prin înmulțirea cu $\delta_1 = 0$ și respectiv $\delta_5 = 0$. Sistemul (4.151) poate fi descompus în alte două sisteme

$$\begin{cases} -3F = 8k\delta_2 - 4k\delta_3 \\ 0 = -4k\delta_2 + \frac{9}{2}k\delta_3 - \frac{1}{2}k\delta_4 \\ F = -\frac{1}{2}k\delta_3 + \frac{3}{2}k\delta_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3F}{4k} = 2\delta_2 - \delta_3 \\ 0 = -8\delta_2 + 9\delta_3 - \delta_4 \\ \frac{2F}{k} = -\delta_3 + 3\delta_4 \end{cases} \quad (4.152)$$

$$\begin{cases} V_1 = -4k\delta_2 \\ V_2 = -k\delta_4 \end{cases} \quad (4.153)$$

Rezolvând mai întâi sistemul (4.152) rezultă deplasările absolute δ_2 , δ_3 și δ_4 . Acestea permit apoi rezolvarea sistemului (4.153). Rezolvând (4.152) cu determinanți, se obține:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 52 - 2 - 24 = 28 \quad (4.154)$$

$$\Delta_2 = \frac{F}{k} \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{F}{k} \left(-\frac{81}{4} + 2 + \frac{3}{4} \right) = -\frac{35}{2} \frac{F}{k} \quad (4.155)$$

$$\Delta_3 = \frac{F}{k} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{F}{k} \left(4 - \frac{72}{4} \right) = -14 \frac{F}{k} \quad (4.156)$$

$$\Delta_4 = \frac{F}{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{3}{4} \\ -8 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{F}{k} (36 - 6 - 16) = 14 \frac{F}{k} \quad (4.157)$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{8} \frac{F}{k}; \quad \delta_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{2} \frac{F}{k}; \quad \delta_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{F}{k} \quad (4.158)$$

Înlocuind deplasările (4.158) în (4.153) rezultă reacțiunile

$$\begin{cases} V_1 = -4k \left(-\frac{5}{8} \frac{F}{k} \right) = \frac{5}{2} F \\ V_2 = -k \frac{1}{2} \frac{F}{k} = -\frac{1}{2} F \end{cases} \quad (4.159)$$

Se observă că la ridicarea nedeterminării nu s-au scris *ecuațiile de echilibru*, dar acestea *sunt incluse în sistem*. Înlocuind (4.150) în (4.158) se obțin expresiile deplasărilor. În continuare se vor trasa diagramele N și σ și se va

face dimensionarea. Având diametrul d , și deci secțiunea A , se pot calcula deplasările absolute și se trasează diagrama δ .

La MEF nu există deosebiri între modul de rezolvare al problemelor static determinate și al celor static nedeterminate. Acest lucru constituie un avantaj al metodei și facilitează elaborarea programelor pentru calculator. Pentru bara din figura 4.9, de exemplu, matricea încărcărilor nodale va conține o singură necunoscută (V_1), iar cea a deplasărilor nodale include o singură deplasare cunoscută ($\delta_1=0$).

Aplicarea MEF la bare cu forțe distribuite

Aplicarea MEF la bare cu forțe distribuite este mai puțin avantajoasă. Deoarece forțele trebuie să acționeze numai în noduri, pentru obținerea prin MEF a unor rezultate cât mai apropiate de cele determinate analitic, bara trebuie să fie discretizată într-un număr mare de elemente finite. Pentru fiecare EF se calculează forțele concentrate static echivalente. Acestea se distribuie în noduri. Diagramele N , σ și δ vor fi approximate prin variații în trepte. *Cu cât numărul EF este mai mare, cu atât aproximația este mai bună* dar crește și volumul de lucru. Însă abordarea acestui tip de probleme prin MEF cu ajutorul calculatorului este mult facilitată. În literatura de specialitate se dau exemple privind rezolvarea problemelor de RM cu MEF.

4.5.2. Sisteme SN cu bare în paralel

Atât metoda geometrică cât și cea a eforturilor vor fi aplicate în cele ce urmează, deși problemele de acest tip pot fi rezolvate mai ușor prin metode geometrice (scriind relații de compatibilitate a deformațiilor).

Exemplul 4.1

O bucă și o tijă de aceeași lungime, confecționate din materiale diferite, sunt supuse la compresiune, între două *discuri rigide* (fig. 4.26). Știind ariile secțiunilor transversale și modulele de elasticitate ale celor două componente, să se determine eforturile și tensiunile din bare.

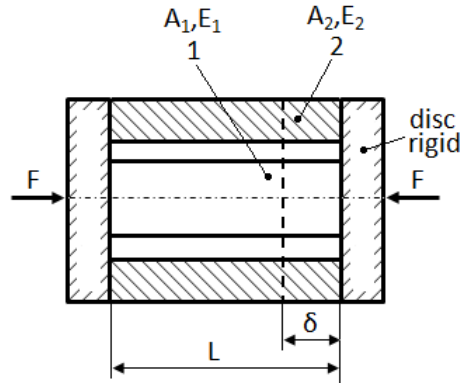


Fig. 4.26. Bară (1) și bușă (2) supuse simultan la compresiune

Metoda geometrică

Necunoscutele sunt cele două eforturi N_1 și N_2 ($NN = 2$) și se poate scrie o singură ecuație de echilibru ($NE=1$), iar problema este simplu static nedeterminată. Se poate scrie ecuația de proiecție a forțelor

$$N_1 + N_2 = F \quad (4.160)$$

Presupunând fix discul din stânga, în figura 4.26 s-a prezentat cu linie întreruptă poziția de echilibru a corpurilor deformate și se poate scrie succesiv

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 = \delta_2 \\ \delta_1 &= \frac{N_1 L}{A_1 E_1}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 L}{A_2 E_2} \\ \frac{N_2 L}{A_2 E_2} &= \frac{N_1 L}{A_1 E_1} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Eforturile N_1 și N_2 se obțin în urma rezolvării sistemului format din ecuațiile (4.160) și (4.161). Utilizând proprietatea rapoartelor egale, rezultă:

$$\frac{N_2}{A_2 E_2} = \frac{N_1}{A_1 E_1} = \frac{N_1 + N_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} = \frac{F}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad (4.162)$$

Astfel se pot determina ușor N_1 și N_2 , care nu depind de lungimea L . Ținând cont de ecuația (4.3), prima egalitate din (4.162) mai poate fi scrisă

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_1}{E_1} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad (4.163)$$

Dimensionarea ambelor corpuri din condițiile de rezistență nu este posibilă. Dacă se înlocuiesc tensiunile σ_1 și σ_2 cu cele admisibile, σ_{a1} și σ_{a2} , satisfacerea relației (4.163) nu este în general posibilă. Se va dimensiona numai unul dintre corpuri, urmând ca pentru celălalt să se facă doar o verificare. Dacă, de exemplu, se dimensionează *corpul 1*, vor fi satisfăcute inegalitățile

$$\sigma_1 \leq \sigma_{a1}; \quad \sigma_2 < \sigma_{a2} \quad (4.164)$$

Metoda eforturilor

Se va ridica nedeterminarea structurii din *figura 4.26* cu metoda eforturilor. Sistemul de corpuri fiind simplu static nedeterminat ($GN=1$), se poate scrie ecuația

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (4.165)$$

unde $X_1=N_1$.

Sistemul de bază ales este prezentat în *figura 4.27a*.

Având doi indici diferiți ai coeficienților δ în relația (4.165), sistemul de bază se studiază în două situații:

- cu încărcările reale și $X_1=0$ și se trasează diagramele N_0 (*fig. 4.27b,c*);
- cu încărcări reale nule și $X_1=1$ și se trasează diagramele n_1 (*fig. 4.27d,e*).

Eforturile din sistemele fictive prezentate în *figurile 4.27b,d* sunt incluse în *tabelul 4.3*, unde cu indice superior s -a notat bara secționată, iar indicele inferior are semnificația atribuită în general în metoda eforturilor.

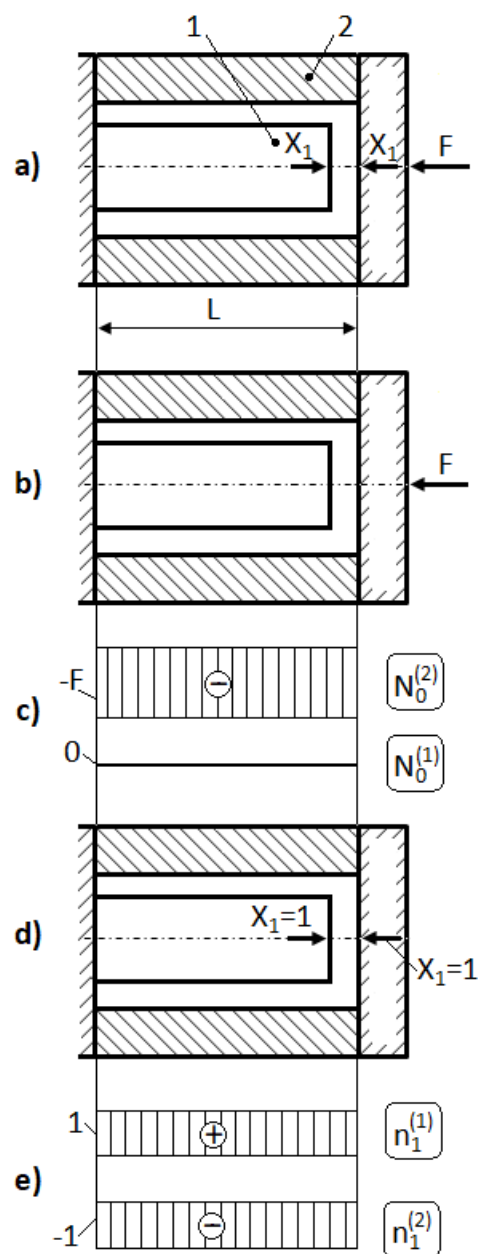


Fig. 4.27. Metoda eforturilor aplicata la ansamblul din figura (4.26): sistemul de bază (a) și sistemele fictive cu diagramele aferente (b-e)

Tab. 4.3. Eforturile fictive în sistemul din figura 4.27

Bara	Eforturi fictive		Caracteristici
	N_0 (fig. 4.27b)	n_1 (fig. 4.27d)	
1	$N_0^{(1)} = 0$	$n_1^{(1)} = 1$	A_1, E_1, L
2	$N_0^{(2)} = -F$	$n_1^{(2)} = -1$	A_2, E_2, L

Cu datele din tabelul 4.3 se pot calcula coeficienții de influență δ_{ij}

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^2 \frac{N_0^{(i)} n_1^{(i)} L}{A_i E_i}; \quad \delta_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{(n_1^{(i)})^2 L}{A_i E_i} \quad (4.166)$$

$$\delta_{10} = \frac{-F \cdot (-1)L}{A_2 E_2} = \frac{FL}{A_2 E_2} \quad (4.167)$$

$$\delta_{11} = \frac{1^2 \cdot L}{A_1 E_1} + \frac{(-1)^2 L}{A_2 E_2} = \frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_1 E_1 A_2 E_2} \cdot L \quad (4.168)$$

Din ecuația (4.165) și (4.167), (4.168) rezultă

$$X_1 = N_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{A_1 E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} F \quad (4.169)$$

Sisteme cu „bare în paralel” pot fi întâlnite în practică la cablurile electrice pentru rețele de înaltă tensiune tip “funie” (cu un cablu central din oțel, înconjurat de cabluri conductoare) precum și la materiale armate cu fire lungi (beton armat, composite cu matrice din polimeri etc., vezi fig. 4.28).

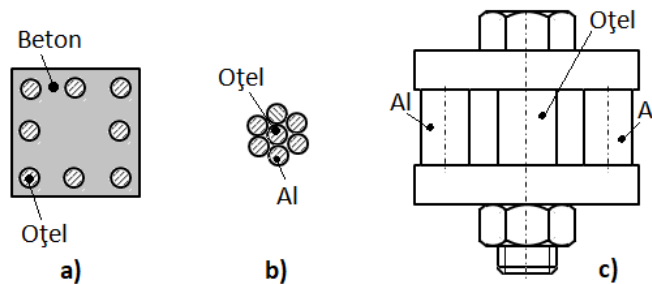


Fig. 4.28. Structuri tip “bare în paralel”: stâlp (a); cablu (b); menhină (c)

4.5.3 Sisteme SN cu bare în serie și în paralel

O bară 1 cu două tronsoane de lungime $2L$ este încastrată la capete, prin tronsonul din stânga trecând o bucă 2 de lungimea acestuia. Ariile secțiunilor transversale ale celor două tronsoane și ale bucei sunt A'_1 și A''_1 , respectiv A_2 . Bara este încărcată la jumătatea tronsonului din dreapta cu forța F (fig. 4.29). Materialele din care sunt construite cele două corpuri au modulele de elasticitate E_1 și respectiv E_2 . Se cere să se determine reacțiunile.

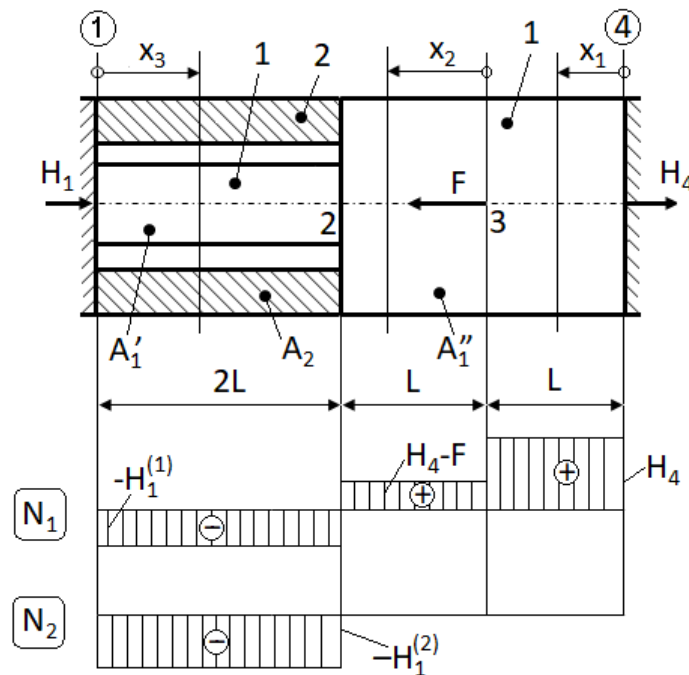


Fig. 4.29. Sistem SN cu bare în serie și în paralel

Metoda geometrică

Reacțiunea H_1 se distribuie pe cele două corpuri, notate cu 1 și 2. Cele două componente ale reacțiunii sunt $H_1^{(1)}$ și $H_1^{(2)}$, unde s-a notat în paranteza bara. Scriind ecuațiile de echilibru și cele de deformații se obține sistemul (4.170). Rezolvând acest sistem, se obțin reacțiunile H_1 și H_4 din relațiile (4.171). Astfel s-a ridicat nedeterminarea pentru ansamblul din figura 4.29.

(4.170)

(4.171)

Deoarece articulațiile nu transmit moment, barele verticale vor fi supuse numai la solicitări axiale. În locul barelor pot fi folosite fire sau cabluri flexibile. Se pot scrie numai două ecuații de echilibru

$$\begin{aligned}\sum V_i = 0 &\Rightarrow N_1 + N_2 - F + N_3 = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 &\Rightarrow N_3(a+b) - F(a+b-c) + N_2a = 0\end{aligned}\quad (4.172)$$

Problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării vor fi utilizate atât metode geometrice, cât și metode energetice.

Metoda geometrică

Se desenează sistemul în stare deformată (*fig. 4.30*), presupunând că barele rămân verticale. Pentru triunghiurile asemenea $A'B'B''$ și $A'C'C''$ poate fi scrisă relația

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{a}{a+b} \quad (4.173)$$

Explicitând lungirile barelor verticale rezultă

$$\frac{N_2 L}{A_2 E_2} - \frac{N_1 L}{A_1 E_1} = \frac{a}{a+b} \left(\frac{N_3 L}{A_3 E_3} - \frac{N_1 L}{A_1 E_1} \right) \quad (4.174)$$

Rezolvând sistemul format din ecuația (4.174) și cele de echilibru (4.172), se determină eforturile N_1 , N_2 și N_3 .

O altă variantă a metodei va fi expusă mai jos.

Considerând sistemul de axe cu originea în A, se pune condiția ca punctele $A'(0, -\delta_1)$, $B'(a, -\delta_2)$ și $C'(a+b, -\delta_3)$ să fie coliniare, obținându-se relația între deformații

$$\begin{vmatrix} 0 & -\delta_1 & 1 \\ a & -\delta_2 & 1 \\ a+b & -\delta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.175)$$

Metoda eforturilor

Se alege sistemul de bază din *figura 4.31a*. Eforturile din barele sistemului de bază încărcat numai cu forța F (*fig. 4.31b*) și respectiv cu $X_1 = 1$ (*fig. 4.31c*), determinate din condițiile de echilibru, sunt prezentate în *tabelul 4.4*, unde s-au notat cu $N_0^{(i)}$ și $n_1^{(i)}$ eforturile fictive din bara i , din *figura 4.31b* și respectiv *figura 4.31c*.

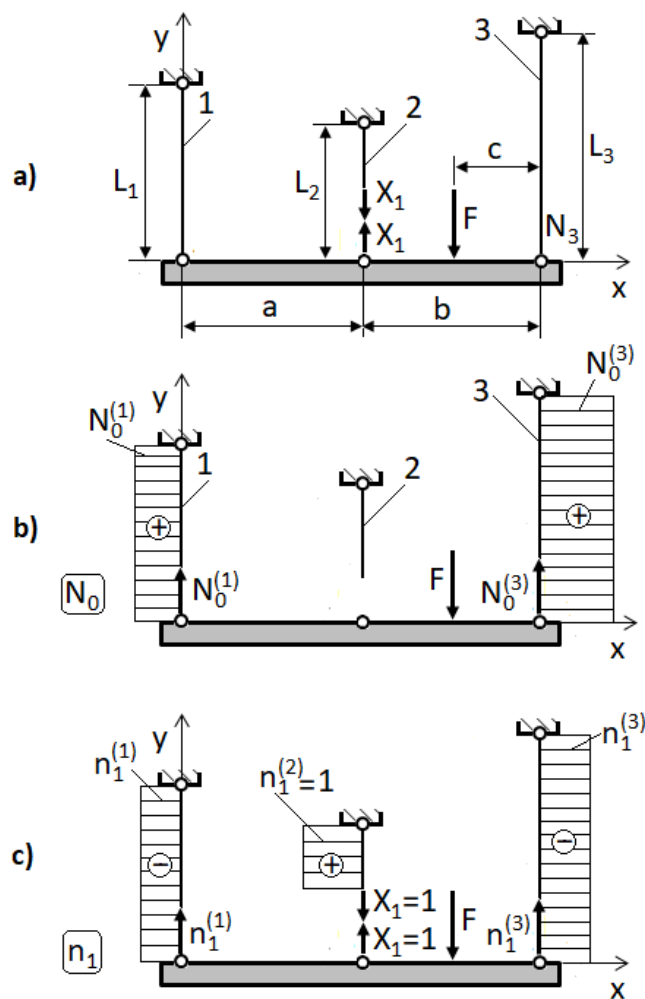


Fig. 4.31. Sistemul de bază (a) încărcat numai cu F (b) și respectiv cu $X_1 = 1$ (c) și diagramele N_0 și n_1

Ecuția scrisă pentru problema simplu static nedeterminată conține coeficienții δ_{ij} , care se determină cu ajutorul datelor din *tabelul 4.4*

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (4.176)$$

Tab. 4.4. Eforturile fictive din barele sistemelor din figurile 4.31b, c

Bara	Eforturi fictive		Caracteristici
	$N_0^{(i)}$	$n_1^{(i)}$	
1	$N_0^{(1)} = \frac{c}{a+b}F$	$n_1^{(1)} = -\frac{b}{a+b} \cdot 1$	A_1, E_1, L_1
2	$N_0^{(2)} = 0$	$n_1^{(2)} = 1$	A_2, E_2, L_2
3	$N_0^{(3)} = \frac{a+b-c}{a+b}F$	$n_1^{(3)} = -\frac{a}{a+b} \cdot 1$	A_3, E_3, L_3

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^3 \frac{N_0^{(i)} n_1^{(i)} L_i}{A_i E_i}; \quad \delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{[n_1^{(i)}]^2 L_i}{A_i E_i}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{A_1 E_1} \cdot \frac{c}{a+b} \cdot F \cdot \left(-\frac{b}{a+b}\right) \cdot L_1 + \frac{1}{A_3 E_3} \cdot \frac{a+b-c}{a+b} \cdot F \cdot \left(-\frac{a}{a+b}\right) \cdot L_3 \quad (4.177)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{A_1 E_1} \cdot \left(-\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot L_1 + \frac{1}{A_2 E_2} \cdot 1^2 \cdot L_2 + \frac{1}{A_3 E_3} \cdot \left(-\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot L_3$$

Din relațiile (4.176) și (4.177) se determină necunoscuta $X_1=N_2$.

4.5.5. Sisteme SN cu bare (fire) concurente

Se vor determina eforturile pentru cazul prezentat în *figura 4.32*. Se va neglija fenomenul de flambaj.

Pentru forțele concurente în nodul A pot fi scrise numai două ecuații de echilibru

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Rightarrow N_1 \sin \alpha = N_3 \sin \beta \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \beta = F \end{aligned} \quad (4.178)$$

Sistemul este simplu static nedeterminat ($NN = 3$, $NE = 2$). Se prezintă mai jos câteva metode de ridicare a nedeterminării. Pentru această categorie de sisteme complexe sunt recomandate în special metodele energetice.

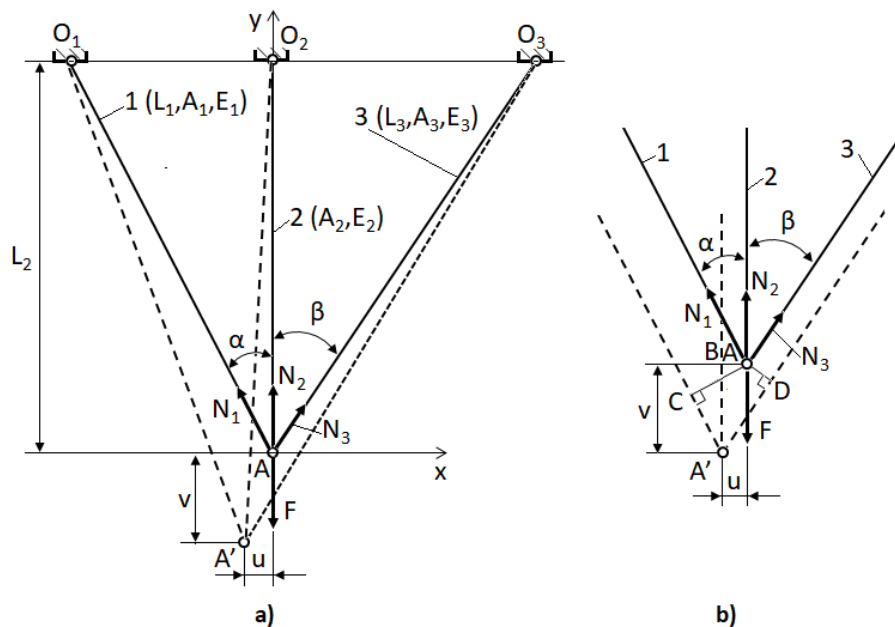


Fig. 4.32. Sistem de bare concurente (a) și izolarea nodului pentru rezolvare cu metoda geometrică aproximativă (b)

Metoda eforturilor

Pentru sistemul simplu static nedeterminat, se scrie ecuația suplimentară (4.176). Se adoptă, de exemplu, sistemul de bază din figura 4.33a. Acesta este static determinat dacă X_1 este cunoscut. Pentru nedeterminarea simplă, sistemul de bază este studiat în două situații:

- încărcat numai cu F ($X_1 = 0$), vezi figura 4.32b;
- încărcat numai cu $X_1 = 1$ ($F = 0$), vezi figura 4.32c.

Se observă că $X_1 = N_2$.

Pentru sistemul din figura 4.33b se scriu ecuațiile de echilibru și se determină eforturile:

$$\begin{cases} N_0^{(1)} \sin \alpha = N_0^{(3)} \sin \beta \\ N_0^{(1)} \cos \alpha + N_0^{(3)} \cos \beta = F \end{cases} \quad (4.179)$$

$$\Rightarrow N_0^{(1)} = \frac{F \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad N_0^{(3)} = \frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Similar, pentru sistemul din figura 4.33c se poate scrie

$$\begin{cases} n_0^{(1)} \sin \alpha = n_0^{(3)} \sin \beta \\ n_1^{(1)} \cos \alpha + n_1^{(3)} \cos \beta + 1 = 0 \end{cases} \quad (4.180)$$

$$\Rightarrow n_1^{(1)} = \frac{-\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad n_1^{(3)} = \frac{-\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

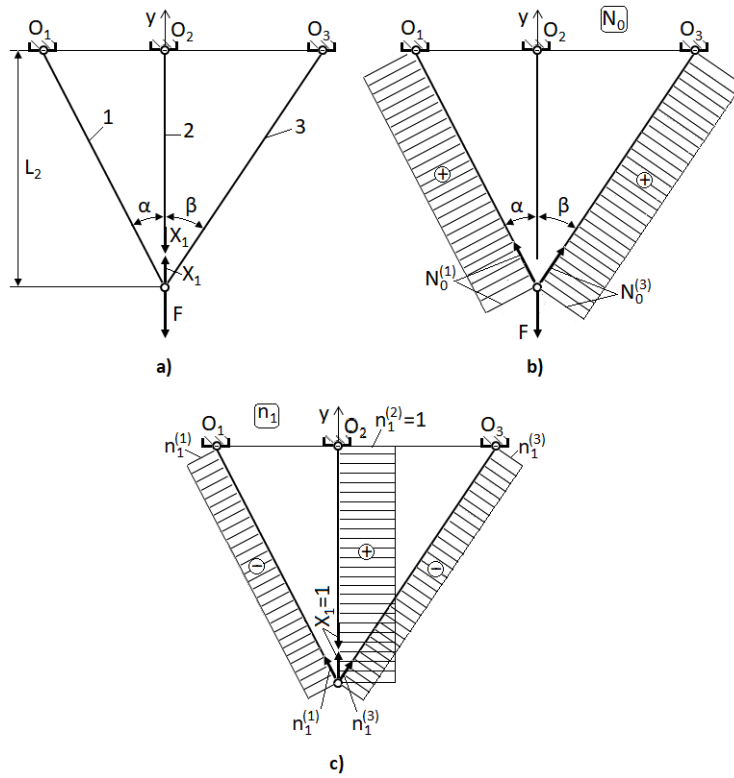


Fig. 4.33. Sistemul de bază (a) pentru fig. (4.32), încărcare cu F (b) și cu $X_1=1$ (c) și diagramele N_0 și n_1

Indicii coeficienților δ_{ij} din prima ecuație ne arată ce eforturi se utilizează pentru calculul acestora (N_0 și n_i sau n_i și n_j):

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{n_i^{(k)} n_j^{(k)} L_k}{A_k E_k} \quad (4.181)$$

La determinarea lui δ_{10} se folosesc eforturile N_0 și n_1

$$\delta_{10} = \frac{-1}{A_1 E_1} N_0^{(1)} L_1 n_1^{(1)} + \frac{1}{A_3 E_3} N_0^{(3)} L_3 n_1^{(3)} \quad (4.182)$$

În expresia de mai sus există numai doi termeni, deoarece $N_0^{(2)} = 0$. $N_0^{(1)} L_1 n_1^{(1)}$ reprezintă suprafața dreptunghiului corespunzător barei 1 din diagrama N_0 , de înmulțit cu latura mică a dreptunghiului din diagrama n_1 de pe bara 1 etc. Înlocuind, se obține

$$\delta_{10} = \frac{-1}{A_1 E_1} \cdot \frac{F \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{L}{\cos \alpha} - \frac{1}{A_3 E_3} \cdot \frac{F \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{L}{\cos \beta} \quad (4.183)$$

Pentru determinarea lui δ_{11} se folosesc de două ori eforturile n_1 din diagrama n_1 , figura 4.33c

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{1}{A_1 E_1} \left(\frac{-\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \frac{L}{\cos \alpha} + \\ & + \frac{1}{A_2 E_2} \cdot 1^2 \cdot L + \frac{1}{A_3 E_3} \left(\frac{-\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \frac{L}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (4.184)$$

Cunoscând coeficienții δ_{10} și δ_{11} , din ecuația (4.176), se calculează X_1

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (4.185)$$

Astfel a fost ridicată nedeterminarea ($X_1 = N_2$) Celelalte două eforturi pot fi obținute din ecuațiile de echilibru (4.179) sau cu relația (4.128):

$$N_1 = N_0^{(1)} + n_1^{(1)} X_1; \quad N_3 = N_0^{(3)} + n_1^{(3)} X_3 \quad (4.186)$$

Metoda geometrică aproximativă

După încărcare, nodul A se deplasează în A'. Deformațiile barelor fiind mici în raport cu lungimea lor, variațiile unghiurilor α și β nu influențează semnificativ valorile funcțiilor trigonometrice. În aceste condiții, se poate considera că pentru sistemul în stare deformată se păstrează valorile unghiurilor α și β (fig. 4.32b). Ducând perpendiculare din A pe direcția barei 1 deformată, se consideră segmentele următoare și relațiile între ele

$$\begin{aligned} [A'C] &\approx \delta_1; \quad [A'D] \approx \delta_3; \\ [A'D] &= [AA'] \cos \beta; \quad [A'C] = [AA'] \cos \alpha \\ \delta_1 &= \frac{N_1 L_1}{A_1 E_1}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{A_2 E_2}; \quad \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{A_3 E_3} \end{aligned} \quad (4.187)$$

Se caută relații geometrice între laturile triunghiurilor A'AC și A'AD. Aceste ecuații, împreună cu cele de echilibru, formează un sistem din rezolvarea căruia rezultă N_1, N_2, N_3, u și v , cum se vede în [Horbaniuc D., 1993]. Metoda este foarte laborioasă și poate da rezultate eronate dacă nu se intuiește semnul corect al deformațiilor barelor (de întindere sau de compresiune).

Metoda geometrică exactă

Deoarece această metodă este laborioasă și conduce la un sistem de ecuații a cărui rezolvare este dificilă, utilizarea ei nu este justificată pentru cazul deformațiilor mici deoarece în asemenea situații metodele aproximative (geometrice sau energetice) dau erori neglijabile. Ea poate fi utilizată însă în cazul deformațiilor mari.

Pentru sistemul elastic din figura 4.32 necunoscutele vor fi: $u, v, N_1, N_2, N_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ și unghiurile dintre barele sistemului deformat, α' și β' . Se notează $L_2=L$. Pentru determinarea necunoscutelor se alege un sistem de coordonate cu originea în A' și dispunem de următoarele grupe de ecuații:

1. Trei ecuații ale dreptelor prin origine, în forma explicită

$$y = m_i x \quad (4.188)$$

unde m_i sunt pantele dreptelor ($i=1, 2$ sau 3);

2. Punctele O_1 , O_2 , și O_3 aparțin fiecare unei drepte de mai sus și coordonatele lor trebuie să verifice ecuațiile dreptelor. Pentru sistemul de referință cu originea în A , coordonatele punctelor sunt $A'(-u, -v)$, $O_1(-L\sin\alpha, L)$, $O_2(0, L)$, $O_3(L\sin\beta, L)$. În sistemul de referință traslat cu originea în A' coordonatele punctelor devin $A'(0, 0)$, $O_1(-L\sin\alpha+u, L+v)$, $O_2(u, L+v)$ și $O_3(L\sin\beta+u, L+v)$;

3. Se calculează unghiurile α' și β' funcție de pantele dreptelor

$$\beta' = \arctg(m_1) - \arctg(m_2); \quad \alpha' = \arctg(m_2) - \arctg(m_3) \quad (4.189)$$

4. Distanțele dintre perechile de puncte se calculează cu relații din Geometria Analitică (de forma de mai jos) și apoi se pot determina alungirile barelor δ_i

$$[A'O_i] = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (4.190)$$

$$[A'O_1] = L_1 + \delta_1; \quad [A'O_2] = L_2 + \delta_2; \quad [A'O_3] = L_3 + \delta_3$$

5. Două ecuații de echilibru ale forțelor din nodul A' vor fi scrise pentru starea deformată a sistemului (teoria de ordinul al II-lea din Rezistența Materialelor), între forța F și eforturile din bare;

6. Se scriu relațiile dintre deformațiile δ_i și eforturile N_i de forma (4.6).

Caz particular: sistem simetric

Pentru $\alpha = \beta$ și bare (fire) cu aceeași secțiune și confecționate din același material, sistemul este simetric și deplasarea punctului A are loc pe direcția axei de simetrie (*fig. 4.34*). Datorită simetriei se poate scrie

$$N_1 = N_3 = N; \quad \delta_1 = \delta_3 = \delta; \quad L_1 = L_3 = \frac{L}{\cos\alpha} \quad (4.191)$$

Prima relație (4.191) poate fi obținută și din ecuația de proiecție a forțelor pe orizontală. De asemenea, se observă că

$$[O_1O_2] = [O_2O_3] = L \cdot \tg\alpha \quad (4.192)$$

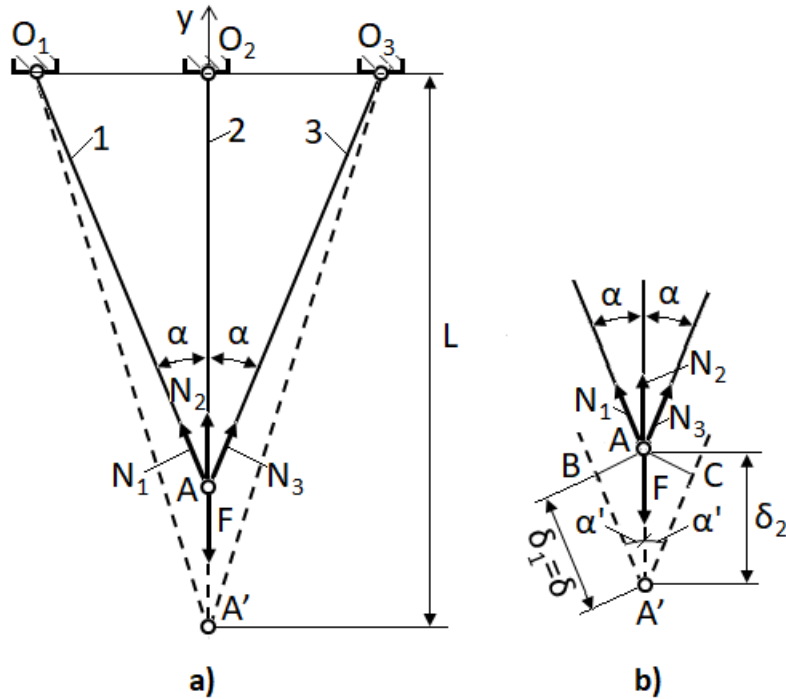


Fig. 4.34. Forță suspendată simetric cu trei fire (a), izolarea nodului și schemă pentru rezolvarea cu metoda geometrică aproximativă (b)

Datorită simetriei, metoda geometrică exactă poate fi mult simplificată. Astfel, în triunghiul dreptunghic $A'O_1O_2$ se scrie $\cos \alpha'$ și teorema Pitagora

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha' = \frac{L + \delta_2}{\frac{L}{\cos \alpha} + \delta} = \frac{(L + \delta_2) \cos \alpha}{L + \delta \cos \alpha} \\ (L \cdot \tan \alpha)^2 + (L + \delta_2)^2 = \left(\frac{L}{\cos \alpha} + \delta \right)^2 \end{array} \right. \quad (4.193)$$

Ecuția de proiecție a forțelor pe verticală va fi scrisă pentru sistemul deformat (teoria de ordinul al II-lea)

$$2N \cos \alpha' + N_2 = F \quad (4.194)$$

Se scriu deformațiile

$$\delta = \frac{N}{AE} \cdot \frac{L}{\cos \alpha}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 L}{AE} \quad (4.195)$$

Necunoscutele sunt $\delta_1 = \delta$, $N_1 = N$, N_2 și δ_2 . Pentru determinarea lor dispunem de un sistem de patru ecuații, când $\cos \alpha'$ se înlocuiește în ecuația (4.194). Din a doua ecuație rezultă relația între deformații

$$\delta_2 = -L + \sqrt{L^2 + \frac{2\delta L}{\cos \alpha} + \delta^2} \quad (4.196)$$

În fața radicalului s-a reținut numai semnul (+) deoarece $\delta_2 > 0$. Utilizând metoda geometrică aproximativă (*fig. 4.34b*) se obține

$$\delta_2 = \frac{\delta}{\cos \alpha} \quad (4.197)$$

La metoda aproximativă ecuațiile de echilibru se scriu pentru sistemul nedeformat (unghiul dintre fire este α). Pentru a compara rezultatele obținute cu cele două metode (exactă și aproximativă) se admite în continuare $L = 1$ m, $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 2$ mm. Cu aceste valori s-a determinat δ_{2e} (cu metoda exactă) și δ_{2a} (cu metoda aproximativă): $\delta_{2e} = 2,3087$ mm; $\delta_{2a} = 2,3094$ mm. În acest caz, metoda aproximativă introduce eroarea

$$e = \frac{\delta_{2a} - \delta_{2e}}{\delta_{2e}} \cdot 100\%; \quad e = +0,03\% \quad (4.198)$$

În alte situații erorile pot fi chiar mai mici, deoarece pentru acest exemplu s-a admis o solicitare aproape de limita de curgere a oțelului ($\varepsilon = \delta/L_0 = 0,2\%$).

Bare concurente pretensionate (montate forțat)

La sistemul din *figura 4.35* se realizează deformarea forțată a sistemului, până la dispariția distanței $\Delta \ll L$ (care poate să apară ca urmare a unei erori de execuție), după care se procedează la asamblarea nodului A de pe bara 3 cu cel de la intersecția barelor 4 și 5. După refacerea sistemului, în barele

acestui există tensiuni sau, altfel spus, *sistemul este pretensionat* înainte de aplicarea încărcărilor. Să se determine forța P care, aplicată în nodul A , îl deplasează pe distanța Δ , permițând astfel montajul forțat. Se cunoaște: L, Δ, α, β , $E_{OL} = E = E' = 210 \text{ GPa}$, $E_{Al} = E'' = E_{OL}/3$, $A_{OL} = A' = A$, $A_{Al} = A'' = 3A$.

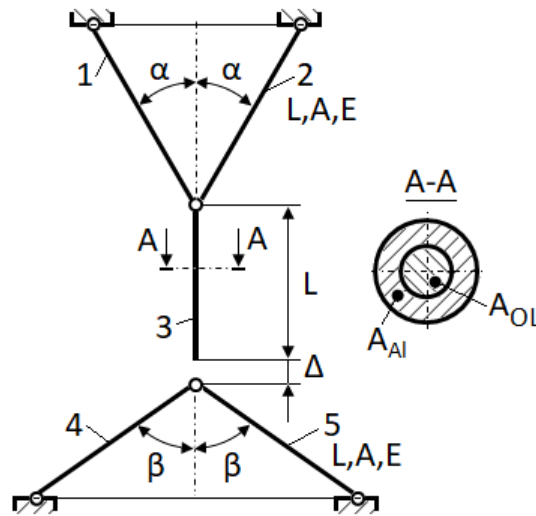


Fig. 4.35. Sistem de bare cu montaj forțat (pretensionat)

Metoda eforturilor

Datorită simetriei de formă, rezemare, încărcare și constructive (secțiuni transversale și materialele barelor simetrice), eforturile din barele simetrice vor fi egale. Sistemul este simplu static nedeterminat și se poate scrie ecuația

$$\delta_{11}X_1 = \Delta \Rightarrow X_1 = \frac{\Delta}{\delta_{11}} \quad (4.199)$$

Se adoptă sistemul de bază din *figura 4.36a*. Pentru barele 4, 1 și 3 (bara 3 este de secțiune compusă) aparținând sistemelor din *figurile 4.36b,c,d*, încărcate cu $X_1 = 1$ eforturile fictive sunt

$$n_1(x_4) = \frac{1}{2 \cos \beta}; n_1(x_1) = \frac{1}{2 \cos \alpha}; n_1(x_3) = 1 \quad (4.200)$$

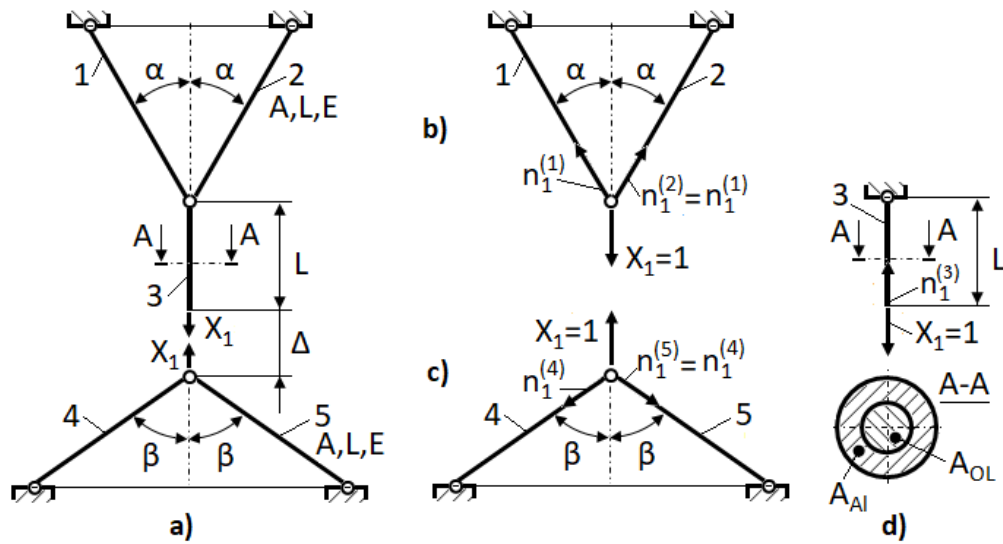


Fig. 4.36. Sistemul de bază pentru fig. 4.34 (a) și determinarea efortului fictiv n_1 (b, c, d)

$$\delta_{11} = \left[\frac{2(n_1^{(1)})^2 \cdot L}{AE} + \frac{2(n_1^{(4)})^2 \cdot L}{AE} + \frac{(n_1^{(3)})^2 \cdot L}{A_3 E_3} \right] \quad (4.201)$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{AE} \left[\left(\frac{1}{2 \cos \alpha} \right)^2 \cdot L + \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^2 \cdot L \right] + \frac{L}{A' E' + A'' E''}$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{AE} \left[\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{2} \right] = \frac{L}{2AE} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) \quad (4.202)$$

$$\delta_{11} = \frac{L}{2AE} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \quad (4.203)$$

Din (4.199) și (4.203) rezultă

$$X_1 = \frac{2\Delta AE}{L} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = P \quad (4.204)$$

Metoda geometrică

Deformațiile elastice fiind mici, modificarea unghiurilor nu afectează semnificativ funcțiile trigonometrice. În aceste condiții se presupune că unghiurile nu se modifică după deformare. Se scriu ecuațiile de echilibru pentru sistemul aflat în stare nedeformată. Pentru ridicarea nedeterminării se studiază grupele de bare în stare deformată și se scriu relații între deformații (fig. 4.37). Se va ține cont de simetrie.

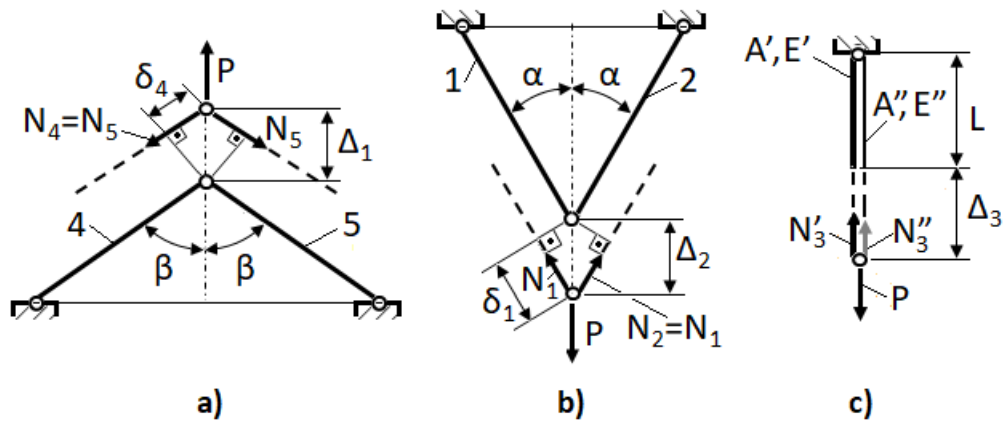


Fig. 4.37. Aplicarea metodei geometrice la sistemul din fig. 4.35

După refacerea nodului, pentru sistemul deformat se poate scrie relația (fig. 4.37)

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta \quad (4.205)$$

Pentru sistemul nedeformat din figura 4.37a se scrie ecuația de echilibru

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow P - 2N_4 \cos \beta = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{P}{2 \cos \beta} = N_5 \quad (4.206)$$

Între deformații există relația

$$\delta_4 = \Delta_1 \cos \beta = \frac{N_4 L}{AE} \Rightarrow N_4 = \frac{AE \Delta_1}{L} \cos \beta \quad (4.207)$$

Din (4.206) și (4.207) rezultă

$$\frac{P}{2 \cos \beta} \cdot \frac{L}{AE} = \Delta_1 \cos \beta \Rightarrow \Delta_1 = \frac{PL}{AE} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \beta} \quad (4.208)$$

Similar, pentru sistemul din *figura 4.36b* se poate scrie

$$\Delta_2 = \frac{PL}{AE} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \quad (4.209)$$

Pentru bara verticală 3 cu secțiune compusă (bare „în paralel”) se scrie relația între deformații

$$\delta_{OL} = \delta_{AL} = \Delta_3 \quad (4.210)$$

Explicitând și aplicând proprietățile rapoartelor egale se determină eforturile, ca în *Exemplul 4.1*

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{N'L}{A'E'} = \frac{N''L}{A''E''} = \frac{PL}{A'E' + A''E''} \\ N' &= \frac{A'E'}{A'E' + A''E''} P; \quad N'' = \frac{A''E''}{A'E' + A''E''} P \end{aligned} \quad (4.211)$$

Înlocuind Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 și A' , A'' , E' , E'' în (4.205) rezultă

$$\begin{aligned} PL \left[\frac{1}{2AE} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) + \frac{1}{A'E' + A''E''} \right] &= \Delta \\ \Rightarrow \frac{PL}{2AE} \left[\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + 1 \right] &= \Delta \end{aligned} \quad (4.212)$$

de unde se obține

$$P = \frac{2\Delta AE}{L} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \quad (4.213)$$

În continuare pot fi determinate eforturile din bare cu relațiile (4.206), (4.211).

4.5.6. Sisteme SN supuse la variații de temperatură

La o variație a temperaturii ΔT , o bară dreaptă se alungește cu cantitatea

$$\delta = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad (4.214)$$

Alungirea specifică corespunzătoare este

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \alpha \cdot \Delta T \quad (4.215)$$

Dacă dilatarea este împiedicată (prin fixarea barei între doi pereți rigizi), într-un material care asculta de legea lui Hooke apare tensiunea

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \alpha \cdot E \cdot \Delta T \quad (4.216)$$

Aceste tensiuni se suprapun peste cele introduse de către încărcări. Tensiunile produse în bare încărcate și supuse la variații de temperatură pot fi determinate prin suprapunerea efectelor. În acest scop se vor determina separat tensiunile din bara cu încărcări și $\Delta T = 0$ și apoi din bara fără încărcări, supusă numai la variații de temperatură.

Tensiunea rezultantă într-o secțiune se obține prin suma algebrică a tensiunilor din cele două situații analizate separat. Similar se poate proceda pentru eforturi și deplasări. Pentru probleme static nedeterminate se pot aplica ecuațiile canonice ale metodei eforturilor, care țin cont de efectul termic (3.53). *Pentru sisteme static nedeterminate supuse la variații de temperatură se recomandă metoda îndepărtării reazemului, care este simplă și intuitivă.*

Sisteme cu bare în serie

Fie sistemul de bare din *figura 4.38*. La creșterea temperaturii ΔT , ambele bare vor fi supuse la compresiune cu efortul $N = -H$. Problema este simplu static nedeterminată. Îndepărtând un reazem, lungirea termică liberă va fi

$$\delta' = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) \Delta T \quad (4.217)$$

Comprimând sistemul inițial (fiecare efect din metoda suprapunerii se aplică pe sistemul inițial, nedeformat) cu forța H , acesta se va deforma mecanic cu cantitatea

$$\delta^m = -\left(\frac{HL_1}{A_1E_1} + \frac{HL_2}{A_2E_2}\right) \quad (4.218)$$

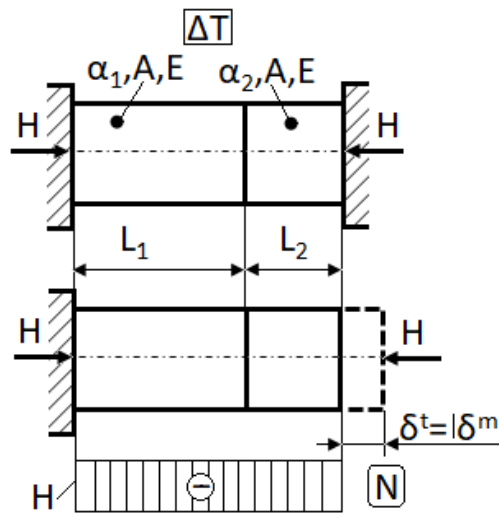


Fig. 4.38. Bare în serie, supuse la o variație de temperatură

Deoarece reazemul este fix, cele două deplasări, termică și mecanică, vor fi egale în modul

$$|\delta^t| = |\delta^m| \Leftrightarrow (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) \cdot \Delta T = H \cdot \frac{A_2 E_2 L_1 + A_1 E_1 L_2}{A_1 E_1 A_2 E_2} \quad (4.219)$$

Din această ecuație se determină H , știind că $A_1 = A_2 = A$.

Sisteme cu bare în paralel

Barele din figura 4.39 sunt sudate la capete de două discuri rigide. Să se determine eforturile care apar când sistemul este supus la variația de temperatură ΔT .

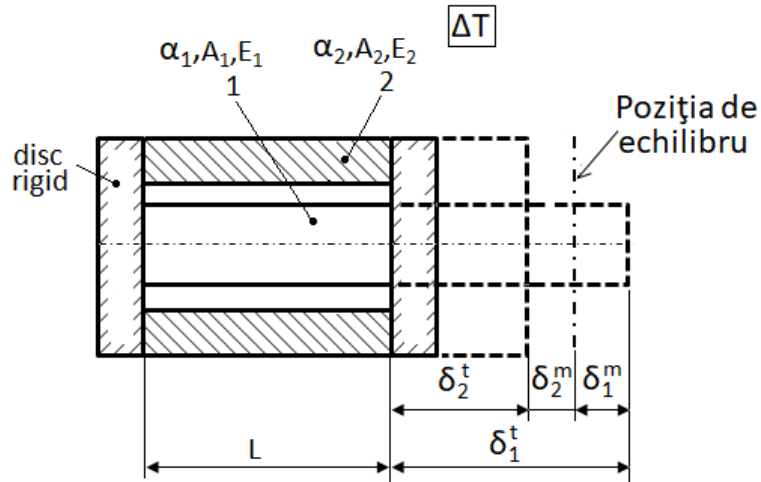


Fig. 4.39. Sistem cu bare în paralel, supus la o variație de temperatură

Fiind un sistem închis, se poate scrie din statică $N_1 = N_2 = N$. Problema este simplu static nedeterminată. Se presupune $\alpha_1 > \alpha_2$ și $\Delta T > 0$. Îndepărtând discul rigid din dreapta se permite dilatarea liberă a barelor cu lungirile “termice”

$$\delta_1^t = \alpha_1 L \Delta T; \quad \delta_2^t = \alpha_2 L \Delta T \quad (4.220)$$

Însă prezența discului rigid din dreapta impune ca cele două bare să aibă aceeași lungime în final. Pentru a realiza acest lucru, bara 1 va fi comprimată, iar bara 2 va fi trăgionată cu alungirile “mecanice”

$$\delta_1^m = \frac{NL}{A_1 E_1}; \quad \delta_2^m = \frac{-NL}{A_2 E_2} \quad (4.221)$$

Din figura 4.39 se observă următoarea relație între deplasări

$$\delta_1^t = \delta_2^t + \delta_2^m + |\delta_1^m| \quad (4.222)$$

Explicitând rezultă în final ecuația din care se determină N

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T = N \frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_1 E_1 A_2 E_2} \quad (4.223)$$

Sisteme cu bare concurente

Să se determine eforturile din barele sistemului prezentat în *figura 4.40*, atunci când este supus unei variații de temperatură ΔT [Curtu I. ș.a., 1988].

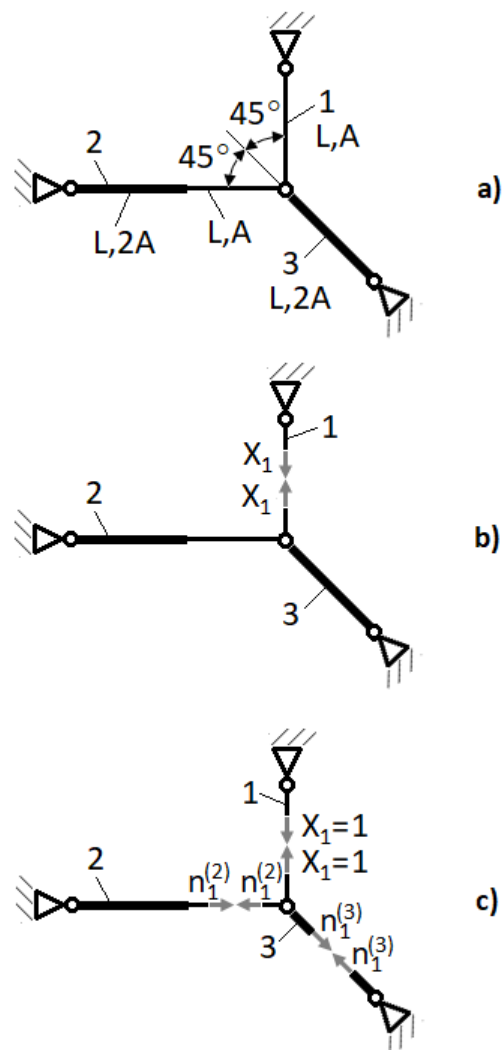


Fig.4.40. Sistem de bare concurente supus la variații de temperatură ΔT (a), sistemul de bază (b) și încărcarea acestuia cu $X_1=1$

În nodul central se întâlnesc trei bare cu eforturi necunoscute. Pentru un nod pot fi scrise două ecuații de echilibru (se pierde ecuația de moment, forțele fiind concurente). În consecință, problema este simplu static nedeterminată.

Pentru rezolvarea problemelor de acest tip se poate folosi metoda eforturilor, în varianta care ține cont și de variația temperaturii (3.53). Pentru un sistem simplu static nedeterminat, supus numai la variații de temperatura, se poate scrie

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1t} = 0 \quad (4.224)$$

unde δ_{11} , δ_{1t} se determină cu relațiile

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{[n_1^{(i)}]^2 L_i}{A_i E_i}; \quad \delta_{1t} = \sum_{i=1}^n n_1^{(i)} \alpha_i L_i \Delta T_i \quad (4.225)$$

Se adoptă sistemul de bază din *figura 4.40b*. Înlocuind $X_1 = 1$ (*fig. 4.40c*) se determină eforturile fictive din barele sistemului din ecuațiile staticii

$$n_1^{(1)} = 1; \quad n_1^{(2)} = \sqrt{2}; \quad n_1^{(3)} = 1 \quad (4.226)$$

Din (4.225) și (4.226) rezultă

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{L}{AE} + \frac{L}{AE} + \frac{L}{2AE} + \frac{(\sqrt{2})^2 L}{2AE} = \frac{7L}{2AE} \\ \delta_{1t} &= \alpha L \Delta T + \alpha 2L \Delta T + \sqrt{2} \alpha L \Delta T = (3 + \sqrt{2}) \alpha L \Delta T \end{aligned} \quad (4.227)$$

În relațiile (4.227) primul termen se referă la bara 1, ultimul la bara 3, iar ceilalți la bara 2. Înlocuind în (4.224) rezultă

$$X_1 = -\frac{\delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{2(3 + \sqrt{2})}{7} \alpha AE \cdot \Delta T = N_1 \quad (4.228)$$

Celelalte eforturi sunt

$$N_2 = n_1^{(2)} X_1; \quad N_3 = n_1^{(3)} X_1 \quad (4.229)$$

În cazul unor sisteme de bare supuse simultan la acțiunea încărcărilor și a variațiilor de temperatură, problema poate fi rezolvată tot cu metoda eforturilor sau separat, prin suprapunerea efectelor (studiind sistemul încărcat, fără variație de temperatură și apoi neîncărcat și cu variație de temperatură).

De reținut:

- Regulile de semn pentru eforturi și deformații;
- Repartiția tensiunii σ_x pe secțiunea transversală a barei supusa la solicitări axiale;
- Calculul de rezistență și al deformațiilor;
- Expresia energiei potențiale de deformare elastică;
- Modul de trasare al diagramelor N , σ și δ ;
- Calculul barelor de lungime (greutate) mare;
- Calculul barelor în mișcare de rotație;
- Metode pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate;
- Rezolvarea sistemelor de bare cu MEF;
- Rezolvarea sistemelor supuse la variații de temperatură.

CAPITOLUL

5



Forfecare

Sursa: <https://www.ebuy7.com/mcdanley-long-arm-cable-scissors-manual-crescent-heavy-duty-industrial-grade-wire-pliers-large.html>

5. CALCULUL CONVENȚIONAL LA FORFECARE

5.1. OBIECTIVE

În acest capitol se prezintă calculul convențional la forfecare, precum și calculul unor îmbinări frecvent utilizate în construcția de mașini. Pentru simplificare, calculul convențional presupune că tensiunile tangențiale sunt uniform distribuite în secțiunea periculoasă, supusă forfecării. Deși nu este corectă, această ipoteză dă totuși rezultate acceptabile în cazul forfecării pieselor subțiri. Distribuția realistă a tensiunilor tangențiale în secțiunea supusă forfecării va fi abordată în capitolul *Încovoiere* (formula lui *Juravski*).

5.2. INTRODUCERE

Atunci când în secțiunea transversală a unui corp acționează numai o forță tăietoare (T_z sau T_y), acesta este solicitat la forfecare (tăiere) pură (vezi *tabelul 1.3*). În secțiune apar numai tensiuni tangențiale τ . Pentru calculul convențional se presupune că aceste tensiuni sunt uniform distribuite pe secțiune. Această ipoteză nu se verifică în practică. Ea poate fi admisă numai pentru forfecarea pieselor de grosime mică (table, șuruburi mici, nituri, știfturi, pene etc.), când calculul convențional poate da rezultate satisfăcătoare. Este însă dificil să se realizeze o solicitare la forfecare pură. De cele mai multe ori forfecarea este însoțită de încovoiere. Chiar realizarea în laborator a încercării la forfecare pură (metoda Iosipescu) utilizează

epruvete crestate supuse la încovoiere (*fig. 2.14*). Numai în secțiunea slăbită a acestor epruvete se realizează, prin modul de încărcare, moment nul și o forță tăietoare (care produce forfecare). În acest capitol sunt prezentate situații în care tensiunile normale σ , provenite din încovoiere, sunt neglijabile în raport cu cele tangențiale τ , produse de forfecare și în care calculul convențional dă rezultate satisfăcătoare.

5.3. REALIZAREA SOLICITĂRII LA FORFECARE

Fie forfecarea unei bare produsă de către două forțe coliniare, normale pe axa acesteia, egale și de sens contrar. Cele două forțe pot fi materializate prin fălcile unei foarfeci, de exemplu. Chiar dacă forțele ar fi inițial coliniare și brațul cuplului ar fi nul, pe măsură ce fălcile pătrund în material, asupra lor acționează presiuni de contact distribuite, iar pentru rezultantele static echivalente ale acestora brațul crește progresiv, producându-se în consecință și încovoiere (*fig. 5.1*). În practică însă fălcile nu sunt coliniare ci ușor decalate, trecând una pe lângă cealaltă. Brațul fiind foarte mic, tensiunile normale produse de încovoiere vor fi neglijate.

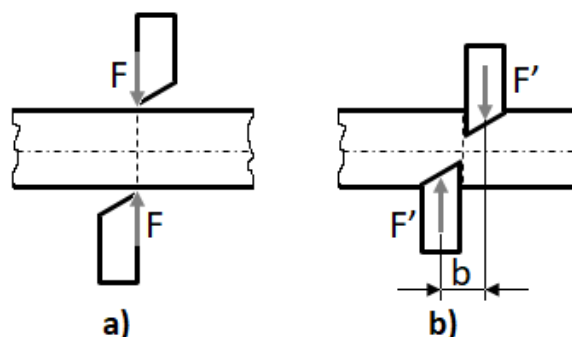


Fig. 5.1. Bară supusă la forfecare: forțele inițial coliniare (a) devin decalate (b)

Solicitarea produsă prin forțe normale la axa barei, care nu sunt perfect coliniare, se numește *forfecare tehnică* și este însoțită de încovoiere, care însă produce tensiuni mici, uzual neglijabile. Ea nu trebuie confundată cu *forfecarea pură*, la care apar numai tensiuni tangențiale. Forfecarea pură se realizează, de exemplu, în secțiunea slăbită a epruvetei Iosipescu (*fig. 2.14*).

Pe suprafața unei bare se trasează o rețea de ochiuri pătrate. Atunci când bara este supusă la forfecare tehnică se observă că se deformează numai volumul de material cuprins între forțe. Pe această porțiune de bară ochiurile rețelei devin romburi, prezentând numai deformații unghiulare (*fig. 5.2*).

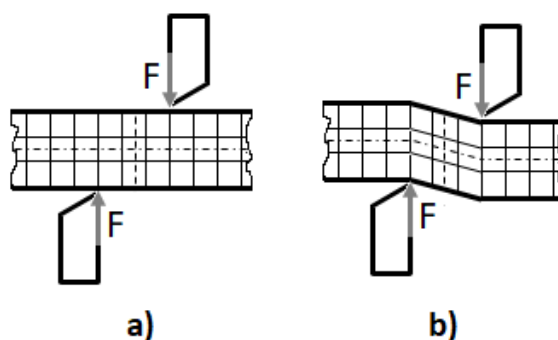


Fig. 5.2. Bară supusă la forfecare: bara nedeformată (a) și respectiv deformată (b)

Aceste deformații unghiulare sunt produse de către tensiuni tangențiale [Belyaev N.M., 1979]. Deoarece volumul de material deformat este mic, și energia potențială înmagazinată va fi mică, comparativ cu alte solicitări.

În practică forfecarea tehnică apare în multe situații, cum ar fi: la ștanțarea tolelor, la taiere cu foarfeca sau cu ghilotina, în nituri sau șuruburi, în pana dintre arbore și roată etc. În îmbinări apare frecvent solicitarea la forfecare (îmbinări cu șuruburi, cu nituri, cu pene, sudate, lipite). Niturile sau șuruburile pot ceda prin forfecare. Dacă pana se foarfecă, atunci roata dințată se poate roti liber pe arbore (*fig. 5.3c*) și nu mai poate transmite cuplu. Datorită faptului că volumul de material care participă la solicitarea la forfecare este mic, energia de deformare înmagazinată și lucrul mecanic exterior sunt mici. Din acest motiv, solicitarea la forfecare poate fi folosită pentru debitarea semifabricatelor, având și avantajul că nu produce șpan.

În *figura 5.3a* se prezintă solicitări la forfecare ce apar la ștanțarea tablelor subțiri (1-poanson; 2-tablă; 3-disc decupat), în *fig. 5.3b* la îmbinări nituite (4-tablă; 5-nit) și în *fig. 5.3c* la pene (6-arbore; 7-roată dințată; 8-pană). La poziția 8 (pană) s-a figurat perechea de forțe care produce forfecarea.

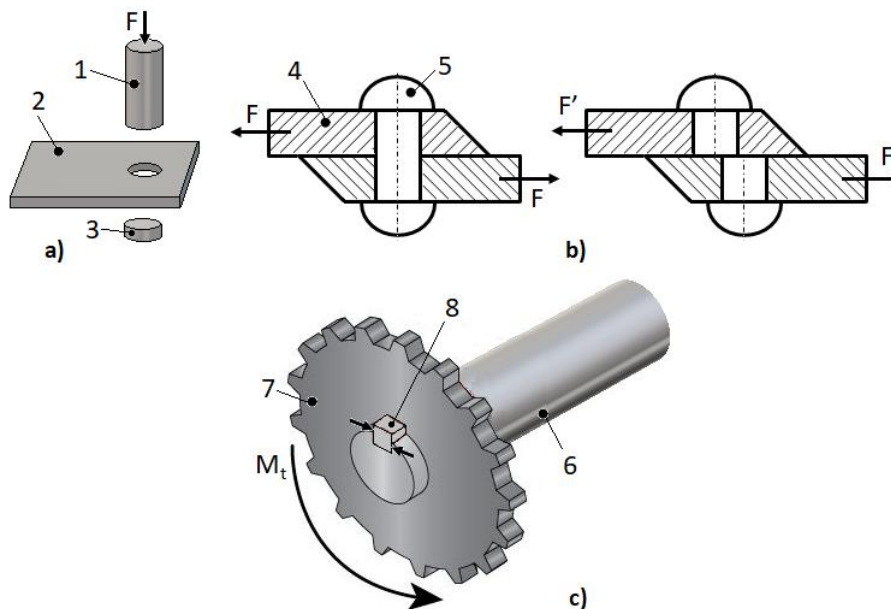


Fig. 5.3. Forfecare la stanșarea unui disc (a), la îmbinării nituite și la pene (c)

5.4. CALCULUL DE REZISTENȚĂ CONVENȚIONAL

În *Capitolul 2*, s-a prezentat curba caracteristică $\tau - \gamma$ trasată la solicitarea la forfecare pură (fig. 2.15). Prima parte a diagramei este o dreaptă prin origine. Panta acestei drepte este modulul de elasticitate transversală G (Coulomb), iar ecuația sa este cunoscuta lege a lui Hooke pentru forfecare, (2.21). În secțiunea barei forfecate apar forțe tăietoare și tensiuni tangențiale (fig. 5.4).

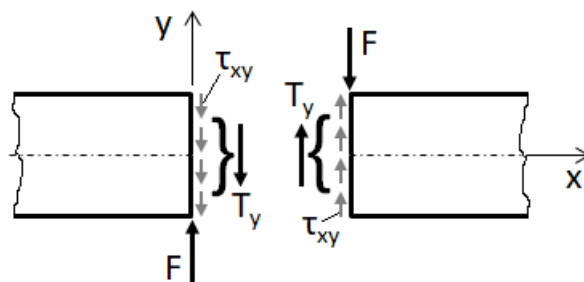


Fig. 5.4. Secțiune imaginară prin bara supusă la forfecare (tensiunile τ_{xy} și eforturile T_y sunt negative)

În aceste condiții, din cele șase ecuații de echivalență (1.34) rămâne una singură

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (5.1)$$

Pentru a putea integra trebuie cunoscută legea de distribuție a tensiunii tangențiale τ_{xy} pe suprafața A. Cu alte cuvinte, trebuie să cunoaștem funcția $\tau_{xy}(x,y)$. Pentru simplificare, se admite în primă fază o distribuție uniformă a tensiunii tangențiale (*fig. 5.5*). Această ipoteză, care nu se verifică riguros în practică, stă la baza *calculului convențional* la forfecare. Admițând $\tau_{xy} = \text{constant}$, relația (5.1) devine succesiv

$$T_y = \tau_{xy} \int_A dA; \quad T_y = \tau_{xy} \cdot A \quad (5.2)$$

Din (5.2) rezultă relația aproximativă

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \quad (5.3)$$

Relația (5.3) prezintă avantajul extremei sale simplități. Ea poate fi folosită și pentru forfecarea pe direcția axei Oz, dacă se înlocuiește indicele y cu z. Totuși, formula mai este utilizată mai mult datorită tradiției. Valorile corecte pentru τ sunt date de formula lui *Juravski* (vezi capitolul 7).

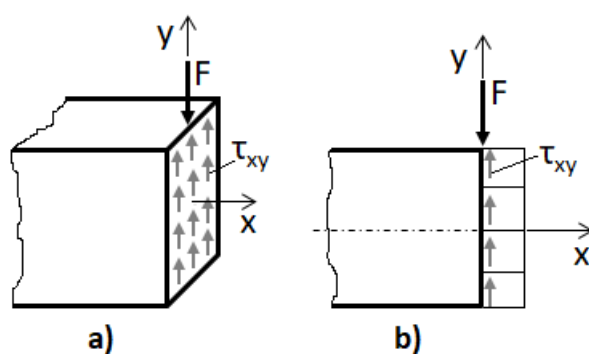


Fig. 5.5. Tensiunea τ_{xy} este presupusă constantă pe secțiunea barei: prezentare axonometrică (a) și convențională (b)

Aplicația 5.1

Din tablă cu grosimea $t = 1 \text{ mm}$ se ștanțează discuri cu diametrul $d = 60 \text{ mm}$. Tensiunea tangențială de rupere a materialului este $\tau_r = 200 \text{ MPa}$. Să se determine forța F de apăsare a poansonului. În figura 5.6 s-a notat: 1-poanson; 2-placa de taiere; 3-tabla.

Aria de forfecare este suprafața laterală a discului 4

$$T = \tau A \quad (5.4)$$

$$A = \pi dt \quad (5.5)$$

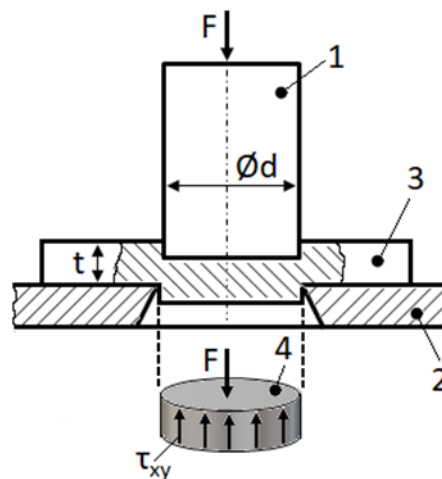


Fig.5.6. Ștanțarea: tabla în curs de forfecare (a); evidențierea tensiunilor τ_{xy} la discul ștanțat (b)

În figura 5.6 forța de apăsare a poansonului F este echilibrată de către forța tăietoare T

$$F = T = \tau A \quad (5.6)$$

Atunci când se produce forfecarea materialului se poate scrie

$$F = \tau_r \cdot \pi dt \quad (5.7)$$

Înlocuind cu valorile numerice de mai sus se obține $F=37,7\text{kN}$.

DE fapt forța care acționează asupra poansonului trebuie să fie mai mare decât această valoare, deoarece s-au neglijat frecările dintre poanson și tablă, cele din mecanismele ștanței, energia consumată de către mecanismele de înaintare și fixare a tablei, de extracție a discului etc.

5.5. DUALITATEA TENSIUNILOR TANGENȚIALE

Dintr-o bară sollicitată la forfecare se izolează un element de volum. Pe fețele sale opuse apar tensiuni care trebuie să-și facă echilibru. Acest lucru este posibil numai dacă cele două cupluri de forțe din *figura 5.7* sunt egale și de sensuri contrare

$$\tau_{xy} (dzdy) \cdot dx = \tau_{yx} (dxdz) \cdot dy \quad (5.8)$$

În relația (5.8), suprafața fațetei pe care acționează tensiunea tangențială a fost marcată între paranteze. Din (5.8) rezultă

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (5.9)$$

Se observă că permutarea indicilor nu afectează valoarea lui τ .

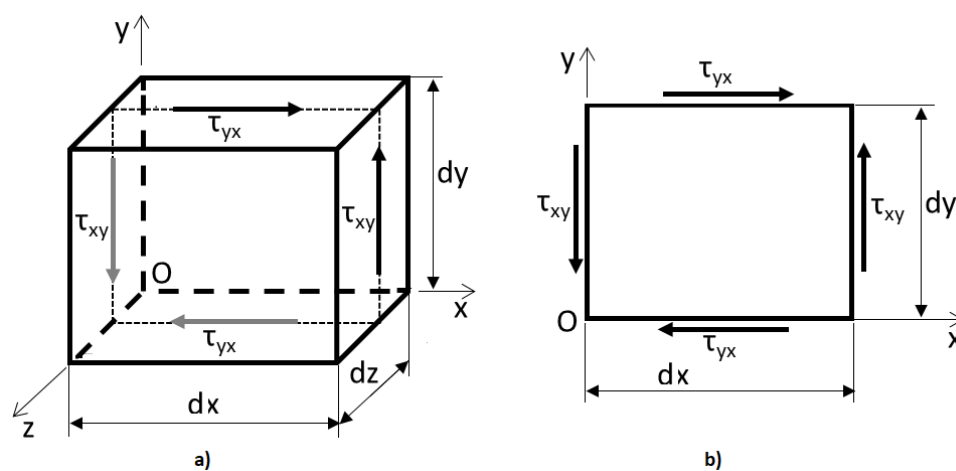


Fig. 5.7. Element de volum izolat dintr-o bară sollicitată la forfecare (a) și vedere în direcția axei Oz (b)

Relația (5.9) reprezintă legea dualității tensiunilor tangențiale (*Cauchy*), care se enunță astfel:

Tensiunile tangențiale care apar într-un punct al unui corp, acționând în două secțiuni normale, sunt egale și dirijate astfel încât converg sau diverg față de vârful unghiului drept (fig. 5.7b).

Interesantă este și consecința acestei legi: *Dacă într-un punct al unui corp există tensiuni tangențiale, vor apărea tensiuni tangențiale egale și într-o secțiune normală pe cea care conține primele tensiuni și aceste tensiuni converg sau diverg față de intersecția celor doua plane de secționare.*

Tot ca o consecință a principiului dualității, tensiunea tangențială nu poate fi constantă pe secțiune, așa cum se admite în calculul convențional. Se observă că tensiunile tangențiale sunt nule pe fețele libere (superioară și inferioară) ale barei. Conform principiului dualității, în secțiunea barei, în imediata vecinătate a muchiilor superioară și inferioară, tensiunile tangențiale vor fi nule.

5.6. CALCULUL DEPLASĂRILOR

În prezența tensiunilor tangențiale, elementul de volum prezintă deformații unghiulare (fig. 5.8). Pentru cazul deformațiilor mici se poate scrie

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{L} \approx \gamma \Rightarrow \Delta x \approx \gamma \cdot L \quad (5.10)$$

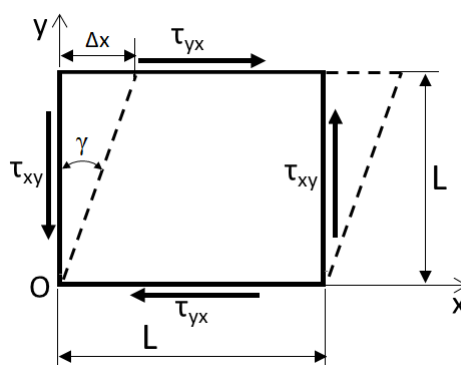


Fig. 5.8. Deformații unghiulare mici (vedere dinspre axa Oz)

Ținând cont de legea lui *Hooke* pentru forfecare

$$\tau = G\gamma \quad (5.11)$$

relația (5.10) devine

$$\Delta x = \frac{\tau}{G} \cdot L \quad (5.12)$$

Din (5.12) și (5.3) se obține:

$$\Delta x = \frac{T \cdot L}{A \cdot G} \quad (5.13)$$

Relația (5.13) este similară cu (4.6), utilizată pentru solicitări axiale.

5.7. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ

Expresia energiei de deformare elastică înmagazinată de către bara supusă la forfecare poate fi determinată cu relațiile (3.17) și (5.3). Se obține succesiv

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \frac{1}{2G} \int_0^L \left(\frac{T}{A} \right)^2 dx \int_A dA \Rightarrow U = \int_0^L \frac{T^2}{2GA} dx \quad (5.14)$$

Pentru o forță tăietoare $T = \text{constant}$ se obține

$$U = \frac{T^2 L}{2GA} \quad (5.15)$$

unde L este lungimea porțiunii de bară deformată la forfecare.

Distanța L dintre forțele care produc forfecare fiind mică, volumul materialului deformat este mic și rezultă că lucrul mecanic consumat pentru ruperea la forfecare este sensibil mai mic comparativ cu cel necesar pentru ruperea aceleiași suprafețe la alte solicitări simple. Acest lucru este utilizat de operația tehnologică de debitare prin forfecare a semifabricatelor.

Volumul materialului deformat fiind mic, energia potențială de deformare la forfecare va fi mică în comparație cu cea de la alte solicitări și uzual se va neglija.

5.8. CALCULUL CONVENȚIONAL AL ÎMBINĂRIILOR

5.8.1. Îmbinări cu șuruburi sau nituri

Calculul la forfecare

Principalele tipuri de îmbinări avute în vedere în acest subcapitol sunt prezentate în *figura 5.9*.

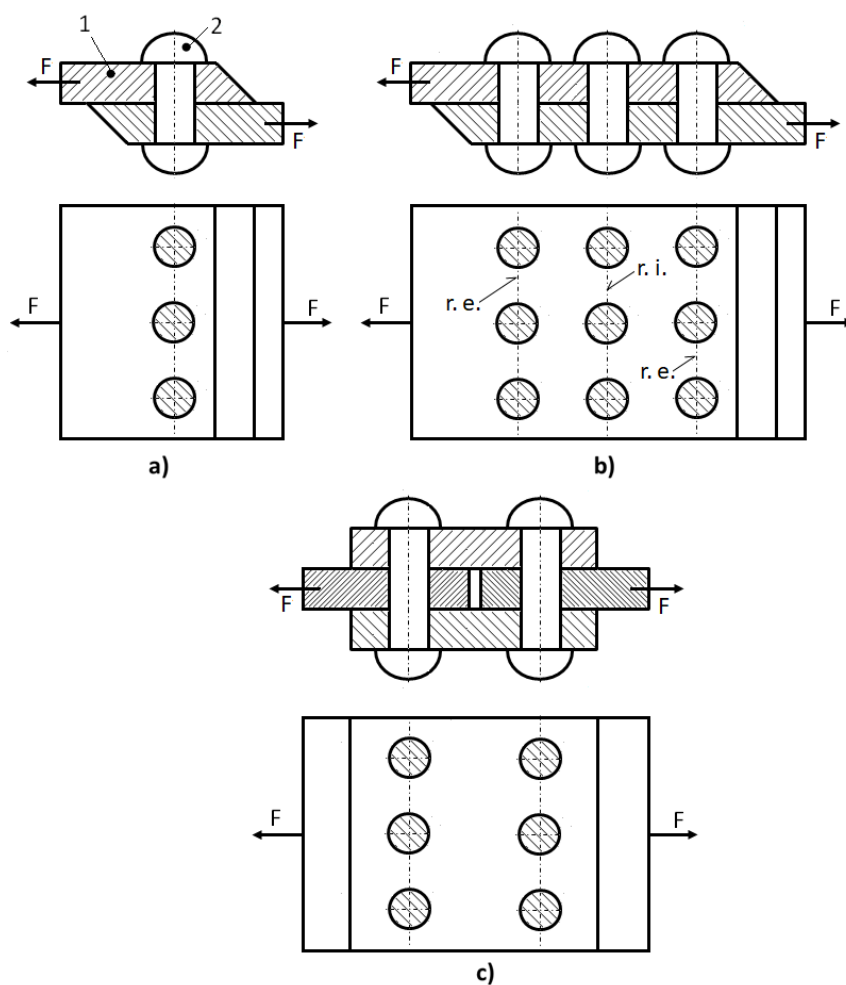


Fig. 5.9. Îmbinări cu nituri (sau șuruburi): simplă suprapunere și un rând de nituri (a); simplă suprapunere și mai multe rânduri de nituri (b); dublă suprapunere (c)

Calculul convențional al acestor îmbinări se bazează pe următoarele ipoteze simplificatoare:

- Încărcarea se împarte egal pe cele z nituri (șuruburi) ale îmbinării, deși niturile de pe rândurile exterioare sunt cele mai solicitate. Dar, după depășirea limitei de curgere, repartiția încărcării tinde să se uniformizeze;
- Se neglijează frecarea dintre table;
- Tija nitului (șurubului) este solicitată numai la forfecare;
- Diametrul tijei nitului este egal cu cel al găurii;
- Încărcarea este statică și se neglijează efectul concentrării tensiunilor.

Dacă tablele translează una față de alta, niturile (șuruburile) vor fi forfecate în planul de separație dintre table, ca în *figurile 5.9a și 5.9b*. La îmbinarea din *figura 5.9d*, fiecare nit are câte două secțiuni de forfecare.

Calculul la presiune de contact (strivire)

Șurubul (nitul) va fi solicitat la forfecare în planul de separație dintre table. Între tijă și table apar tensiuni de contact care nu sunt uniform distribuite (*fig. 5.10*). Dacă aceste tensiuni depășesc limita de curgere la compresiune, atunci piesa cu o duritate mai mică rămâne cu deformații permanente după descărcare. Astfel gaura din tablă sau tija se ovalizează. Acest lucru trebuie să fie evitat, deoarece astfel se introduc jocuri în îmbinare, făcând posibilă apariție șocurilor la încărcare iar demontarea va fi dificilă. Calculul pieselor la presiune de contact se mai numește *calcul la strivire*. Acest calculul se face într-o manieră aproximativă, datorită faptului că legea de distribuție a presiunii este greu de determinat (*fig. 5.10c*). Se pleacă de la ipoteza că valoarea presiunii într-un punct p_α este proporțională cu proiecția ds_α a arcului ds pe diametru (*fig. 5.11*). În baza acestei ipoteze se poate scrie

$$\frac{p_{str}}{p_\alpha} = \frac{ds}{ds_\alpha}; \quad ds_\alpha \approx ds \cdot \sin \alpha \Rightarrow p_\alpha = p(\alpha) = p_{str} \cdot \sin \alpha \quad (5.16)$$

Rezultă astfel că presiunea de strivire p_{str} este distribuită sinusoidal [Pissarenko G. ș.a., 1975].

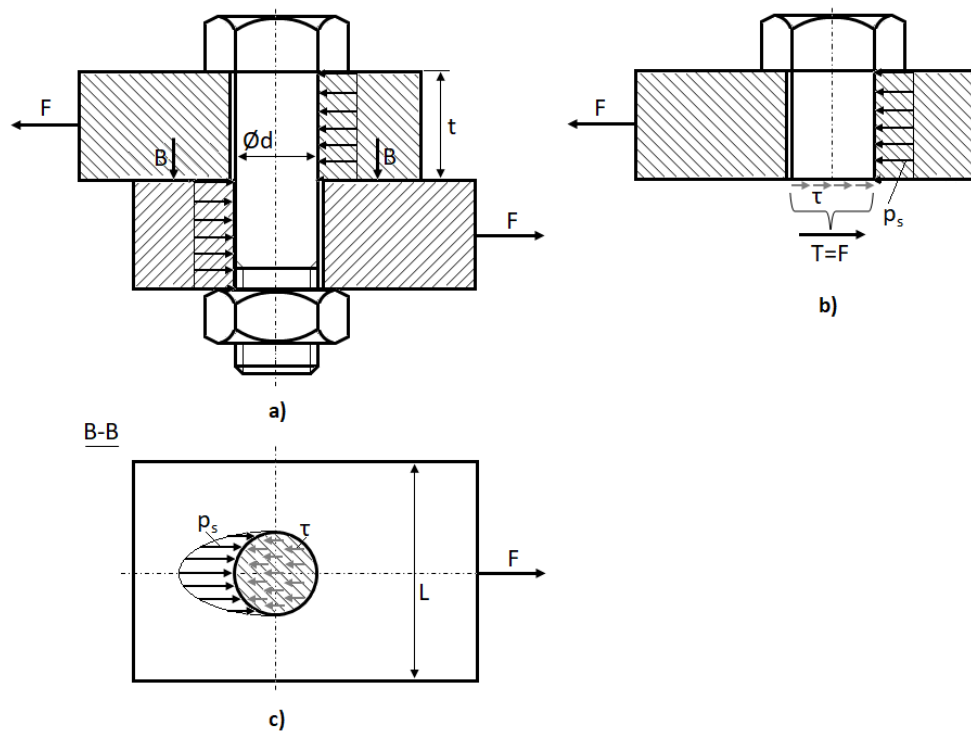


Fig. 5.10. Îmbinare cu șuruburi: forfecarea șurubului în planul B-B (a); presiunea de contact și tensiunea tangențială din șurub (b); distribuția presiunii de contact (c)

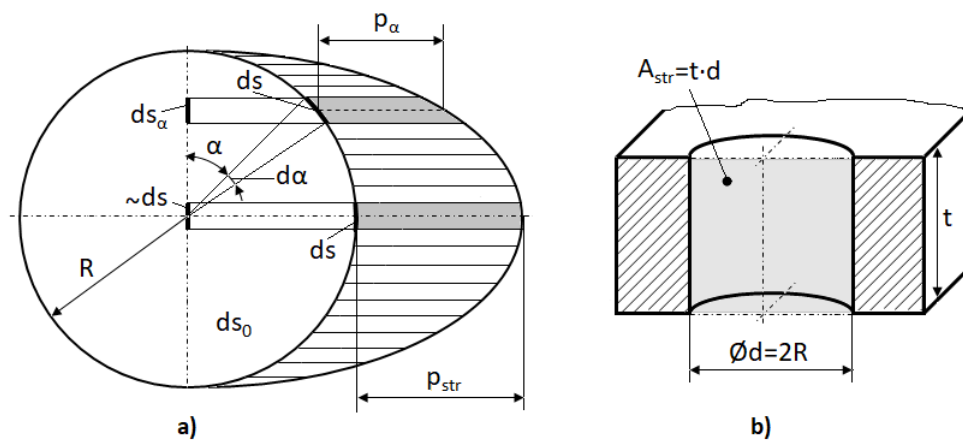


Fig. 5.11. Determinarea legii de distribuție a presiunii de strivire p_{str} : distribuția p_{str} pe tijă (a); aria convențională la strivire A_{str} pentru un șurub (b)

Forța tăietoare va fi (fig. 5.10 și 5.11):

$$T = \int_A p(\alpha) dA = \int_A p(\alpha) \cdot t \cdot ds = \int_0^\pi t \cdot p(\alpha) \cdot R \cdot d\alpha$$

$$T = \left| p_{str} \cdot t \cdot R \int_0^\pi \sin \alpha \cdot d\alpha \right| = 2 \cdot p_{str} \cdot t \cdot R = p_{str} \cdot t \cdot d$$
(5.17)

Notând

$$t \cdot d = A_{str} \quad (5.18)$$

forța tăietoare se poate scrie

$$T = p_{str} \cdot A_{str} \quad (5.19)$$

Tensiunea normală de strivire trebuie să fie mai mică decât tensiunea admisibilă la strivire $\sigma_{a.str}$. Calculul la strivire este de obicei unul de verificare, pentru care se recomandă [Pissarenko G. ș.a., 1975]:

$$\sigma_{a.str} = (2 \div 2,5) \sigma_{a.c} \quad (5.20)$$

Aplicația 5.2

Îmbinarea din figura 5.12 este solicitată cu forța $F = 12$ kN. Tablele și niturile sunt confecționate din același material. Cunoscând $t = 8$ mm, $d = 10$ mm, $\sigma_a = 150$ MPa, $\sigma_{a.str} = 300$ MPa, $\tau_a = 80$ MPa, să se dimensioneze îmbinarea (să se determine numărul de nituri n , și dimensiunile L , p și e).

În îmbinare apar următoarele moduri de cedare principale:

1. Forfecarea niturilor (în secțiunile 1);
2. Tracțiunea tablelor (secțiunea periculoasă 2);
3. Forfecarea tablelor (în secțiunile 3);
4. Strivire (între nituri și table).

1. Calculul niturilor la forfecare

Presupunând ca forța F se distribuie uniform pe niturile îmbinării, forța tăietoare care acționează pe unul dintre cele n nituri se determină cu relația

$$T_1 = \frac{F}{n} \quad (5.21)$$

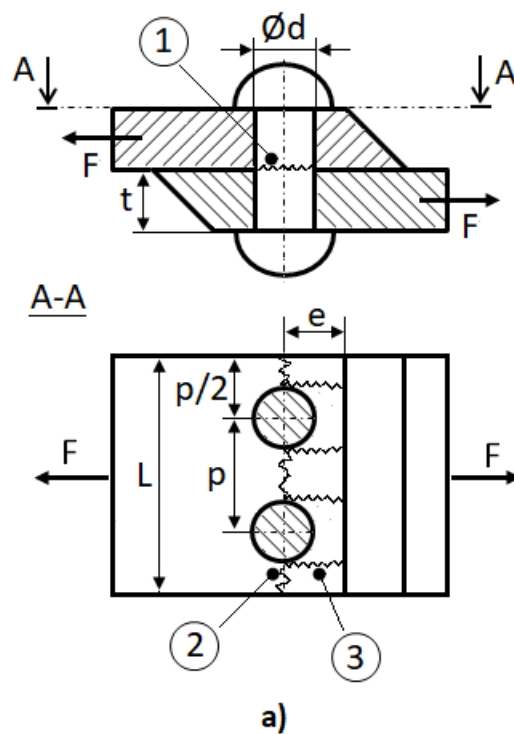


Fig. 5.12. Îmbinare cu nituri pe un rând: forfecare nituri (1);
tracțiune table (2); forfecare table (3)

Tensiunea tangențială nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă

$$\tau = \frac{T_1}{A} = \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{F}{n} \quad (5.22)$$

$$\frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{F}{n} \leq \tau_a$$

Din (5.22) rezultă numărul necesar de nituri

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 \tau_a} \quad (5.23)$$

Introducând valorile numerice în (5.23) rezultă $n \geq 1,9$. Se adoptă $n=2$ (nituri).

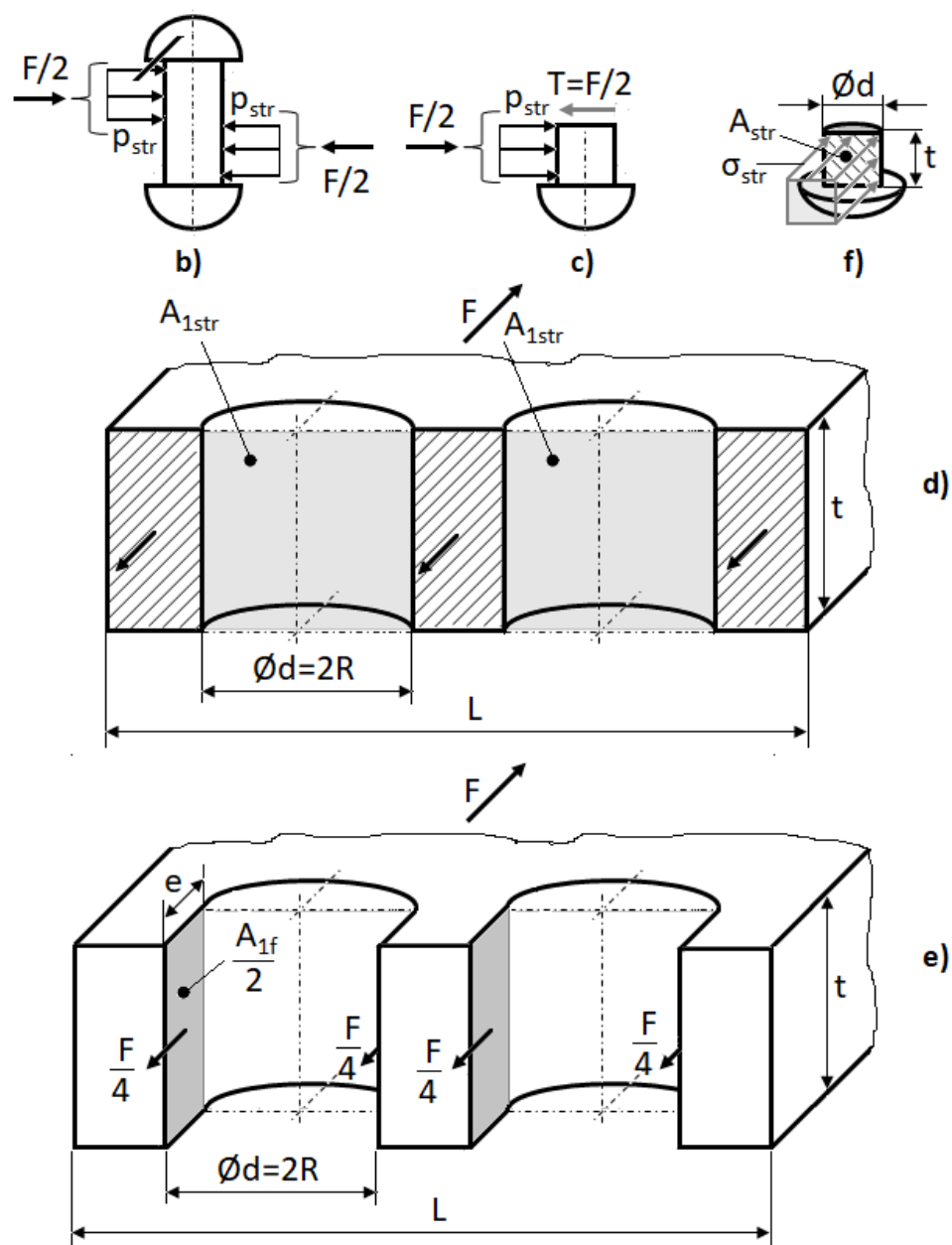


Fig. 5.13. Forfecarea nitului (a, b); secțiunea netă la tracțiunea tablelor (d); secțiunea de forfecare a tablelor (e); secțiunea de strivire a nitului (d, c)

2. Calculul tablelor la tracțiune

Secțiunea periculoasă pentru tracțiunea tablelor este cea care trece prin centrele găurilor. Secțiunea netă, hașurată în *figura 5.13d*, este

$$A_t = Lt - ntd \quad (5.24)$$

Se pune condiția ca tensiunea normală maxima să nu o depășească pe cea admisibilă

$$\sigma = \frac{N}{A_t} = \frac{F}{t \cdot (L - nd)} \leq \sigma_a \quad (5.25)$$

Din (5.25) se poate determina lățimea minimă a tablei

$$L \geq \frac{F}{t \cdot \sigma_a} + n \cdot d; \quad L \geq \frac{12 \cdot 10^3}{8 \cdot 150} + 2 \cdot 10 \Rightarrow L \geq 30 \text{ mm} \quad (5.26)$$

Ținând cont de faptul că (*fig. 5.12*):

$$L = np \quad (5.27)$$

se determină pasul nituirii

$$p = \frac{L}{n}; \quad p \geq 15 \text{ mm} \quad (5.28)$$

Această valoare minimă a fost stabilită din condițiile de rezistență. Ea este prea mică din punct de vedere tehnologic, deoarece capul niturilor sau piulițele șuruburilor trebuie să fie suficient de depărtate pentru a permite accesul sculelor de montare (căpuitor pentru nituri, cheie pentru șuruburi). Se vor adopta empiric valori mai mari pentru p și L , care să satisfacă condițiile de montaj.

3. Calculul tablelor la forfecare

Dacă nitul este montat prea aproape de marginea tablei, materialul din spatele său poate fi dislocat prin forfecare. Fiecărui nit îi corespund câte două secțiuni de forfecare $A_{1f}/2$. Aceste secțiuni au fost notate cu (3) în *figura 5.12* și au fost marcate cu gri în *figura 5.13e*. Suprafața totală de forfecare este:

$$A_f = 2nte \quad (5.29)$$

Din calculul de rezistență la forfecare rezultă succesiv

$$\tau = \frac{F}{A_f} = \frac{F}{2 \cdot n \cdot t \cdot e} \leq \tau_a; \quad e \geq \frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 80} \Rightarrow e \geq 4,7 \text{ mm} \quad (5.30)$$

Valoarea minimă este nesatisfăcătoare din punct de vedere tehnologic (gaura "cade" parțial în afara tablei). Ea trebuie să fie mult mărită deoarece capul nitului sau piulița șurubului trebuie să aibă loc în întregime pe tablă. În cazul tablelor subțiri cota e rezultă suficient de mare și asemenea corecții nu mai sunt necesare.

4. Calculul la strivire

Aria convențională de strivire pentru un nit (*fig. 5.13c,d*) este

$$A_{1str} = t \cdot d \quad (5.31)$$

Tensiunea de strivire este

$$\sigma_{str} = \frac{\frac{F}{n}}{A_{1str}} = \frac{F}{n \cdot t \cdot d} \quad (5.32)$$

Înlocuind valorile numerice în (5.32), rezultă

$$\sigma_{str} = \frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10} = 75 \text{ MPa} < \sigma_{a.str} = 300 \text{ MPa} \quad (5.33)$$

Deoarece $\sigma_{str} < \sigma_{a.str}$, îmbinarea rezistă la strivire.

Observații:

- Din *Aplicația 5.2* se observă că, atunci când forța F este perpendiculară pe secțiunea de rupere, se produce solicitarea tracțiune (sau compresiune). Când forța este paralelă cu secțiunea, se produce solicitarea la forfecare;
- Partea teșită a tablelor nu se consideră la calculul acestora la forfecare;
- Se neglijează jocurile dintre tija șurubului și gaura din tablă.

La îmbinările cu șuruburi sau nituri pe mai multe rânduri, încărcările nu se distribuie uniform pe fiecare șurub sau nit. O asemenea îmbinare se calculează ca o problemă static nedeterminată. Pentru sistemul de bază din *figura 5.14*, forțele tăietoare $T_3 = X_3 - X_2 \dots$, se obțin cu valorile din *tabelul 5.1*. Se observă că niturile (șuruburile) de pe rândurile exterioare sunt mai solicitate [Stepine P., 1980]. Acest lucru trebuie avut în vedere atât la solicitările statice în domeniul elastic, cât, mai ales, la solicitările dinamice, alternante și în cazul existenței vibrațiilor.

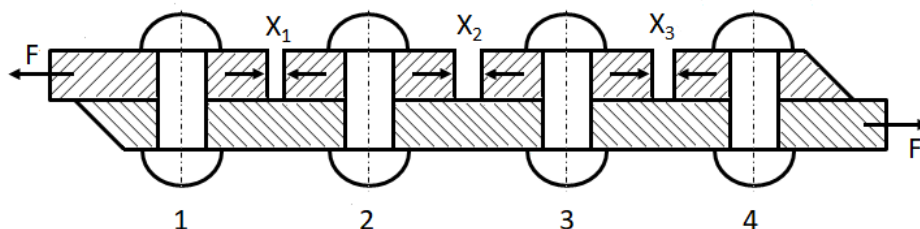


Fig. 5.14. Sistemul de baza pentru o îmbinare cu nituri pe mai multe rânduri

Tab. 5.1. Repartiția forțelor tăietoare în niturile unei îmbinări pe mai multe rânduri

Număr rânduri	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_{mediu}
3	0,353F	0,294F	0,353F	-	-	-	0,(3)F
4	0,29F	0,21F	0,21F	0,29F	-	-	0,25F
5	0,26F	0,17F	0,14F	0,17F	0,26F	-	0,20F
6	0,24F	0,15F	0,11F	0,11F	0,15F	0,24F	0,167F

5.8.2. Calculul îmbinărilor sudate

Îmbinările sudate sunt extrem de utilizate, datorită avantajelor pe care le prezintă: economie de material, preț de cost redus, asigură etanșarea, rezistență ridicată etc. Totodată, ele prezintă și dezavantaje însemnate: protejarea sudorului de radiațiile arcului electric și de degajările de gaze toxice este numai parțială, nivelul ridicat al tensiunilor remanente (care sunt prezente în material în absența încărcărilor), controlul calității sudurii este

dificil (cu raze X sau γ). Prezența tensiunilor remanente poate să scadă capacitatea portantă a structurilor sudate și poate produce deformarea acestora, înrăutățindu-se sensibil comportarea la solicitări variabile și la coroziune. Se pot realiza structuri utilizând diverse tipuri de îmbinări sudate. Majoritatea cordonelor de sudură sunt supuse la solicitarea compusă la forfecare cu tracțiune, după cum se observă în *figura 5.15*. Excepție face sudura cap la cap, la care cordonul este solicitat la tracțiune (*figura 5.15a*). În calculul convențional se admite că secțiunea transversală a cordonului este de forma unui triunghi dreptunghic isoscel (sudură *plată*), ca în *figura 5.16*.

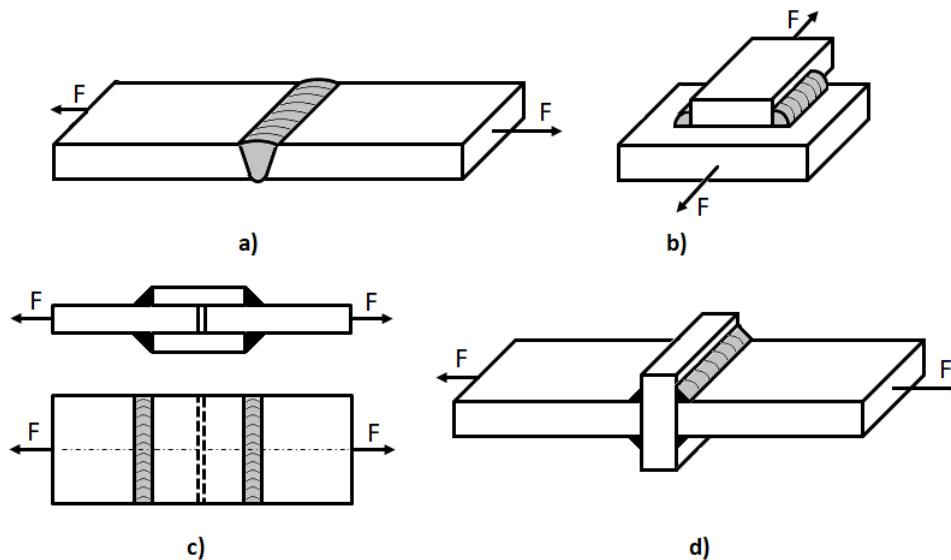


Fig. 5.15. Tipuri de îmbinări sudate: cap la cap (a); prin simplă suprapunere (b); cu eclise sau sudură laterală (c); sudură de colț (d)

Convențional cordonul de sudură se calculează numai la forfecare, considerând însă forța tăietoare T egală cu întreaga forță repartizată pe cordon. Din *figura 5.16* se observă că aria de forfecare a unui cordon de lungime L_s este

$$A_f = a \cdot L_s; \quad a = \frac{t}{\sqrt{2}} \approx 0,7t \quad (5.34)$$

Condiția de rezistență pentru sudura cu două cordoane din *figura 5.16* poate fi scrisă

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{2 \cdot a \cdot L_s} \leq \tau_{as} \quad (5.35)$$

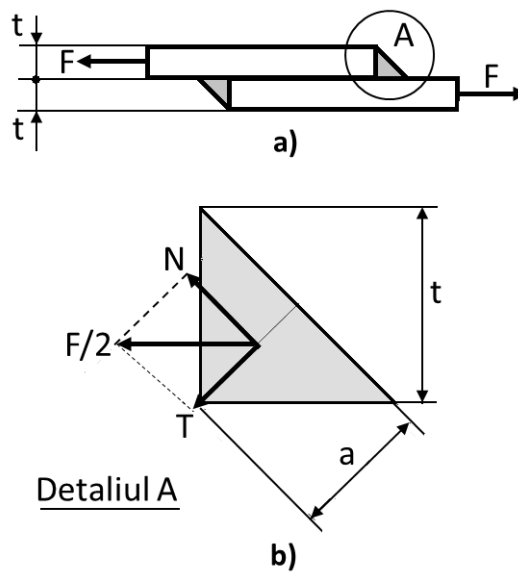


Fig. 5.16. Schematizarea secțiunii cordonului de sudură, cu eforturile T și N

Tensiunile admisibile pentru sudură pot fi adoptate funcție de τ_a pentru materialul de bază (al tablelor): $\sigma_{as} = 0,8 \sigma_a$; $\tau_{as} = 0,65 \tau_a$, [Deutsch I., 1976; Posea N., 1979]. Deoarece calitatea cordonului de sudură scade la capetele sale (regiuni unde are loc amorsarea și respectiv dezamorsarea arcului electric), lungimea L_s se consideră convențional mai mică decât cea reală

$$L_s = L - 2a \quad (5.36)$$

Din relațiile (5.35) și (5.36) se determină lungimea totală a cordonului L

$$L \geq \frac{F}{2a \cdot \tau_{as}} + 2a \quad (5.37)$$

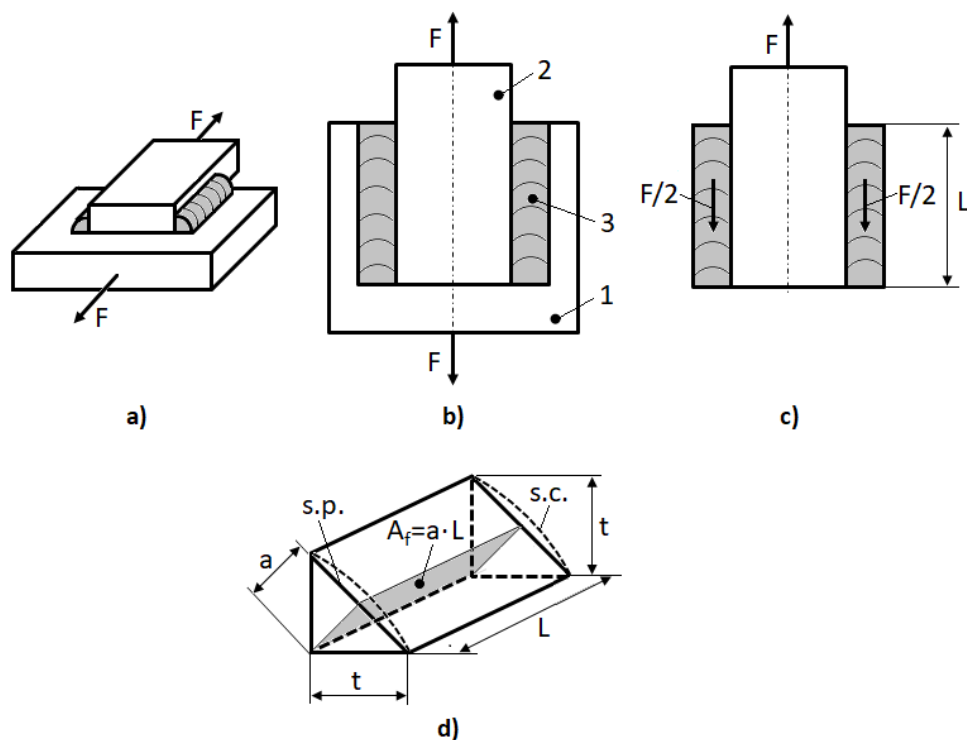


Fig. 5.17. Îmbinare sudată (a), vedere de sus (b); forțele tăietoare (c) și aria de forfecare a cordonului (s.p.= sudură plată, s.c.=sudură convexă)

Observație

Există puține îmbinări sudate care nu se calculează la forfecare. Un exemplu în constituie sudura cap la cap (fig. 5.15a), la care cordonul se calculează la tracțiune.

Aplicația 5.3

Un profil cornier cu aripi egale tip 40×40×4 [SR EN 10056:2000] este sudat de un guseu (fig. 5.18). Știind că $\sigma_a = 185 \text{ MPa}$, $\tau_{as} = 120 \text{ MPa}$, să se determine lungimea minimă a cordonelor de sudură, L_1 și L_2 , atunci când cornierul suportă încărcarea capabilă F . Grosimea cordonului de sudură se alege în funcție de grosimea aripii cornierului, $a = 0,7g$. Pentru profilul cornier din aplicație $g=4\text{mm}$ și $a=2,8\text{mm}$. Sistemul de referință are originea în centrul de greutate (C.G.) al secțiunii transversale a cornierului.

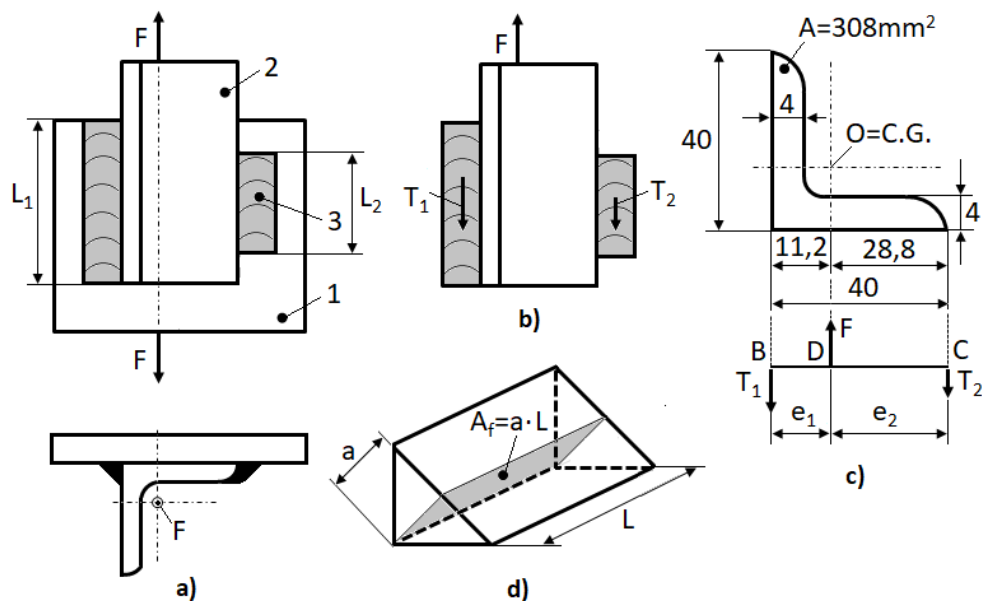


Fig. 5.18. Cornier sudat pe un guseu (a), izolarea cornierului cu cordoane (b), determinarea forțelor din cordoane (c) și izolarea unui cordon (d)

Solicitarea minimă a cordoanelor se produce când forța F acționează pe direcția axei cornierului, care trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale. În acest caz nu apare încovoiere în cordoane, însă eforturile din cordoane nu vor fi egale ($T_1 \neq T_2$). De aici apare necesitatea ca lungimile cordoanelor L_1 și L_2 să nu fie egale. Profilul cornier poate prelua o forță capabilă la tracțiune

$$F = \sigma_a A; \quad F = 185 \cdot 308 \approx 57 \text{ kN} \quad (5.38)$$

Forțele tăietoare T_1 și T_2 se determină din ecuațiile de echilibru (fig. 5.18c):

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0 \Rightarrow F = T_1 + T_2 \\ \sum M_{(B)} &= 0 \Rightarrow T_2 \cdot (e_1 + e_2) - F \cdot e_1 = 0 \\ \sum M_{(C)} &= 0 \Rightarrow T_1 \cdot (e_1 + e_2) - F \cdot e_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$T_1 = F \frac{e_2}{e_1 + e_2}; \quad T_2 = F \frac{e_1}{e_1 + e_2}$$

Lungimile cordoanelor de sudură se determină din condițiile de rezistență

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{T_1}{A_{f1}} = F \frac{e_2}{e_1 + e_2} \cdot \frac{1}{(L_1 - 2a) \cdot a} \leq \tau_{as} \\ \tau &= \frac{T_2}{A_{f2}} = F \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot \frac{1}{(L_2 - 2a) \cdot a} \leq \tau_{as}\end{aligned}\tag{5.40}$$

Înlocuind valorile numerice se obține $L_1 \geq 128mm$, $L_2 \geq 50mm$.

5.8.3. Calculul îmbinărilor cu adezivi

Îmbinările cu adezivi prezintă multe avantaje în comparație cu cele sudate: permit realizarea unor structuri mai ușoare, având un nivel redus al tensiunilor remanente, comportare îmbunătățită la solicitări variabile, la coroziune și deformații remanente mici, consum redus de energie, nu modifică structura materialului de bază, asigură etanșarea etc. Prin lipire cu adezivi pot fi îmbinate și materiale nesudabile și chiar materiale diferite.

Principalele dezavantaje ale adezivilor sunt: modificarea în timp a caracteristicilor mecanice (datorită fenomenului de "îmbătrânire"), prezintă fluaj la temperatura mediului, îmbinările sunt mai sensibile la șocuri. În plus, adezivii trebuie să fie manevrați cu mare atenție, mulți dintre ei fiind toxici, iar lipiturile pe suprafețe mari sunt de calitate mai slabă. Prețul adezivilor este ridicat iar îmbinările cu adezivi sunt nedemontabile. Dar aceste îmbinări vor fi tot mai răspândite, în special la materiale compozite. Probabil că această răspândire este frânată în prezent de lipsa unor date privind comportarea lor pe termen îndelungat. În unele cazuri se folosesc adezivi inclusiv pentru îmbinări de mare răspundere. Se construiesc fuzelaje, caroserii, la care toate îmbinările sunt realizate prin lipire cu adezivi. Îmbinările cu simplă sau dublă suprapunere, cu eclise, pot fi realizate cu adezivi în locul sudării sau nituirii. Îmbinările cap la cap realizate cu ajutorul adezivilor au o rezistență mai redusă. În majoritatea îmbinărilor adezivul este supus în special la forfecare. Doar în cazul îmbinărilor cap la cap, care sunt puțin utilizate, adezivul este supus la tracțiune. Calculul de rezistență se bazează pe ipoteza că tensiunile sunt uniforme în tot volumul adezivului.

În realitate, tensiunile sunt mai mici în zona centrală și mai mari pe conturul îmbinării.

În *figura 5.19* sunt prezentate trei tipuri de îmbinări cu adezivi: prin simplă suprapunere, cap la cap și îmbinarea unei bucle cu o tijă. Se va prezenta în continuare calculul convențional al acestor îmbinări.

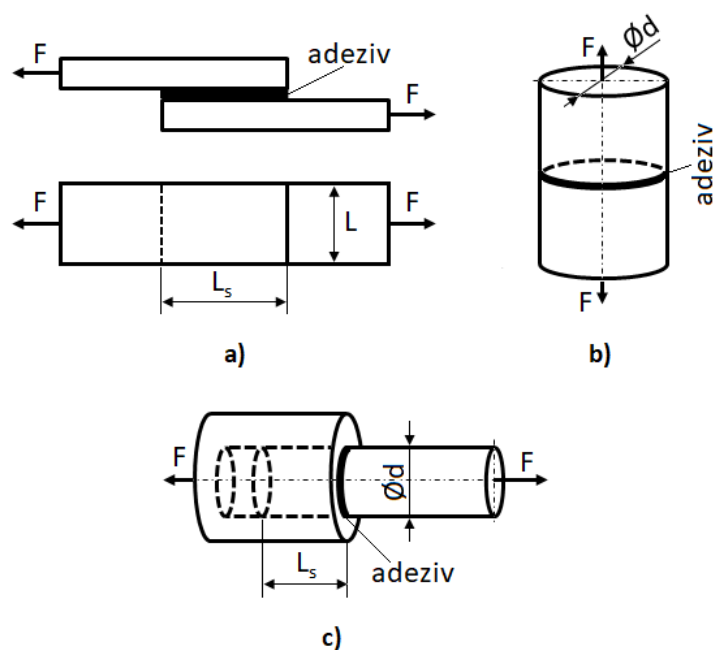


Fig. 5.19. Îmbinări cu adezivi: prin simplă suprapunere (a), cap la cap (b) și îmbinarea unei tije cu o buclă încastrată la un capăt (c)

Pentru îmbinarea din *figura 5.19a*, suprafața de forfecare a adezivului este

$$A_f = L \cdot L_s \quad (5.41)$$

Tensiunea tangențială din stratul de adeziv supus la forfecare nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă a adezivului

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{L \cdot L_s} \leq \tau_{a.ad} \quad (5.42)$$

Din relația (5.42) se determină lungimea de suprapunere a tablelor (plăcilor):

$$L_s \geq \frac{F}{L \cdot \tau_{a.ad}} \quad (5.43)$$

Tot din (5.42) se poate determina forța maximă (capabilă):

$$F_{cap} \leq L \cdot L_s \cdot \tau_{a.ad} \quad (5.44)$$

Se observă că, dacă aceeași îmbinare ar fi realizată prin nituire, suprafața de forfecare a niturilor ar fi mult mai mică (*fig. 5.12*). Din acest motiv, chiar dacă tensiunea tangențială admisibilă ar fi mai mică pentru adeziv față de cea pentru materialul nitului ($\tau_{a.ad} < \tau_a$), este posibil ca, pentru aceeași lungime de suprapunere L_s , îmbinarea cu adeziv să preia o forță capabilă mai mare.

La îmbinarea din *figura 5.19b*, stratul de adeziv este supus la tracțiune. Tensiunea normală care apare în adeziv nu trebuie să o depășească pe cea admisibilă

$$\sigma = \frac{N}{A_t} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq \sigma_{a.ad} \quad (5.45)$$

Nu este posibil, în general, ca tensiunea admisibilă să fie atinsă simultan în adeziv și tijă. Suprafața ocupată de adeziv depinde de diametrul tijelor. Acest tip de îmbinare este puțin recomandat. Pentru verificare, din relația de mai sus poate fi determinată, de exemplu, forța capabilă

$$F_{cap} \leq \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sigma_{a.ad} \quad (5.46)$$

Suprafața de forfecare a adezivului din îmbinarea prezentată în *figura 5.19c* este suprafața laterală a cilindrului de lungime L_s

$$A_f = \pi \cdot d \cdot L_s \quad (5.47)$$

Din condiția de rezistență rezultă lungimea de suprapunere

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{A_f} = \frac{F}{\pi d L_s} \leq \tau_{a.ad} \Rightarrow L_s \geq \frac{F}{\pi d \tau_{a.ad}} \quad (5.48)$$

5.8.4. Calculul consolei

Consola din *figura 5.20a* este fixată de un stâlp cu patru șuruburi și încărcată cu forța F la capătul liber. Se cere să se determine diametrul minim d al tijeii șurubului. Calculul convențional parcurge următoarele etape:

1. *Determinarea centrului de greutate al îmbinării:* Dacă găurile nu sunt coliniare, centrul de greutate al îmbinării este centrul de greutate al poligonului care are ca vârfuri centrele găurilor;
2. *Reducerea forței F la centrul de greutate al îmbinării:* Se adaugă și se scade F pe verticala care trece prin centrul de greutate (*fig. 5.20b*), iar forțele barate formează un cuplu (*fig. 5.20c*)

$$M_{ext} = F \cdot e \quad (5.49)$$

3. *Determinarea eforturilor din tijele șuruburilor:* Se consideră că forța F este echilibrată de forțele verticale egale și de sensuri contrare care apar în fiecare din cele n șuruburi (în cazul prezentat $n = 4$), iar momentul exterior M_{ext} este echilibrat de momentul interior M_{int} dat de forțele suplimentare care apar în tijele șuruburilor

$$F_v = \frac{F}{n}; \quad |M_{ext}| = |M_{int}| \quad (5.50)$$

Pentru a determina aceste forțe se unește centrul de greutate O al îmbinării cu centrul fiecărei găuri. Segmentele rezultate au lungimile $b_1, b_2, \dots, b_n$, unde cu b_i s-a notat mărimea segmentului $[Oi]$. Forțele care apar în tijele șuruburilor sunt proporționale cu mărimea acestor segmente ($F_i/b_i = \text{constant}$), sunt perpendiculare pe direcția acestora și sunt orientate astfel încât să dea un moment de sens contrar celui produs de încărcări (forța F), notat M_{ext} (*fig. 5.20e*);

4. *Determinarea eforturilor rezultante:* Se determină rezultanta forțelor care acționează simultan asupra fiecărui șurub (*fig. 5.20f*). Aceste rezultante se obțin prin compunere vectorială ($R_1, R_2, \dots, R_n$);
5. *Calculul de rezistență:* Se calculează la forfecare șurubul cel mai sollicitat din îmbinare și dimensiunea se adoptă pentru toate celelalte șuruburi, deoarece adoptarea unor șuruburi de dimensiuni diferite

nu este rentabilă economic. Forța tăietoare cu care se face acest calcul va fi rezultanta maximă în modul

$$T = \max(|R_1|, |R_2| \dots |R_n|) \quad (5.51)$$

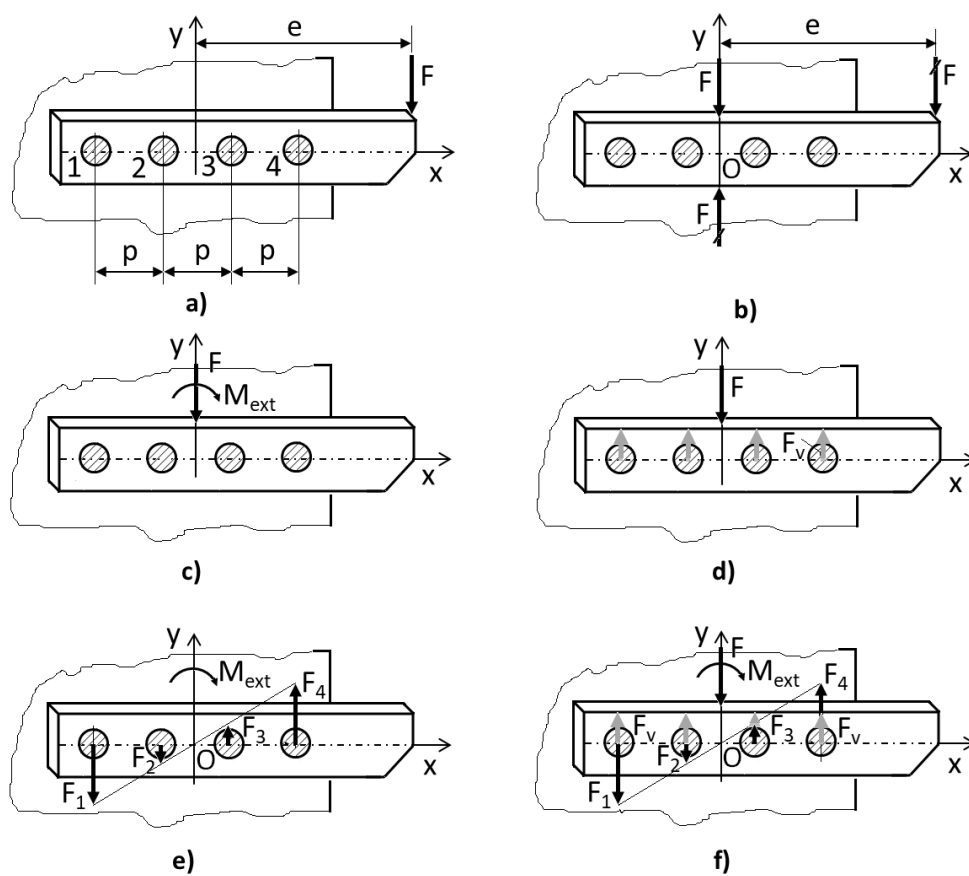


Fig. 5.20. Consolă cu șuruburile secționare (a), reducerea forței la centrul de greutate (b) și sistemul static echivalent (c), echilibrarea forței F și a momentului M_{ext} de către eforturile din șuruburi (d, e) și suprapunerea efectelor (f)

Pentru cazul prezentat în *figura 5.20*, se poate scrie, în cadrul etapei a 3-a

$$\begin{aligned} b_1 = b_4 = \frac{3}{2} p; \quad b_2 = b_3 = \frac{1}{2} p \\ \frac{F_1}{b_1} = \frac{F_2}{b_2} = \frac{F_3}{b_3} = \frac{F_4}{b_4}; \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{F_1}{p} = 2 \frac{F_2}{p} = 2 \frac{F_3}{p} = \frac{2}{3} \frac{F_4}{p} \\ \Rightarrow F_1 = F_4 = 3 \cdot F_2; \quad F_2 = F_3 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Momentul interior este dat de suma celor două cupluri formate de perechile de forțe F_1 și F_4 , respective F_2 și F_3

$$M_{\text{int}} = F_1 \cdot 3p + F_2 \cdot p \quad (5.53)$$

Din condiția de echilibru a momentelor, ținând cont și *relația (5.52)* dintre forțe, se determină F_1 și F_2

$$\begin{aligned} Fe = F_1 \cdot 3p + F_2 \cdot p \\ F_1 = F_4 = \frac{3F \cdot e}{10p}; \quad F_2 = F_3 = \frac{F \cdot e}{10p} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Se observă că, pentru cazul studiat, șurubul cel mai solicitat este șurubul 4, în secțiunea căruia acționează forța tăietoare rezultantă (*fig. 5.20f*)

$$T = R_4 = F_v + F_4 = F \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{e}{p} \right) \quad (5.55)$$

Tensiunea tangențială din șurubul 4 este

$$\tau = \frac{T}{A} \leq \tau_a \quad (5.56)$$

unde

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (5.57)$$

Din (5.56) și (5.57) se determină d . Dacă tija este filetată în planul de separație dintre table, se va considera că d este diametrul interior al filetului.

Aplicația 5.4

Să se dimensioneze șuruburile care susțin consola din *figura 5.21*, dispuse în vârfurile unui triunghi echilateral cu latura $a = 200$ mm, știind că $e = 600$ mm, $F = 4200$ N și $\tau_a = 100$ MPa.

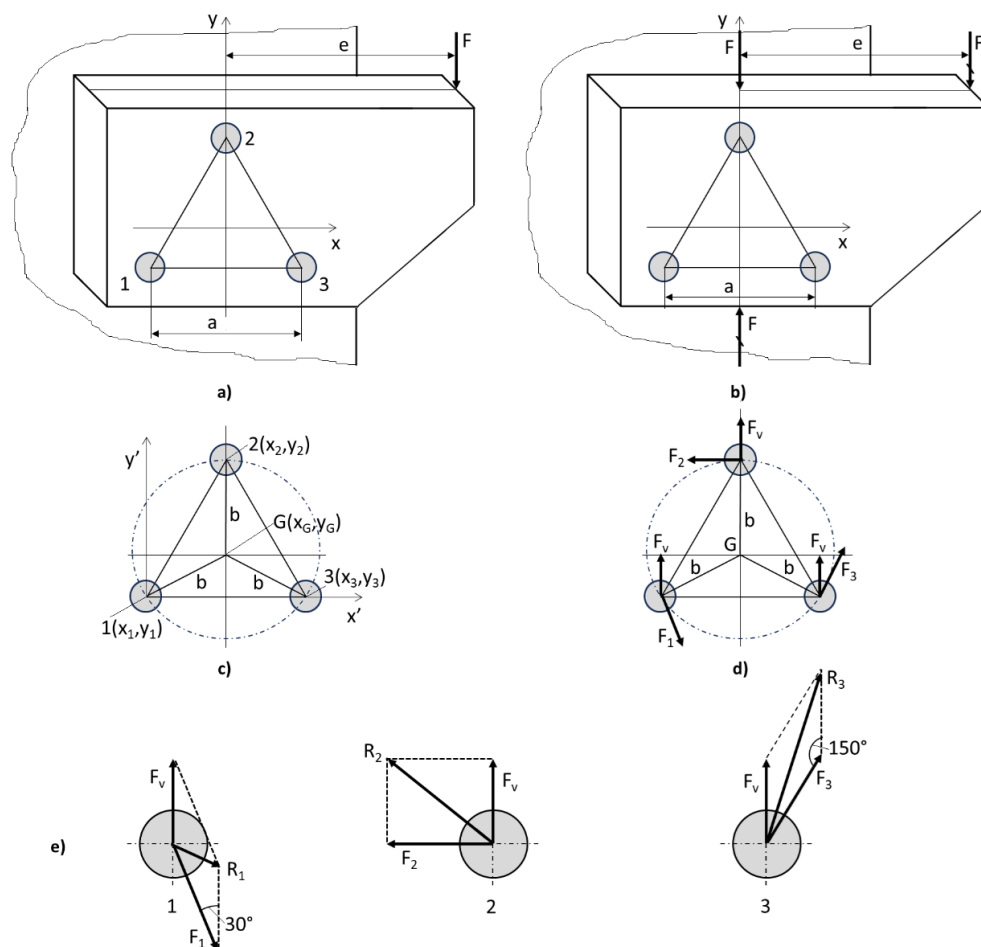


Fig. 5.21. Consolă (a), reducerea forței (b), determinarea poziției centrului de greutate (c), eforturile din tijele șuruburilor (d) și compunerea acestora (e)

Rezolvare: În triunghiul echilateral înălțimea este și mediană și mediatoare și este egală cu

$$\sqrt{3} \cdot a/2 \approx 0,866a \quad (5.58)$$

1. Poziția centrului de greutate al triunghiului se determină cu relația (fig. 5.21c):

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (5.59)$$

Particularizând pentru cazul studiat, se obține

$$x_G = \frac{0 + 100 + 200}{3} = 100 \text{ mm}; \quad y_G = \frac{0 + 173,2 + 0}{3} \approx 57,73 \text{ mm} \quad (5.60)$$

2. Se reduce forța F la centrul de greutate (fig. 5.21b) și se determină M_{ext}

$$M_{ext} = F \cdot e; \quad M_{ext} = 4200 \cdot 600 = 2,52 \cdot 10^6 \text{ mm} \quad (5.61)$$

3. Forța F este echilibrată de către cele trei forțe verticale F_v (fig. 5.21d):

$$F_v = \frac{F}{3}; \quad F_v = \frac{4200}{3} = 1400 \text{ N} \quad (5.62)$$

Toate găurile sunt egal depărtate de centrul de greutate, care împarte medianele în raportul 2/3 față de vârf și 1/3 față de bază

$$b_1 = b_2 = b_3 = b; \quad b = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115,47 \text{ mm} \quad (5.63)$$

Știind că $F_i / b_i = \text{constant}$, în baza relației de mai sus se poate scrie

$$F_1 = F_2 = F_3 \quad (5.64)$$

Se determină M_{ext} și apoi forța F_1 :

$$\begin{aligned}
M_{ext} &= F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3; \quad M_{ext} = 3F_1 b \\
|M_{int}| &= |M_{ext}|; \quad F \cdot e = 3F_1 b \\
\Rightarrow F_1 &= \frac{F \cdot e}{3b} = \frac{4200 \cdot 600}{3 \cdot 115,5} \approx 7272,7 \text{ N}
\end{aligned}
\tag{5.65}$$

4. Forțele rezultante din fiecare tijă se pot determina cu teorema lui *Pitagora* generalizată (*fig. 5.21e*)

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{F_v^2 + F_1^2 - 2F_v F_1 \cos 30^\circ} \\
R_2 &= \sqrt{F_v^2 + F_2^2} \\
R_3 &= \sqrt{F_v^2 + F_3^2 - 2F_v F_3 \cos 150^\circ}
\end{aligned}
\tag{5.66}$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\begin{aligned}
R_1 &\approx 6113 \text{ N}; \quad R_2 \approx 7418 \text{ N}; \quad R_3 \approx 7418 \text{ N}; \\
T &= \max(R_1, R_2, R_3) = 8526 \text{ N}
\end{aligned}
\tag{5.67}$$

5. Se calculează șurubul 3, cel mai solicitat la forfecare

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{T}{A} = \frac{4R_3}{\pi d^2} \leq \tau_a \\
d &\geq \sqrt{\frac{4R_3}{\pi \tau_a}}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 8526}{\pi \cdot 100}}; \quad d \geq 10,4 \text{ mm}
\end{aligned}
\tag{5.68}$$

Se adoptă un șurub M14, cu pasul $p=2\text{mm}$, diametrul exterior $D = 14 \text{ mm}$ și diametrul interior $d=11,8\text{mm}$. Șurubul M12 are $d=10,1\text{mm}$.

5.8.5. Probleme static nedeterminate

Trei platbande cu aceleași dimensiuni, una din oțel și două din aluminiu, sunt suprapuse și nituite la capete, ca în *figura 5.22*. Știind că niturile au diametrul d și sunt confecționate dintr-un material pentru care se cunoaște τ_a , să se determine variația maximă de temperatură la care poate fi supus ansamblul.

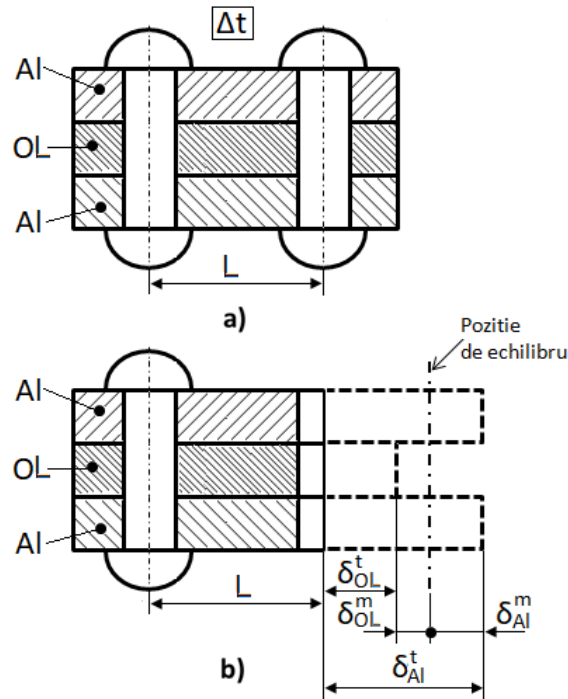


Fig. 5.22. Asamblare nituită supusă la variații de temperatură (a)
și îndepărtarea unui nit pentru a permite dilatarea liberă (b)

Deoarece toate platbandele sunt forțate de către nituri să aibă aceeași deformație, diferită de cea de dilatare termică liberă, în ele apar eforturi normale de sensuri contrare, pentru care se poate scrie ecuația de echilibru

$$|N_{OL}| = 2|N_{Al}| \quad (5.69)$$

unde N_{OL} este efortul din platbanda de oțel, iar N_{Al} este efortul dintr-o singură platbandă de aluminiu.

Aceasta fiind singura ecuație de echilibru care poate fi scrisă, problema este simplu static nedeterminată (NN=2, NE=1). Pentru ridicarea nedeterminării se înlătură unul dintre nituri, permițând astfel dilatarea liberă a platbandelor cu lungirile termice δ^t . Pentru aducerea lor în poziția de echilibru, platbanda de oțel este tracționată (având efortul N_{OL}) iar cea de aluminiu este

comprimată (având efortul N_{Al}), producându-se astfel alungirile mecanice δ^m . Capătul din stângă a pachetului de platbande este considerat fix (fig. 5.22). Pentru porțiunea platbandelor cuprinsă între nituri se poate scrie relația dintre deformații

$$\begin{aligned}\delta_{Al}^t &= \delta_{OL}^t + \delta_{OL}^m + |\delta_{Al}^m| \\ \alpha_{Al} L \Delta t &= \alpha_{OL} L \Delta t + \frac{N_{Al} \cdot L}{AE_{Al}} + \frac{N_{OL} \cdot L}{AE_{OL}}\end{aligned}\quad (5.70)$$

unde A este aria secțiunii transversale a unei platbande.

Din ecuațiile (5.69) și (5.70) rezultă

$$N_{Al} = \frac{(\alpha_{Al} - \alpha_{OL}) AE_{OL} E_{Al} \cdot \Delta t}{E_{OL} + 2E_{Al}} \quad (5.71)$$

Forfecarea nitului se produce la interfața dintre platbandele de oțel și aluminiu, forța tăietoare fiind egală cu N_{Al} . Tensiunea tangențială dintr-un nit este

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{T}{A_1} = \frac{N_{Al}}{A_1} = \frac{(\alpha_{Al} - \alpha_{OL}) AE_{OL} E_{Al} \cdot \Delta t}{(E_{OL} + 2E_{Al}) A_1} \leq \tau_a \\ A_1 &= \frac{\pi d^2}{4}\end{aligned}\quad (5.72)$$

Din inegalitatea de mai sus rezultă diferența maximă de temperatură la care poate fi supus ansamblul

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{(E_{OL} + 2E_{Al}) A_1 \tau_a}{(\alpha_{Al} - \alpha_{OL}) AE_{OL} E_{Al}} \quad (5.73)$$

La capitolul *Torsiune* se va continua calculul îmbinărilor.

De reținut:

- Ipotezele adoptate în calculul convențional la forfecare;
- Efectuarea calculului de rezistență și de verificare;
- Principiul dualității tensiunilor tangențiale;
- Calculul convențional al îmbinărilor.

CAPITOLUL

6



Torsiune

Sursa: <https://www.batonordic.dk/en/b-3/torque-wrenches>

6. TORSIUNEA BARELOR CU SECȚIUNE CIRCULARĂ

6.1. OBIECTIVE

În acest capitol se prezintă calculele de rezistență și de rigiditate pentru bare drepte cu secțiune circulară sau inelară, supuse la torsiune (răsucire). Vor fi rezolvate atât probleme static determinate și nedeterminate, cât și probleme care implică calculul unor îmbinări cu piese supuse la torsiune și respectiv forfecare. La torsiunea barelor cu altă secțiune decât circulară sau circulară inelară nu se aplică ipoteza lui *Bernoulli*, ceea ce complică calculele de rezistență. Calculul barelor cu secțiune oarecare supuse la torsiune este prezentat în volumul al doilea al acestei lucrări.

6.2. INTRODUCERE

O bară dreaptă este solicitată la torsiune dacă efortul din secțiunea transversală este un moment M_x care, în reprezentare vectorială, este dirijat după axa Ox , aleasă convențional pe direcția axei barei. După cum s-a arătat în *Capitolul 1*, celelalte componente ale momentului resultant din secțiunea transversală (M_z și M_y) apar în cazul solicitării barei la încovoiere (*fig. 6.1*). Acționarea mașinilor și a mecanismelor se face prin intermediul unor transmisii cu roți dințate, cu roți de curea sau de lanț, montate pe *arbori de transmisie* care sunt solicitați la *torsiune* cu *încovoiere*. La torsiune sunt solicate tijele unor chei tubulare pentru șuruburi, componente ale suspensiei cu bare de torsiune (*fig. 6.2*) etc.

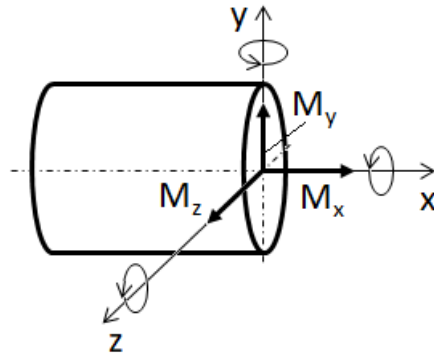
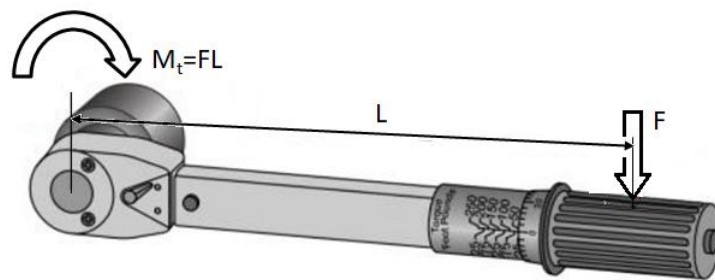
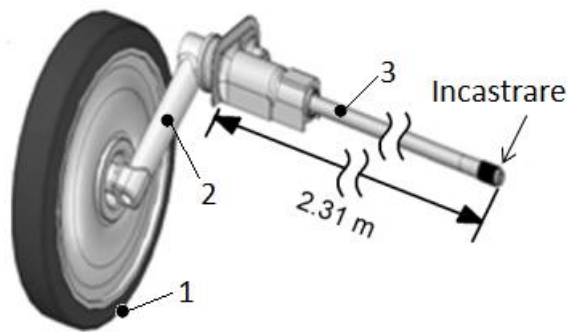


Fig. 6.1. Momentele din secțiunea unei bare. Momentul M_x apare în cazul solicitării la torsiune



a)



b)

Fig. 6.2. Cheie dinamometrică (a); suspensie cu bare de torsiune (b)

6.3. CALCULUL MOMENTULUI FUNCȚIE DE PUTERE ȘI TURAȚIE

La motoarele electrice, de exemplu, producătorul indică de obicei puterea și turația, dar nu și momentul de torsiune. Calculul acestuia, funcție de mărimile cunoscute, este prezentat în cele ce urmează. De la fizică se cunoaște expresia puterii

$$P = Fv \quad (6.1)$$

Pentru mișcarea circulară uniformă se poate scrie

$$v = \omega \cdot r; \quad \omega = 2\pi n \quad (6.2)$$

unde ω este viteza unghiulară și n turația.

Din (6.1) și (6.2) rezultă

$$P = (Fr)2\pi n; \quad Fr = M_t \quad (6.3)$$

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P}{n} \quad (6.4)$$

Relația (6.4) este valabilă pentru cazul în care mărimile implicate sunt exprimate în *unitățile Sistemului Internațional (SI)*:

$$\langle M_t \rangle_{SI} = N \cdot m; \quad \langle P \rangle_{SI} = W; \quad \langle n \rangle_{SI} = \frac{rot}{sec} \quad (6.5)$$

Producătorii de motoare indică de obicei turația în rot/min. În acest caz, membrul drept al relației (6.4) trebuie să fie înmulțit cu 60. După simplificare, rezultă

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} \quad (6.6)$$

Relația (6.6) este valabilă cu unitățile de măsură:

$$\langle n \rangle = \frac{rot}{min}; \quad \langle M_t \rangle = N \cdot m; \quad \langle P \rangle = W \quad (6.7)$$

În diverse lucrări, relația (6.4) apare cu membrul din dreapta înmulțit cu diverși coeficienți, care provin din utilizarea altor unități de măsură.

6.4. DEFORMAȚII ȘI TENSIUNI

Fie o bară dreaptă cu secțiunea circulară, la suprafața căreia se trasează o rețea de directoare și generatoare. După aplicarea momentului de torsiune M_t , ochiurile rețelei vor suferi doar deformații unghiulare, la fel ca la forfecare. Această experiență demonstrează prezența tensiunilor tangențiale τ . Tot experimental se arată că lungimea barei L nu se modifică. De asemenea, secțiunile transversale nu se deplantează (ceea ce confirmă ipoteza lui *Bernoulli*) și doar se rotesc una față de alta (*fig. 6.3*).

În urma solicitării epruvetelor din materiale tenace la torsiune, rezultă o diagramă M_t - φ asemănătoare ca aspect cu cea obținută la tracțiune. Pornind de la această diagramă se poate trasa curba caracteristică în coordonate τ - γ . Porțiunea inițială a diagramei este rectilinie (*fig. 6.4*). În această regiune este valabilă legea lui *Hooke*

$$\tau = G\gamma \quad (6.8)$$

6.4.1. Calculul deformațiilor

Fie bara din *figura 6.5*, supusă la torsiune cu un moment M_t . În orice secțiune efortul $M_x = M_t$. În cele ce urmează vor fi admise următoarele ipoteze:

- Bara este dreaptă, cu secțiunea transversală circulară sau circulară inelară;
- În urma solicitărilor secțiunile rămân plane și perpendiculare pe axa geometrică a barei (ipoteza lui *Bernoulli*);
- Se admite ipoteza deformațiilor elastice mici;
- Materialul ascultă de legea lui *Hooke*.

În baza ipotezei deformațiilor mici se poate scrie

$$\tan \gamma \approx \gamma \approx \frac{\text{arc}(A'A'')}{dx} = \frac{R \cdot d\varphi}{dx} \quad (6.9)$$

Rotirea specifică se măsoară în [rad/m] și se notează

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta \quad (6.10)$$

Din (6.9) și (6.10) rezultă

$$\gamma = \theta R \quad (6.11)$$

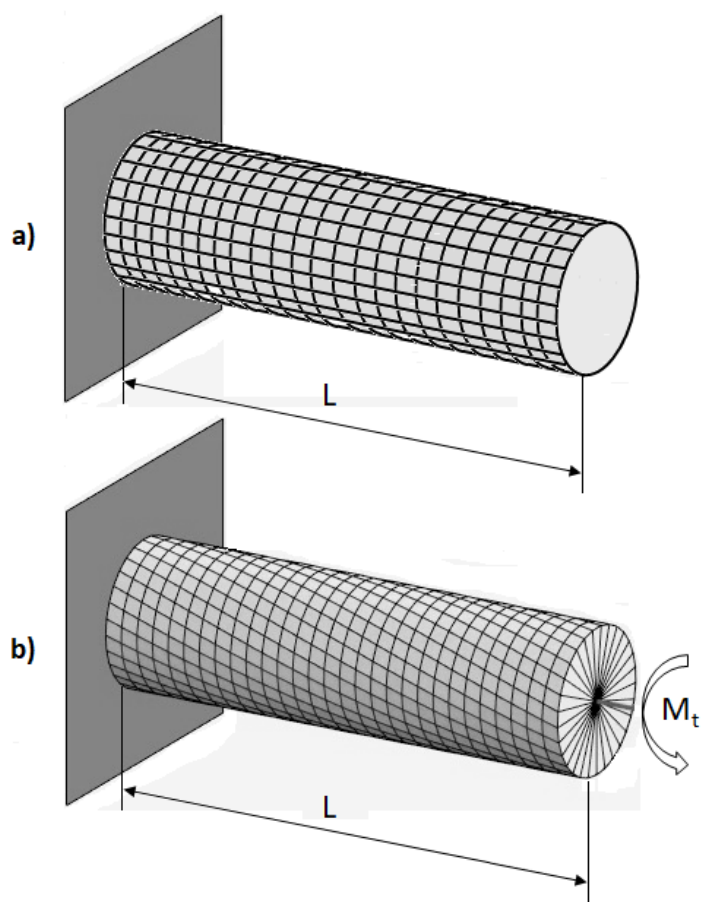


Fig. 6.3 Deformarea barelor drepte cu secțiune circulară, supuse la torsiune: rețeaua înainte (a) și după deformare (b)

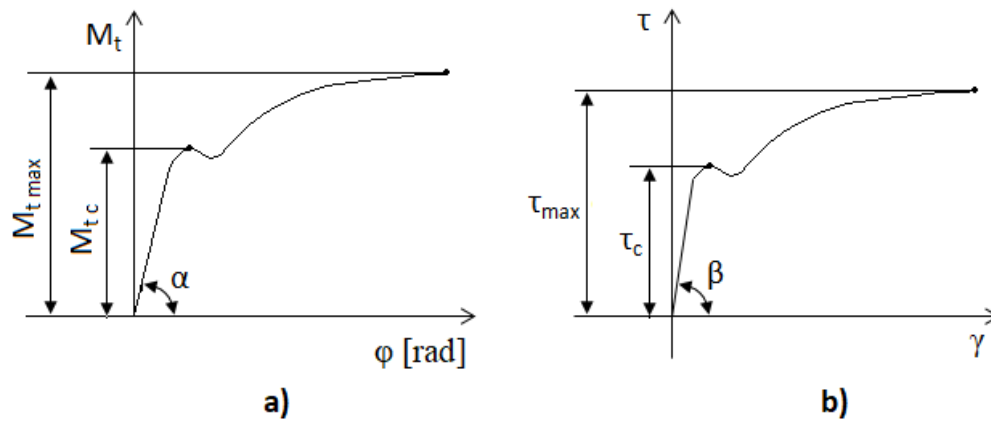


Fig. 6.4. Diagramele M_t - φ și τ - γ pentru solicitarea la torsiune

Din figurile 6.5b,c se observă că alunecarea γ este maximă la suprafață și este proporțională cu raza, deoarece

$$\frac{\text{arc}(A'A'')}{R} = \frac{\text{arc}(D'D'')}{r} \quad (6.12)$$

Aceste observații îndreptățesc ipoteza că tensiunea tangențială τ este proporțională cu raza. În consecință, τ atinge valoarea maximă la raza R .

Din (6.8), (6.11) și (6.12) rezultă

$$\tau(r) = G\theta r; \quad \tau(R) = G\theta R \quad (6.13)$$

Tensiunea tangențială la raza curentă $\tau(r)$ se introduce în ecuația de echivalență (1.34) care conține momentul de torsiune și se obține

$$M_x = \int_A \tau \cdot r \cdot dA; \quad M_x = G \cdot \theta \cdot \int_A r^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p \quad (6.14)$$

unde I_p este momentul de inerție polar al secțiunii circulare (vezi Anexa 1).

Din (6.14) rezultă

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \quad (6.15)$$

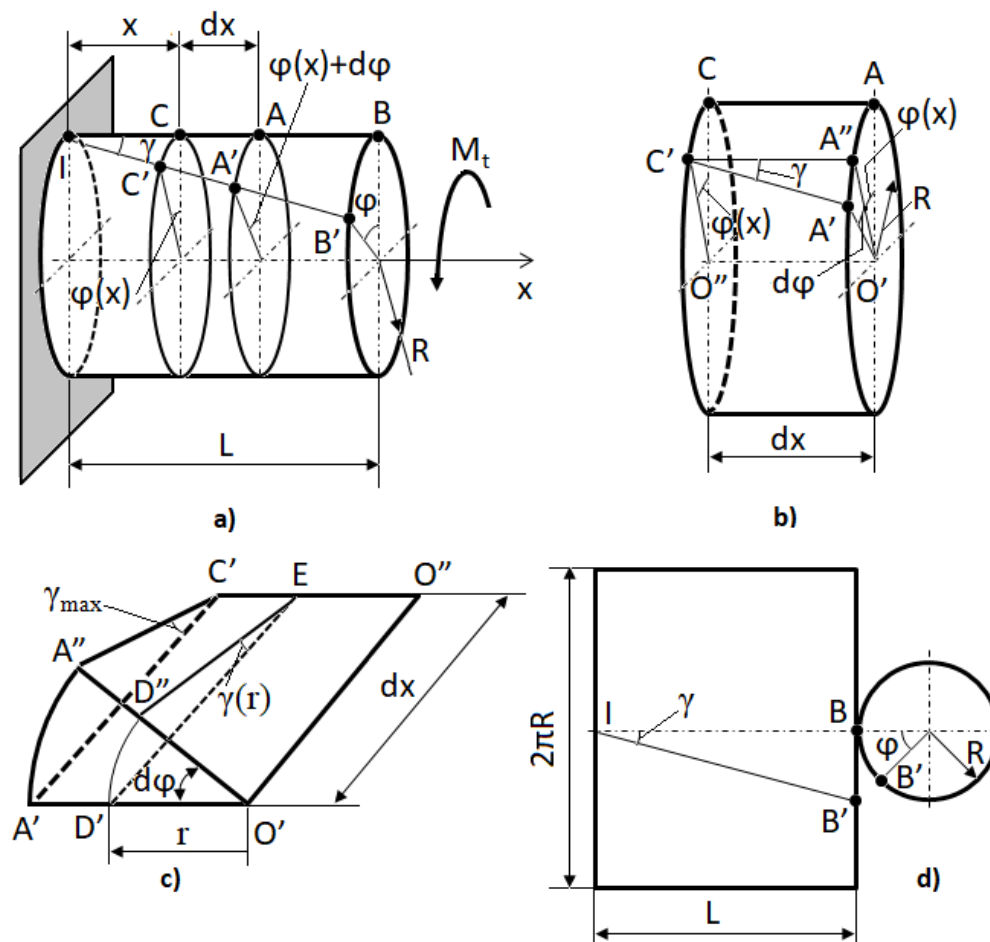


Fig. 6.5. Bară supusă la torsiune (a), izolarea unui element de bară (b) și izolarea unei felii din element (c), desfășurarea învelișului cilindric (d)

Din (6.10) și (6.15) se poate scrie unghiul de rotire al secțiunii transversale pentru deformații mici

$$\varphi = \theta \cdot L; \quad \varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (6.16)$$

Relația (6.15) poate fi folosită pentru dimensionare sau verificare, limitând astfel deformațiile, nu tensiunile. Ea se mai numește *criteriul de rigiditate*. Pentru dimensionare pe baza acestui criteriu se va pune condiția ca rotirea specifică maximă să nu o depășească pe cea admisibilă și se calculează apoi diametrul barei.

$$\theta \leq \theta_a \quad (6.17)$$

La calculul de verificare toate mărimile sunt cunoscute și se verifică doar dacă este satisfăcută inegalitatea (6.17).

Observație

Dimensionarea din condiția de rigiditate poate fi utilizată pentru toate solicitările. Totuși, în cazul torsiunii, ea capătă o importanță mare în cazul arborilor de transmisie lungi, utilizați în construcția de mașini, care trebuie să execute mișcări precise (cum ar fi în cazul mașinilor unelte, a mașinilor textile sau agricole etc.).

6.4.2. Calculul de rezistență

Relația (6.15) mai poate fi scrisă

$$G\theta = \frac{M_x}{I_p} \quad (6.18)$$

Înmulțind ambii membri cu r și ținând cont de (6.13), rezultă

$$\tau(r) = \frac{M_x \cdot r}{I_p} \quad (6.19)$$

La suprafața barei ($r = R$), τ este maxim și relația poate fi scrisă succesiv

$$\begin{aligned} \tau(R) &= \frac{M_x \cdot R}{I_p} = \frac{M_x}{\frac{I_p}{R}}; \quad \frac{I_p}{R} = W_p \Rightarrow \\ \tau(R) &= \frac{M_x}{W_p} \end{aligned} \quad (6.20)$$

unde W_p este *modulul de rezistență polar* al secțiunii circulare.

Ultima dintre relațiile (6.20) poate fi utilizată pentru dimensionare, caz în care trebuie respectată condiția

$$\tau_{\max} \leq \tau_a \quad (6.21)$$

unde $\tau_{\max} = |\tau(R)|$ în secțiunea (sau regiunea) periculoasă.

Secțiunea periculoasă se stabilește în urma trasării diagramelor M_x și $\tau(R)$. Relațiile (6.20) și (6.21) limitează tensiunile din bară și se numesc *criteriul de rezistență*. Relația (6.19) arată că τ este distribuit liniar pe direcția razei, fiind nul în centrul secțiunii barei. În conformitate cu legea dualității tensiunilor tangențiale, trebuie să apară tensiunile τ_{zx} în lungul barei (fig. 6.6).

6.4.3. Secțiunea rațională

În figura 6.6 se observă că tensiunile τ din vecinătatea centrului de greutate al secțiunii sunt nule sau aproape nule, fapt care implică o utilizare nerațională a materialului în această zonă. O utilizare rațională a materialului se realizează la barele de secțiune circulară inelară (fig. 6.6c). Găurirea barelor pe lungimi mari este însă scumpă și, în consecință, asemenea arbori sunt rareori utilizați. Dacă pereții barei tubulare sunt prea subțiri, atunci cedarea se produce prin voalarea pereților barei (flambaj la torsiune, vezi volumul al doilea al lucrării) și nu prin depășirea tensiunii de rupere τ_r . Arborii de secțiune circulară plină au însă deformații mai mici (sunt mai rigizi). La determinarea caracteristicilor mecanice și elastice ale unui material, tensiunile trebuie să fie cât mai uniform distribuite pe secțiune. Acest lucru este greu de realizat la torsiune, din motivele arătate mai sus. Pentru determinarea acestor caracteristici este preferată încercarea la forfecare, unde tensiunile tangențiale sunt mai uniform distribuite în secțiunea slăbită a epruvetelor (metoda *Iosipescu*). Încercarea la torsiune se utilizează pentru testarea organelor de mașini supuse în special la aceasta solicitare, cum ar fi bare de torsiune, arbori de transmisie etc.

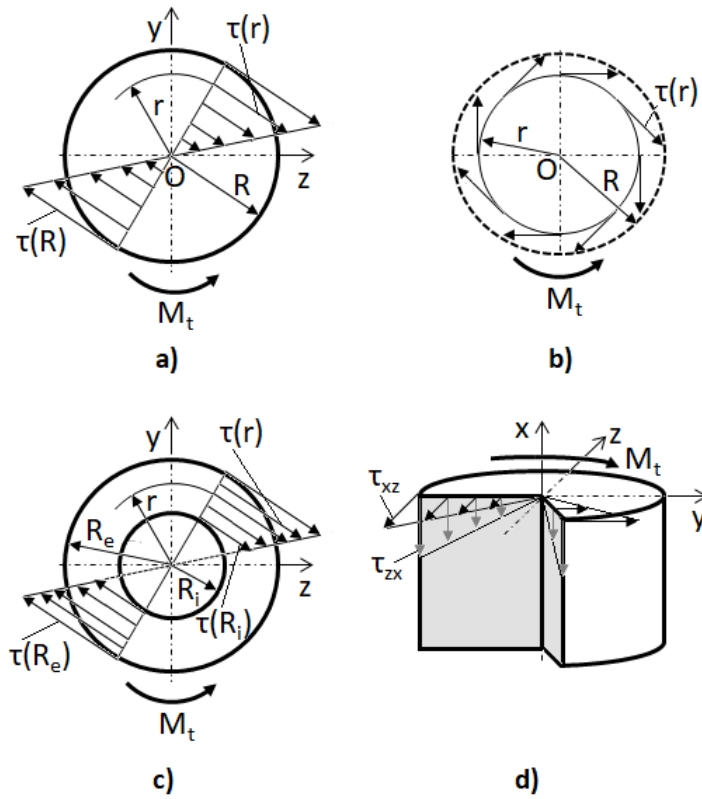


Fig. 6.6. Repartiția tensiunilor tangențiale: pe secțiunea barei (a) și la raza r (b); repartiția tensiunilor τ la secțiunea circulară inelară (c) și pe lungimea barei (d)

6.5. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ

Pentru cazul în care apar tensiuni tangențiale, energia de deformare elastică se calculează cu relația (3.17):

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (6.22)$$

Din (6.19) și (6.22) rezultă succesiv

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2GI_p^2} dx \int_A r^2 dA \Rightarrow U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (6.23)$$

Relația (6.23) permite calculul energiei potențiale de deformare elastică înmagazinată de o bară dreaptă cu secțiunea circulară sau circulară inelară. Dacă momentul M_x este constant pe toată lungimea barei L , sau pe cea a unei regiuni din bară, (6.23) devine

$$U = \frac{M_x^2 L}{2GI_p} \quad (6.24)$$

Dacă bara are n regiuni, energia totală se determină prin însumarea energiilor corespunzătoare

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (6.25)$$

Pentru o secțiune circulară plină I_p și W_p se calculează cu relațiile (Anexa 1):

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (6.26)$$

Aplicația 6.1

Un arbore transmite o putere de 200 kW, la turații cuprinse între 50÷5000 rot/min. Să se determine diametrul arborelui funcție de turație și să se reprezinte grafic această funcție, știind că $\tau_a = 30$ MPa. Momentul de torsiune este constant pe lungimea arborelui și se consideră numai solicitările statice.

Uzual secțiunea arborilor este circulară plină (fig. 6.6a). Momentul de torsiune exterior M_t se determină cu relația (6.6) și este egal cu efortul M_x . Tensiunea tangențială maximă nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă τ_a . Din (6.6), (6.20), (6.21) și (6.26), ținând cont că din (6.6) M_t se calculează în [Nm], rezultă

$$\tau_{\max} = \left(\frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} \cdot 10^3 \right) \frac{16}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d \geq 10^3 \sqrt[3]{\frac{30 \cdot 16 \cdot P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_a}} [mm] \quad (6.27)$$

Înlocuind cu valori numerice și reținând numai semnul egalității, rezultă funcția $d(n)$, care este prezentată grafic în *figura 6.7*

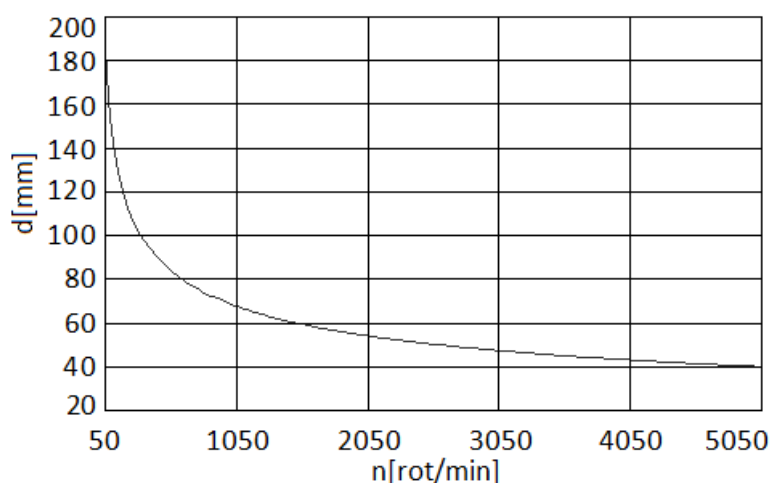


Fig. 6.7. Variația diametrului arborelui funcție de turație ($P = 200 \text{ kW}$, $\tau_a = 30 \text{ MPa}$)

Se observă că diametrul arborelui tinde către 40mm la turații de peste 3000rot/min și respectiv către 180mm pentru 50 rot/min.

Aplicația 6.2

Arborele unui electromotor poate fi construit în două variante: cu secțiune circulară plină și respectiv cu secțiune circulară inelară. (*fig.6.8*). Știind că la arborele de secțiune circulară inelară raportul diametrelor $d_e/d_i = 2$, se cere să se determine raportul greutăților celor doi arbori G_1/G_2 , dacă dimensionarea se face pe baza criteriului de rezistență.

Fiind vorba de arborele aceluiași electromotor, în ambele variante constructive puterea și turația și momentul de torsiune transmis $M_t = M_x$ vor fi aceleași. De asemenea, în ambele variante constructive, lungimea arborelui este aceeași și este confecționat din același material (caracteristicile de material τ_a , γ și G sunt aceleași). Având același coeficient de siguranță în ambele variante, τ_a va fi același.

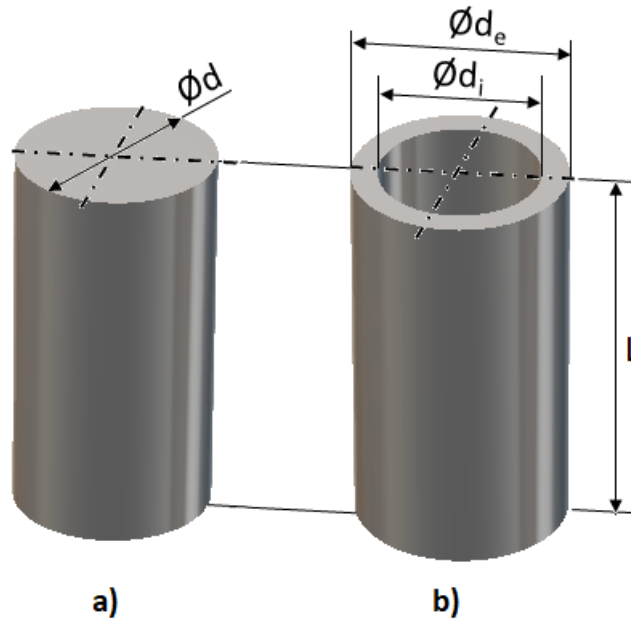


Fig. 6.8. Arbore de electromotor construit în două variante:
cu secțiune circulară plină (a) și cu secțiune circulară inelară (b)

Se scrie raportul greutateilor celor doi arbori

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma \cdot V_1}{\gamma \cdot V_2} = \frac{\gamma \cdot A_1 \cdot L}{\gamma \cdot A_2 \cdot L} = \frac{A_1}{A_2} \quad (6.28)$$

unde

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} d_i^2 \left[\left(\frac{d_e}{d_i} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\pi}{4} d_i^2 [(2)^2 - 1] = 3 \frac{\pi d_i^2}{4} \quad (6.29)$$

Din (6.28) și (6.29) rezultă

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{4}{3\pi d_i^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{d}{d_i} \right)^2 \quad (6.30)$$

Pentru secțiunea circulară inelară momentul de inerție polar și modulul de inerție polar sunt date în *Anexa 1*

$$I_p = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4); \quad W_p = \frac{I_p}{\frac{d_e}{2}} = \frac{\pi}{16d_e}(d_e^4 - d_i^4) \quad (6.31)$$

Diametrele arborilor sunt determinate cu criteriul de rezistență, folosind relațiile (6.20) și (6.21), de unde rezultă

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{W_{p1}} &= M_x \frac{16}{\pi d^3} \leq \tau_a; \\ \frac{M_x}{W_{p2}} &= M_x \frac{16 \cdot d_e}{\pi(d_e^4 - d_i^4)} = \frac{16M_x}{\pi d_i^3} \frac{d_e}{d_i} \frac{1}{\left(\frac{d_e}{d_i}\right)^4 - 1} = \frac{16M_x}{\pi d_i^3} \cdot \frac{2}{2^4 - 1} \leq \tau_a \end{aligned} \quad (6.32)$$

Din (6.32) rezultă

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi\tau_a}}; \quad d_i \geq \sqrt[3]{\frac{32}{15} \cdot \frac{M_x}{\pi\tau_a}} \quad (6.33)$$

Pentru un d_e fixat, $d_i \leq d_e / 2$. Micșorarea lui d_i , în aceste condiții, conduce la creșterea rezistenței arborelui. Din (6.30) și (6.33) se obține

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{1}{3} \left(\frac{16M_x}{\pi\tau_a} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{\pi\tau_a}{M_x} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,28 \quad (6.34)$$

Pentru $d_e/d_i = 2$, greutatea arborelui cu secțiune circulară plină depășești cu circa 28% pe cea a arborelui cu secțiune circulară inelară.

6.6. TRASAREA DIAGramei DE EFORT M_x

Momentele de torsiune sunt aplicate de obicei arborilor prin intermediul roților dințate, a roților de curea sau de lanț, care au lățimea foarte mică în raport cu lungimea arborelui, astfel încât momentele pot fi considerate concentrate. Convențional, momentele reprezentate cu săgeta deasupra

axei au un sens, iar cele cu săgeata sub axă au sens contrar, în cele ce urmează se va neglija efectul încovoierii, studiindu-se numai torsiunea.

Arborele intermediar din *figura 6.9a* primește mișcarea prin intermediul roții 2 și o transmite mai departe prin intermediul roților 1, 3 și 4. Momentul M_{t2} acționează într-un sens, iar momentele M_{t1} , M_{t3} și M_{t4} în sens contrar. Deoarece aceste momente trebuie să fie în echilibru, se poate scrie

$$M_{t1} - M_{t2} + M_{t3} + M_{t4} = 0 \quad (6.35)$$

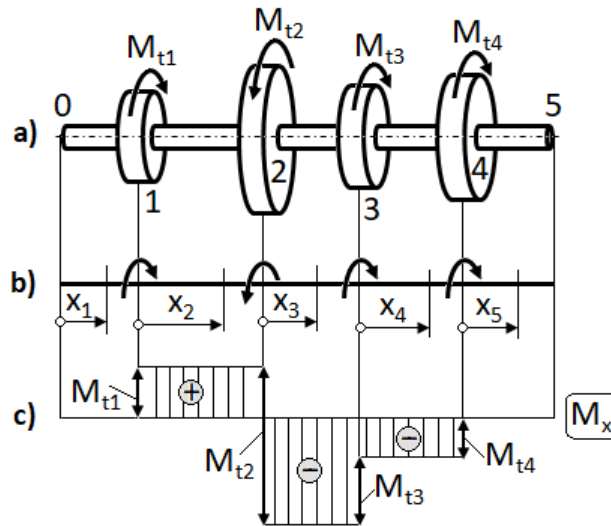


Fig. 6.9. Arbore cu roți dințate (a), schematizarea încărcării (b) și diagrama de efort M_x (c)

Se fac secțiunile x_1 , x_2 și x_3 . Reținând tot timpul porțiunea de arbore din stânga secțiunii, se scriu eforturile

$$\begin{aligned} M_x(x_1) &= 0; & M_x(x_2) &= M_{t1}; & M_x(x_3) &= M_{t1} - M_{t2}; \\ M_x(x_4) &= M_{t1} - M_{t2} + M_{t3}; & M_x(x_5) &= 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Cu aceste valori se trasează diagrama M_x (*fig. 6.9c*). Se observă că în dreptul momentelor concentrate, în diagrama M_x apar salturi egale în modul cu valoarea acestora, ceea ce oferă un mijloc de verificare a diagramei M_x .

6.7. METODA ELEMENTELOR FINITE

Metoda urmează etapele prezentate în *capitolul 4*. La torsiune, la fel ca la solicitările axiale, nodurile elementului finit de tip bară au un singur grad de libertate, cu deosebirea că deplasarea nodului este unghiulară (rotirea φ) și nu liniară. Matricea de rigiditate a elementului va fi de asemeni pătrată, de ordinul doi.

Din *figura 6.4a*, pentru $M_t = M_x$, se determina rigiditatea la torsiune ca fiind panta porțiunii liniare inițiale a diagramei $M_x - \varphi$. Ținând cont apoi de relația (6.16), rezultă că rigiditatea la torsiune este

$$k = \frac{M_x}{\varphi} = \frac{GI_p}{L} \quad (6.37)$$

În *tabelul 6.1* se prezintă comparativ încărcările, deplasările și rigiditățile utilizate de MEF pentru solicitările axiale și respectiv torsiune.

Tab. 6.1. Particularități la aplicarea MEF la solicitări axiale și torsiune

Solicitare	Încărcare	Deplasări	Rigiditate k
Axială	F	δ	$\frac{EA}{L}$
Torsiune	M_t	φ	$\frac{GI_p}{L}$

Deplasările unghiulare φ se măsoară în radiani. Sistemul de ecuații poate fi scris simbolic sub forma matriceală (vezi *capitolul 4*)

$$\{M_t\} = [k] \cdot \{\varphi\} \quad (6.38)$$

În (6.38) semnificația notațiilor este:

- $\{M_t\}$ - matricea coloană (vectorul) a momentelor de torsiune nodale;
- $[k]$ - matricea de rigiditate a structurii (pătrată);
- $\{\varphi\}$ - matricea coloană a rotațiilor nodale.

6.8. PROBLEME

6.8.1. Probleme static determinate

Aplicația 6.3

Să se dimensioneze bara din *figura 6.10* știind că $M_t = 2 \text{ kNm}$, $L = 300 \text{ mm}$, $\tau_a = 100 \text{ MPa}$, $G_{OL} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Se vor trasa diagramele M_x , $\tau(R)$ și φ .

1. *Figurarea și determinarea reacțiunilor.* Deoarece bara este solicitată numai cu momentele de torsiune, reacțiunea care apare în reazemul 1 este tot un moment de torsiune, care poate fi determinat din ecuația de echilibru

$$M_t + 2M_t - 4M_t + M_{t1} = 0; \Rightarrow M_{t1} = M_t \quad (6.39)$$

S-a admis pozitiv sensul momentului M_t figurat cu săgeata sub axă. Așa cum s-a arătat la solicitări axiale, la barele în consolă se poate evita însă calculul reacțiunilor dacă după secționare se reține mereu porțiunea de bară dinspre capătul liber al barei. Cu alte cuvinte, etapa figurării și determinării reacțiunilor este opțională la barele în consolă.

2. *Împărțirea barei în regiuni și secționare prin fiecare regiune.* Bara din *figura 6.10* cuprinde trei regiuni (1-2, 2-3 și 3-4), prin care s-au făcut secțiunile x_1 , x_2 , x_3 . Cercurile mici (balustrările) indică originea secțiunilor, unde $x_i=0$. Pentru o regiune este valabilă o anumită lege de încărcare. Când se dorește trasarea diagramelor rotirilor φ , este posibil ca la împărțirea în regiuni să se țină cont și de diametrul tronsoanelor, nu numai de încărcări. Aceste criterii de împărțire în regiuni sunt valabile și pentru alte solicitări.

3. *Trasarea diagramei M_x .* Se scriu eforturile în cele trei regiuni ale barei

$$\begin{aligned} M_x(x_1) &= M_t; & M_x(x_2) &= M_t + 2M_t; & M_x(x_3) &= M_t + 2M_t - 4M_t \\ x_1 &\in [0, L]; & x_2 &\in [0, 2L]; & x_3 &\in [0, L] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Diagrama M_x este prezentată în *figura 6.10e*. *Figurile 6.10b,c,d* au doar scop didactic. În continuare, figurile de acest tip nu vor mai fi prezentate, nefiind necesare după înțelegerea modului de lucru.

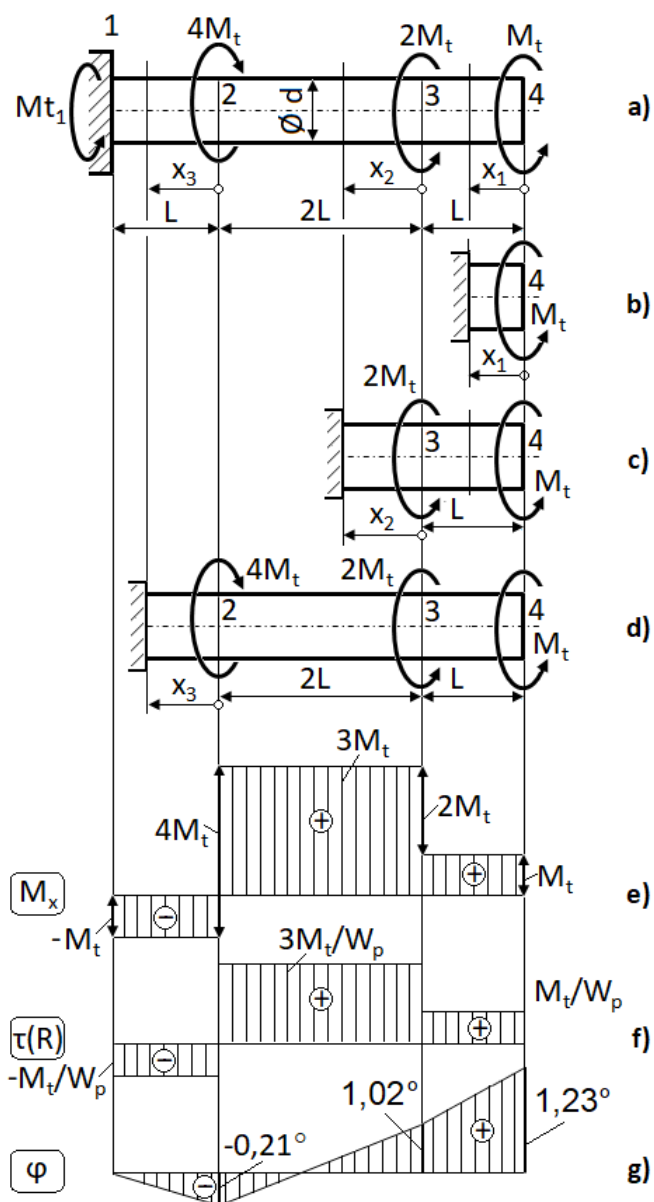


Fig. 6.10. Bară supusă la torsiune (a), secționarea în vederea determinării eforturilor (b, c, d) și diagramele M_x , $\tau(R)$ și φ (e, f, g)

4. *Trasarea diagramei $\tau(R)$.* Tensiunile tangențiale la raza maximă $R = d/2$ se determină cu relația (6.20) și M_x luat din diagrama trasată mai sus. Pentru cele trei regiuni se poate scrie

$$\begin{aligned}\tau(x_1) &= \frac{M_x(x_1)}{W_p} = \frac{M_t}{W_p}; \\ \tau(x_2) &= \frac{M_x(x_2)}{W_p} = \frac{3M_t}{W_p}; \\ \tau(x_3) &= \frac{M_x(x_3)}{W_p} = -\frac{M_t}{W_p}\end{aligned}\quad (6.41)$$

unde W_p se determină cu relația (6.26).

Diagrama $\tau(R)$ este prezentată în figura 6.10f.

5. *Dimensionare.* Din diagrama $\tau(R)$ se observă că tensiunea maximă în modul este în regiunea 2-3. Pentru dimensionare se pune condiția ca tensiunea maximă să nu o depășească pe cea admisibilă

$$\tau_{\max} = 3M_t \cdot \frac{16}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{48M_t}{\pi\tau_a}} \quad (6.42)$$

Înlocuind valorile numerice în (6.42) rezultă

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^6}{\pi \cdot 100}}; \quad d \geq 67,4 \text{ mm} \quad (6.43)$$

Se adoptă diametrul $d = 68 \text{ mm}$, conform [STAS 75-90].

6. *Trasarea diagramei φ .* În încastrare deplasările sunt nule și deci $\varphi_1 = 0$. La fel ca la solicitări axiale, deplasările absolute sunt raportate la un sistem de referință fix, cu originea în încastrare. Rotirile sunt calculate cu relațiile (6.16):

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} = \frac{\Omega}{GI_p} \quad (6.44)$$

unde cu Ω s-a notat suprafața din regiunea corespunzătoare a diagramei M_x .

Rotirea secțiunii 2 față de secțiunea 1 este o rotire absolută, fiind raportată la sistemul fix cu originea în 1 și din acest motiv se poate nota cu un indice

$$\varphi_{2-1} = \varphi_2 = \frac{M_x(x_3) \cdot L}{GI_p} = -\frac{M_t L}{GI_p} \quad (6.45)$$

Rotirea secțiunii 3 față de 1 va fi suma dintre rotirea absolută φ_2 și cea relativă φ_{3-2} (rotirea secțiunii 3 față de secțiunea 2):

$$\begin{aligned} \varphi_{3-1} = \varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_{3-2} = \varphi_2 + \frac{M_x(x_2) \cdot 2L}{GI_p} = \\ &= -\frac{M_t L}{GI_p} + \frac{3M_t \cdot 2L}{GI_p} = \frac{5M_t L}{GI_p} \end{aligned} \quad (6.46)$$

În mod similar se calculează rotirea secțiunii 4 față de încastrare

$$\begin{aligned} \varphi_{4-1} = \varphi_4 &= \frac{-M_t \cdot L}{GI_p} + \\ &+ \frac{3M_t \cdot 2L}{GI_p} + \frac{M_t L}{GI_p} = \frac{6M_t L}{GI_p} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Deoarece rotirea φ depinde liniar de lungimea porțiunii de bară x , în diagrama φ se vor figura punctele de ordonată φ_1 , φ_2 , φ_3 și φ_4 care apoi vor fi unite cu segmente de dreaptă (fig. 6.10g). Din diagrama φ se observă că mai există o secțiune cu rotire nulă, în afară de secțiunea 1.

Înlocuind valorile numerice se calculează valoarea raportului care apare în toate expresiile rotirilor

$$\frac{M_t L}{GI_p} = \frac{M_t L}{G} \cdot \frac{32}{\pi d^4}; \quad \frac{M_t L}{GI_p} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 300}{8 \cdot 10^4} \cdot \frac{32}{\pi \cdot 68^4} = 0,0036 [rad] \quad (6.48)$$

Înlocuind în expresiile rotirilor rezultă

$$\varphi_2 \approx -0,0036 rad = -0,21^\circ; \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{3-2} = 1,02^\circ; \quad \varphi_4 = \varphi_{3-2} = 1,23^\circ \quad (6.49)$$

Aplicația 6.4

Pentru bara de la aplicația 6.3 se adoptă o variație în trepte (fig. 6.11). Să se determine diametrele treptelor d_1 , d_2 , d_3 , astfel încât volumul barei să fie minim.

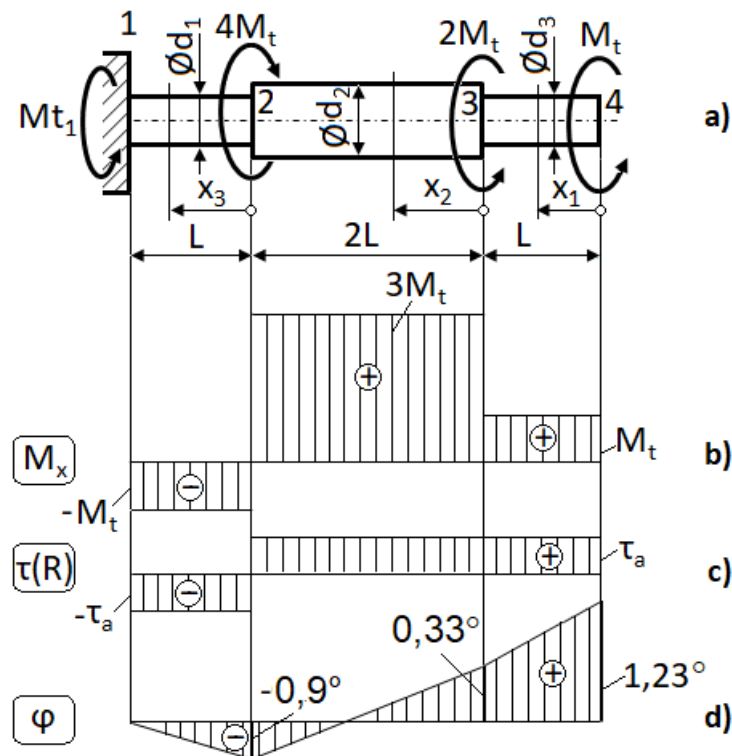


Fig. 6.11. Bara din figura 6.10 construită ca solid de egală rezistență (a) și diagramele M_x , $\tau(R)$ și φ (b,c,d)

Reacțiunile rămân aceleași ca la Aplicația 6.3 (etapele 1 și 2). Diagrama M_x nu depinde decât de încărcări și în consecință rămâne neschimbată (etapa 3). Diagrama $\tau(R)$ este impusă: în orice secțiune tensiunea tangențială la raza R este egală în modul cu τ_a , pentru ca volumul barei să fie minim (fig. 6.11c). La aplicația precedentă, dimensionarea s-a făcut în regiunea 2-3. Deoarece diametrul calculat s-a majorat doar cu 0,6mm, se poate menține $d_2=68\text{mm}$. Se dimensionează în regiunile 1-2 și respectiv 3-4 din condiția (6.21):

$$\frac{M_t}{W_p} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi d_1^3} \leq \tau_a \Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^6}{\pi \cdot 100}}; \quad d_1 \geq 46,7 \text{ mm} \quad (6.50)$$

Pentru solidul de egală rezistență nu se ține cont de valorile liniare normalizate [STAS 75-90] și se adoptă $d_1 = d_3 = 47 \text{ mm}$. Majorând diametrele tensiunile τ scad, iar volumul și rigiditatea cresc.

Raportul între volumul barei cu secțiune constantă (*Aplicația 6.3*) și cel al barei cu secțiune variabilă în trepte (*Aplicația 6.4*) este

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1 \cdot 4L}{A_2 \cdot L + A_1 \cdot 2L + A_2 \cdot L} = \frac{2 \cdot d^2}{d^2 + d_1^2}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{2 \cdot 68^2}{68^2 + 47^2} = 1,353 \quad (6.51)$$

Se observă că volumul barei cu secțiune constantă este cu 35,3% mai mare față de volumul barei cu secțiunea variabilă în trepte, de egală rezistență.

Se calculează rotirile față de reperul fix (cu originea în încastrare) pentru bara cu secțiunea variabilă în trepte

$$\begin{aligned} \varphi_{2-1} = \varphi_2 &= -\frac{32 \cdot M_t L}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = -\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \pi \cdot 47^4}; \\ \varphi_2 &\approx -0,0157 \text{ rad} \approx -0,9^\circ; \quad \varphi_{3-1} = \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{3-2} = \varphi_2 + \frac{32 \cdot 3M_t \cdot 2L}{G\pi d^4} \\ \varphi_3 &= -0,0157 + 0,0214 \approx 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,33^\circ \\ \varphi_{4-1} = \varphi_4 = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} &= \frac{-M_t L}{GI_{p1}} + \frac{3M_t 2L}{GI_{p2}} + \frac{M_t L}{GI_{p1}} \\ \varphi_4 &= \frac{6M_t L}{GI_{p2}}; \quad \varphi_4 = \frac{6 \cdot 24 \cdot 10^4}{\pi \cdot 68^4} \approx 0,0214 \text{ rad} \approx 1,23^\circ \end{aligned} \quad (6.52)$$

Diagrama rotirilor φ este prezentată în *figura 6.11d*. Se observă că la bara de egală rezistență rotirea φ_2 a crescut în modul, datorită micșorării diametrului regiunii 1-2 ($d_1=47\text{mm}$), dar φ_{3-2} nu s-a modificat, deoarece s-a păstrat diametrul $d=68\text{mm}$. Rotirea φ_4 nu se modifică, deoarece $-\varphi_{2-1} = \varphi_{4-3}$.

6.8.2. Probleme static nedeterminate

Aplicarea MEF

Se prezintă în continuare utilizarea MEF la rezolvarea barei solicate la torsiune din *Aplicația 6.3*. Pentru aplicarea MEF, se împarte bara din *figura 6.10* în trei elemente finite, notate (1), (2) și (3), corespunzătoare regiunilor 1-2, 2-3 și respectiv 3-4. Cu relația (6.37) se determină rigiditățile elementelor finite la torsiune, corespunzătoare celor trei regiuni

$$k_1 = k_3 = \frac{GI_p}{L} = \frac{G}{L} \cdot \frac{\pi d^4}{32} = k; \quad k_2 = \frac{GI_p}{2L} = \frac{k}{2} \quad (6.53)$$

În *Capitolul 4* s-a arătat forma matricelor de rigiditate ale elementelor finite (EF), care în acest caz sunt

$$k_1^e = k_3^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}; \quad k_2^e = \begin{bmatrix} \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Adoptând pozitiv sensul lui M_{t1} , sistemul de ecuații (6.38) poate fi explicitat

$$\begin{Bmatrix} M_{t1} = ? \\ -4M_t \\ 2M_t \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & k + \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} + k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = ? \\ \varphi_3 = ? \\ \varphi_4 = ? \end{Bmatrix} \quad (6.55)$$

Relația matriceală (6.55) mai poate fi scrisă ca sistem

$$M_{t1} = -k\varphi_2; \quad \begin{cases} -8\frac{M_t}{k} = 3\varphi_2 - \varphi_3 \\ 4\frac{M_t}{k} = -\varphi_2 + 3\varphi_3 - 2\varphi_4 \\ \frac{M_t}{k} = -\varphi_3 + \varphi_4 \end{cases} \quad (6.56)$$

Rezolvând sistemul se determină necunoscutele $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (rotirile față de reperul fix) și apoi M_{t1} . Se trasează diagramele $M_x, \tau(R)$ și se dimensionează bara, după procedeul prezentat la *Aplicația 6.3*. Se trasează în final diagrama φ , cu valorile calculate prin MEF, cunoscând $\varphi_1 = 0$ (în încastrare deplasările sunt nule).

Sisteme cu bare în serie

Aplicația 6.5

Să se dimensioneze bara de oțel din *figura 6.12*, știind că $M_t = 3 \text{ kNm}$, $L = 200 \text{ mm}$, $\tau_a = 80 \text{ MPa}$, $G_{OL} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Se vor trasa diagramele $M_x, \tau(R)$ și φ . Se cunoaște raportul $D/d = 2$.

Pentru ridicarea nedeterminării se va utiliza metoda geometrică. În acest scop, sunt parcurse etapele prezentate mai jos.

1. *Figurarea reacțiunilor, împărțirea în regiuni, ecuații de echilibru.* Deoarece asupra barei acționează numai momente de torsiune, reacțiunile vor fi de asemenea momente de torsiune M_{t1} și M_{t5} , a căror sens a fost figurat arbitrar în *figura 6.12*. Poate fi scrisă o singură ecuație de echilibru. Adoptând sensul lui M_t ca fiind pozitiv, rezultă

$$M_{t1} + M_t - 3M_t + M_{t5} = 0 \quad (6.57)$$

Problema este simplu static nedeterminată ($NN=2, NE=1$).

2. *Ridicarea nedeterminării.* Pentru găsirea necunoscutelor M_{t1} și M_{t5} este nevoie de o ecuație suplimentară, care se obține studiind deformațiile sistemului. La fel ca la *Capitolul 4*, în acest scop pot fi aplicate metode de compatibilitate geometrică a deformațiilor sau metode energetice. Se va aplica mai jos o metodă geometrică. Aceeași problemă va fi rezolvată ulterior prin MEF. Pentru a ridica nedeterminarea prin metode geometrice se observă că rotirile în secțiunile 1 și 5 sunt nule $\varphi_1 = \varphi_5 = 0$. Altfel spus, rotirea secțiunii 5 față de secțiunea 1 este nulă

$$\varphi_{5-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} + \varphi_{5-4} = 0 \quad (6.58)$$

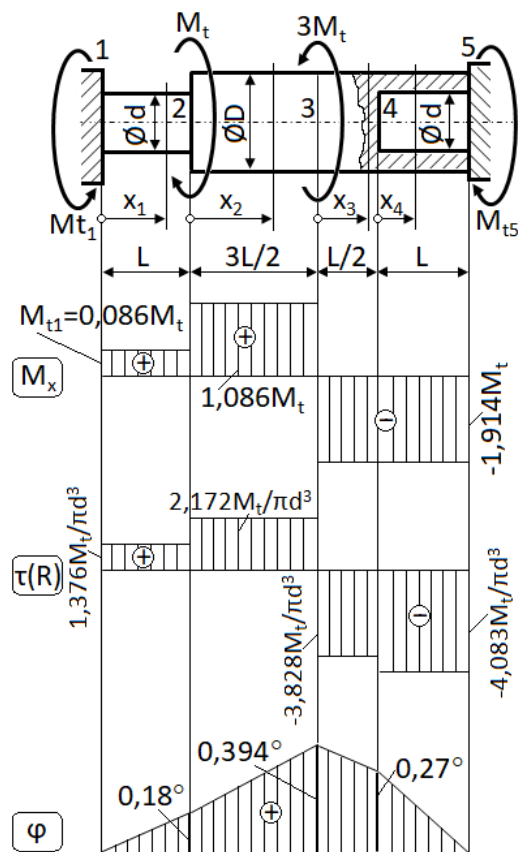


Fig. 6.12. Bară dublu încastrată supusă la torsiune și diagramele M_x , $\tau(R)$ și φ

Ținând cont de (6.16), relația (6.58) se scrie

$$\varphi_{5-1} = \frac{M_x(x_1)L}{GI_p(x_1)} + \frac{M_x(x_2)}{GI_p(x_2)} \cdot \frac{3L}{2} + \frac{M_x(x_3)}{GI_p(x_3)} \cdot \frac{L}{2} + \frac{M_x(x_4)L}{GI_p(x_4)} = 0 \quad (6.59)$$

Se scriu momentele de torsiune în cele patru regiuni și se trasează diagrama M_x

$$M_x(x_1) = M_{t1}; M_x(x_2) = M_{t1} + M_t; M_x(x_3) = M_x(x_4) = M_{t1} + M_t - 3M_t$$

$$x_1 \in [0, L]; \quad x_2 \in [0, 3L/2]; \quad x_3 \in [0, L/2]; \quad x_4 \in [0, L]$$

$$(6.60)$$

Momentele de inerție polare în cele patru regiuni sunt

$$\begin{aligned} I_p(x_1) = I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_p(x_2) = I_p(x_3) = \frac{\pi(2d)^4}{32} = 16I_p; \\ I_p(x_4) = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) = \frac{15}{32} \pi d^4 = 15I_p \end{aligned} \quad (6.61)$$

Din (6.59), (6.60) și (6.61) rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_{5-1} = \frac{M_{t1}}{I_p} + \frac{M_{t1} + M_t}{16 \cdot I_p} \cdot \frac{3}{2} + \frac{M_{t1} - 2M_t}{16 \cdot I_p} \cdot \frac{1}{2} + \frac{M_{t1} - 2M_t}{15 \cdot I_p} = 0 \\ 480M_{t1} + 45(M_{t1} + M_t) + 15(M_{t1} - 2M_t) + 32(M_{t1} - 2M_t) = 0 \quad (6.62) \\ \Rightarrow M_{t1} = \frac{49}{572} M_t \approx 0,086M_t \end{aligned}$$

Deoarece reacțiunile sunt pozitive, înseamnă că sensul lor figurat inițial este corect.

3. *Trasarea diagramei M_x .* Funcțiile $M_x(x_i)$ sunt reprezentate grafic în diagrama M_x din figura 6.12. Se observă că în secțiunea în care acționează un moment concentrat (încărcare sau reacțiune), în diagrama M_x apare un salt, egal în modul cu acel moment. Această observație permite o verificare rapidă a diagramei.

4. *Trasarea diagramei $\tau(R)$.* Tensiunile tangențiale la suprafața barei se vor determina cu relația (6.20). Modulele de rezistență polare în cele patru regiuni ale barei sunt

$$\begin{aligned} W_p(x_1) = \frac{I_p(x_1)}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad W_p(x_2) = W_p(x_3) = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}; \\ W_p(x_4) = \frac{I_p(x_4)}{\frac{D}{2}} = \frac{15\pi d^3}{32} \approx 0,47\pi d^3 \end{aligned} \quad (6.63)$$

Se scriu tensiunile tangențiale în fiecare regiune

$$\begin{aligned}
 \tau(x_1) &= \frac{M_x(x_1)}{W_p(x_1)}; \quad \tau(x_1) = \frac{16 \cdot 0,086 M_t}{\pi d^3} = 1,376 \frac{M_t}{\pi d^3} \\
 \tau(x_2) &= \frac{M_x(x_2)}{W_p(x_2)}; \quad \tau(x_2) = \frac{1,086 \cdot 2 \cdot M_t}{\pi d^3} = 2,172 \frac{M_t}{\pi d^3} \\
 \tau(x_3) &= \frac{M_x(x_3)}{W_p(x_3)}; \quad \tau(x_3) = \frac{-1,914 \cdot 2 \cdot M_t}{\pi d^3} = -3,828 \frac{M_t}{\pi d^3} \\
 \tau(x_4) &= \frac{M_x(x_4)}{W_p(x_4)}; \quad \tau(x_4) = \frac{-1,914 \cdot M_t}{0,47 \pi d^3} \approx -4,083 \frac{M_t}{\pi d^3}
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

Diagrama tensiunilor tangențiale $\tau(R)$ este prezentată în *figura 6.12*. Se observă că tensiunea este maximă în modul în regiunea 4-5. Aceasta este regiunea periculoasă, pentru care se va face dimensionarea.

5. *Dimensionare*. Stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale se face din condiția ca tensiunea maximă în modul să nu o depășească pe cea admisibilă

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= \left| -4,083 \frac{M_t}{\pi d^3} \right| \leq \tau_a \Rightarrow \\
 d &\geq \sqrt[3]{\frac{4,083 \cdot M_t}{\pi \tau_a}}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{4,083 \cdot 3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}}; \quad d \geq 36,53 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

Ținând cont de dimensiunile liniare normalizate [STAS 75-90], se adoptă $d = 38 \text{ mm}$. Deoarece $D = 2d$, rezultă $D = 76 \text{ mm}$.

6. *Trasarea diagramei φ* . Cunoscând diametrele D și d se pot calcula momentele de inerție polare din cele patru regiuni

$$\begin{aligned}
 I_p(x_1) &= I_p = \frac{\pi \cdot 38^4}{32} \approx 2,05 \cdot 10^5 \text{ mm}^4; \\
 I_p(x_2) &= I_p(x_3) = 16 \cdot I_p = 32,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4; \\
 I_p(x_4) &= 15 \cdot I_p = 30,75 \cdot 10^5 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Rotirile în încastrări sunt nule $\varphi_1 = \varphi_5 = 0$, iar rotirile celorlalte secțiuni se pot determina cu relațiile (6.16) și (6.66)

$$\begin{aligned}\varphi_{2-1} = \varphi_2 &= \frac{M_x(x_1) \cdot L}{GI_p} = \frac{0,086M_t L}{GI_p}; \quad \varphi_2 \approx 3,15 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,18^\circ \\ \varphi_{3-1} = \varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_{3-2} = \varphi_2 + \frac{M_x(x_2) \cdot \frac{3L}{2}}{G \cdot 16I_p} = \varphi_2 + \frac{1,086 \cdot M_t \cdot 3L}{2 \cdot G \cdot 16I_p} \\ \varphi_{4-1} = \varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_{4-3} = \varphi_3 + \frac{M_x(x_3) \cdot \frac{L}{2}}{G \cdot I_p(x_3)} = \varphi_3 + \frac{-1,914 \cdot M_t \cdot L}{2 \cdot G \cdot 16I_p} \\ \varphi_{4-5} = \varphi_4 &= \frac{-M_x(x_4) \cdot L}{G \cdot 15I_p} = \frac{+1,914 \cdot M_t \cdot L}{15 \cdot G \cdot I_p} = \frac{1,914}{15} \cdot 0,0366 \\ \varphi_3 &\approx 6,876 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,394^\circ; \quad \varphi_4 \approx 4,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,27^\circ\end{aligned}\quad (6.67)$$

Rotirea φ_4 poate fi calculată mai simplu față de încastrarea 5, ca în (6.67).

Diagrama φ este prezentată în *figura 6.12*. Se reamintește faptul că ea trebuie să fie fără salturi, din motive de continuitate a deformațiilor.

Aplicarea MEF la probleme static nedeterminate

Se va prezenta în continuare rezolvarea *Aplicației 6.5* utilizând MEF. Această metodă implică parcurgerea următoarelor etape: 1. Figurarea reacțiunilor și împărțirea barei în elemente finite; 2. Determinarea rigidităților elementelor; 3. Formarea matricei de rigiditate a întregii structuri și scrierea sistemului de ecuații sub formă matriceală; 4. Rezolvarea sistemului; 5. Trasarea diagramei M_x ; 6. Trasarea diagramei $\tau(R)$; 7. Dimensionare; 8. Trasarea diagramei φ . Aceste etape vor fi parcurse pe scurt în cele ce urmează.

1. *Figurarea reacțiunilor și împărțirea în elemente finite.* Reacțiunile au fost prezentate în *figura 6.13a*. Împărțirea într-un număr minim de EF este prezentată în *figura 6.13b*. Se reamintește faptul că la MEF încărcările acționează doar în noduri (vezi *Capitolul 4*). Dacă se dorește calculul rotirii

cu MEF în alte secțiuni în afara celor din nodurile din *figura 6.13*, se vor figura noi noduri în secțiunile respective și numărul EF va crește.

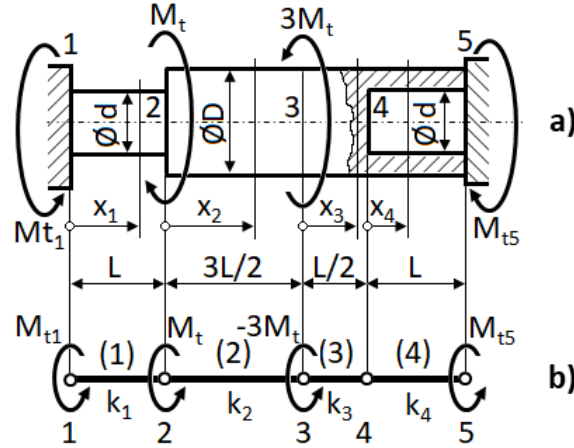


Fig. 6.13. Bară dublu încastrată supusă la torsiune (a) și împărțirea în elemente finite (b)

2. *Determinarea rigidităților elementelor.* Momentele de inerție polare au fost determinate la *Aplicația 6.5*. Rigiditatea la torsiune se calculează cu (6.37).

$$k_1 = \frac{GI_p(x_1)}{L} = \frac{G}{L} \cdot \frac{\pi d^4}{32} = \frac{GI_p}{L} = k; \quad k_2 = \frac{GI_p(x_2)}{\frac{3L}{2}} = \frac{32}{3}k; \quad (6.68)$$

$$k_3 = \frac{GI_p(x_3)}{\frac{L}{2}} = 32k; \quad k_4 = \frac{GI_p(x_4)}{L} = 15k$$

2. *Matricele de rigiditate ale elementelor finite (elementare) sunt*

$$k_1^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}; \quad k_2^e = \begin{bmatrix} \frac{32}{3}k & -\frac{32}{3}k \\ -\frac{32}{3}k & \frac{32}{3}k \end{bmatrix}; \quad (6.69)$$

$$k_3^e = \begin{bmatrix} 32k & -32k \\ -32k & 32k \end{bmatrix}; \quad k_4^e = \begin{bmatrix} 15k & -15k \\ -15k & 15k \end{bmatrix}.$$

3. *Formarea matricei de rigiditate și a sistemului matriceal.* Matricea de rigiditate a întregii structuri se formează prin asamblarea matricelor de rigiditate ale elementelor (elementare), similar cu aplicarea MEF la probleme static determinate la torsiune (vezi paragraful 6.8.2). Se observă că matricele elementelor se ordonează după diagonala principală și se suprapun (se adună) la colțuri. Sistemul (6.38) devine astfel

$$\begin{Bmatrix} M_{t1} = ? \\ M_t \\ -3M_t \\ 0 \\ M_{t5} = ? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & k + \frac{32}{3}k & -\frac{32}{3}k & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{3}k & \frac{32}{3}k + 32k & -32k & 0 \\ 0 & 0 & -32k & 32k + 15k & -15k \\ 0 & 0 & 0 & -15k & 15k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = ? \\ \varphi_3 = ? \\ \varphi_4 = ? \\ \varphi_5 = 0 \end{Bmatrix} \quad (6.70)$$

4. *Rezolvarea sistemului.* Sistemul (6.70) se poate descompune în două sisteme:

$$\begin{cases} M_{t1} = -k\varphi_2 \\ M_{t5} = -15k\varphi_4 \end{cases}; \quad \begin{cases} M_t = \frac{35}{3}k\varphi_2 - \frac{32}{3}k\varphi_3 \\ -3M_t = -\frac{32}{3}k\varphi_2 + \frac{128}{3}k\varphi_3 - 32k\varphi_4 \\ 0 = -32k\varphi_3 + 47k\varphi_4 \end{cases} \quad (6.71)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{k} M_t = 35\varphi_2 - 32\varphi_3 \\ -\frac{9}{k} M_t = -32\varphi_2 + 128\varphi_3 - 96\varphi_4 \\ 0 = -32\varphi_3 + 47\varphi_4 \end{cases} \quad (6.72)$$

Rezolvând sistemul se determină φ_2 , φ_3 , φ_4 și apoi M_{t1} și M_{t5} din (6.71). Etapele 5, 6 și 7 sunt aceleași ca cele prezentate în Aplicația 6.5.

8. *Trasarea diagramei φ* . Expresiile rotirilor absolute (față de sistemul fix) au fost determinate în urma rezolvării sistemului (6.72) (Etapa 4). După dimensionare (Etapa 7), s-au calculat diametrele d și D și pot fi calculate momentele de inerție polare pe regiuni și apoi rigiditățile k_1 , k_2 , k_3 și k_4 . Înlocuind, se pot determina valorile numerice ale rotirilor φ_2 , φ_3 și φ_4 .

Sisteme cu bare în paralel

Aplicația 6.6

Sistemul din figura 6.14 este format din bara de oțel 1, montată în țeava de aluminiu 2, ambele bare fiind încastrate la un capăt și fixate de discul rigid 3 la celălalt. Să se dimensioneze barele știind că $d_1 \approx d_2 = d$, $d_3 = D$, $D/d = 4$, $G_{OL} = G_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $G_{Al} = G_2 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\tau_{aOL} = \tau_{a1} = 92 \text{ MPa}$, $\tau_{aAl} = \tau_{a2} = 30 \text{ MPa}$.

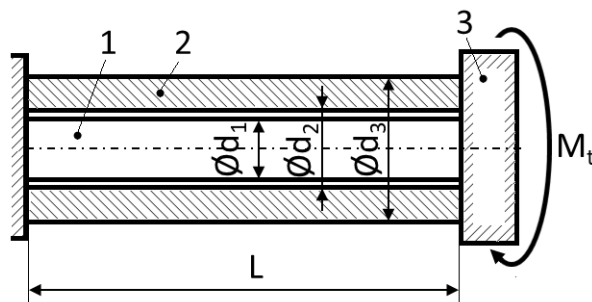


Fig. 6.14. Sistem de bare cuplate în paralel, supus la torsiune

Momentul M_t se distribuie pe cele două bare. În consecință, se poate scrie o singură ecuație de echilibru

$$M_t = M_1 + M_2 \quad (6.73)$$

unde M_1 este momentul din bara de oțel 1, iar M_2 din cea de aluminiu, 2.

Problema este simplu static nedeterminată ($NN = 2$, $NE = 1$, $GN = 1$). Se va ridica nedeterminarea prin geometrică (*metoda compatibilității geometrice*). Se observă că rotirea φ este aceeași în ambele bare, deoarece nu există deplasări relative între ele (nici încastrarea și nici discul rigid nu permit rotiri). În consecință, se poate scrie

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad \frac{M_1 L}{GI_{p1}} = \frac{M_2 L}{GI_{p2}} \quad (6.74)$$

Aplicând proprietățile rapoartelor egale, din (6.73) și (6.74) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{d^4} = \frac{M_2}{D^4 - d^4} = \frac{M_1 + M_2}{D^4} = \frac{M_t}{D^4} \\ \Rightarrow M_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^4 \cdot M_t; \quad M_2 = \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \cdot M_t \end{aligned} \quad (6.75)$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$M_1 \approx 0,0039M_t; \quad M_2 \approx 0,9961M_t \quad (6.76)$$

Tensiunile admisibile nu pot fi atinse simultan în cele două bare. Dimensionând cu *criteriul de rezistență* rezultă situațiile notate cu I și II.

I) Pentru cazul în care tensiunea admisibilă se atinge în piesa 1

$$\frac{M_1}{W_{p1}} = 0,0039M_t \cdot \frac{16}{\pi d^3} \leq \tau_{a1} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{0,0624M_t}{\pi \tau_{a1}}} \quad (6.77)$$

Înlocuind valorile numerice rezultă $d = 10,9$ mm. Ținând cont de dimensiunile liniare normalizate [STAS 75-90] se adoptă, într-o primă variantă, $d' = 12$ mm și $D' = 4 \cdot d' = 48$ mm.

II) Când tensiunea admisibilă se atinge în piesa 2 se scrie

$$\frac{M_2}{W_{p_2}} \leq \tau_{a_2}; \quad \frac{16M_t}{\pi D^3} \leq \tau_{a_2} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \tau_{a_2}}} \quad (6.78)$$

Înlocuind valorile numerice, rezultă $D = 100,6$ mm. În această variantă, ținând cont de dimensiunile liniare normalizate [STAS 75-90] s-ar putea adopta $D = 105$ mm; $d = 105/4 = 26,25$ mm. Dintre cele două variante (I și II) se adoptă în final dimensiunile cele mai mari: $D = 105$ mm; $d = 26$ mm. Diametrul d_1 a putut fi aproximat prin lipsă deoarece τ_a se atinge în bara 2. Micșorarea lui d_1 nu conduce la o creștere periculoasă a tensiunii tangențiale din bara 1, dar modifica puțin raportul D/d .

6.8.3. Probleme care implică mai multe solicitări

În acest paragraf vor fi studiate probleme care implică atât calculul unor piese supuse la *torsiune*, cât și calculul altor piese supuse la *forfecare* sau *tracțiune*.

Aplicația 6.7

Doi arbori de transmisie sunt montați prin intermediul unui cuplaj cu bolțuri (fig. 6.15). Rotirea față de arbore a fiecărui semicuplaj este împiedicată de câte o pană paralelă. Arborii transmit o putere de 70 kW la 300 rot/min. Toate piesele sunt confecționate din același marcă de oțel, având $\tau_a = 100$ MPa. Se consideră că penele sunt prismatice, cu secțiunea pătrată (axa) și lungimea $t = 20$ mm. Știind că diametrul de amplasare a celor patru șuruburi este $D = 120$ mm, să se determine diametrul minim al arborilor d , al bolțurilor (șuruburilor) d_s și dimensiunea secțiunii transversale a penei (a).

Componentele ansamblului pot ceda prin (s-a neglijat încovoierea și strivirea):

1. Torsiunea arborilor;
2. Forfecarea bolțurilor (șuruburilor);
3. Forfecarea penelor.

Se prezintă în continuare calculul acestor componente.

1. *Calculul arborilor la torsiune.* Cu relația (6.6) se determină momentul de torsiune M_t

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n}; \quad M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{7 \cdot 10^4}{300} \approx 2,23 \cdot 10^3 \text{ Nm} = 2,23 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \quad (6.79)$$

Se dimensionează arborii din criteriul de rezistență

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \leq \tau_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \tau_a}} \quad (6.80)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,23 \cdot 10^6}{\pi \cdot 10^2}}; \quad d \geq 48,43 \text{ mm}$$

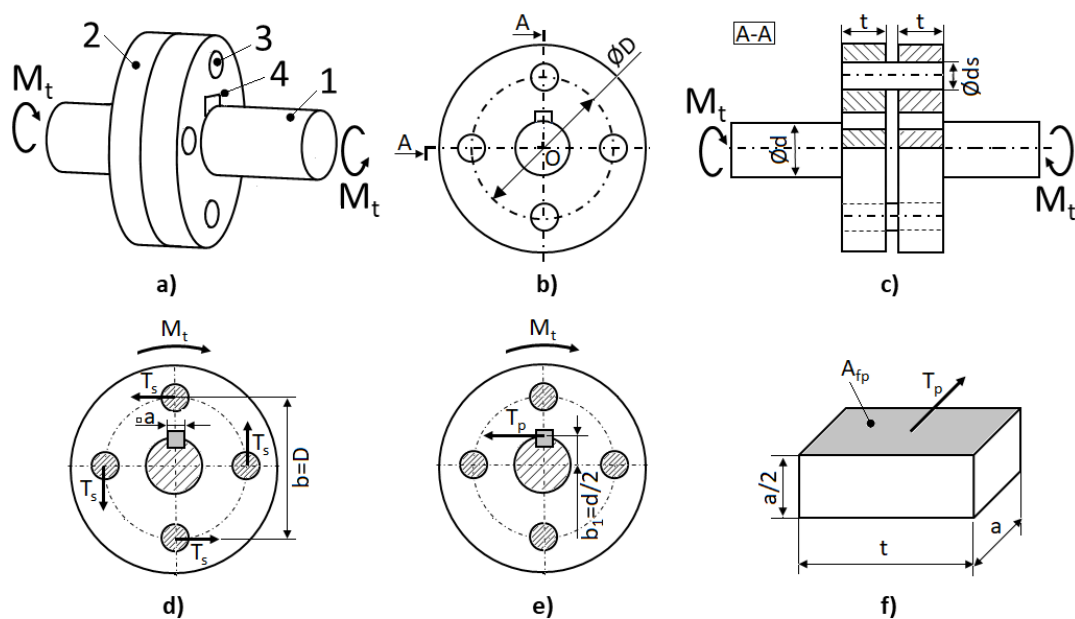


Fig. 6.15. Cuplaj cu bolțuri între doi arbori 1(a,b,c); apariția forțelor tăietoare în bolțurile 2 (d) și în penele 3 (e, f)

Se observă că regiunea periculoasă este cea în care există canalul de pană. Datorită prezenței acestuia, secțiunea nu este perfect circulară și starea de tensiuni din vecinătatea sa este modificată.

În aceste condiții, relația (6.20) nu poate da decât rezultate aproximative. Studiul stării de tensiuni în vecinătatea canalului poate fi făcut cu MEF, dar depășind cadrul cursului. În această fază problema va fi rezolvată aproximativ, printr-o majorare suplimentară a diametrului arborilor. Astfel, diametrul calculat mai sus ar putea fi considerat ca fiind cel tangent la fundul canalului de pană. Diametrul exterior al arborelui ar putea fi adoptat ca fiind $d_{ad} = d + a$. Mai simplu, problema ar putea fi rezolvată, într-o primă aproximare, printr-o majorare mai importantă a diametrului. Ținând cont și de dimensiunile liniare normalizate [STAS 75-90], se adoptă $d = 56 \text{ mm}$.

2. *Calculul bolțurilor la forfecare.* În fiecare dintre cele patru bolțuri apare o forță tăietoare T_s (fig. 6.15d), care se determină din condiția ca momentul M_t să fie echilibrat de cele către cele două cupluri de forțe

$$M_t = 2 \cdot T_s \cdot D \Rightarrow T_s = \frac{M_t}{2D}; \quad T_s = \frac{2,23 \cdot 10^6}{2 \cdot 120} \approx 9292 \text{ N} \quad (6.81)$$

Aria de forfecare a unui șurub (bolț) este

$$A_{fs} = \frac{\pi d_s^2}{4} \quad (6.82)$$

Se dimensionează bolțurile

$$\tau_{\max} = \frac{T_s}{A_{fs}} = \frac{4T_s}{\pi d_s^2} \leq \tau_a \Rightarrow d_s \geq \sqrt{\frac{4T_s}{\pi \tau_a}}; \quad d_s \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 9292}{\pi \cdot 100}} = 10,88 \text{ mm} \quad (6.83)$$

Aceasta este valoarea diametrului interior al filetului. Se adoptă șuruburi M14, cu diametrul exterior $D=14 \text{ mm}$ și diametrul interior $d=11,8 \text{ mm}$.

3. *Calculul penelor la forfecare.* În planul median al penei apare forța tăietoare T_p (fig. 6.15 e, f), care se determină din condiția ca momentul de torsiune M_t să fie echilibrat de momentul acestei forțe față de centrul O:

$$M_t = T_p \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow T_p = \frac{2M_t}{d}; \quad T_p = \frac{2 \cdot 2,23 \cdot 10^6}{53} \approx 84151 \text{ N} \quad (6.84)$$

Dimensionarea penei se face din condiția ca tensiunea tangențială maximă să nu o depășească pe cea admisibilă

$$\tau_{\max} = \frac{T_p}{A_{fp}} = \frac{T_p}{a \cdot t} \leq \tau_a \Rightarrow a \geq \frac{T_p}{t \cdot \tau_a}; \quad a \geq \frac{84151}{20 \cdot 100} \approx 42,07 \text{ mm} \quad (6.85)$$

Deoarece această dimensiune este prea mare în comparație cu diametrul arborelui d , se pot adopta două pene pe arbore (diametral opuse). În aceste condiții, diametrul arborelui va trebui să fie majorat. Pentru a se poate admite adoptarea unei dimensiuni rotunjite prin lipsă, $a_{ad} = 42 \text{ mm}$, deoarece astfel nu se produce o majorare a tensiunii admisibile τ_a cu mai mult de 3%.

Observație

Arborii de transmisie sunt solicitați la torsiune cu încovoiere. Predimensionarea lor se face însă la torsiune. În plus, arborii se vor calcula la solicitări variabile (oboseală) și vibrații.

Aplicația 6.8

O bară elastică 1, cu secțiune circulară, este prinsă în consolă. La capătul liber se fixează discul rigid 2, de care se prind firele 3, prin articulații la ambele capete (fig. 6.16). Componentele flexibile sunt confecționate din oțel. Asupra discului se aplică momentul M_t . Să verifice firele 3, știind că: diametrul barei este $d = 50 \text{ mm}$, diametrul discului $D = 300 \text{ mm}$, diametrul firelor $d_0 = 1 \text{ mm}$, $M_t = 0,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $\sigma_a = 300 \text{ MPa}$ și coeficientul *Poisson* $\nu_{OL} = 0,29$. Firele sunt considerate perfect flexibile la încovoiere și ele se înfășoară pe discul D .

Se figurează reacțiunea și eforturile din fire, care sunt solicate numai la tracțiune. Bara 1 va supuși la torsiune cu momentul M_{tA} . Se scrie ecuația de echilibru a momentelor

$$M_t = M_{tA} + N \cdot D \quad (6.86)$$

Problema este simplu static nedeterminată. Se va ridica nedeterminarea prin metoda compatibilității geometrice și cea a eforturilor.

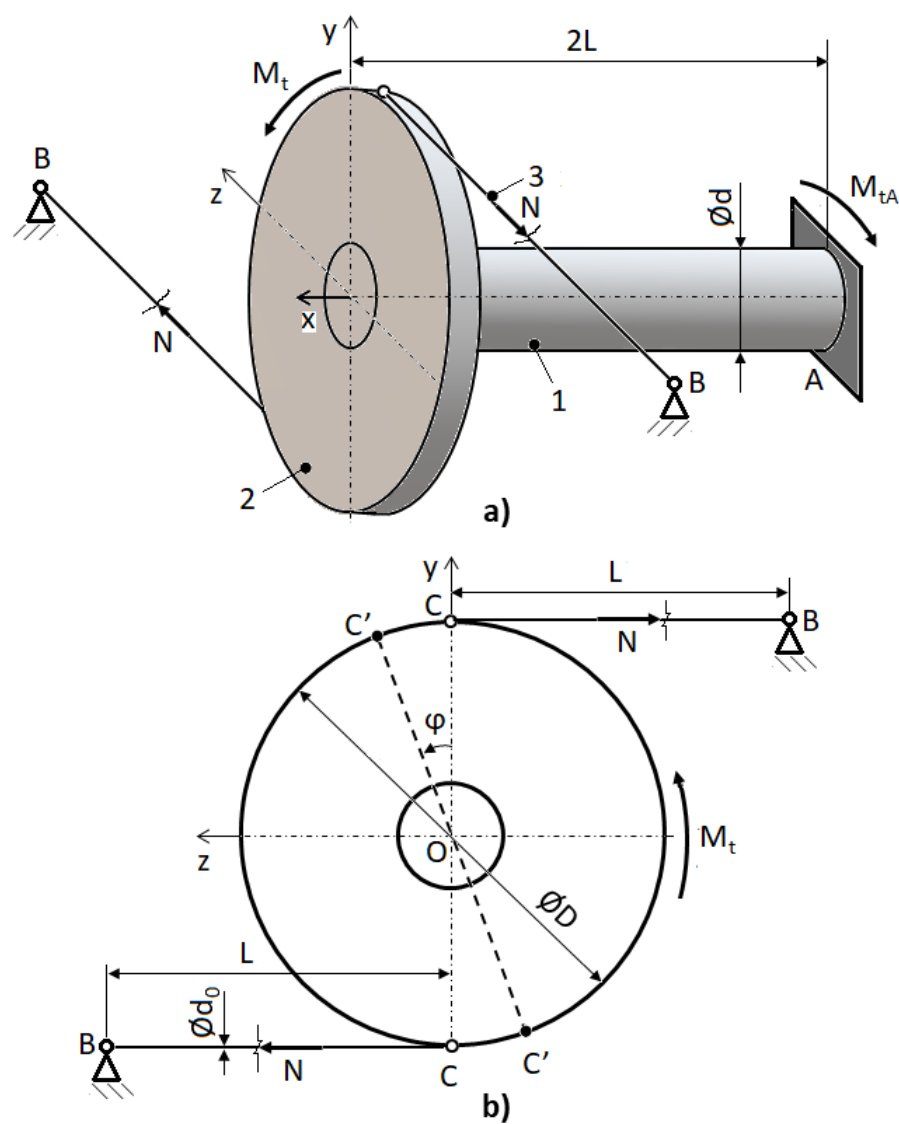


Fig. 6.16. Sistem format dintr-o bară, un disc rigid și fire flexibile (a);
vedere în lungul axei Ox (b)

Metoda geometrică

Ca urmare a torsionării barei 1, discul 2 se rotește cu unghiul φ care, când este măsurat în radiani, se scrie

$$\varphi = \frac{\text{arc}(CC')}{\frac{D}{2}} [\text{rad}] \Rightarrow \text{arc}(CC') = \varphi \cdot \frac{D}{2} \quad (6.87)$$

Deoarece firele flexibile 3 se înfășoară perfect pe disc, punctul inițial de prindere al firului de disc C se rotește până ajunge în C' și se poate scrie

$$\text{arc}(CC') = \Delta L = \delta \quad (6.88)$$

Din (2.20), (4.6) (6.16), (6.87) și (6.88) rezultă

$$\frac{M_{tA} \cdot 2L}{GI_p} \cdot \frac{D}{2} = \frac{NL}{AE}; \quad \frac{16M_{tA}(1+\nu)}{d^4} = \frac{N}{d_0^2 D} \quad (6.89)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (6.86) și (6.89) rezultă eforturile N și M_{tA}

$$N = \frac{16(1+\nu)d_0^2 D}{d^4 + 16(1+\nu)d_0^2 D^2} M_t \quad (6.90)$$
$$M_{tA} = \frac{d^4}{d^4 + 16(1+\nu)d_0^2 D^2} M_t; \quad M_{tA} \approx 0,771M_t$$

Tensiunea dintr-un fir 3 este

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi d_0^2} \quad (6.91)$$

Înlocuind valorile numerice se obțin efortul și tensiunea din fire $N \approx 229N$, $\sigma \approx 291,7MPa \leq \sigma_a = 300MPa$. Deoarece tensiunea din fire este mai mică decât tensiunea admisibilă, firele rezistă la încărcarea propusă.

Metoda eforturilor

Pentru un sistem simplu static nedeterminat se scrie ecuația

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (6.92)$$

Sistemul de bază este static determinat și poate fi obținut, de exemplu, prin îndepărtarea articulațiilor B de la capetele firelor prinse în reazeme. Forța axială din fire se notează $N=X_1$ (fig. 6.17).

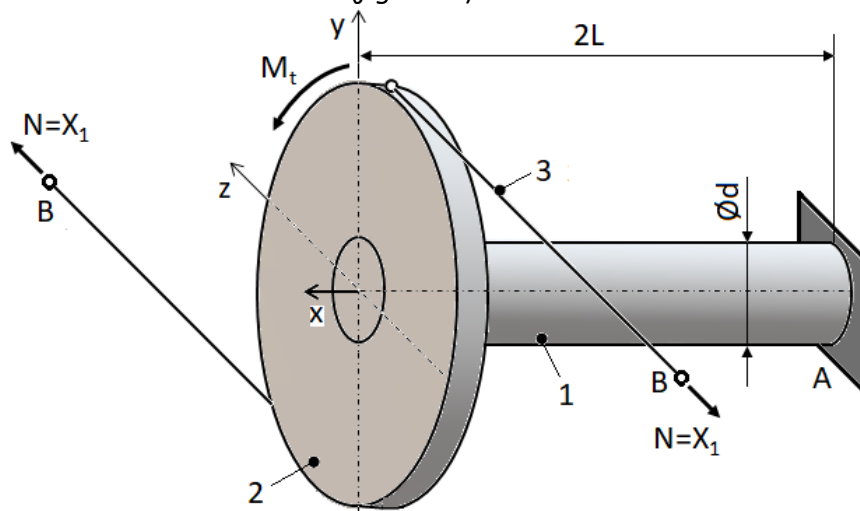


Fig. 6.17. Sistemul de bază pentru ansamblul din figura 6.16

Metoda eforturilor face parte din categoria metodelor energetice. La aplicarea ei trebuie să se țină cont de întreaga energie potențială de deformare elastică a sistemului. Discul 2 fiind rigid nu se deformează și nu înmagazinează energie. Bara 1 este solicitată la torsiune, iar firele 3 la tracțiune.

Se parcurg etapele standard ale metodei, pentru $GN=1$:

- Se studiază sistemul de bază cu încărcările reale (M_t) și $X_1=0$ și se trasează diagrama M_0 (fig. 6.19);
- Se studiază sistemul de bază cu încărcările reale nule ($M_t=0$) și $X_1=1$, trasându-se diagramele n_1 și m_1 (fig. 6.20).

Cu datele din figurile 6.18 și 6.19 se calculează coeficienții de influență δ_{10} și δ_{11} , ținând cont de expresiile energiei potențiale (6.24) și (4.14).

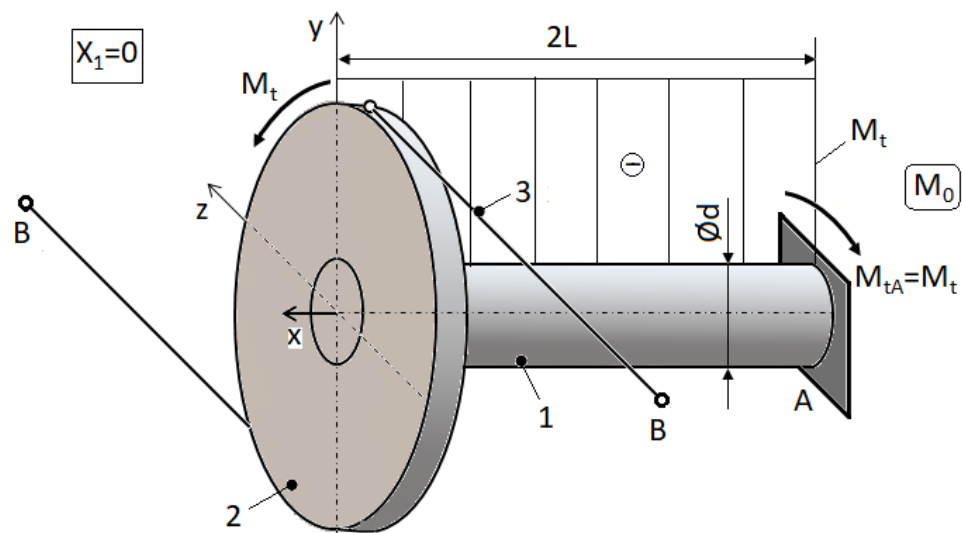


Fig. 6.18. Metoda eforturilor: diagrama M_0

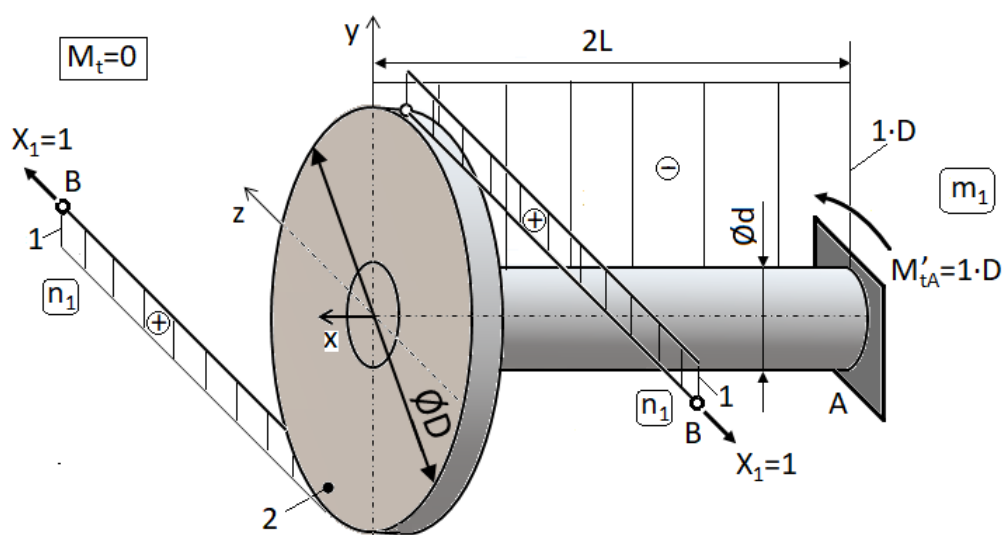


Fig. 6.19. Metoda eforturilor: diagramele n_1 și m_1

$$\delta_{10} = \frac{1}{GI_p} M_0 \cdot m_1 \cdot 2L = -\frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{32}{\pi d^4} \cdot M_t \cdot D \cdot 2L$$

$$\delta_{10} = -\frac{128(1+\nu)D \cdot L \cdot M_t}{E\pi d^4} \quad (6.93)$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EA} n_1^2 \cdot L + \frac{1}{GI_p} m_1^2 \cdot 2L$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{E} \cdot \frac{4}{\pi d_0^2} \cdot 1^2 \cdot L + \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{32}{\pi d^4} \cdot D^4 \cdot 2L \quad (6.94)$$

$$\delta_{11} = \frac{8L}{\pi E} \cdot \frac{d^4 + 16(1+\nu)d_0^2 D^2}{d_0^2 d^4}$$

Primul termen din (6.94) este înmulțit cu 2 pentru a ține cont de energia de deformare elastică a celor două fire.

Din ecuația (6.92) se determină

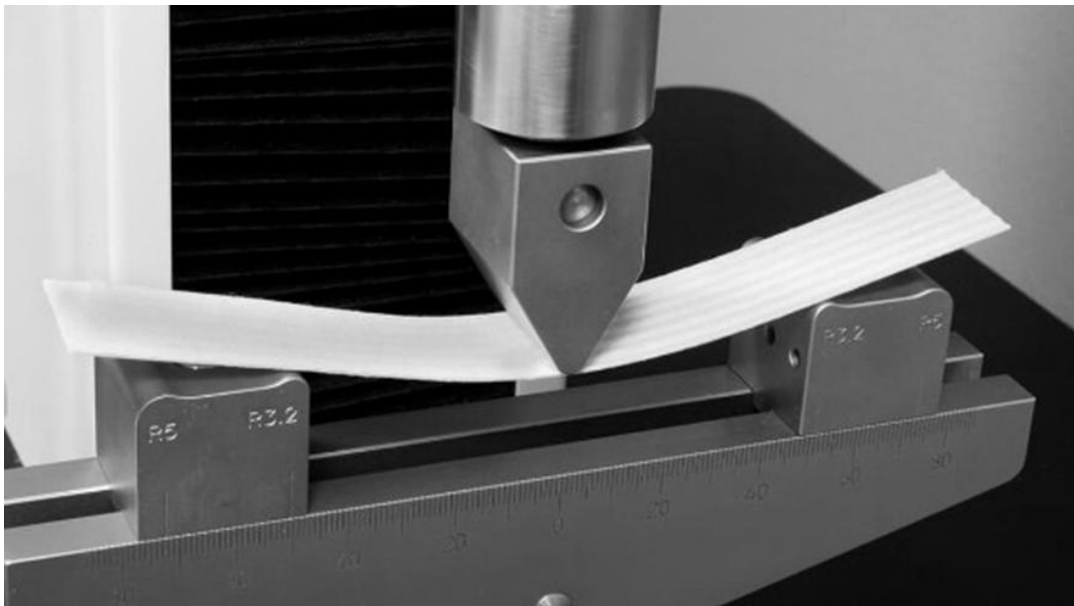
$$X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = N \quad (6.95)$$

Înlocuind, se găsește valoarea efortului N din ecuația (6.90). Valoarea lui M_{tA} se obține din ecuația de echilibru (6.86).

De reținut:

- eforturile care apar la solicitarea la torsiune;
- calculul momentului de torsiune când se cunoaștem puterea și turația;
- calculul pe baza criteriilor rezistență și respectiv de rigiditate;
- repartizarea tensiunilor pe secțiunea transversală a barelor solicate la torsiune;
- secțiunea rațională a barelor solicate la torsiune;
- expresia energiei de deformare elastică pentru solicitarea la torsiune;
- modul de trasare a diagramelor de efort M_x , tensiune tangențială $\tau(R)$ și diagrama rotirilor φ ;
- metode pentru ridicarea nedeterminării;
- aplicarea metodei elementelor finite la torsiune.

CAPITOLUL 7



Încovoiere

Sursa: <https://www.sentrakalibrasiindustri.com/bending-test-uji-tekuk-manfaatnya-dalam-suatu-industri/>

7. ÎNCOVOIERE

7.1. OBIECTIVE

În acest capitol se prezintă calculul tensiunilor normale și al deplasărilor grinzilor supuse la încovoiere statică, atât static determinate, cât și static nedeterminate. Se prezintă calculul tensiunilor tangențiale care apar în grinzile solicitate la încovoiere simplă. Înaintea abordării acestui capitol se *recomandă să se revadă* caracteristicile geometrice ale secțiunilor (*Anexa 1*).

7.2. INTRODUCERE

Solicitarea la *încovoiere pură* (produsă de către momente concentrate) este o solicitare simplă. În practică se întâlnește frecvent solicitarea la *încovoiere simplă* (produsă de forțe) care, în multe situații (cum ar fi cazul barelor lungi cu secțiune masivă), poate fi asimilată cu o solicitare simplă. În construcția de mașini arborii de transmisie pot fi asimilați cu bare supuse la încovoiere și torsiune. Punțile autovehiculelor care nu sunt motoare sunt supuse numai la încovoiere și se numesc *osii*. În *figura 7.1* se prezintă o astfel de punte, suspendată pe arcuri cu foi și modul în care poate fi schematizată osia cu o bară dreaptă, supusă la încovoiere simplă (*fig.7.1b*). Grinzile pot fi încărcate cu forțe și momente concentrate sau distribuite. Forțele distribuite pot să provină din greutatea proprie a grinzii, acțiunea presiunii (aripa de avion, palete de turbină etc.), sau a forțelor de inerție (cum apar în cazul bielei unui motor cu ardere internă, a elicelor de avion sau elicopter etc.). În *figura 7.2*

se prezintă exemple de încovoiere simplă, produsă de forțe concentrate și respectiv liniar distribuite. Atât dintele roții dințate cât și biela motorului cu ardere internă sunt supuse la încovoiere cu solicitări axiale.

În acest capitol nu se va discuta cazul grinzilor *cu pereți subțiri*.

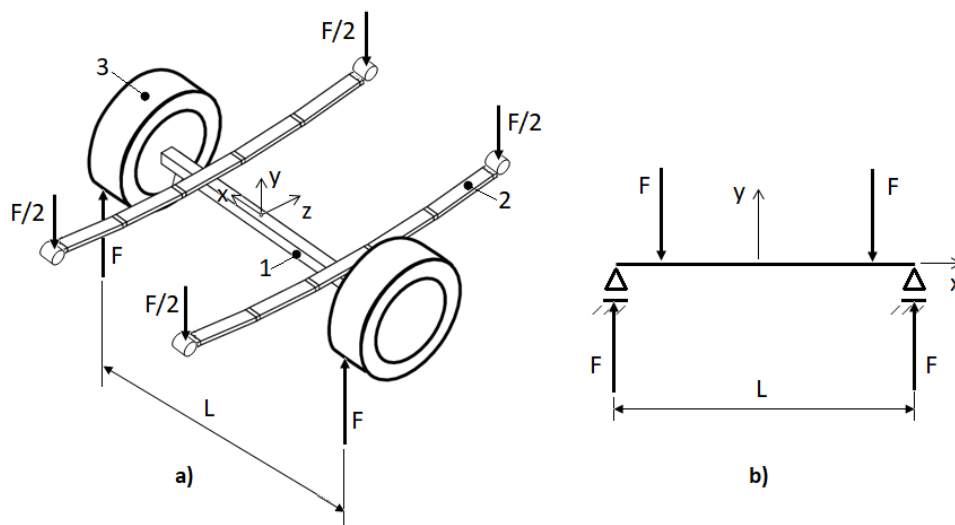


Fig. 7.1. Osia unui autovehicul (a) și schematizarea ei cu o grindă solicitată la încovoiere simplă (b)

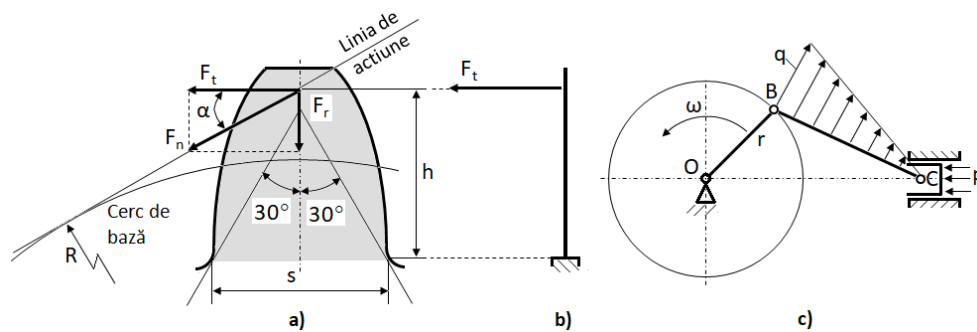


Fig. 7.2. Forțele care acționează asupra unui dinte aflat în angrenare (a); schematizarea solicitării dintelui la încovoiere (b); încovoierea unei biele (c)

7.3. STUDIUL DEFORMĂRII GRINZILOR

Se studiază deformarea elastică a unei grinzi, supusă la *încovoiere pură*, având trasată la suprafață o rețea cu ochiuri pătrate (fig. 7.3). Se observă că liniile longitudinale (generatoarele) se deformează după arce de cerc. Secțiunile transversale rămân plane și se rotesc, rămânând normale pe generatoarele deformate, confirmând astfel ipoteza lui *Bernoulli* pentru încovoierea pură. Acest lucru se poate observa în figura 7.4.

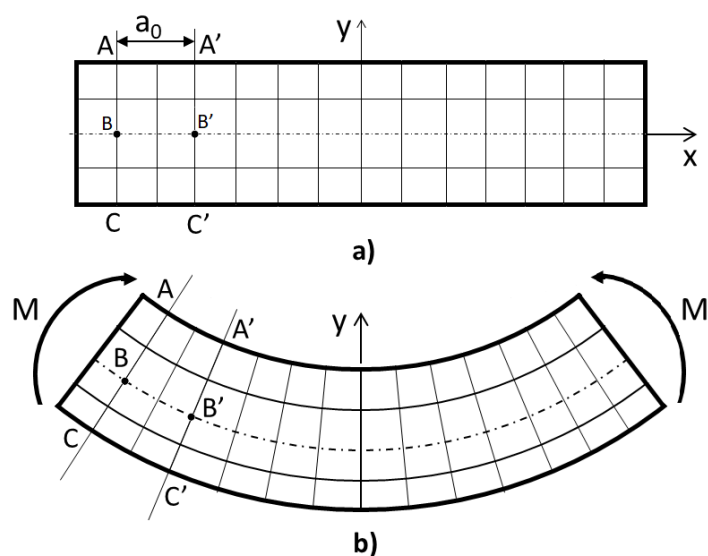


Fig. 7.3. Grindă cu o rețea trasată (a), solicitată la încovoiere pură (b)

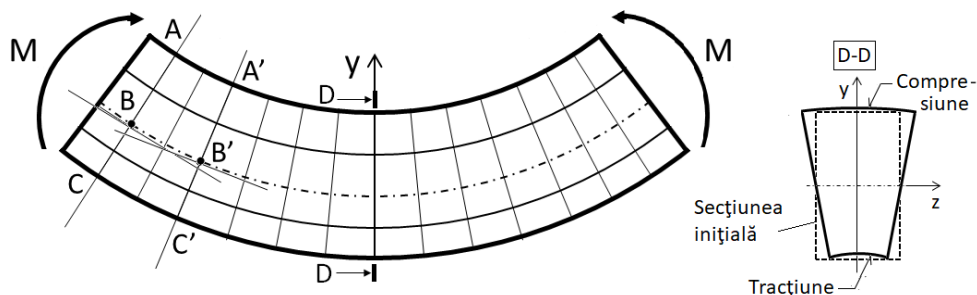


Fig. 7.4. . Grindă solicitată la încovoiere pură și deformarea secțiunii transversale

Din *figurile 7.3 și 7.4* se observă că la partea inferioară a grinzii (cea de la exteriorul curburii) reperele se îndepărtează iar la interiorul curburii se apropie. Rezultă că fibrele de la exteriorul curburii sunt *tracționate*, iar cele de la interior *comprimate*. Zona tracționată este separată de cea comprimată prin *suprafața neutră*. Acesta conține *axa neutră*, care unește centrele de greutate ale secțiunilor transversale. Fibrele din suprafața neutră *nu-și modifică lungimea* după deformarea barei (în *fig. 7.3a,b* se scrie $[BB'] = \text{arc}BB' = a_0$). În fibrele supuse la solicitări axiale (tracțiune sau compresiune) apar tensiuni normale. În suprafața neutră tensiunile normale sunt nule, deoarece alungirea fibrelor pe care le conține este nulă. Lățimea grinzii deformate se micșorează în partea întinsă și se mărește în cea comprimată, dar rămâne constantă pe suprafața neutră (*fig. 7.4*).

7.4. EFORTURI

În *figura 7.5a,b* se prezintă o grindă în consolă, solicitată la încovoiere pură (cu un moment concentrat) și respectiv la încovoiere simplă (cu o forță concentrată). În *figura 7.5a* se prezintă și eforturile care apar în grinda solicitată la încovoiere pură. Se observă că încovoierea pură este o solicitare simplă, deoarece în secțiune apare o singură componentă a efortului, $M_z = F_1 h$. Efortul M_z a fost înlocuit cu un cuplu de forțe F_1 , pentru fibrele tracționate și respectiv comprimate. Încovoierea simplă este de fapt o solicitare compusă, deoarece în secțiune apar două componente ale efortului, $M_z = F_2 h$ și $T_y = F$. În *figura 7.5b* efortul M_z a fost înlocuit cu un cuplu de forțe F_2 , pentru fibrele tracționate și respectiv comprimate. În *figura 7.5a,b* a efortul M_z este prezentat este negativ, iar forța tăietoare T_y pozitivă (*fig. 1.34*).

În cazul încovoierii pure, în secțiunea barei apare numai unul din eforturile M_z sau M_y . Sensul acestor vectori poate fi determinat cu regula burghiului drept (*fig. 7.6*). În Rezistența Materialelor se obișnuiește ca momentele să fie prezentate prin sensul lor de rotire. Prezența simultană a eforturilor M_z și M_y se produce în cazul *solicitării compuse* la *încovoiere oblică* (sau dublă), care este o solicitare compusă. La încovoiere, axa Oy se consideră pozitivă în sus. Deplasările în sensul axei Oy sunt considerate pozitive în această lucrare.

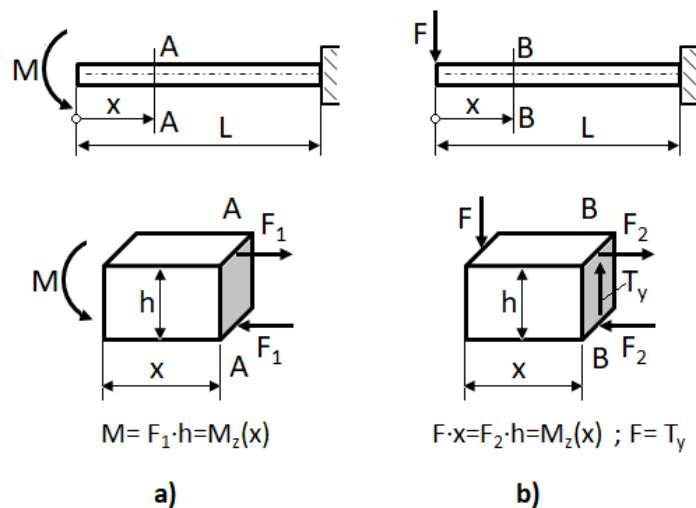


Fig. 7.5. Încovoiere pură și eforturi (a), respectiv încovoiere simplă și eforturi (b)

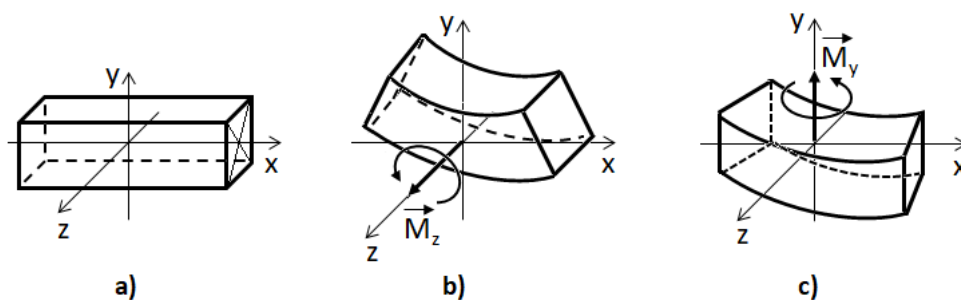


Fig. 7.6. Fragment de grindă cu sistemul de referință (a); momentul M_z deformează grindă în planul xOy (b), iar M_y în planul xOz (momentele sunt prezentate ca vectori, cu sensul lor de rotire)

7.5. CALCULUL TENSIUNILOR

7.5.1. Tensiuni normale. Formula lui Navier

Se reamintește faptul că în Rezistența Materialelor, în scopul simplificării calculelor, se admite ipoteza lui *Bernoulli*, deși acest lucru nu este necesar din punct de vedere matematic. Problema determinării tensiunilor la încovoierea barelor este rezolvată corect în Teoria Elasticității, fără a face apel la această ipoteză. Se arată astfel că ipoteza lui *Bernoulli* nu se verifică

riguros în cazul încovoierii simple, în prezența forțelor distribuite. Totuși, aproximațiile introduse de către această ipoteză sunt pe deplin acceptabile în cazul grinzilor lungi, cu $L \geq 10h$ (fig. 7.5).

Se vor determina tensiunile normale din secțiunea unei grinzi drepte prismatice, supuse la încovoiere pură la care momentul încovoiator este constant pe lungimea grinzii. Conform *figurii 7.5a,b* și a relațiilor diferențiale dintre eforturi (1.29), în orice secțiune a grinzii vor exista eforturile

$$M_z(x) = M = \text{const.}; \quad T_y = \frac{dM_z}{dx} = 0; \quad N = T_z = M_y = M_x = 0 \quad (7.1)$$

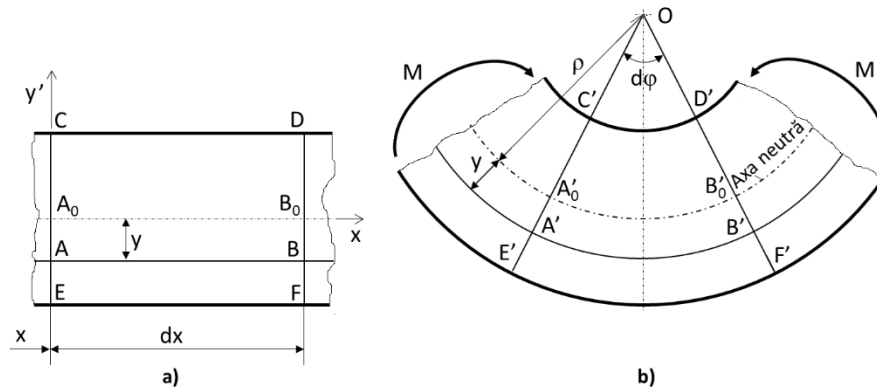


Fig. 7.7. Izolarea unui element de grindă dreaptă cu fibra A-B (a), studiul deformării elementului, când grinda este supusă la încovoiere pură (b)

În *figura 7.7* s-a notat cu ρ raza de curbură a axei neutre. Deocamdată nu se ține cont de semnul curburii $1/\rho$. Alungirea specifică a fibrei [A-B] este

$$\varepsilon_x = \frac{\text{arc}(A'B') - [AB]}{[AB]} = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - dx}{dx} \quad (7.2)$$

unde $d\varphi$ se măsoară în radiani.

Deoarece axa neutră nu își modifică lungimea după deformarea grinzii, la fel ca toate fibrele cuprinse în suprafața neutră (*fig. 7.7a,b*), se poate scrie

$$[A_0B_0] = \text{arc}(A'_0B'_0) \Leftrightarrow dx = \rho \cdot d\varphi \quad (7.3)$$

Din (7.2) și (7.3) rezultă

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho} = y \frac{d\varphi}{dx} \quad (7.4)$$

Relația (7.4) arată că ε_x variază liniar pe înălțimea secțiunii (pe direcția axei Oy). Aceasta este o consecință a ipotezei lui *Bernoulli*.

Alungirea specifică poate fi exprimată din legea lui *Hooke*

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (7.5)$$

Se admite că materialul grinzii are același modul de elasticitate E la tracțiune și la compresiune. Din (7.4) și (7.5) rezultă

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad (7.6)$$

Se observă că și tensiunea normală σ_x este funcție liniară de y , fiind nulă pe axa neutră (*fig. 7.8*). Pentru $\sigma_x > 0$ fibrele sunt tracționate, iar pentru $\sigma_x < 0$ sunt comprimate.

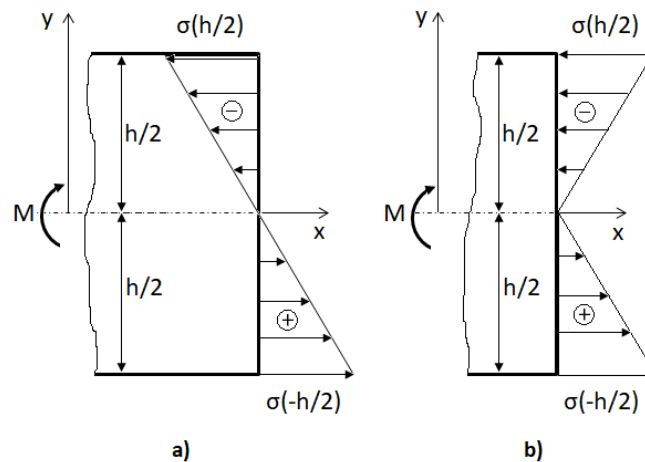


Fig. 7.8. Moduri de reprezentare grafică a funcției $\sigma_x(y)$

Din (7.1), (7.6) și ecuațiile de echivalență (1.34) rezultă

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot S_z = 0 \\ M_y &= \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_{zy} = 0 \\ M_z &= \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_z \neq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Celelalte ecuații de echivalență nu au fost scrise deoarece ele se referă la tensiunile tangențiale, care sunt nule. Deoarece $E/\rho \neq 0$ ($\rho \rightarrow \infty$ doar pentru grinda nedeformată, neîncărcată), din primele doua ecuații (7.7) rezultă

$$S_z = 0; \quad I_{zy} = 0 \quad (7.8)$$

Momentul static S_z este nul numai dacă axa Oz trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale. Rezultă că sistemul yOz este unul central, iar *axa neutră Ox trece prin centrele de greutate ale secțiunilor transversale*. Momentul de inerție centrifugal $I_{zy} = 0$ este nul numai dacă secțiunea transversală are cel puțin o axă de simetrie. Se știe că orice axă de simetrie este și axă principală de inerție. Rezultă că sistemul de coordonate yOz este un sistem principal (axe Oy și Oz sunt axe principale). Axa de simetrie conține și centrul de greutate al secțiunii. Rezultă că *sistemul de axe al secțiunii transversale este unul principal central, iar efortul M_z este orientat după axa Oz, care este și axă principală de inerție*.

Se admite că Oy este axă de simetrie și Oz trece prin centrul de greutate, ceea ce conduce la satisfacerea relațiilor (7.8). Egalând expresiile lui E/ρ determinate din (7.6) și (7.7), rezultă formula lui Navier

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \Rightarrow \sigma_{x.\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad (7.9)$$

Tensiunea σ_x este maximă când $y = y_{\max}$. Raportul $I_z/y_{\max}$ din (7.9) se numește modul de rezistență față de axa Oz și se notează cu W_z (Anexa 1).

Deoarece în cazul încovoierii pure a grinzilor drepte cu secțiune constantă pe toată lungimea efortul M_z este constant, rezultă că tensiunea σ_x este funcție numai de y . Ea este nulă pe suprafața neutră, care conține și axa neutră ($y = 0$) și este maximă sau minimă pe fața grinzilor de la exteriorul curburii și respectiv de la interiorul curburii (fig. 7.8). În calculele de rezistență interesează tensiunile normale σ_x maxime în modul, care apar în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră. Dacă axa Oz nu este o axă de simetrie, ca în cazul secțiunilor prezentate în figura 7.9, atunci se poate scrie

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}; \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} \quad (7.10)$$

Pentru materiale având limita de curgere la tracțiune σ_{at} diferită de cea la compresiune σ_{ac} , se determină atât tensiunea maximă (la tracțiune) cât și cea minimă (la compresiune). Pentru dimensionare se vor limita atât tensiunile de tracțiune, cât și cele de compresiune. Valorile raționale pentru y_1 și y_2 se obțin din condițiile $\sigma_{\max} = \sigma_{at}$, $|\sigma_{\min}| = \sigma_{ac}$. Cu notațiile (7.10), relația lui Navier (7.9) poate fi scrisă

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_{z1}} \leq \sigma_{at}; \quad |\sigma_{\min}| = \left| -\frac{M_z}{W_{z2}} \right| \leq \sigma_{ac} \quad (7.11)$$

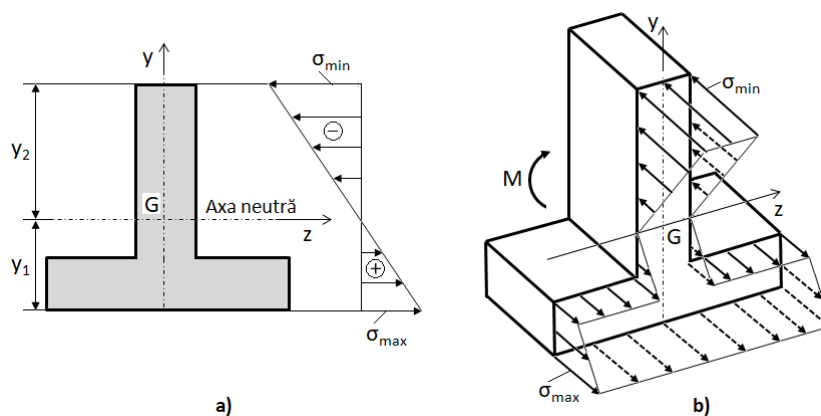


Fig. 7.9. Repartiția tensiunilor pe secțiunea unei grinzi la care Oz nu este axă de simetrie: prezentare în plan (a) și axonometrică (b)

Dacă Oz este axă de simetrie, atunci $y_1 = y_2 = y_{\max}$ și, pentru o grindă confecționată dintr-un material cu rupere tenace ($\sigma_{at} = \sigma_{ac}$), se poate scrie

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (7.12)$$

unde $y_{\max}$ este distanța de la axa Oz la fibra cea mai îndepărtată a secțiunii. Cu această notație, relația (7.9) poate fi rescrisă

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (7.13)$$

Relația lui Navier se utilizează sub această formă la secțiuni cu Oz axă de simetrie. Tensiunile maxime în modul nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă, dacă grinda rezistă

$$|\sigma_x|_{\max} \leq \sigma_a \quad (7.14)$$

Pentru calculul de dimensionare se determină mărimea caracteristică a secțiunii transversale, rezolvând inecuația (7.14). La calculul de verificare, grinda rezistă dacă sensul inegalității se păstrează.

În cazul profilelor laminate, caracteristicile geometrice W_z sunt indicate în tabele [Buzdugan Gh. ș.a., 1973]. În cazul încovoierii simple, în secțiunea transversală a grinzii apar în plus forțe tăietoare (fig. 7.5b) și tensiuni tangențiale.

Cu toate că formula lui Navier (7.9, 7.13) a fost dedusă pentru solicitarea simplă la încovoiere pură, ea este utilizată, în anumite condiții, și pentru calculul tensiunilor normale care apar în grinzile supuse la încovoiere simplă. În acest caz, este necesar ca, pe lângă condițiile menționate mai sus, axa Oy să fie axa de simetrie a secțiunii transversale, iar planul xOy să conțină toate forțele tăietoare (încovoiere plană).

Mai mult, formula lui Navier dă rezultate acceptabile chiar în cazul grinzilor lungi, care prezintă o variație lentă a secțiunii transversale pe lungimea grinzii. În cazul unor variații bruște a secțiunii, apare fenomenul concentrării

tensiunilor și tensiunile maxime în modul sunt mai mari decât cele calculate cu formula lui Navier (fig. 7.10), [Buzdugan Gh. ș.a., 1973].

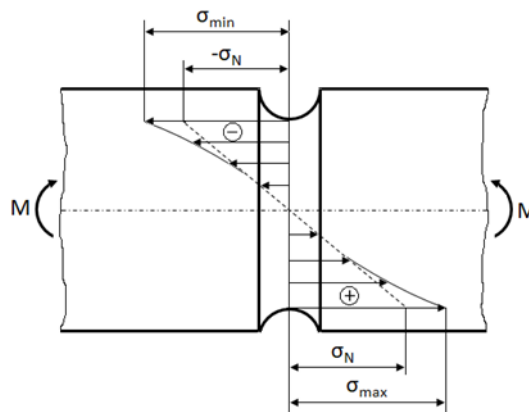


Fig. 7.10. Fenomenul de concentrare a tensiunilor (σ_N calculat cu formula Navier)

La grinzile lungi ($L/h > 10$) cu secțiune masivă, supuse la încovoiere simplă, cedarea materialului este provocată de către tensiunile normale. În asemenea cazuri, tensiunile tangențiale pot fi neglijate. Din contra, în cazul grinzilor scurte sau a celor cu secțiune compusă, tensiunile tangențiale pot avea un rol predominant în cedarea grinzii.

La încovoierea simplă, momentul M_z variază de obicei pe lungimea grinzii. Tensiunea normală va fi o funcție de două variabile și formula lui Navier (7.9) poate fi rescrisă

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M_z(x) \cdot y}{I_z} \quad (7.15)$$

Condiția (7.14) rămâne valabilă și în acest caz.

Pentru grinzi de secțiune constantă pe toată lungimea, tensiunea maximă se va produce în secțiunea periculoasă, în care momentul este maxim ($M_{z,max}$). La grinzi cu secțiune variabilă, tensiunea maximă se poate produce și în alte secțiuni. Valorile momentului încovoiător se determină din diagrama de efort $M_z(x)$. Trasarea diagramelor de eforturi (M_z , T_y) este prezentată în *paragraful 7.7*.

7.5.2. Tensiuni tangențiale. Formula lui Juravski

La încovoierea pură, în secțiunea grinzii apar numai tensiuni normale. În cazul încovoierii simple, în secțiunea grinzii apar atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale. Formula pentru calculul tensiunilor tangențiale va fi demonstrată în cele ce urmează.

Dintr-o grindă solicitată la încovoiere simplă, de secțiune dreptunghiulară, se izolează un element de lungime dx . Axa Oy este axă de simetrie a secțiunii transversale (fig. 7.11). În figura 7.11e s-au prezentat numai tensiunile care dau proiecție pe axa Ox și din acest motiv nu s-a prezentat tensiunea τ_{xy} .

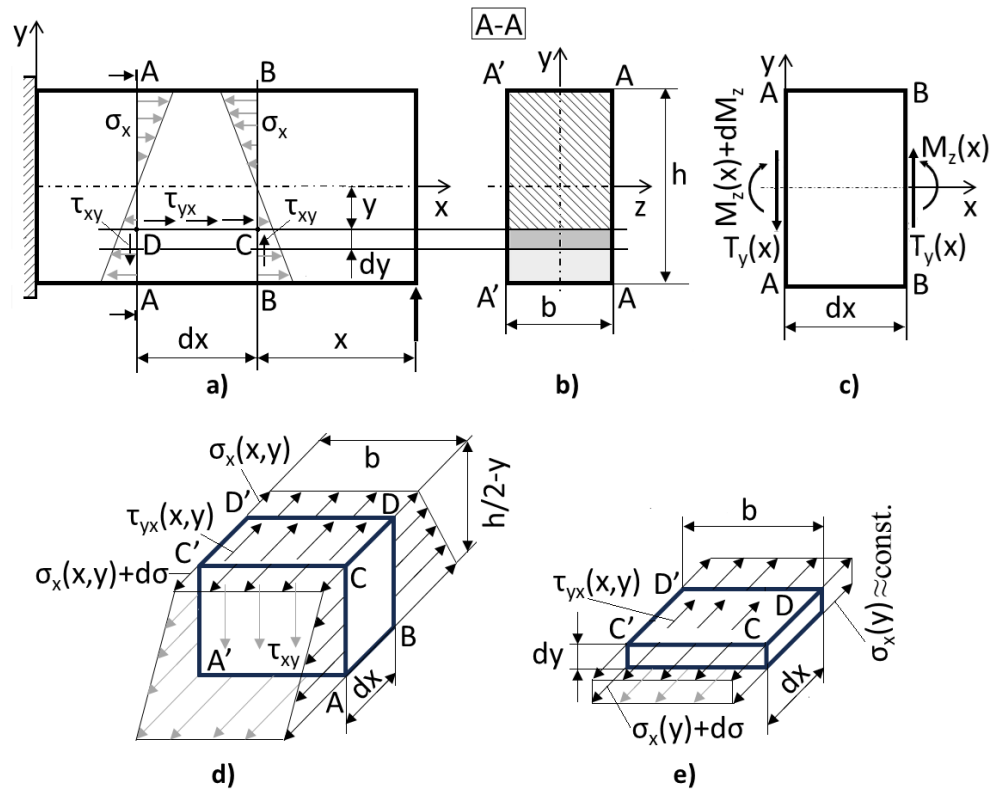


Fig. 7.11. Izolarea unui element de volum dintr-o grindă supusă la încovoiere simplă (a), secțiunea grinzii (b), eforturile (c) și tensiunile care acționează pe elementele de volum (d, e)

În cele două secțiuni care delimitează elementul de grindă apar momentele încovoietoare $M_z(x)$ și respectiv $M_z(x)+dM_z$. Tensiunile normale în secțiunile A-A și B-B sunt repartizate liniar și pot fi calculate cu formula lui Navier (7.9). Ele au fost notate $\sigma_x(y)$ și respectiv $\sigma_x(y)+d\sigma$. Forța tăietoare este derivata momentului încovoietor și (1.29) se poate rescrie

$$T_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx} \quad (7.16)$$

Deoarece funcția $T_y(x)$ variază mai lent decât $M_z(x)$ nu s-a figurat o creștere a forței tăietoare dT_y , așa cum s-a considerat pentru momentul încovoietor (fig. 7.11c). De exemplu, la grinda din figura 7.11a cele două eforturi sunt $M_z(x) = -F \cdot x$ și $T_y(x) = F$. În secțiunile A-A și B-B apar tensiuni normale σ_x , și tensiuni tangențiale τ_{xy} . Făcând o secțiune la distanța y față de axa neutră, se izolează elementul de volum din figura 7.11d. Conform principiului dualității tensiunilor tangențiale (5.9), în planul CDD'C' apar de asemenea tensiuni tangențiale, egale în modul $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$, care converg sau diverg față de unghiul drept diedru (fig. 7.11d, fig. 7.12). Pe suprafețele libere neîncărcate ABA'B' $\tau_{yx}=0$. Conform (5.9), în imediata vecinătate a muchiilor AA', $\tau_{xy}=0$. În figura 7.12 lungimea săgeților sugerează modulul tensiunilor τ și nu s-a figurat tensiunea normală σ .

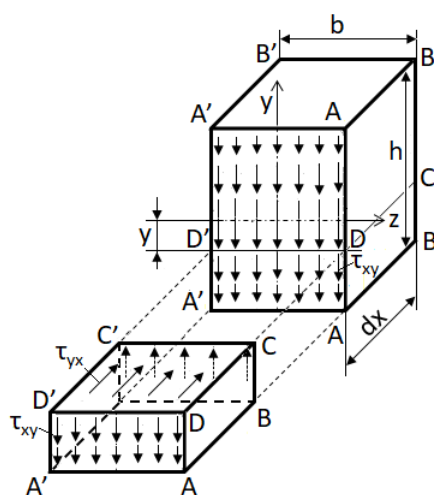


Fig. 7.12. Dualitatea tensiunilor tangențiale la detașarea elementului de volum

D.I. Juravski a făcut ipotezele că, în orice punct al secțiunii, tensiunile tangențiale τ_{xy} sunt paralele cu forță tăietoare T_y iar tensiunile τ_{yx} sunt constante pe fațeta $CDD'C'$. În consecință, și tensiunea τ_{xy} este constantă în vecinătatea muchiei $[C'-C]$ (fig. 7.11d și 7.12), adică pe fațetele de laturi b și dy , ale elementului de volum din figura 7.11e. Altfel spus, tensiunea τ_{xy} este funcție numai de variabila y .

Pe fața inferioară $ABB'A'$ a elementului din figurile 7.11d și 7.12 nu există tensiuni tangențiale, deoarece este o față liberă (exterioară) și neîncărcată a grinzii. Conform relației (5.9), tensiunile τ_{xy} vor fi de asemenea nule în vecinătatea muchiilor superioare și inferioare AA' ale secțiunii grinzii. Pe fețele $AA'C'C$ și $BDB'D'$ din figura 7.11d (notate A_y) nu s-au prezentat tensiunile tangențiale, deoarece ele dau componentă nulă atunci când se scrie proiecția forțelor pe direcția Ox . Tensiunile normale sunt considerate constante pe suprafețele $dA = b \cdot dy$ (fig. 7.11e), deoarece variația lor pe distanța infinitesimală dy poate fi neglijată

$$\int_{A_y} \sigma_x dA + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx - \int_{A_y} (\sigma_x + d\sigma) dA = 0 \quad (7.17)$$

Din (7.17) rezultă

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \int_{A_y} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (7.18)$$

Derivând formula lui Navier (7.15), se obține

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{dM_z(x)}{dx} \cdot \frac{y}{I_z} \quad (7.19)$$

Din (7.16) și (7.19) rezultă

$$\frac{d\sigma}{dx} = T_y \cdot \frac{y}{I_z} \quad (7.20)$$

Din (7.20) și (7.18) se obține

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{bI_z} \int_{A_y} y dA \quad (7.21)$$

Notând cu

$$S_z = \int_{A_y} y dA \quad (7.22)$$

momentul static al suprafeței AA'C'C (marcată cu gri în *fig. 7.11b*) față de axa Oz și ținând cont de ecuația (5.9), (7.21) devine

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x) \cdot S_z(y)}{b \cdot I_z} \quad (7.23)$$

unde I_z este momentul de inerție al întregii secțiuni a grinzii față de axa Oz.

Relația (7.23) se numește *formula lui Juravski*. Ea a fost dedusă utilizând relația lui *Navier* (7.15) și admitând deci toate ipotezele utilizate la deducerea acesteia și în plus ipotezele făcute de *Juravski*.

Se poate arăta că momentul static S_z al suprafeței de deasupra secțiunii y (hașurată în *fig. 7.11b*) este egal cu momentul static al suprafeței de sub secțiune (nehașurată), originea sistemului fiind în centrul de greutate al secțiunii.

Utilizarea formulei Juravski pentru diferite secțiuni

Ipotezele făcute de *Juravski* au fost adoptate pentru cazul secțiunilor dreptunghiulare sau pătrate. Cu toate acestea, utilizarea formulei este uneori extinsă și la alte secțiuni, care nu satisfac toate ipotezele inițiale. În asemenea cazuri, rezultatele furnizate prin utilizarea formulei sunt *aproximative*. În cazul unei secțiuni circulare, de exemplu, tensiunile tangențiale nu mai sunt paralele cu forța tăietoare (*fig. 7.13*). Pentru un element de suprafață situat în vecinătatea frontierei secțiunii, tensiunea tangențială totală τ , presupusă de direcție oarecare, are componentele τ_t (pe direcția tangentei la contur) și τ_r (pe direcția normalei, adică radială). În baza dualității tensiunilor tangențiale (5.9), pe fața laterală a grinzii apare tensiunea τ_l , astfel încât $|\tau_r| = |\tau_l|$. În absența încărcării pe suprafața laterală, vom avea $\tau_l = 0$. În consecință și $\tau_r = 0$. Acest lucru este posibil numai

dacă τ are direcția tangentei la contur. Secțiunea având axa de simetrie Oy (ipoteză utilizată la deducerea formulei lui Navier), rezultă că și tensiunile tangențiale vor fi simetrice față de Oy . Tensiunea globală τ va fi acum descompusă după direcția axelor Oz și Oy (fig. 7.13b).

Se admite, într-o primă ipoteză, că suportul tensiunilor tangențiale globale τ , din orice punct situat pe coarda $[MN]$, situată la distanța y față de Oz , trece prin punctul de intersecție al tangentelor în M și N , notat cu P . Analiza soluțiilor exacte, deduse în Teoria Elasticității, arată că, în multe cazuri, componentele orizontale τ_{xz} au valori absolute mici în comparație cu τ_{xy} , ceea ce ar justifica utilizarea formulei Juravski în asemenea situații [Pissarenko G. ș.a., 1975].

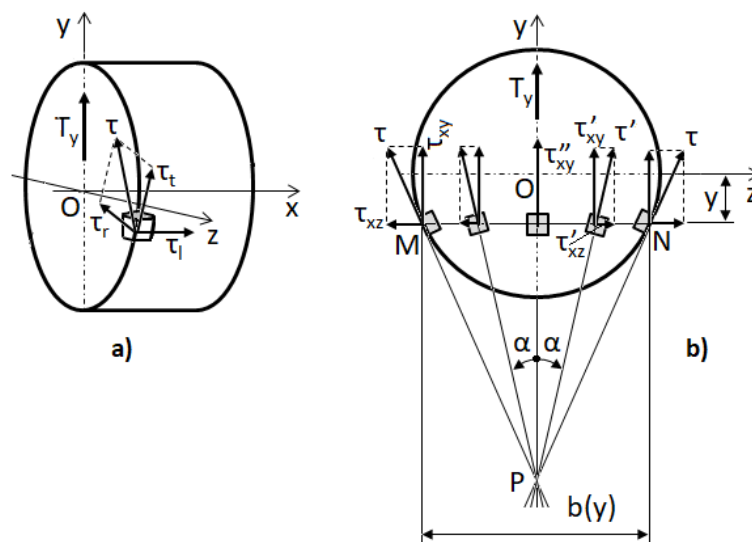


Fig. 7.13. Tensiuni tangențiale pe secțiunea circulară a unei grinzi: elemente de suprafață alese în vecinătatea conturului (a) și la $y = \text{constant}$ (b)

Din figura 7.13b se observă că

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (7.24)$$

Din (7.24) rezultă că $\tau_{xz} = 0$ pe axa de simetrie Oy . În aceste condiții, se poate admite, cu un anumit grad de aproximare, a doua ipoteză a lui Juravski: tensiunile tangențiale τ_{xy} (paralele cu forța tăietoare T_y) sunt aproximativ

constante pentru $y = \text{constant}$, adică τ_{xy} nu depinde de z (sau de α). Această ipoteză aproximează cu atât mai bine distribuția reală a tensiunii τ_{xz} , cu cât lățimea secțiunii este mai redusă. Cu un anumit grad de *aproximare*, formula lui *Juravski* poate fi utilizată la alte secțiuni decât cea dreptunghiulară astfel

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \quad (7.25)$$

unde:

- T_y = forța tăietoare din secțiune;
- $S_z(y)$ = momentul static al suprafeței aflată deasupra sau sub secțiunea y față de axa Oz , care trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale;
- $b(y)$ = lățimea fibrei în secțiunea y (*fig. 7.13b*);
- I_z = momentul de inerție al întregii figuri, față de axa Oz .

În continuare se vor da câteva exemple de utilizare a formulei lui *Juravski* pentru diferite secțiuni ale grinzii.

Secțiune dreptunghiulară

Se determină legea de variație a tensiunilor tangențiale la o secțiune dreptunghiulară (*fig. 7.14*) cu laturile b și h

$$b(y) = b; \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (7.26)$$

Se calculează $S_z(y)$, pentru suprafața marcată cu gri din *figura 7.14a*

$$S_z(y) = A_y \cdot y_0 = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (7.27)$$

Înlocuind (7.26) și (7.27) în (7.25), se obține

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y}{b} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \Rightarrow \tau_{xy}(y) = 6 \frac{T_y}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (7.28)$$

Funcția $\tau_{xy}(y)$ reprezintă o parabolă (*fig. 7.14b*).

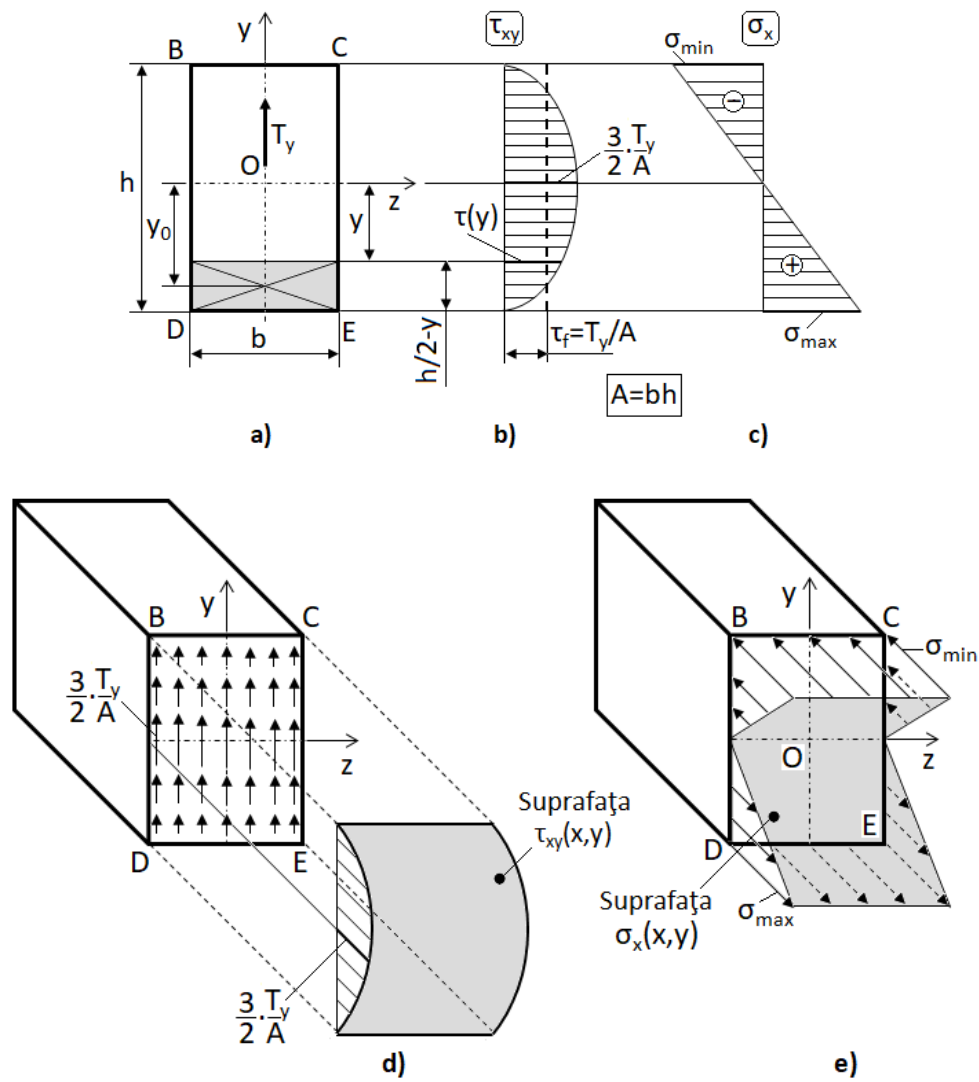


Fig. 7.14. În secțiunea dreptunghiulară a unei grinzi (a), solicitată la încovoiere simplă, apar tensiuni tangențiale (b, d) și tensiuni normale (c, e)

Din (7.28) se observă că $\tau_{xy} = 0$ pentru $y = \pm h/2$ și are un maximum la $y = 0$

$$\tau_{xy, \max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}; \quad bh = A \Rightarrow \tau_{xy, \max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \quad (7.29)$$

În *figura 7.14* s-au prezentat suprafețele $\tau_{xy}(x,y)$ și $\sigma_x(x,y)$. Tensiunile tangențiale acționează în secțiunea grinzii BCED dar, dacă ele sunt rabătute cu 90° , vârfurile lor vor determina suprafața marcată cu gri în *figura 7.14d*. În *figura 7.14e* tensiunea normală minimă este de compresiune ($\sigma_{\min} < 0$), iar cea maximă de tracțiune ($\sigma_{\max} > 0$), iar suprafața $\sigma_x(x,y)$ este gri în *fig. 7.14e*.

În calculul convențional la forfecare s-au considerat tensiunile τ_{xy} constante pe secțiunea barei. Astfel s-a determinat tensiunea tangențială cu (5.3), $\tau_{xy} = T/A$, subevaluând substanțial valoarea maximă a tensiunii $\tau_{xy.\max} = 3T/2A$, conform (7.29). Valoarea corectă a tensiunii tangențiale maxime, dată de (7.29), poate fi considerată și pentru calculul la forfecare.

În *figura 7.14c* s-a reprezentat variația tensiunilor normale σ_x , date de formula lui Navier (7.15). Din *figurile 7.14b,c* se observă că tensiunile τ_{xy} prezintă un punct de maxim în planul neutru ($y = \pm h/2$), acolo unde $\sigma_x = 0$. De asemenea, tensiunile normale σ_x sunt maxime în modul în fibrele cele mai îndepărtate de planul neutru ($y = \pm h/2$), acolo unde $\tau_{xy} = 0$. Rezultă că în planul neutru ($y=0$) există o solicitare la forfecare pură, iar pentru $y = \pm h/2$ o solicitare la tracțiune și respectiv compresiune pură. Pentru alte valori ale variabilei y se va produce o solicitare compusă (forfecare cu solicitări axiale).

Secțiune circulară

Se va determina legea de variație a tensiunilor tangențiale τ_{xy} la o secțiune circulară, cunoscând forța T_y din diagrama de forțe tăietoare.

Pentru secțiunea circulară se cunoaște

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4} \quad (7.30)$$

În cazul secțiunii circulare este mai convenabil să se lucreze în coordonate polare (*fig. 7.15*). Se observa că

$$b(y) = 2R \sin \alpha; \quad y = R \cos \alpha; \quad dy = -R \sin \alpha d\alpha; \quad dA = b(y) dy \quad (7.31)$$

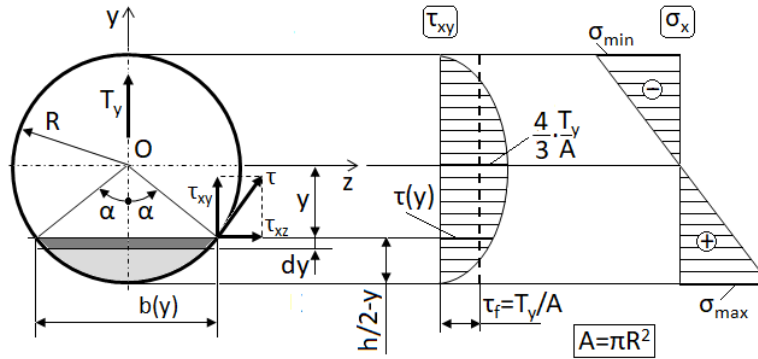


Fig. 7.15. Tensiuni tangențiale și normale care apar în secțiunea circulară a unei grinzi supusă la încovoiere simplă

Se determină momentul static al suprafeței marcate cu gri (fig. 7.15) față de axa Oz

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_z = \int_y^R y \cdot b(y) \cdot dy; \quad S_z = - \int_{\alpha}^0 2R^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad (7.32)$$

$$S_z = 2R^3 \int_0^{\alpha} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha$$

Înlocuind (7.30), (7.31) și (7.32) în (7.25) se obține

$$\tau_{xy}(\alpha) = \frac{T_y}{2R \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{4}{\pi R^4} \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha \Rightarrow \tau_{xy}(\alpha) = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{A} \sin^2 \alpha \quad (7.33)$$

unde A este aria secțiunii circulare.

Se trece din nou în coordonate carteziane

$$\cos \alpha = \frac{y}{R}; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2 \quad (7.34)$$

Din (7.33) și (7.34) rezultă

$$\tau_{xy}(y) = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \left[1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2 \right] \quad (7.35)$$

Aceasta este ecuația unei parabole. Tensiunile τ_{xy} sunt nule în fibrele extreme ($y = \pm R$) și maxime în planul neutru ($y=0$):

$$\tau_{xy,\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{A} \quad (7.36)$$

Calculul convențional la forfecare (*Capitolul 5*) consideră tensiunile τ_{xy} constante pe secțiunea barei $\tau_{xy} = T/A$, conform (5.3) Se face astfel o subestimare importantă a tensiunii maxime $\tau_{xy,\max}$, dată de (7.36). Valoarea tensiunii tangențiale maxime (7.36) poate fi folosită în calculul la forfecare a barelor de secțiune circulară, cu anumite aproximații.

Profil I nestandardizat

Se determină mai jos variația tensiunilor tangențiale $\tau_{xy}(y)$ la profilul I din *figura 7.16*, valoarea forței T_y fiind cunoscută din diagrama de forțe tăietoare. Se neglijează fenomenul de concentrare a tensiunilor.

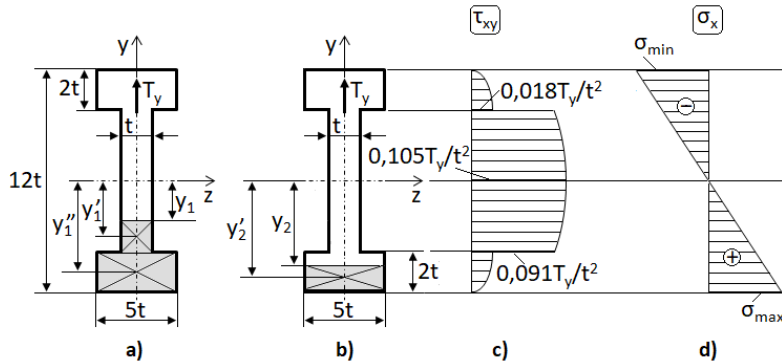


Fig. 7.16. Determinarea tensiunilor τ și σ din secțiunea unei grinzi profil I solicitată la încovoiere simplă: împărțirea secțiunii în două domenii (a, b); diagrama τ_{xy} (c); diagrama σ_x (d)

Se calculează momentul de inerție I_z descompunând secțiunea în dreptunghiuri

$$I_z = \frac{5t \cdot (12t)^3}{12} - 2 \frac{2t \cdot (8t)^3}{12}; \quad I_z = 549, (3) \cdot t^4 \quad (7.37)$$

Se determină $b(y_i)$ care, după cum se observă din *figura 7.16*, este constant pe domenii. Deoarece Oz este axă de simetrie și diagrama $\tau(y)$ va fi simetrică și poate fi trasată pe jumătate, iar apoi prin simetrie față de Oz. Domeniile pentru trasarea unei jumătăți de diagramă sunt arătate în *tabelul 7.1*.

Tab. 7.1. Domeniile pentru jumătate din profilul din *fig. 7.16*

Domeniul ($y_i \in$)	$b(y)$
$y_1 \in [0, 4t]$	$b(y_1) = t$
$y_2 \in [4t, 6t]$	$b(y_2) = 5t$

Se calculează momentul static al suprafeței gri din *figura 7.16a* ca sumă a momentelor statice ale celor două suprafețe dreptunghiulare

$$S_z(y_1) = t \cdot (4t - y_1) \cdot y_1' + 5t \cdot 2t \cdot y_1'', \quad y_1 \in [0, 4t]$$

$$S_z(y_1) = t(4t - y_1) \left[y_1 + \frac{4t - y_1}{2} \right] + 5t \cdot 2t \cdot 5t = \frac{t}{2} [(4t)^2 - y_1^2] + 50t^3 \quad (7.38)$$

Se calculează momentul static pentru suprafața gri din *figura 7.16b*

$$S_z(y_2) = 5t(6t - y_2) \cdot y_2' = 5t(6t - y_2) \left[y_2 + \frac{6t - y_2}{2} \right]$$

$$\Rightarrow S_z(y_2) = \frac{5t}{2} [(6t)^2 - y_2^2]; \quad y_2 \in [4t, 6t] \quad (7.39)$$

Înlocuind (7.37), (7.38) și (7.39) în formula lui *Juravski* (7.25), se determină legea de variație a tensiunilor tangențiale pe cele două domenii

$$\tau_{xy}(y_1) = \frac{T_y}{I_z} \cdot \frac{S_z(y_1)}{b(y_1)} = \frac{T_y}{549,33t^4} \left\{ \frac{1}{2} [(4t)^2 - y_1^2] + 50t^2 \right\}; \quad y_1 \in [0, 4t]$$

$$\tau_{xy}(y_2) = \frac{T_y}{I_z} \cdot \frac{S_z(y_2)}{b(y_2)} = \frac{T_y}{549,33t^4} \left\{ \frac{1}{2} [(6t)^2 - y_2^2] \right\}; \quad y_2 \in [4t, 6t] \quad (7.40)$$

Funcțiile $\tau_{xy}(y_1)$ și $\tau_{xy}(y_2)$ reprezintă parabole (*fig. 7.16c*).

Observații:

- În diagrama $\tau_{xy}(y)$ din figura 7.16c se remarcă saltul produs la trecerea între domenii (între inima profilului și tălpi). Tensiunea maximă $\tau_{xy,max}$ este localizată pe suprafața neutră. Inima profilului preia aproape toată forța tăietoare T_y (circa 95-98%), contribuția tălpilor fiind minimă. Dacă trecerea între inimă și tălpi se face prin racordări (cazul profilelor laminate), diagrama $\tau_{xy}(y)$ prezintă o variație continuă, fără salturi. Tensiunea normală este preluată preponderent de către tălpile profilului.
- Ipoteza tensiunilor τ_{xy} constante pentru un y dat poate fi acceptată numai pentru inima profilului. Astfel, în conformitate cu principiul dualității tensiunilor, în vecinătatea muchiilor tălpilor profilului (fig. 7.17), trebuie să fie îndeplinită condiția $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Însă $\tau_{yx} = 0$ (se află pe o suprafață liberă, neîncărcată) iar $\tau_{xy} \neq 0$ (conform diagramei din figura 7.16c).
- Prezența forțelor tăietoare determină o anumită deplanare a secțiunii, fapt care nu este în concordanță cu ipoteza lui Bernoulli. În cazul profilelor subțiri deschise, supuse la încovoiere, admitând că secțiunile barei nu se deplantează, tensiunile tangențiale calculate cu formula lui Juravski se reduc la o forță tăietoare T perpendiculară pe axa neutră Oz , care trece la distanța c_y față de centrul de greutate al secțiunii. Similar, când Oy este axa neutră forța T trece prin punctul situat la distanța c_z față de centrul de greutate. Punctul C , aflat la intersecția dreptelor suport ale celor două forțe tăietoare este numit *centru de lunecare* și reprezintă o caracteristică geometrică a secțiunii [Bia C. ș.a., 1983].

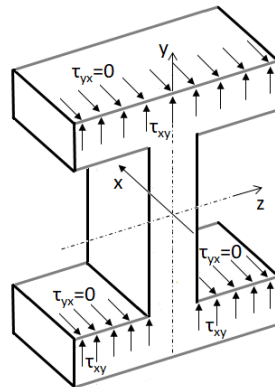


Fig. 7.17. Ipoteza tensiunilor constante pe lățimea profilului, $\tau_{xy}(z)=constant$ nu satisface principiul dualității în cazul trecerii de la inimă la tălpile profilului „I”

7.6. ENERGIA POTENȚIALĂ DE DEFORMARE ELASTICĂ

Pentru energia potențială de deformare, la încovoierea pură se vor considera numai tensiunile normale (3.17):

$$U = \int_V dU_1 = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad (7.41)$$

Din (7.41) și (7.15), ținând cont că $dV = dA \cdot dx$, rezultă

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \frac{M_z^2(x) \cdot y^2}{I_z^2} dV = \frac{1}{2E} \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{I_z^2} dx \int_A y^2 dA \quad (7.42)$$

Integrala pe suprafață reprezintă momentul de inerție axial I_z și (7.42) se poate scrie succesiv

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^L \frac{M_z^2(x) \cdot I_z}{I_z^2} dx \Rightarrow U = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx \quad (7.43)$$

În (7.43), $M_z(x)$ este expresia momentului încovoiator iar L lungimea regiunii grinzii. Energia potențială de deformare elastică a întregii grinzi se obține prin însumarea algebrică a energiilor calculate pentru cele n regiuni:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (7.44)$$

În cazul încovoierii simple, la energia potențială de deformare a grinzii își aduc contribuția atât tensiunile normale cât și cele tangențiale. În cazul grinzilor lungi ($L \geq 10h$) însă, contribuția tensiunilor tangențiale la energia potențială de deformare elastică este mică și de obicei poate fi neglijată. În cazul grinzilor scurte, această contribuție devine însă semnificativă.

Energia potențială de deformare elastica datorată tensiunilor tangențiale poate fi calculată cu (3.17):

$$U = \int_V dU_1 = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \quad (7.45)$$

Înlocuind formula lui *Juravski* (7.25) în (7.45) rezultă

$$U = \frac{1}{2GA} \cdot \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)} dA \int_0^L T_y^2(x) \cdot dx \quad (7.46)$$

Se notează cu k coeficientul care depinde de forma secțiunii

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)} dA \quad (7.47)$$

Cu aceasta notație, expresia energiei de deformare elastică (7.46) devine

$$U = k \cdot \int_0^L \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (7.48)$$

Pentru secțiunea dreptunghiulară din *figura 7.14a*, expresia momentului static S_z este dată de relația (7.27). Înlocuind (7.26) și (7.27) în (7.47) și ținând cont de faptul că $dA = b \cdot dy$ și Oz este axă de simetrie, rezultă

$$k = \frac{12^2 \cdot bh}{(bh^3)^2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]^2 \cdot b dy \quad (7.49)$$

Integrând, pentru secțiunea dreptunghiulară se obține

$$k = \frac{6}{5} \quad (7.50)$$

Coeficientul k poate fi calculat în mod similar pentru alte tipuri de secțiuni.

Energia potențială de deformare elastică a unei grinzi supuse la încovoiere simplă va fi egală cu suma algebrică a energiilor de mai sus [Buzdugan Gh. ș.a., 1973]

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx + k \int_0^L \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (7.51)$$

În cazul grinzilor lungi cu secțiuni masive, al doilea termen are în general o influență mică și de obicei se neglijează.

7.7. TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI

7.7.1. Etape

Pentru calculul tensiunilor normale si tangențiale trebuie sa cunoaștem momentul încovoietor $M_z(x)$ și respectiv forța tăietoare $T_y(x)$. Acestea se obțin din diagramele de eforturi. Trasarea acestor diagrame implică parcurgerea următoarelor etape:

1. *Figurarea și calculul reacțiunilor.* Tipurile de reazeme și reacțiunile care apar în acestea au fost prezentate în *tabelul 1.1*. În cazul grinzilor static determinate, reacțiunile se calculează din ecuațiile de echilibru. La grinzile static nedeterminate sunt necesare ecuații suplimentare, care provin din studierea deformării grinzii. În cazul grinzilor în consolă (încastate la un capăt și libere la celălalt), această etapă poate fi evitată dacă se izolează numai porțiuni de grindă dinspre capătul liber.

2. *Împărțirea în regiuni și figurarea secțiunilor.* Pe o regiune este valabilă o anumita lege de încărcare. Prin fiecare regiune se face o secțiune. În general, se preferă ca porțiunea de grindă izolată să conțină cât mai puține regiuni. Altfel spus, este preferabil ca secțiunea să fie cât mai aproape de unul dintre capetele grinzii. Astfel *expresia eforturilor va fi mai simplă*.

3. *Determinarea eforturilor și trasarea diagramelor.* Regulile de semn pentru eforturi sunt prezentate în *figurile 1.21c și 1.21f-i*. Aplicarea metodei secțiunilor la grinzi este arătată în *figura 7.18*. Grinda satisface ipotezele formulate la determinarea formulelor lui *Navier și Juravski*. În secțiune apar următoarele eforturi:

- Forța tăietoare $T_y(x)$, egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la axa barei a tuturor forțelor de la stânga sau de la dreapta secțiunii;
- Momentul încovoietor $M_z(x)$, egal cu suma algebrică a proiecției pe direcția Oz sau Oy a tuturor vectorilor moment de la stânga sau de la dreapta secțiunii.

Considerând încastrări în secțiuni, îndepărtând reazemele de pe porțiunea de bară selectată, dar păstrând reacțiunile, determinarea eforturilor (trecute acum în categoria reacțiunilor), poate fi făcută scriind ecuațiile de echilibru pentru oricare porțiune de grindă (de lungime x și respectiv $L-x$), prezentată în *figura 7.18*. Spre deosebire de calculul reacțiunilor, la determinarea eforturilor sensurile pozitive pentru forțe și momente nu sunt arbitrare, ci trebuie să fie respectate anumite convenții de semn, care sunt în concordanță cu regulile de semn pentru tensiuni și cu ecuațiile de echivalență (1.34).

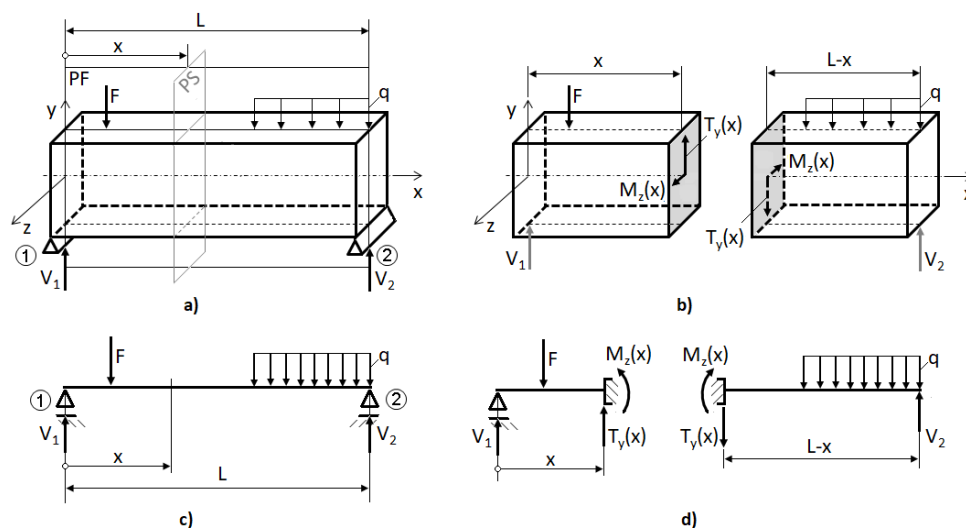


Fig. 7.18. Secționarea unei grinzi (a); separarea porțiunilor de grindă și evidențierea eforturilor (b), reprezentarea schematică a grinzii (c) și a celor două porțiuni de grindă (d); Legenda: PF= planul forțelor, PS= planul secțiunii

Momentele exterioare sunt considerate pozitive dacă bara este curbată astfel încât fibra inferioară se află la exteriorul curburii, adică este solicitată la tracțiune (*fig. 1.21f,i*). Unii autori reprezintă funcția moment încovoietor $M_z(x)$ pozitiv deasupra axei absciselor [Beer F.P. ș.a., 2012; Hibbeler R.C., 2018; Pissarenko G. ș.a., 1975 etc.], iar alții o reprezintă sub axa Ox [Bia C. ș.a., 1983; Buzdugan Gh., 1986; Goia I., 2000 etc.]. În a doua reprezentare forma diagramei $M_z(x)$ sugerează modul în care se deformează grinda, dar

fac excepție grinzile în consolă. În prezenta lucrare s-a adoptat cea de-a doua variantă, deși prezintă și unele dezavantaje.

La trasarea diagramei forțelor tăietoare, forțele exterioare care dau un cuplu în sens trigonometric față de secțiune (*fig. 1.21c,h*) vor fi considerate pozitive, deși mulți autori consideră acest sens negativ, în mod tradițional. În lucrare nu se utilizează regula de semn tradițională, deoarece ea nu asigură concordanța între sensul forțelor tăietoare și cel al tensiunilor tangențiale, sens implicat și în ecuațiile de echivalență. Însă, pentru a nu schimba aspectul tradițional al diagramei forțelor tăietoare, valorile pozitive ale forței tăietoare vor fi considerate sub axa absciselor, la fel ca în cazul momentului încovoietor $M_z(x)$.

Datorită adoptării sensului axei ordonate în jos, trebuie să se țină cont de următoarea regulă privind orientarea concavității curbei (*fig. 7.19*):

- Dacă $f'' > 0$, atunci concavitățile curbei $f(x)$ este orientată în sensul pozitiv al axei ordonate;
- Dacă $f'' < 0$, atunci concavitățile curbei $f(x)$ este orientată în sensul negativ al axei ordonate.

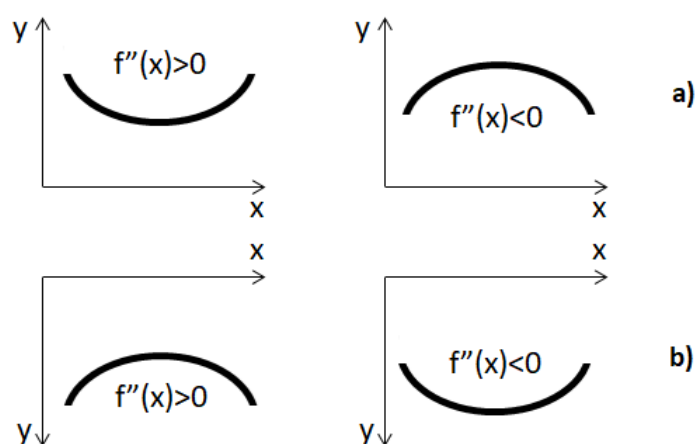


Fig. 7.19. Orientarea concavității curbei $y=f(x)$ funcție de semnul derivatei de ordinul al doilea, pentru diferite sisteme de referință (a) și (b)

În cele ce urmează, se vor trasa diagramele de eforturi M_z și T_y la diferite grinzi static determinate și nedeterminate.

4. *Verificarea diagramelor.* La verificarea diagramelor se ține cont de faptul că forța tăietoare este derivata momentului (7.16). Rezultă că între $M_z(x)$ și $T_y(x)$ trebuie să existe relațiile dintre funcție și derivata sa. Criteriile de verificare ale diagramelor sunt următoarele:

- Dacă nu există momente concentrate la capetele grinzii, atunci $M_z(x) = 0$ în aceste secțiuni; dacă la un capăt al grinzii există un moment concentrat exterior, în acea secțiune diagrama $M_z(x)$ marchează un salt egal în modul cu momentul exterior;
- Dacă grinda nu este încărcată cu momente concentrate, atunci diagrama $M_z(x)$ nu prezintă salturi; în secțiunea în care acționează un moment concentrat exterior asupra grinzii, diagrama $M_z(x)$ prezintă un salt, egal în modul cu momentul exterior;
- În secțiunea în care diagrama $M_z(x)$ prezintă un punct de extrem (maxim sau minim), diagrama $T_y(x)$ trece prin zero (derivata de ordinul întâi se anulează);
- Dacă $M_z(x)$ este o funcție polinomială, $T_y(x)$ este o funcție cu un grad mai mic;
- Dacă se parcurge grinda de la stânga la dreapta, atunci când $M_z(x)$ crește, avem $T_y(x) < 0$, iar când $M_z(x)$ scade, avem $T_y(x) > 0$;
- În secțiunea în care există o forță exterioară normală pe axa barei, în diagrama forțelor tăietoare ($T_y(x)$, de exemplu) apare un salt egal în modul cu forța exterioară;
- Datorită regulilor de semn adoptate, curba $M_z(x)$ are concavitățile îndreptate în sens contrar forței distribuite $q(x)$ (forța distribuită "intră" în concavitate);
- La grinzi cu încărcare și rezemare simetrică, diagrama $M_z(x)$ este simetrică față de axă, iar $T_y(x)$ simetrică față de un punct (antisimetrică);
- La grinzi cu încărcare și rezemare antisimetrice (simetrice față de un punct), diagrama $M_z(x)$ este antisimetrică iar $T_y(x)$ simetrică.

7.7.2. Exemple

În continuare se vor trasa câteva diagrame de eforturi M_z și T_y , pentru exemplele prezentate în figuri. Exemplele sunt ordonate de la simplu la complex și sunt însoțite de explicații mai detaliate în prima parte.

Exemplul 7.1

La grinda din *figura 7.20* se face secțiunea x_1 prin regiunea 2-3. Se izolează porțiunile de grindă de lungime x_1 și x_2 și se scriu momentele încovoietoare

$$M_z(x_1) = M; \quad x_1 \in [0, L_2] \quad (7.52)$$

$$M_z(x_2) = M - 2M = -M; \quad x_2 \in [0, L_1] \quad (7.53)$$

Forța tăietoare este nulă pe toată lungimea grinzii (*încovoiere pură*). Se observă că în diagrama $M_z(x)$, în secțiunile în care asupra grinzii acționează momente concentrate, apar salturi egale în modul cu aceste momente. Porțiunile de grindă rezultate în urma secționării sunt prezentate la primele exemple în scop didactic, dar ulterior nu vor mai fi prezentate.

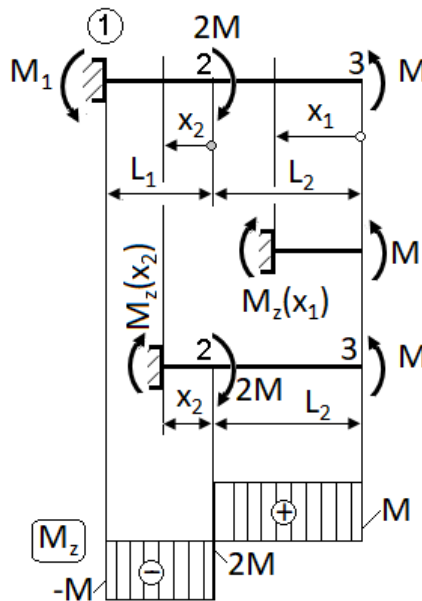


Fig. 7.20. Grindă în consolă, încărcată cu momente și diagrama M_z

Exemplul 7.2

Pentru grinda din *figura 7.21* se figurează reacțiunile V_1 și V_3 . Se calculează aceste reacțiuni din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_3 = 0; \quad \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_3 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow V_3 L + M = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{M}{L} \\ \sum M_{(3)} &= 0 \Rightarrow V_1 L - M = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{M}{L}\end{aligned}\quad (7.54)$$

Se observă că reacțiunile nu depind de poziția momentului M pe grindă. Grinda este în echilibru sub acțiunea încărcărilor și reacțiunilor. Se face secțiunea x_1 în regiunea 1-2, se izolează porțiunea de grindă de lungime x_1 și se scriu eforturile din încastrarea fictivă

$$M_z(x_1) = V_1 x_1; \quad T_y(x_1) = -V_1; \quad x_1 \in [0, a] \quad (7.55)$$

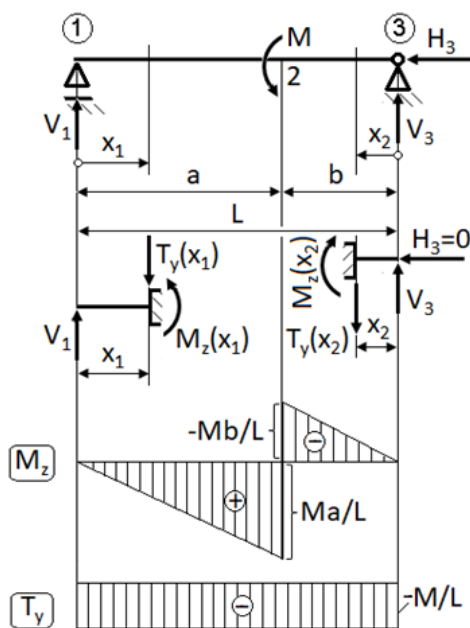


Fig. 7.21. Grindă rezemata la capete, încărcată cu moment M și diagramele M_z , T_y

În regiunea 2-3 se face secțiunea x_2 și se scriu eforturile

$$M_z(x_2) = V_3 x_2; \quad T_y(x_2) = V_3; \quad x_2 \in [0, b] \quad (7.56)$$

Funcțiile M_z și T_y se reprezintă grafic, obținând diagramele de eforturi. În secțiunea 2 a diagramei M_z apare un salt egal în modul cu momentul concentrat M , care acționează în această secțiune. În diagrama T_y apar salturi în reazeme, care sunt egale cu modulul reacțiunilor. Grinda este sollicitată la *încovoiere simplă*.

Observații:

Saltul produs în diagrama M_z este determinat de prezența momentului M , presupus perfect concentrat. În realitate nu există momente perfect concentrate și M este de fapt distribuit pe o mică porțiune de grindă. În consecință, saltul este mai puțin brusc decât apare în diagrama M_z . Din acest motiv, pentru dimensionare se va considera momentul maxim în modul de la stânga sau de la dreapta secțiunii, nu între saltul. O observație similară este valabilă și pentru forțele tăietoare (fig. 7.22).

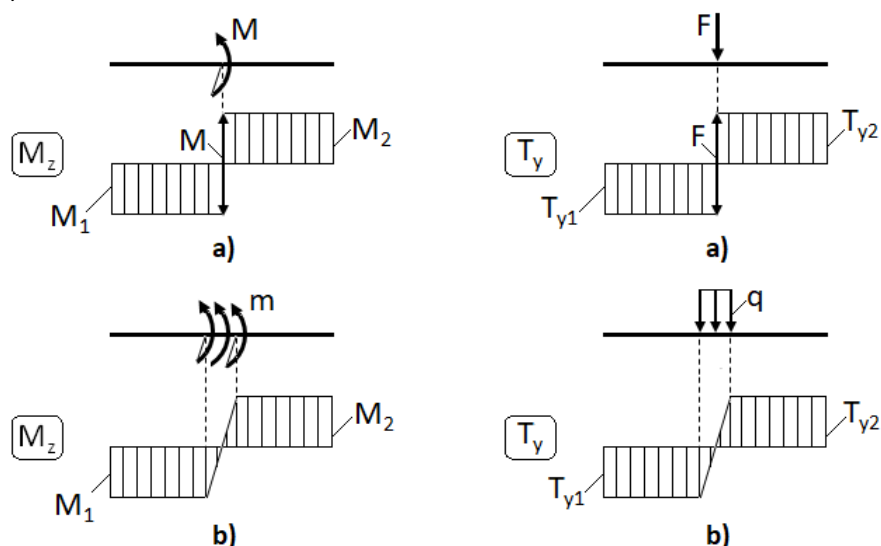


Fig. 7.22. Încărcările considerate concentrate (M sau F) acționează de fapt pe o mică porțiune de grindă și saltul din diagramele de efort este atenuat

Exemplul 7.3

Se trasează diagramele de eforturi la grinda din figura 7.23.

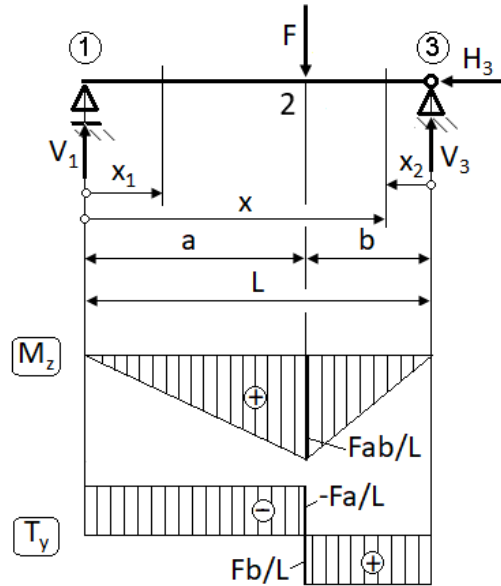


Fig. 7.23. Grindă rezemată la capete, încărcată cu o forță F

Se figurează reacțiunile V_1 și V_3 , care se calculează din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_3 = 0; \quad \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 - F + V_3 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow V_3 L - Fa = 0 \Rightarrow V_3 = F \frac{a}{L} \\ \sum M_{(3)} &= 0 \Rightarrow V_1 L - Fb = 0 \Rightarrow V_1 = F \frac{b}{L}\end{aligned}\quad (7.57)$$

Reacțiunile satisfac relația de proiecție a forțelor pe Oy , deoarece $a + b = L$. Prin cele două regiuni ale grinzii se fac secțiunile x_1 și x_2 și se scriu eforturile (tab. 7.2).

Tab. 7.2. Eforturi în grinda din figura 7.23

Regiunea	Intervalul	$M_z(x_i)$	$T_y(x_i)$
1-2	$x_1 \in [0, a]$	$M_z(x_1) = V_1 x_1$	$T_y(x_1) = -V_1$
2-3	$x_2 \in [0, b]$	$M_z(x_2) = V_3 x_2$	$T_y(x_2) = V_3$

Dacă, de exemplu, în locul secțiunii x_2 s-ar fi preferat secțiunea x (cu originea în 1), atunci eforturile sunt ceva mai complicate, însă se obțin aceleași diagrame M_z și T_y ca în *figura 7.23*

$$\begin{aligned} M_z(x) &= V_1 x - F(x-a) \\ T_y(x) &= -V_1 + F; \quad x_1 \in [a, L] \end{aligned} \quad (7.58)$$

În special în cazul grinzilor cu mai multe regiuni, se va prefera să se izoleze porțiunea cea mai mică din grinda secționată, astfel încât expresiile eforturilor să conțină mai puțini termeni.

Observații:

- Pentru $a = b = L/2$ grinda este simetrică (ca rezemare și încărcare). În consecință, reacțiunile vor fi simetrice și egale cu jumătate din încărcarea pe verticală $V_1 = V_3 = F/2$. Se poate folosi de această proprietate în locul ecuațiilor de echilibru, când este cazul;
- Ca o consecință a simetriei și a regulilor de semn adoptate, diagrama $M_z(x)$ va fi simetrică iar $T_y(x)$ va fi simetrică față de un punct (antisimetrică).

Exemplul 7.4. Utilizarea simetriei

Se vor trasa diagramele de eforturi pentru osia de vagon (*fig. 7.24*).

Osia de vagon poate fi asimilată cu o grindă simplu rezemată, cu două console, încărcată cu două forțe concentrate egale la capete. Grinda este *simetrică* din punct de vedere al rezemării și încărcării. Datorită simetriei, reacțiunile sunt egale cu jumătate din încărcarea pe verticală

$$V_2 = V_3 = \frac{2F}{2} = F \quad (7.59)$$

Calculul reacțiunilor poate fi făcut de asemenea cu ecuațiile de echilibru.

Datorită simetriei și a regulilor de semn adoptate, diagrama de momente $M_z(x)$ va fi simetrică, iar diagrama $T_y(x)$ antisimetrică. Rezultă că aceste diagrame pot fi trasate numai pe jumătate din lungimea grinzii, iar pe cealaltă jumătate vor fi construite prin simetrie (M_z) sau antisimetrie (T_y), conform tabelului 7.3.

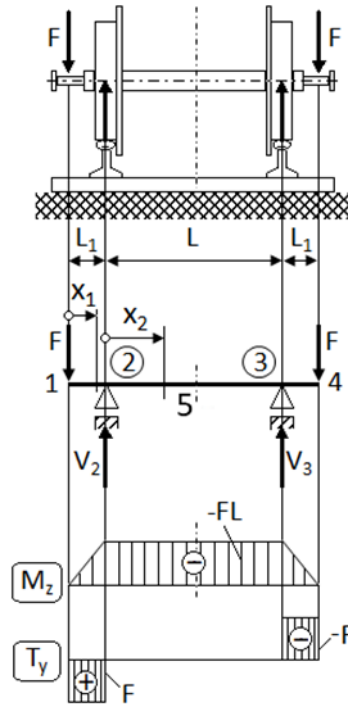


Fig. 7.24. Încărcare și rezemare simetrică (osia de vagon)

Tab. 7.3. Eforturile din osia de vagon (fig. 7.24)

Reg.	Interval	$M_z(x_i)$	$T_y(x_i)$
1-2	$x_1 \in [0, L_1]$	$M_z(x_1) = -Fx_1$	$T_y(x_1) = F$
2-5	$x_2 \in [0, L/2]$	$M_z(x_2) = -F(L_1 + x_2) + V_2x_2$	$T_y(x_2) = F - V_2$

Se reprezintă grafic funcțiile din tabelul 7.3 (figura 7.24). Porțiunea de grindă dintre reazeme este solicitată la încovoiere pură ($M_z = \text{constant}$, $T_y = 0$).

Exemplul 7.5. Utilizarea antisimetriei

Se trasează diagramele de eforturi pentru epruveta *Iosipescu*, din figura 8.29. După cum s-a arătat în Capitolul 5, forfecarea este însoțită de încovoiere și este dificil să se realizeze o solicitare la forfecare pură. Cu ajutorul epruvetei *Iosipescu* se poate produce forfecarea pură în secțiunea slăbită a epruvetei A-A. Această metodă este standardizată în mai multe țări.

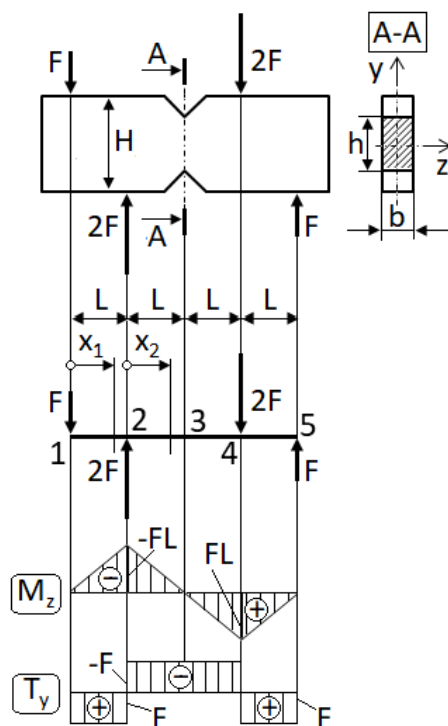


Fig. 7.25. Încărcare și rezemare antisimetrică (epruveta Iosipescu)

Epruveta este montată într-un dispozitiv și solicitată pe mașina universală de încercat la tracțiune, cu încărcarea prezentată în figura 7.25. Epruveta se află în echilibru sub acțiunea încărcărilor antisimetrice.

În cazul simetriei față de un punct (antisimetriei), diagrama $M_z(x)$ va fi antisimetrică iar diagrama $T_y(x)$ simetrică. Rezultă că diagramele de eforturi pot fi trasate pe jumătate din lungimea grinzii și apoi completate prin antisimetrie (M_z), respectiv prin simetrie (T_y).

Având în vedere aceste proprietăți ale diagramelor, se vor face numai două secțiuni, x_1 și x_2 , iar apoi se vor scrie eforturile, ca în tabelul 7.4.

Tab. 7.4. Eforturile din epruveta Iosipescu (fig. 7.25)

Reg.	Interval	$M_z(x_i)$	$T_y(x_i)$
1-2	$x_1 \in [0, L]$	$M_z(x_1) = -Fx_1$	$T_y(x_1) = F$
2-3	$x_2 \in [0, L]$	$M_z(x_2) = -F(L + x_2) + 2Fx_2$	$T_y(x_2) = F - 2F$

Se reprezintă grafic eforturile, ținând cont de simetrie/antisimetrie. Se observă că, deși epruveta este supusă la încovoiere simplă, în secțiunea predeterminată de rupere A-A, aflată pe axa de simetrie a epruvetei, eforturile sunt $M_z(x) = 0$ și $T_y(x) = F$. S-a realizat astfel o solicitare la forfecare pură în această secțiune. Utilizând o epruvetă crestată se garantează ruperea în secțiunea A - A.

Exemplul 7.6

Se trasează diagramele de eforturi la grinda rezemată la capete, încărcată cu forță uniform distribuită (*fig. 7.26*).

Greutatea unei grinzi de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, poate fi considerată o forță uniform distribuită. Grinda este încărcată și rezemată simetric. Datorită simetriei, reacțiunile sunt egale cu jumătate din încărcarea pe verticală

$$V_1 = V_2 = \frac{qL}{2} \quad (7.60)$$

Se scriu eforturile în secțiunea x (*tab. 7.5*).

Tab. 7.5. Eforturi în grinda din figura 7.26

Reg.	Interval	$M_z(x_i)$	$T_y(x_i)$
1-3	$x \in [0, L/2]$	$M_z(x) = V_1x - qx^2/2$	$T_y(x) = -V_1 + qx$

Înlocuind reacțiunile, eforturile devin

$$M_z(x) = q \frac{L}{2} x - q \frac{x^2}{2}; \quad T_y(x) = \frac{qL}{2} - qx \quad (7.61)$$

Se observă că momentul dat de forțele distribuite este numeric egal cu momentul static al dreptunghiului de laturi q și x_1 (reprezentând forța distribuită de pe porțiunea de grindă izolată) față de secțiune. Acest moment încovoiător mai poate fi scris ca momentul dat de către forța concentrată static echivalentă $Q(x) = qx$ față de secțiune, egală în modul cu suprafața

dreptunghiului cu laturile q și x_1 . Forța $Q(x)$ trece prin centrul de greutate al dreptunghiului. Ambele reprezentări se văd în figura 7.26.

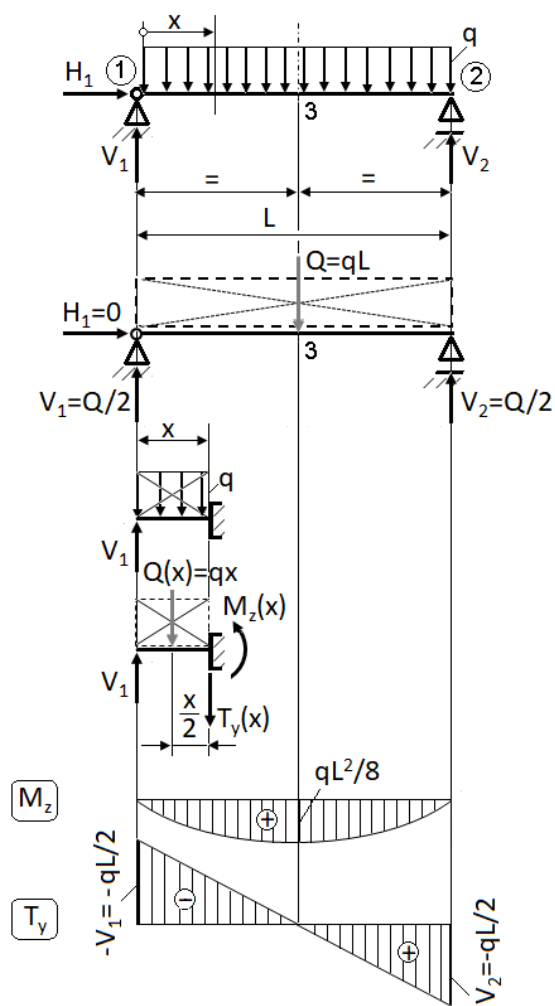


Fig. 7.26. Grindă încărcată cu forță uniform distribuită

Funcția $M_z(x)$ este o parabolă, iar $T_y(x)$ o dreaptă. Valorile funcției $M_z(x)$ la capetele intervalului sunt $M_z(x) = 0$ și $M_z(L) = 0$. Se studiază punctul de extrem al funcției $M_z(x)$ anulând prima derivată, $T_y(x)$. Forța tăietoare T_y se anulează la mijlocul grinzii, acolo unde momentul $M_z(x)$ are un punct de maxim. Se calculează valoarea momentului încovoietor maxim:

$$M_z\left(\frac{L}{2}\right) = M_{z.\max} = q \frac{L^2}{8} \quad (7.62)$$

Concavitătea parabolei va fi îndreptată în sus (*săgețile forței distribuite q "intră" în concavitate*). Același lucru poate fi stabilit cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea.

Exemplul 7.7

Se trasează diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată, încărcată cu o forță liniar distribuită, ca în *figura 7.27*.

Se calculează reacțiunile din ecuațiile de echilibru (*fig. 7.27b*)

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Rightarrow H_1 = 0; \quad \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - \frac{qL}{2} = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 &\Rightarrow V_2 L - \frac{qL}{2} \cdot \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{qL}{3} \\ \sum M_{(2)} = 0 &\Rightarrow V_1 L - \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{qL}{6} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Valorile reacțiunilor V_1 și V_2 verifică ecuația de proiecție a forțelor pe axa Oy.

Din asemănarea triunghiurilor rezultă intensitatea încărcării $q(x)$

$$\frac{q}{L} = \frac{q(x)}{x} \Rightarrow q(x) = \frac{q}{L} x \quad (7.64)$$

Se izolează porțiunea de grindă de lungime x . Se recomandă să se izoleze porțiunea de grindă pe care forța distribuită este reprezentată sub forma unui triunghi, nu a unui trapez, deoarece în acest caz expresia eforturilor este mai simplă.

Tab. 7.6. Eforturi în grinda din figura 7.27

Reg.	Interval	$M_z(x)$	$T_y(x)$
1-2	$x \in [0, L]$	$M_z(x) = V_1 x - \frac{q(x)x}{2} \cdot \frac{x}{3}$	$T_y(x) = -V_1 + \frac{q(x)x}{2}$

Înlocuind V_1 și $q(x)$ în funcțiile eforturilor din *tabelul 7.6* rezultă

$$M_z(x) = \frac{qL}{6}x - \frac{q}{6L}x^3; \quad T_y(x) = \frac{qL}{6} + \frac{q}{2L}x^2 \quad (7.65)$$

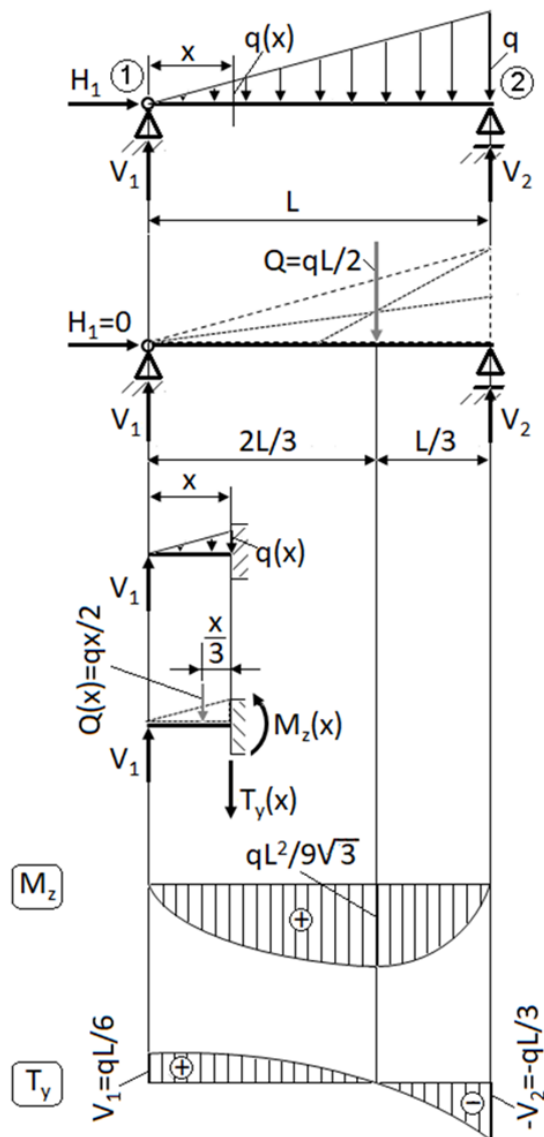


Fig. 7.27. Grindă încărcată cu forță liniar distribuită

Momentul încovoietor $M_z(x)$ este o funcție polinomială de gradul al treilea. Se calculează valorile funcției la capetele intervalului: $M_z(x) = 0$ și $M_z(L) = 0$. Funcția $M_z(x)$ are un punct de extrem în secțiunea în care se anulează $T_y(x)$

$$M'_z(x) = T_y(x) = -\frac{qL}{6} + \frac{q}{2L}x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0,577L \quad (7.66)$$

Se calculează momentul maxim introducând valoarea lui x în (7.65):

$$M_z\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = M_{z,\max} = \frac{qL}{6} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6L} \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{qL^2}{9\sqrt{3}} \quad (7.67)$$

Concavitățile parabolei este îndreptată în sens contrar sarcinii q , adică în sus. Forța tăietoare $T_y(x)$ este o parabolă de gradul al doilea. Valorile funcției la capetele intervalului vor fi $T_y(0) = -qL/6 = -V_1$ și $T_y(L) = qL/3 = V_2$. Se anulează derivata întâi pentru determinarea punctului de extrem

$$T'_y = \frac{qx}{L} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (7.68)$$

Valoarea funcției $T_y(x)$ pentru $x=0$ a fost calculată mai sus.

Exemplul 7.8

Se vor trasa diagramele de eforturi la grinda în consolă din *figura 7.28*.

Pentru calculul reacțiunilor forța distribuită poate fi înlocuită cu una concentrată static echivalentă, egală în modul cu suprafața trapezului și traversând centrul său de greutate. Sau forța distribuită poate fi descompusă într-una uniform distribuită, cu intensitatea q_1 și una liniar distribuită, cu intensitatea maximă $q_2 - q_1$. Ținând cont de (7.58), se scrie intensitatea forței liniar distribuite în secțiunea x

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{L}x \quad (7.69)$$

Astfel este convenabil să se utilizeze eforturile calculate la exemplele 7.6 și 7.7, adaptate pentru cazul de față, ca în *tabelul 7.7*.

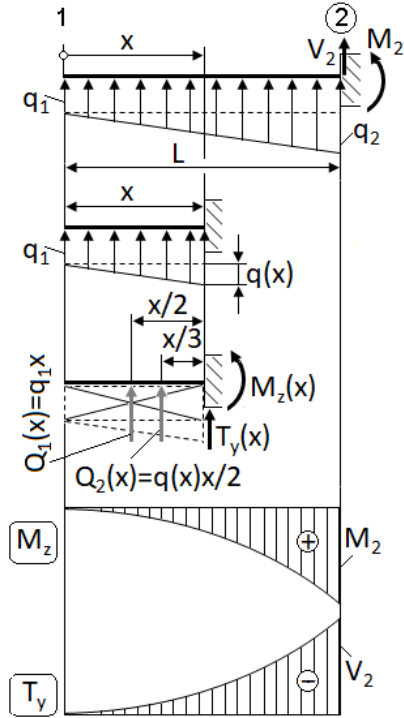


Fig. 7.28. Grindă în consolă încărcată cu forță liniar (trapezoidal) distribuită

Tab. 7.7. Eforturi în grinda din figura 7.28

Interval	$M_z(x)$	$T_y(x)$
$x \in [0, L]$	$M_z(x) = \frac{q_1 x^2}{2} - \frac{q(x)x}{2} \cdot \frac{x}{3}$	$T_y(x) = -q_1 x - \frac{q(x)x}{2}$

Înlocuind (7.69) în expresiile eforturilor din tabelul 7.7 se obține

$$M_z(x) = \frac{q_1}{2} x^2 + \frac{q_2 - q_1}{6L} x^3; \quad T_y(x) = -q_1 x - \frac{q_2 - q_1}{2L} x^2 \quad (7.70)$$

Cu ajutorul derivatelor de ordinul întâi și al doilea se arată că ambele funcții (7.70) nu au un punct de extrem pe intervalul studiat și concavitățile lor sunt orientate ca în figura 7.28, în care

$$M_2 = (2q_1 + q_2) \frac{L^2}{6}; \quad V_2 = -\frac{q_1 + q_2}{2} \cdot L \quad (7.71)$$

Exemplul 7.9

Se trasează diagramele de eforturi pentru grinda încărcată cu o forță distribuită parabolic, ca în *figura 7.29*.

Se determină ecuația parabolei care trece prin punctele 1 și 2 și are un punct de extrem de intensitate q la $x = L/2$. Cu notațiile din *figura 7.29*, ecuația generală a parabolei este

$$q(x) = ax^2 + bx + c \quad (7.72)$$

Se pun condițiile ca parabola să treacă prin punctele 1 și 2, iar forța distribuită să aibă intensitatea q la $x=L/2$

$$\begin{aligned} q(0) = c = 0; \quad q(L) = aL^2 + bL = 0; \quad q\left(\frac{L}{2}\right) = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) = q \\ \Rightarrow a = -\frac{4q}{L^2}; \quad b = \frac{4q}{L} \end{aligned} \quad (7.73)$$

În secțiunea curentă x intensitatea forței distribuite este

$$q(x) = -\frac{4q}{L^2}x^2 + \frac{4q}{L}x = 4\frac{qx}{L^2}(L-x) \quad (7.74)$$

Datorită simetriei, reacțiunile vor fi egale cu jumătate din încărcarea pe verticală. Sarcina concentrată static echivalentă Q este numeric egală cu suprafața segmentului de parabolă cuprins între curba $q(x)$ și axa grinzii

$$Q = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L 4\frac{qx}{L^2}(L-x) dx \Rightarrow Q = \frac{2}{3}qL \quad (7.75)$$

Se observă că suprafața segmentului de parabolă este egală cu $2/3$ din suprafața dreptunghiului circumscris. Reacțiunile sunt calculate din simetrie

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{2} \Rightarrow V_1 = V_2 = \frac{ql}{3} \quad (7.76)$$

Eforturile sunt prezentate în tabelul 7.8. Pentru forța distribuită se folosesc relațiile (1.25) și (1.27).

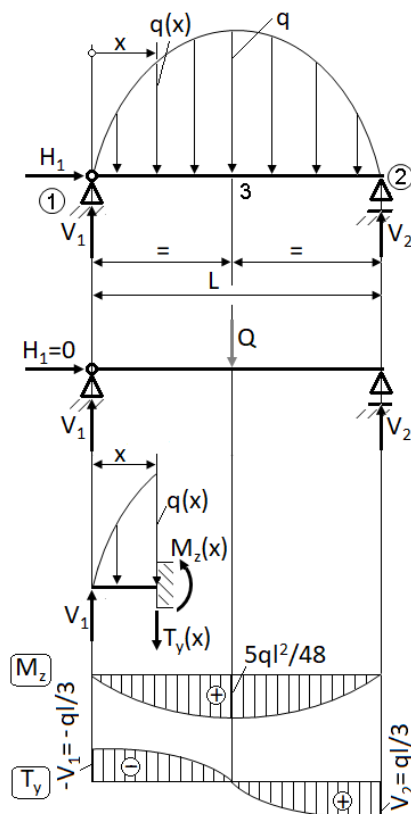


Fig. 7.29. Grindă încărcată cu o forță distribuită parabolic și diagramele de eforturi

Tab. 7.8. Eforturi în grinda din figura 7.29

Interval	$M_z(x)$	$T_y(x)$
$x \in [0, L]$	$M_z(x) = V_1 x - \int_0^x q(t)(x-t)dt$	$T_y(x) = -V_1 + \int_0^x q(t)dt$

Înlocuind (7.74) și (7.76) în expresiile eforturilor, rezultă

$$\begin{aligned}
 M_z(x) &= \frac{qL}{3}x - \frac{4q}{L^2} \int_0^x t(L-t)(x-t)dt = \frac{qL}{3}x - \frac{4qx^3}{6L^2} \left(L - \frac{x}{2} \right) \\
 T_y(x) &= -\frac{qL}{3} + \frac{4q}{L^2} \int_0^x t(L-t)dt = -\frac{qL}{3} + \frac{4q}{L^2} x^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{x}{3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{7.77}$$

Funcțiile $M_z(x)$ și $T_y(x)$ sunt reprezentate grafic în figura 7.29.

Exemplul 7.10

Să se traseze diagramele de efort la grinda din *figura 7.30*, știind că $L=400\text{mm}$, $F = 4 \text{ kN}$, $q_1 = 20 \text{ N/mm}$, $q_2 = 95 \text{ N/mm}$.

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 și V_2 , care se calculează din ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i = 0 &\Rightarrow H_1 = 0; \quad \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - q_1 \cdot 2L - q_2 \cdot 3L - F = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 &\Rightarrow q_1 \cdot 2L \cdot 4L + F \cdot 4L - V_2 \cdot 3L + q_2 \cdot 3L \cdot \frac{3L}{2} = 0 \\ \sum M_{(2)} = 0 &\Rightarrow V_1 \cdot 3L - q_2 \cdot 3L \cdot \frac{3L}{2} + q_1 \cdot 2L \cdot L + FL = 0\end{aligned}\quad (7.78)$$

Din (7.78) rezultă reacțiunile

$$V_1 = \left(\frac{3}{2}q_2 - \frac{2}{3}q_1 \right)L - \frac{1}{3}F; \quad V_2 = \left(\frac{8}{3}q_1 + \frac{3}{2}q_2 \right)L + \frac{4}{3}F \quad (7.79)$$

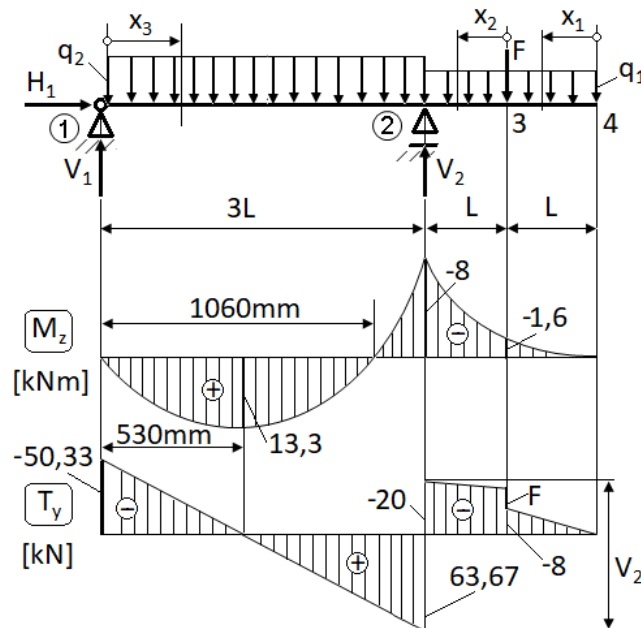


Fig. 7.30. Trasarea diagramelor de eforturi la o grindă rezemată, având o consolă

Aceste reacțiuni verifica ecuația $\sum Y_i = 0$ din (7.78), deci sunt corecte. Înlocuind valorile numerice se obține

$$V_1 \approx 55,33kN; \quad V_2 \approx 83,67kN \quad (7.80)$$

Se fac secțiuni prin cele trei regiuni și se scriu eforturile în *tabelul 7.9*.

Tab. 7.9. Eforturi în grinda din figura 7.30

Reg.	Interval	$M_z(x_i)$	$T_y(x_i)$
3-4	$x_1 \in [0, L]$	$M_z(x_1) = -\frac{q_1 x_1^2}{2}$	$T_y(x_1) = -q_1 x_1$
2-3	$x_2 \in [0, L]$	$M_z(x_2) = -\frac{q_1(L + x_2)^2}{2} - Fx_2$	$T_y(x_2) = -q_1(L + x_2) - F$
1-2	$x_3 \in [0, 3L]$	$M_z(x_3) = V_1 x_3 - \frac{q_2 x_3^2}{2}$	$T_y(x_3) = -V_1 + q_2 x_3$

Diagramele $M_z(x)$ și $T_y(x)$ sunt prezentate în *figura 7.30*. Grinzile lungi cu secțiune masivă se dimensionează cu formula lui *Navier*, neglijând influența forțelor tăietoare. La grinzile cu secțiune constantă pe toată lungimea, secțiunea periculoasă este cea în care momentul M_z are valoarea maximă în modul.

7.8. CALCULUL DEPLASĂRILOR LA ÎNCOVOIERE

7.8.1. Definirea deplasărilor

Dacă se raportează axa neutră a grinzii la sistemul de referință ortogonal xyz , cu axa Ox în lungul barei, starea deformată dintr-o secțiune oarecare este caracterizată de următoarele mărimi geometrice (*fig. 7.31*):

- *Săgeata* v reprezintă deplasarea centrului de greutate al secțiunii transversale pe direcția axei Oy ;
- *Rotirea* φ a secțiunii transversale;
- *Deplasarea* u pe direcția axei Ox ;
- *Raza de curbură* ρ a fibrei medii deformată, sau *curbura* $1/\rho$.

Deoarece între deplasări există relația $u \ll v$, de obicei u se neglijează.

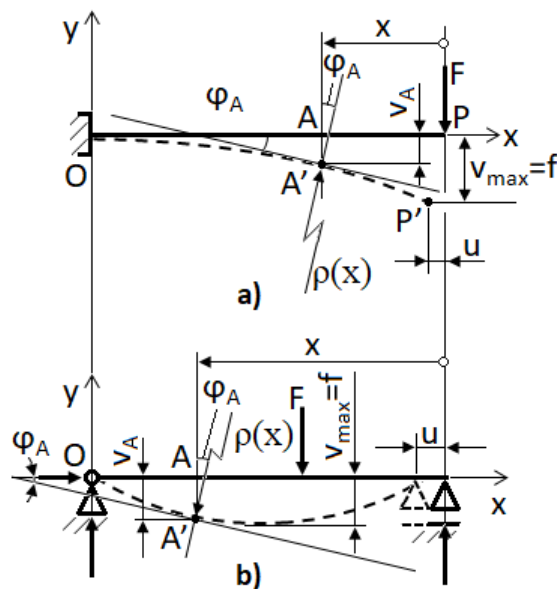


Fig. 7.31. Deplasări la o grindă în consolă (a) și la una rezemată (b)

7.8.2. Ecuația axei neutre deformate (Euler)

Pentru încovoiere în domeniul elastic influența deplasărilor asupra poziției încărcărilor și deplasarea u pot fi neglijate. Din (7.6) și (7.9) rezultă curbura

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (7.81)$$

Semnul (-) se introduce dacă momentul încovoietor și curbura au semne diferite în sistemul de referință adoptat (fig. 7.32): curbura este pozitivă dacă concavitatea este îndreptată spre valorile pozitive ale axei ordonatei.

Săgeata maximă se notează $v_{\max} = f$. Pentru grinzi din materiale metalice deformațiile elastice sunt mici: $v \approx 1/1000 \div 1/250$ din deschiderea grinzii, iar $\varphi < 1^\circ$. În aceste condiții se poate scrie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} \approx \varphi \quad (7.82)$$

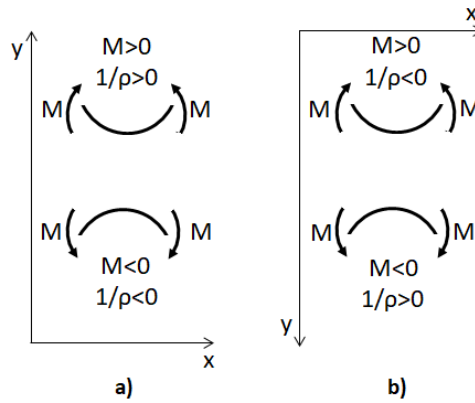


Fig. 7.32. Regula de semn pentru momentul încovoietor și curbura în diverse sisteme de referință

Din geometria diferențială se cunoaște expresia curburii [Bia C. ș.a., 1983]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.83)$$

unde y s-a notat cu v (deplasarea pe direcția axei Oy).

În cazul deformațiilor elastice mici, este îndeplinită condiția

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \ll 1 \quad (7.84)$$

Neglijând membrul stâng al inegalității (7.84) în raport cu 1, (7.83) devine

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.85)$$

Din (7.81) și (7.84) rezultă *ecuația diferențială a axei neutre deformate*, care a fost dedusă de către *Euler*

$$\frac{d^2v}{dx^2} \approx -\frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (7.86)$$

Integrând această ecuație se obțin săgețile și rotațiile, ținând cont de (7.82).

Metoda integrării analitice (Euler)

Relația (7.86) poate fi scrisă sub forma

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z(x) \quad (7.87)$$

Integrând de două ori (7.87) și ținând cont de (7.82) se obține

$$\begin{aligned} EI_z \frac{dv}{dx} &\approx EI_z \varphi(x) = -\int M_z(x) dx + C_1 \\ EI_z v(x) &= -\int dx \int M_z(x) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (7.88)$$

Prima ecuație (7.88) dă rotirea în secțiunea x și este numită *ecuația rotirilor*. A doua ecuație (7.88), dă săgeata în secțiunea x și este numită *ecuația săgeților*. Constantele de integrare se determină din condiții de rezemare și de continuitate. Reazemele fiind considerate perfect rigide, condițiile de rezemare sunt următoarele:

- Într-o încastrare săgețile și rotirile sunt nule;
- Într-un reazem simplu sau într-o articulație săgeata este nulă ($v=0$).

Condițiile de continuitate a deplasărilor se pun în secțiunile de la granița dintre două regiuni ale grinzii. Astfel, în secțiunea i se poate scrie, pentru deplasările din imediata vecinătate stânga și dreapta

$$\varphi_i^{st} = \varphi_i^{dr}; \quad v_i^{st} = v_i^{dr} \quad (7.89)$$

Pentru fiecare secțiune dintre două regiuni pot fi puse două condiții de continuitate.

Din a doua ecuație (7.88) se observă că, în urma integrării ecuației diferențiale (7.87), se obțin câte două constante de integrare pentru fiecare regiune a grinzii, deoarece funcția $M_z(x)$ este valabilă pentru o regiune. Astfel, pentru o grindă cu n regiuni se vor obține $2n$ constante de integrare. Pentru aflarea acestora se pot pune, de exemplu, două condiții de rezemare și $2(n-1)$ condiții de continuitate în cele $n-1$ secțiuni dintre regiuni. Rezultă un sistem compatibil, cu $2n$ ecuații și $2n$ necunoscute. Formarea și rezolvarea

acestui sistem sunt extrem de laborioase. Deoarece există și metode mai rapide pentru integrarea ecuației (7.87), precum și alte metode de determinare a deformațiilor la încovoiere, metoda integrării analitice (*Euler*) este de obicei aplicată doar în cazul grinzilor cu o singură regiune.

Aplicația 7.1

Să se dimensioneze grinda în consolă din *figura 7.33*, știind că $L = 600$ mm, $F = 30$ kN, $\sigma_a = 190$ MPa. Să se determine apoi ecuație axei neutre deformată și cea a rotirilor, precum și săgeata și rotirea maximă. Grinda este confecționată din oțel ($E = 210$ GPa).

Pentru rezolvare se parcurg etapele de mai jos:

1. *Calculul reacțiunilor.* În cazul grinzilor în consolă, făcând secțiuni numai dinspre capătul liber, poate fi evitată această etapă. La diagramele de eforturi, în încastrare se regăsesc valorile reacțiunilor.

2. *Trasarea diagramelor de eforturi.* Pentru grinda studiată eforturile sunt

$$M_z(x) = -Fx; \quad T_y(x) = -F; \quad x \in [0, L] \quad (7.90)$$

3. *Dimensionare.* Se face dimensionarea în secțiunea periculoasă, cea în care tensiunile normale sunt maxime în modul. Dimensionarea se face cu formula lui *Navier*, punând condiția ca tensiunile normale maxime în modul să nu depășească tensiunea admisibilă (7.14). Formula lui *Navier* (7.15) poate fi particularizată

$$\sigma_x(x, y) = \frac{|M_z(x)| \cdot y}{I_z} = \frac{|-Fx| \cdot y}{I_z} \quad (7.91)$$

Într-o secțiune x , tensiunea maximă în modul se obține în încastrare, pentru $x = L$ și $y_{\max} = d/2$

$$\sigma_{x, \max} = \frac{|-FL| \cdot \frac{d}{2}}{I_z} = \frac{FL}{W_z} \leq \sigma_a \quad (7.92)$$

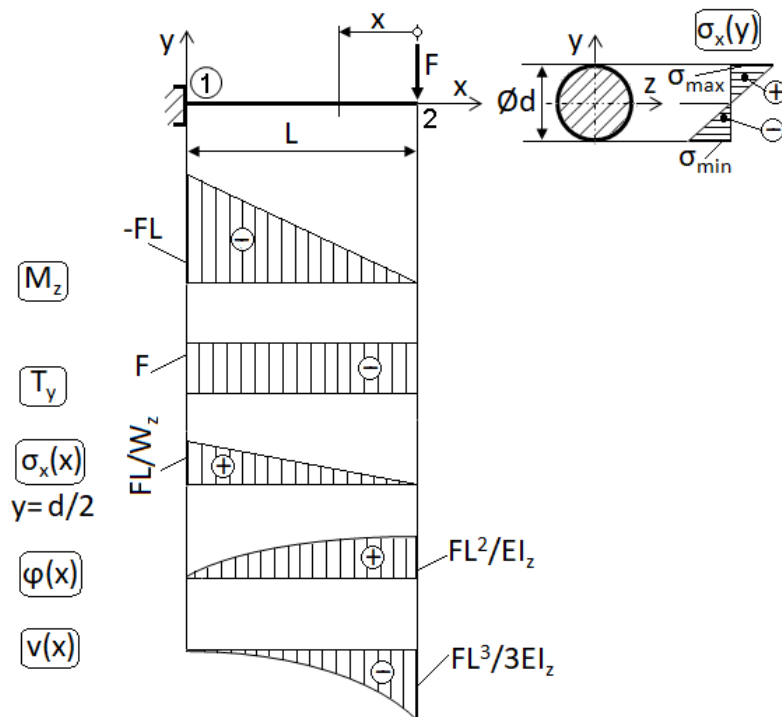


Fig. 7.33. Trasarea diagramelor de eforturi, tensiuni și deplasări, la o grindă în consolă

Pentru o secțiune circulară modulul de rezistență este (Anexa 1):

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad (7.93)$$

Din (7.92) și (7.93) rezultă

$$\sigma_{x.\max} = \frac{32 \cdot FL}{\pi d^3} \leq \sigma_a \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot FL}{\pi \sigma_a}} \quad (7.94)$$

Înlocuind valorile numerice și ținând cont de [STAS 75-90] pentru adoptarea diametrului, se obține

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 600}{\pi \cdot 190}} \Rightarrow d \geq 98,8 \text{ mm} \Rightarrow d_{ad} = 100 \text{ mm} \quad (7.95)$$

Particularizând relația (7.36) se determină tensiunea tangențială maximă

$$\tau_{xy, \max} = \frac{4}{3} \frac{|T_y|}{A} = \frac{16}{3} \frac{F}{\pi d^2} \quad (7.96)$$

Cu (7.94) și (7.96) se determină raportul tensiunilor normale și tangențiale maxime

$$\frac{\sigma_{x, \max}}{\tau_{xy, \max}} = \frac{32 \cdot FL}{\pi d^3} \cdot \frac{3\pi d^2}{16F} \Rightarrow \frac{\sigma_{x, \max}}{\tau_{xy, \max}} = 6 \frac{L}{d} \quad (7.97)$$

În cazul grinzilor lungi $L/d \gg 1$ și deci $\sigma_{x, \max} \gg \tau_{xy, \max}$. Pentru cazul studiat, $\sigma_{x, \max}/\tau_{xy, \max} = 36$. Aceste rezultate justifică dimensionarea grinzilor lungi și masive numai pe baza tensiunii normale maxime. Din (7.91) rezultă că tensiunea normală $\sigma_x(x)$ are o variație liniară, la fel ca $M_z(x)$. În secțiunea curentă x , tensiunea normală atinge valoarea maximă/minimă în modul în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră Oz , respectiv pentru $y = \pm d/2$, vezi diagramele $\sigma_x(x)$ și $\sigma_x(y)$ din figura 7.33.

4. *Calculul deplasărilor.* Pentru calculul deplasărilor se va folosi metoda lui Euler. Ținând cont de faptul că momentul și curbura au același semn (fig. 7.32), ecuația diferențială a axei neutre deformate (7.86) poate fi scrisă

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -F \cdot x \quad (7.98)$$

Integrând (7.98) se obține *ecuația rotirilor*

$$\begin{aligned} EI_z \frac{dv}{dx} &= \int (-F \cdot x) \cdot dx + C_1 = -\frac{Fx^2}{2} + C_1 \\ \frac{dv}{dx} &\approx \varphi \Rightarrow EI_z \varphi(x) \approx -\frac{Fx^2}{2} + C_1 \end{aligned} \quad (7.99)$$

Integrând a doua oară, rezultă *ecuația săgeților*, sau *ecuația axei neutre deformate*

$$EI_z v(x) = -\int \frac{Fx^2}{2} dx + C_1 x + C_2 \Rightarrow EI_z v(x) = -\frac{Fx^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (7.100)$$

Constantele de integrare pot fi determinate din condițiile de rezemare. Deoarece în încastrare ($x=L$) deplasările sunt nule, se poate scrie

$$\begin{aligned}\varphi(L) &= \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{FL^2}{2} + C_1 \right) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{FL^2}{2} \\ v(L) &= \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{FL^3}{6} + \frac{FL^2}{2} L + C_2 \right) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{FL^3}{3}\end{aligned}\quad (7.101)$$

Înlocuind valorile constantelor C_1 și C_2 în (7.99) și (7.100), rezultă

$$\varphi(x) = -\frac{F}{2EI_z} (x^2 - L^2); \quad v(x) = -\frac{F}{EI_z} \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{L^2}{2} x + \frac{L^3}{3} \right) \quad (7.102)$$

Funcțiile $\varphi(x)$ și $v(x)$ sunt prezentate grafic în *figura 7.33*. Deplasările la capătul liber al grinzii 2 au valorile

$$\varphi_2 = \varphi(0) = \frac{FL^2}{2EI_z}; \quad v_2 = v(0) = f = -\frac{FL^3}{3EI_z} \quad (7.103)$$

Din (7.99) și (7.100), pentru $x = 0$ se obține

$$\varphi(0) = \frac{C_1}{EI_z}; \quad v(0) = \frac{C_2}{EI_z} \quad (7.104)$$

Se observă că C_1/EI_z reprezintă rotirea, iar C_2/EI_z săgeata, ambele calculate în originea secțiunii. Săgețile negative sunt îndreptate în sens contrar axei Oy , adică în jos. Diagrama $v(x)$ ilustrează axa geometrică deformată.

Metoda de integrare Clebsch

Metoda integrării analitice (*Euler*) a ecuației diferențiale a axei neutre deformată prezintă dificultăți considerabile în cazul grinzilor cu multe regiuni, care constau în determinarea constantelor de integrare (câte două pentru fiecare regiune). Prin aplicarea metodei de integrare *Clebsch* se obțin cel mult două constante de integrare, indiferent de numărul regiunilor grinzii. Este însă necesar să se respecte cu rigurozitate anumite condiții, care vor fi enunțate în cele ce urmează.

Fie o grindă cu n regiuni, notate $[0,1], [1,2], \dots, [n-1,n]$. Se alege un sistem de axe cu originea într-un capăt al grinzii. Toate cotele se dau în funcție de origine (fig. 7.34) și $EI_z = \text{constant}$ pe toată lungimea grinzii. Toate secțiunile au originea în O . Aplicând metoda de integrare Euler a axei neutre deformată, se obțin $2n$ constante de integrare (câte două pentru fiecare regiune a grinzii, $C_{0,1}$ și $D_{0,1}$ pentru regiunea 0-1 etc.).

$$C_{0,1}, \dots, C_{n-1,n}, D_{0,1}, \dots, D_{n-1,n} \quad (7.105)$$

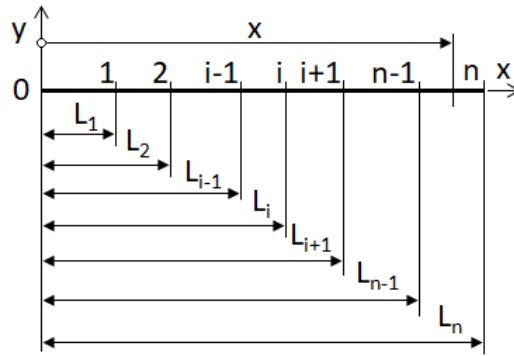


Fig. 7.34. Alegerea sistemului de referință și modul de cotare pentru aplicarea metodei de integrare Clebsch (nu sunt figurate reazemele și încărcările)

Se admite ipoteza că în orice regiune se poate scrie

$$M_{i,i+1} = M_{i-1,i} + k_i (x - L_i)^{n_i} \quad (7.106)$$

unde $M_{(i-1),i}$ și $M_{i,(i+1)}$ sunt momentele încovoietoare în regiunile consecutive $[(i-1),i]$ și respectiv $[i,(i+1)]$, iar k_i și n_i sunt constante.

Integrarea se face folosind următoarea convenție

$$\int (x - L_i)^{n_i} dx = \frac{(x - L_i)^{n_i+1}}{n_i + 1} + C \quad (7.107)$$

Pentru regiunile consecutive $[(i-1),i]$ și $[i,(i+1)]$ se scriu ecuațiile rotirilor și săgeților ca în tabelul 7.10.

Pentru determinarea celor $2n$ constante de integrare se pun condițiile de continuitate (7.89). În secțiunea i se poate scrie pentru $x=L_i$

$$x = L_i; \quad \varphi_{i-1,i}(L_i) = \varphi_{i,i+1}(L_i); \quad v_{i-1,i}(L_i) = v_{i,i+1}(L_i) \quad (7.108)$$

Înlocuind expresiile din *tabelul 7.10* în relațiile (7.108), se obține

$$\int_0^{L_i} M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} = \int_0^{L_i} M_{i,i+1} dx + C_{i,i+1} \quad (7.109)$$

$$\int_0^{L_i} dx \int M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} L_i + D_{i-1,i} = \int_0^{L_i} dx \int M_{i,i+1} dx + C_{i,i+1} L_i + D_{i,i+1} \quad (7.110)$$

Din (7.109) și (7.110) rezultă

$$C_{i-1,i} = C_{i,i+1} = C; \quad D_{i-1,i} = D_{i,i+1} = D \quad (7.111)$$

Se obțin astfel numai două constante de integrare, C și D , indiferent de numărul regiunilor grinzii. Acesta este un mare avantaj al metodei.

Tab. 7.10. Ecuațiile rotirilor și săgeților pentru două regiuni consecutive (fig. 7.34)

Ecuația	Regiunea $[i-1,i]$	Regiunea $[i,i+1]$
Ecuția diferențială a axei neutre deformată	$EI_z \frac{d^2 v_{i-1,i}}{dx^2} = M_{i-1,i}$	$EI_z \frac{d^2 v_{i,i+1}}{dx^2} = M_{i,i+1} \Rightarrow$ $EI_z \frac{d^2 v_{i,i+1}}{dx^2} = M_{i-1,i} + k_i (x - L_i)^{n_i}$
Ecuția rotirilor	$EI_z \varphi_{i-1,i} =$ $= \int M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i}$	$EI_z \varphi_{i,i+1} =$ $= \int M_{i-1,i} dx + k_i \frac{(x - L_i)^{n_i+1}}{n_i + 1} + C_{i,i+1}$
Ecuția săgeților	$EI_z v_{i-1,i} = \int dx \int M_{i-1,i} dx +$ $+ C_{i-1,i} \cdot x + D_{i-1,i}$	$EI_z v_{i,i+1} = \int dx \int M_{i-1,i} dx +$ $k_i \frac{(x - L_i)^{n_i+2}}{(n_i + 1)(n_i + 2)} + C_{i,i+1} x + D_{i,i+1}$

Rezultă că toate constantele C și respectiv D sunt egale între ele și astfel numărul de constante se reduce la două. La fel ca la metoda de integrare *Euler*, cele două constante împărțite la EI_z reprezintă rotirea și respectiv săgeata în origine

$$\varphi_{0,1}(0) = \varphi_0 = \frac{C}{EI_z}; \quad v_{0,1}(0) = v_0 = \frac{D}{EI_z} \quad (7.112)$$

Pentru determinarea celor două constante C și D se pun condițiile de rezemare: în încastrare $\varphi = v = 0$, în rezemare sau articulație $v = 0$.

Observații:

- *Respectarea condițiilor din relațiile (7.106) și (7.107) este esențială pentru reușita aplicării metodei. În mod special condiția (7.106) este uneori dificil de îndeplinit și se fac artificii pentru formarea binoamelor $(x-L_i)$;*
- *Datorită relației (7.106), din expresia momentului $M_{n-1,n}$ scris pentru ultima regiune $[n-1,n]$, se pot obține expresiile momentelor încovoietoare din toate celelalte regiuni, dacă se reține numărul corespunzător de termeni. În aceste condiții se poate scrie momentul încovoietor numai în secțiunea x , făcută prin ultima regiune a grinzii (fig. 7.34).*

Exemplul 7.11

Se calculează deplasările grinzii din *figura 7.35a* cu metoda de integrare *Clebsch*.

Se alege originea sistemului în capătul din stânga a grinzii și se face secțiunea x prin ultima regiune a grinzii. Se scrie momentul încovoietor în secțiunea x , respectând condiția dată de (7.106).

Pentru a putea forma binoame de forma $(x-L_i)$, momentele concentrate vor fi înmulțite cu binomul la puterea zero. Încărcările distribuite trebuie să acționeze până în secțiune, pentru a putea forma binoamele. În caz contrar, ele pot fi prelungite până în secțiune, adăugându-le și scăzându-le pe aceeași porțiune de grindă (*fig. 7.35b*).

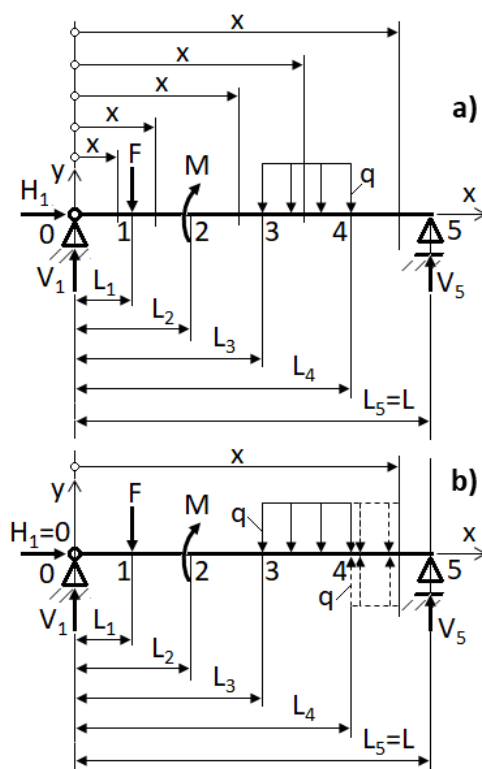


Fig. 7.35. Aplicarea metodei Clebsch: grindă de secțiune constantă (a) și prelungirea încărcării până în secțiune (b)

Pentru rezolvare se parcurg etapele de mai jos:

1. *Momentul încovoietor*. Se scrie momentul în ultima regiune (fig. 7.35b):

$$M_z(x) = V_1 x - F(x - L_1) + M(x - L_2)^0 - \frac{q(x - L_3)^2}{2} + \frac{q(x - L_4)^2}{2} \quad (7.113)$$

Se observă că toți termenii din expresia momentului (7.113) conțin binomul $x - L_i$, unde L_i este lungimea regiunilor anterioare. Primul termen, caracteristic primei regiuni (0-1), conține de fapt binomul $x - 0$, deoarece $L_i = 0$ este lungimea regiunilor anterioare. Momentul încovoietor astfel scris (7.113) conține momentele din toate regiunile anterioare (tab. 7.11).

Tab. 7.11. Metoda Clebsch: momentul din ultima regiune
conține momentele din regiunile anterioare

Reg.	Interval	$M_z(x)$
0-1	$x \in [0, L_1]$	$V_1 x$
1-2	$x \in [L_1, L_2]$	$V_1 x - F(x - L_1)$
2-3	$x \in [L_2, L_3]$	$V_1 x - F(x - L_1) + M(x - L_2)^0$
3-4	$x \in [L_3, L_4]$	$V_1 x - F(x - L_1) + M(x - L_2)^0 - \frac{q(x - L_3)^2}{2}$
4-5	$x \in [L_4, L]$	Vezi (7.113)

2. Ecuația diferențială a axei deformată

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = V_1 x - F(x - L_1) + M(x - L_2)^0 - \frac{q(x - L_3)^2}{2} + \frac{q(x - L_4)^2}{2} \quad (7.114)$$

3. Integrarea ecuației diferențiale. Integrând și respectând condiția (7.107), se obține ecuația rotirilor

$$EI_z \frac{dv}{dx} \approx EI_z \varphi(x) = V_1 \frac{x^2}{2} - F \frac{(x - L_1)^2}{2} + M(x - L_2) - \frac{q(x - L_3)^3}{6} + \frac{q(x - L_4)^3}{6} + C \quad (7.115)$$

Integrând a doua oară, se obține ecuația săgeților

$$EI_z v(x) = V_1 \frac{x^3}{6} - F \frac{(x - L_1)^3}{6} + M \frac{(x - L_2)^2}{2} - \frac{q(x - L_3)^4}{24} + \frac{q(x - L_4)^4}{24} + Cx + D \quad (7.116)$$

4. Determinarea constantelor de integrare. Constantele de integrare se determină din condițiile de rezemare: săgețele sunt nule în reazemele 0 și 5, presupuse perfect rigide. Pentru a determina săgeata în reazemul 0, din ecuația săgeților (7.116) se extrage expresia săgeții în regiunea 0-1 și apoi se pune condiția $x = 0$:

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left(-V_1 \frac{x^3}{6} + Cx + D \right); \quad x \in [0, L_1] \quad (7.117)$$

$$x = 0, v(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

Pentru a scrie expresia săgeții pentru o regiune se rețin numai termenii caracteristici acelei regiuni, precum și termenii care conțin cele două constante de integrare. Pentru a recunoaște mai ușor termenii caracteristici unei regiuni, se poate ține cont de observația că *termenii care conțin binoamele $x-L_i < 0$ nu sunt caracteristici regiunii respective și în consecință vor fi îndepărtați din ecuația săgeților.*

Constanta D putea fi determinată și direct, ținând cont de (7.112). Săgeata în reazemul 5 este nulă și se obține din ecuația (7.116) completă, în care se înlocuiește $x = L$ și $D = 0$

$$EI_z v(L) = V_1 \frac{L^3}{6} - F \frac{(L-L_1)^3}{6} + M \frac{(L-L_2)^2}{2} - \frac{q(L-L_3)^4}{24} + \frac{q(L-L_4)^4}{24} + CL = 0 \quad (7.118)$$

Din ecuația (7.118) se determină C .

5. *Determinarea deplasărilor.* Constantele C și D astfel determinate sunt introduse în (7.115) și (7.116). Din aceste ecuații se poate determina acum rotirea și respectiv săgeata în orice secțiune a grinzii, dacă se dă valori corespunzătoare lui x și se rețin termenii caracteristici regiunii respective, adică numai acei termeni care conțin binoamele $x-L_i > 0$.

Observații:

- Aplicarea metodei de integrare *Clebsch* este avantajoasă atunci când grinda are un număr mare de regiuni;
- Metoda nu poate fi aplicată decât la încărcări distribuite care dau momente încovoietoare exprimate prin funcție polinomială (uniform sau liniar distribuite etc.). Odată cu creșterea gradului funcției crește și dificultatea formării binoamelor $x-L_i$.

7.8.3. Calculul deplasărilor prin metode energetice

Calculul deplasărilor într-o secțiune

Teoremele lui *Castigliano* și metoda *Maxwell-Mohr* pot fi utilizate pentru calculul deplasărilor într-o secțiune, așa cum s-a arătat în *Capitolul 3*. La încovoierea grinzilor lungi și masive se neglijează de obicei aportul forțelor tăietoare la energia potențială de deformare. Se va admite expresia (7.43) pentru energia potențială de deformare elastică.

Aplicația 7.2

Se cere să se determine săgeata și rotirea în secțiunea 2 a grinzii în consolă din *figura 7.36*. Se cunoaște: $L = 600\text{mm}$, $F = 30\text{kN}$, $E = 210\text{GPa}$, $d = 100\text{mm}$.

Problema de la *Aplicația 7.1* va fi reluată de la etapa a 4-a, calculul deplasărilor. Etapele anterioare trebuie să fie parcurse indiferent de metoda de calcul a deplasărilor. Grinda se încarcă succesiv, în secțiunea în care dorim să calculăm săgeata și rotirea, *numai* cu o *forță unitară* și apoi *numai* cu un *moment unitar* (*fig. 7.36*) și se scriu momentele fictive care vor fi utilizate la calculul săgeții și rotirii (*tab. 7.12*).

Tab. 7.12. Momente încovoietoare, reale și fictive, în grinda din fig. 7.36

Încărcări		Momentul încovoietor
Reale	F	$M_z(x) = -Fx$
Fictive (aplicate în 2)	$1N$	$m_{v2}(x) = -1 \cdot x = -x$
	$1Nmm$	$m_{\varphi2}(x) = -1$

Indicii momentelor fictive, notate cu m în tabelul 7.12, au următoarea semnificație:

- m_{v2} - moment utilizat pentru determinarea săgeții în secțiunea 2;
- $m_{\varphi2}$ - moment utilizat pentru determinarea rotirii în secțiunea 2.

Se determină săgeata și rotirea în secțiunea 2

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M_z(x) \cdot m_{v2}(x) \cdot dx; \quad \varphi_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M_z(x) \cdot m_{\varphi2}(x) \cdot dx \quad (7.119)$$

Înlocuind în (7.119) momentele din *tabelul 7.12*, rezultă

$$v_2 = f = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (-Fx) \cdot (-x) dx = \frac{FL^3}{3EI_z}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^L (-Fx) \cdot (-1) dx = \frac{FL^2}{2EI_z} \quad (7.120)$$

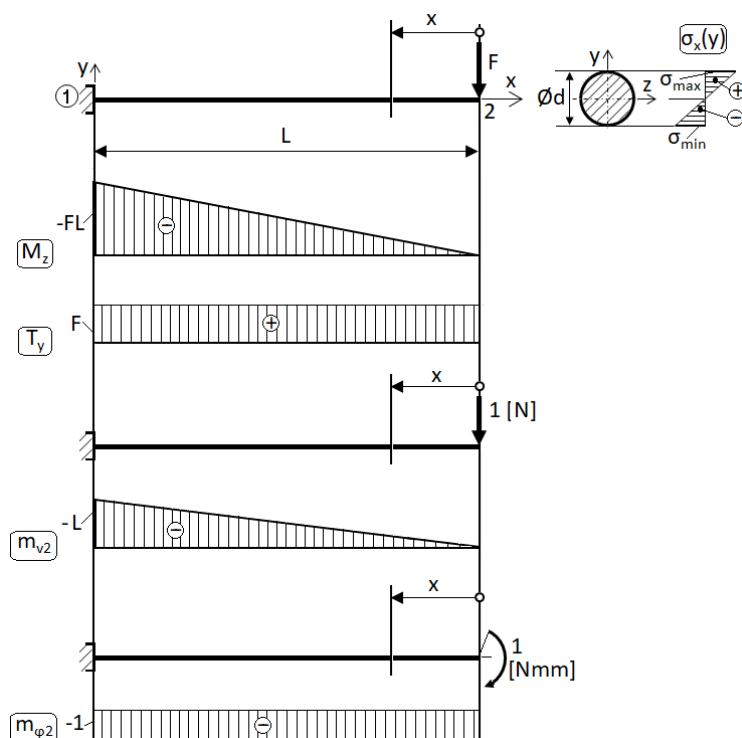


Fig. 7.36. Determinarea deplasărilor în secțiunea 2, prin metode energetice

Observații:

- Dacă săgeata calculată este pozitivă, deplasarea se face în sensul forței fictive (1N), iar dacă rotirea calculată este pozitivă, ea se face în sensul momentului fictiv (1Nmm). Sensurile încărcărilor fictive pot fi alese aleator;
- Au rezultat aceleași deplasări ca cele obținute prin integrare analitică a ecuației diferențiale a axei neutre deformate (7.103), dar semnele au semnificații diferite la cele doua metode. Înlocuind valorile numerice, se obțin deplasările $v_2 \approx 2,1 \text{ mm}$ și $\varphi_2 \approx 0,3^\circ$.

Extinderea aplicării metodelor energetice

Determinarea deplasărilor într-o regiune

Aplicând o singură dată teoremele lui *Castigliano* se calculează deplasările într-o singură secțiune a grinzii. Acest lucru reprezintă un dezavantaj comparativ cu integrarea ecuației diferențiale a axei neutre deformate (prin metoda *Euler* sau *Clebsch*), care dă deplasările într-o regiune sau chiar în toate regiunile grinzii. În cele ce urmează, se vor aplica teoremele lui *Castigliano* pentru determinarea deplasărilor într-o regiune a grinzii. Deși demonstrația de mai jos va fi făcută doar pentru bare drepte, metoda poate fi aplicată și la bare cotite (cadre) sau bare curbe [Bârsănescu P.D., 1985], ceea ce reprezintă un avantaj comparativ cu alte metode.

Fie grinda din *figura 7.33*, ale cărei deplasări au fost studiate la *Aplicația 7.1*, prin metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre deformate (*Euler*), iar deplasările din secțiunea 2 au fost calculate și prin metode energetice, la *Aplicația 7.2*.

Studiul deplasărilor *într-o regiune* va fi abordat acum prin metode energetice, aplicând încărcările unitare în secțiunea curentă x . Încărcările unitare împart grinda în două regiuni. Se fac secțiunile x_1 și x_2 prin cele două regiuni (*fig. 7.37*) și se scriu momentele încovoietoare (*tab. 7.13*). Indicii momentelor fictive (notate cu m) semnifică utilizarea lor: pentru calculul săgeții (v), respectiv pentru calculul rotirii (φ).

Tab. 7.13. Momente încovoietoare reale și fictive, pentru grinda din *fig. 7.37*

Încărcări		Momentul încovoietor
Reale	F	$M_z(x_1) = -Fx_1; \quad x_1 \in [0, x]$
		$M_z(x_2) = -Fx_2; \quad x_2 \in [x, L]$
Fictive (aplicate în secțiunea x)	$1N$	$m_v(x_1) = 0$
		$m_v(x_2) = -1(x_2 - x)$
	$1Nmm$	$m_\varphi(x_1) = 0$
		$m_\varphi(x_2) = -1$

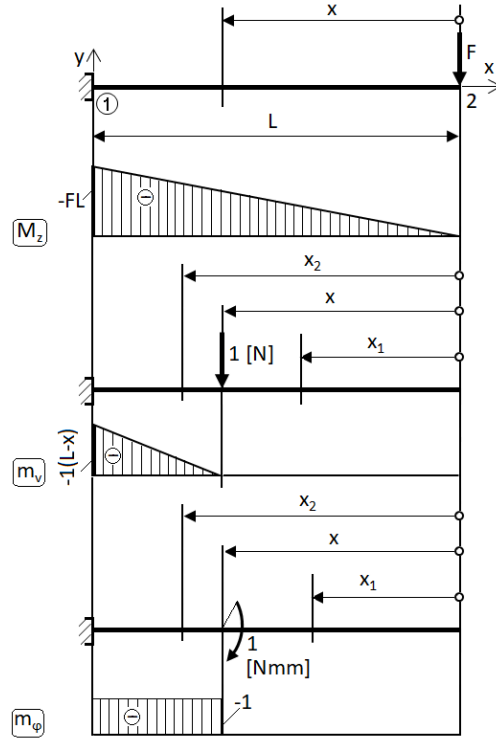


Fig. 7.37. Determinarea prin metode energetice a deplasărilor unei grinzi cu o regiune

Săgețile și rotirile în secțiunea x sunt

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^x M_z(x_1) m_v(x_1) dx_1 + \int_x^L M_z(x_2) m_v(x_2) dx_2 \right] \quad (7.121)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^x M_z(x_1) m_\varphi(x_1) dx_1 + \int_x^L M_z(x_2) m_\varphi(x_2) dx_2 \right]$$

Înlocuind momentele cu cele din *tabelul 7.13* rezultă:

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \int_x^L (-Fx_2) [-1(x_2 - x)] dx_2 = \frac{F}{EI_z} \int_x^L (x_2^2 - xx_2) dx_2 \quad (7.122)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z} \int_x^L (-Fx_2) [-1] dx_2 = \frac{F}{EI_z} \int_x^L x_2 dx_2$$

Integrând se obține

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{2}x + \frac{L^3}{3} \right) \\ \varphi(x) &= \frac{F}{2EI_z} (L^2 - x^2) \end{aligned} \quad (7.123)$$

S-au obținut aceleași expresii ale săgeții și rotirii ca cele determinate prin metoda integrării analitice (*Euler*) a ecuației diferențiale a axei neutre deformată date de (7.102). Ca urmare a regulii de semn adoptate pentru cele două metode, semnul expresiilor poate să difere, însă important este să se rețină semnificația semnelor pentru fiecare metodă.

Determinarea deplasărilor la grinzi cu mai multe regiuni

Metoda prezentată mai sus va fi adaptată la grinda cu n regiuni din *figura 7.38*, cu încărcări oarecare [Bârsănescu P.D., 1985]. La fel ca la metoda *Clebsch*, toate cotele și toate secțiunile au fost date față de origine. Încărcările unitare împart grinda în două regiuni: cea din stânga și cea din dreapta. Aceste regiuni au fost notate cu S , respectiv D . Pentru simplificare, momentul încovoietor din regiunea $[i-1, i]$ va fi notat $M_{i-1,i} = M_{(i)}$. Reacțiunile grinzii cu încărcări fictive (*fig. 7.38b,c*) pot fi calculate din ecuațiile de echilibru. Se notează cu $\Delta(t)$ *deplasarea generalizată* în secțiunea t , prin aceasta înțelegând fie *săgeata* $v(t)$, fie *rotirea* $\varphi(t)$. Se va determina săgeata și rotirea în regiunea $[j-1, j]$. Se scriu momentele în regiunea din *stânga* și respectiv din *dreapta*: forței unitare (*fig. 7.38b*) și a momentului unitar (*fig. 7.38c*), ca în *tabelul 7.14*. Deplasarea generalizată în secțiunea t este

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{L_1} M_{(1)} m_S dx + \int_{L_1}^{L_2} M_{(2)} m_S dx + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_{L_{j-1}}^t M_{(j)} m_S dx + \int_t^{L_j} M_{(j)} m_D dx + \dots + \int_{L_{n-1}}^{L_n} M_{(n)} m_D dx \right] \end{aligned} \quad (7.124)$$

unde cu $M_{(j)}$ s-a notat momentul încovoietor din regiunea j , pentru grinda cu încărcările reale.

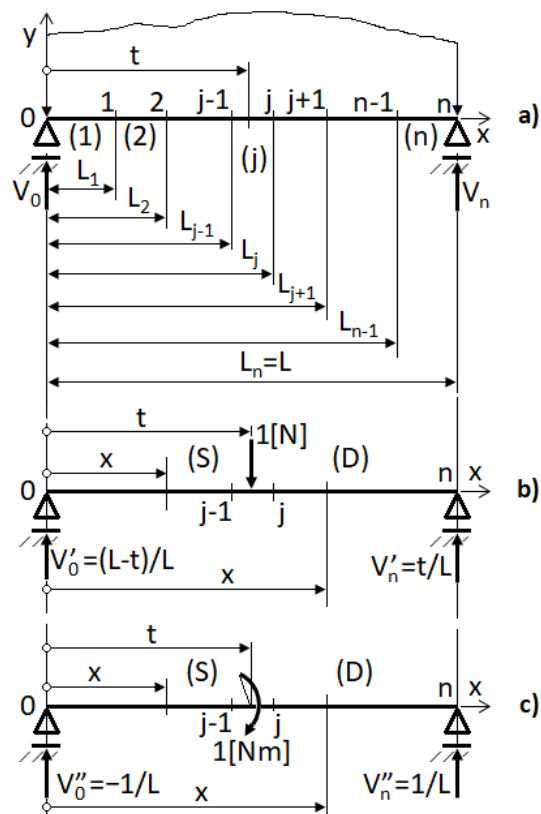


Fig. 7.38. Calculul deplasărilor într-o regiune a grinzii, prin metode energetice: grinda cu încărcările reale (a), cu forța unitară (b) și cu moment unitar (c)

Tab. 7.14. Momentele fictive pentru grinda din fig. 7.38b,c

Figura	Reg.	Interval	m	$m_S - m_D$
7.38b	S	$x \in [0, t]$	$m_S = \frac{L-t}{L}x$	$m_S - m_D = x - t$
	D	$x \in [t, L]$	$m_D = \frac{L-t}{L}x - 1 \cdot (x-t) = \frac{L-x}{L}t$	
7.38c	S	$x \in [0, t]$	$m_S = -\frac{x}{L}$	$m_S - m_D = -1$
	D	$x \in [t, L]$	$m_D = -\frac{x}{L} + 1 = \frac{L-x}{L}$	

Momentele fictive pot fi cele din *figura 7.38b* pentru calculul săgeților, respectiv cele din *figura 7.38c*, pentru calculul rotirilor (*tab. 7.14*).

Se descompun integralele, astfel încât toate să aibă limita inferioară zero și apoi se grupează cele cu aceleași limite de integrare

$$\Delta(t) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{L_1} M_{(1)} m_s dx + \int_0^{L_2} M_{(2)} m_s dx - \int_0^{L_1} M_{(2)} m_s dx + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_0^t M_{(j)} m_s dx - \int_0^{L_{j-1}} M_{(j)} m_s dx + \int_0^{L_j} M_{(j)} m_D dx - \int_0^t M_{(j)} m_D dx + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_0^{L_n} M_{(n)} m_D dx - \int_0^{L_{n-1}} M_{(n)} m_D dx \right] \quad (7.125)$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{L_1} (M_{(1)} - M_{(2)}) m_s dx + \int_0^{L_2} (M_{(2)} - M_{(3)}) m_s dx + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_0^{L_{j-1}} (M_{(j-1)} - M_{(j)}) m_s dx + \int_0^{L_j} (M_{(j)} - M_{(j+1)}) m_D dx + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_0^{L_{j+1}} (M_{(j+1)} - M_{(j+2)}) m_D dx + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_0^{L_n} (M_{(n-1)} - M_{(n)}) m_D dx + \int_0^t M_{(j)} (m_s - m_D) dx \right] \quad (7.126)$$

Relația (7.126) poate fi scrisă restrâns

$$\Delta(t) = \frac{1}{EI_z} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \int_0^{L_i} [M_{(i)} - M_{(i+1)}] m_s dx + \sum_{i=j}^n \int_0^{L_i} [M_{(i)} - M_{(i+1)}] m_D dx + \right. \\ \left. + \int_0^t M_{(j)} (m_s - m_D) dx \right\} \quad (7.127)$$

unde:

$\Delta(t)$ = deplasarea generalizată în secțiunea t , respectiv $v(t)$ sau $\varphi(t)$;

$L_n = L$, deschiderea grinzii;

$M_{(n+1)} = 0$ (convențional).

Observații:

- În (7.127), dacă se consideră $\Delta(t) = v(t)$, m_s și m_D vor fi cele pentru *figura 7.36b*, iar dacă $\Delta(t) = \varphi(t)$, m_s și m_D vor fi cele pentru *figura 7.36c (tab. 7.14)*.
- Metoda prezentată permite determinarea săgeții și rotirii în secțiunea curentă a unei regiuni oarecare a grinzii, cuprinsă între secțiunile $j-1$ și j . Ea poate fi utilizată chiar și atunci când metoda *Clebsch* este dificil de aplicat sau chiar nu poate fi aplicată: grinzi drepte cu încărcări distribuite după alte legi decât polinomiale, cadre, bare curbe [Bârsănescu P.D., 1985].
- În vederea integrării pot fi scrise direct diferențele $M_{(j)} - M_{(j+1)}$.

7.8.4. Influența forțelor tăietoare

La *Aplicația 7.2* s-a neglijat energia de deformare datorată forței tăietoare. În cele ce urmează se va calcula, utilizând prima teoremă a lui *Castigliano*, săgeata în secțiunea 2 a grinzii din *figura 7.36*, cu secțiunea transversală dreptunghiulară, cu laturile b și h . Se va considera energia totală de deformare (7.51). Se poate scrie succesiv expresia săgeții în secțiunea 2

$$v_2 = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^L \frac{M_z(x)}{EI_z} \cdot \frac{\partial M_z(x)}{\partial F} dx + k \cdot \int_0^L \frac{T_y(x)}{GA} \cdot \frac{\partial T_y(x)}{\partial F} dx \quad (7.128)$$

$$v_2 = f = \int_0^L -\frac{Fx}{EI_z} \cdot (-x) dx + k \cdot \int_0^L \frac{-F}{GA} \cdot (-1) dx = \frac{FL^3}{3EI_z} + k \frac{FL}{GA}$$

unde coeficientul k se determină cu (7.50).

În (7.128), primul termen reprezintă contribuția momentului încovoietor la săgeata capătului liber al grinzii 2 și este identic cu săgeata dată de (7.120). Al doilea termen reprezintă contribuția forței tăietoare. Expresia săgeții (7.128) poate fi rescrisă

$$v_2 = f = \frac{FL^3}{3EI_z} \left(1 + k \frac{E}{G} \cdot \frac{I_z}{A} \cdot \frac{1}{L^2} \right) \quad (7.129)$$

Pentru secțiunea dreptunghiulară, $I_z/A = h^2/12$ și $k = 6/5$. La materiale metalice $E/G \approx 5/2$, iar la lemn $E/G \approx 20$ [Anghel A., 2001]. Înlocuind aceste valori în (7.129), se obțin datele din *tabelul 7.15*.

Tab. 7.15. Săgețile în secțiunea 2 a grinzii din figura 7.36

Material	Săgeata v_2	Săgeata v_2 pentru $h/L=1/10$
Metalic	$v_2 = f \approx \frac{FL^3}{3EI_z} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]$	$v_2 = 1,0075 \frac{FL^3}{3EI_z}$
Lemn	$v_2 = f \approx \frac{FL^3}{3EI_z} \left[1 + 6 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]$	$v_2 = 1,06 \frac{FL^3}{3EI_z}$

Rezultă că neglijarea influenței forței tăietoare la o grindă în consolă, conduce la o subestimare a săgeții maxime cu 0,75% la materiale metalice și cu 6% la lemn. La grinzi lungi $h/L \leq 0,1$. În asemenea condiții, influența forței tăietoare asupra deplasărilor elastice poate fi de obicei neglijată.

7.8.5. Calculul deplasărilor la grinzi cu tronsoane

Calculul deplasărilor într-o secțiune

Pentru calculul deplasărilor grinzilor cu secțiune variabilă în trepte (cu tronsoane), metodele energetice sunt ușor de aplicat, ca în *Aplicația 7.3*.

Aplicația 7.3

Să se dimensioneze grinda din figura 7.39 și să se determine săgeata și rotirea în secțiunea 3, știind că $L=210\text{mm}$, $F=12\text{kN}$, $\sigma_a=160\text{MPa}$ și $E=2,1 \cdot 10^5\text{MPa}$.

Funcțiile eforturilor sunt aceleași pentru toată grinda. Din punct de vedere al secțiunilor transversale, pe grindă există două regiuni: [1,2] și [2,3]. Pentru fiecare regiune, momentul încovoietor maxim se obține pentru valoarea maxima a lui x (tab. 7.16).

Tab. 7.16. Eforturi și tensiuni în grinda din figura 7.39

Reg.	Limite	$M_z(x)$	I_z	W_z	σ_{max}
2-3	$x \in [0, L]$	$M_z(x) = -Fx$	$I_{z1} = \frac{\pi d_1^4}{64}$	$W_{z1} = \frac{\pi d_1^3}{32}$	$\frac{ -FL }{W_{z1}}$
1-2	$x \in [L, 2L]$		$I_{z2} = \frac{\pi d_2^4}{64}$	$W_{z2} = \frac{\pi d_2^3}{32}$	$\frac{ -F \cdot 2L }{W_{z2}}$

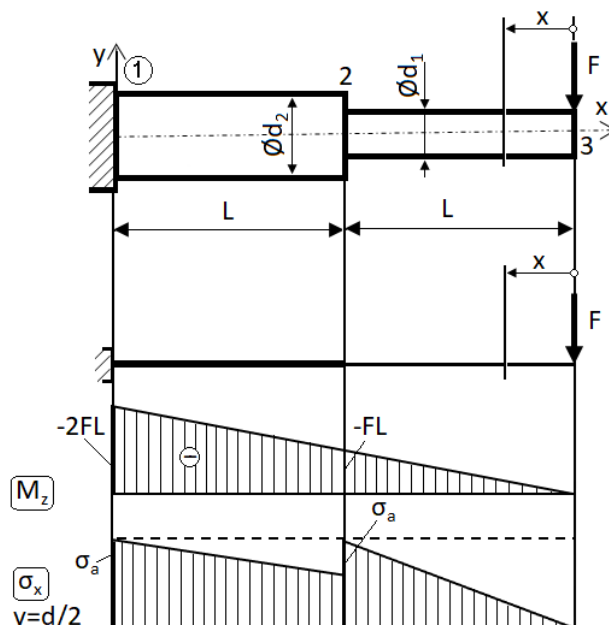


Fig. 7.39. Grindă cu tronsoane, prezentare schematică și diagramele $M_z(x)$ și $\sigma_x(x, d/2)$

Diagramele momentului încovoietor și a tensiunilor normale $\sigma_x(x, d/2)$ sunt trasate în figura 7.39. Pentru tronsonul 2-3 secțiunea periculoasă este în 2, iar pentru tronsonul 1-2 în 1. Se face dimensionarea tronsoanelor pentru aceste secțiuni, punând condiția ca tensiunile maxime pe cele două tronsoane să nu depășească tensiunea admisibilă:

$$\sigma_x(L) = \frac{M_z(L)}{W_{z1}} = \frac{32|-FL|}{\pi d_1^3} \leq \sigma_a \Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32FL}{\pi \sigma_a}}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 210}{\pi \cdot 160}} \Rightarrow d_1 \geq 54,34 \text{ mm} \Rightarrow d_{1ad} = 55 \text{ mm} \quad (7.130)$$

$$\sigma_x(2L) = \frac{M_z(2L)}{W_{z2}} = \frac{32|-2FL|}{\pi d_2^3} \leq \sigma_a \Rightarrow d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{64FL}{\pi \sigma_a}};$$

$$d_2 \geq 68,46 \text{ mm} \Rightarrow d_{2ad} = 70 \text{ mm}$$

Se determina deplasările din secțiunea 3 cu teoremele lui *Castigliano*. Pentru calculul derivatelor parțiale cu metoda *Maxwell-Mohr* se aplică în secțiunea 3 a grinzii neîncărcate forța fictivă $-1N$ și se scrie $m_{v3}(x) = -1 \cdot x = -x$.

Pentru calculul rotirilor se consideră $F = 0$ și se adaugă un moment unitar ($1Nmm$) în secțiunea 3, acționând, de exemplu, în sens invers trigonometric. Pentru această încărcare fictivă, care nu a fost prezentată în *figura 7.39*, se scrie $m_{\varphi3}(x) = -1$. Săgețile și rotirile se calculează mai jos

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_0^L M_z(x) m_{v3}(x) dx + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} M_z(x) m_{v3}(x) dx \\ \varphi_3 &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_0^L M_z(x) m_{\varphi3}(x) dx + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} M_z(x) m_{\varphi3}(x) dx \end{aligned} \quad (7.131)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_0^L (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} (-Fx)(-x) dx \\ \varphi_3 &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_0^L (-Fx)(-1) dx + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} (-Fx)(-1) dx \end{aligned} \quad (7.132)$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{FL^3}{3E} \left(\frac{1}{I_{z1}} + \frac{7}{I_{z2}} \right); \quad \varphi_3 = \frac{FL^2}{2E} \left(\frac{1}{I_{z1}} + \frac{3}{I_{z2}} \right) \quad (7.133)$$

Înlocuind momentele de inerție rezultă

$$v_3 = \frac{64}{3\pi} \frac{FL^3}{E} \left(\frac{1}{d_1^4} + \frac{7}{d_2^4} \right); \quad \varphi_3 = \frac{64}{2\pi} \frac{FL^2}{E} \left(\frac{1}{d_1^4} + \frac{3}{d_2^4} \right) \quad (7.134)$$

Înlocuind valorile numerice se obține

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{64}{3\pi} \cdot \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 210^3}{2,1 \cdot 10^5} \left(\frac{1}{55^4} + \frac{7}{70^4} \right) = 1,44 \text{ mm} \\ \varphi_3 &= \frac{64}{2\pi} \cdot \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 210^2}{2,1 \cdot 10^5} \left(\frac{1}{55^4} + \frac{3}{70^4} \right) \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,34^\circ \end{aligned} \quad (7.135)$$

Calculul deplasărilor pe regiuni

Se determină deformațiile în cele două regiuni ale grinzii din *figura 7.39*, utilizând metode energetice. Grinda este prezentată schematic în *figura 7.40*. Momentul încovoietor pentru încărcările reale (*fig. 7.40a*) este

$$\begin{aligned} M_z(x) &= -Fx; \quad x \in [0, 2L] \\ x &\in [0, L], \quad I_{z1}; \quad x \in [L, 2L], \quad I_{z2} \end{aligned} \quad (7.136)$$

Când se calculează deplasările, în (7.135) x poate fi înlocuit cu x_1 sau cu x_2 , după necesități. Oricare ar fi notația, este important să se țină cont de valoarea momentului de inerție din secțiunea respectivă. Momentele încovoietoare fictive sunt date în *tabelul 7.17*.

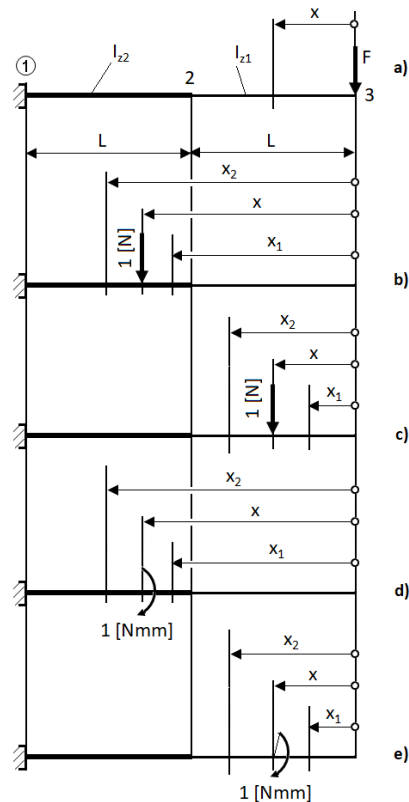


Fig. 7.40. Calculul deplasărilor în regiunile unei grinzi în consolă

Tab. 7.17. Momente încovoietoare fictive la grinda din figura 7.40

Fig.	Reg.		Limite	I_z	m_v	m_φ
7.38b	1-2	D	$x_1 \in [L, x]$	I_{z2}	0	-
		S	$x_2 \in [x, 2L]$		$-1(x_2 - x)$	-
7.31c	2-3	D	$x_1 \in [0, x]$	I_{z1}	0	-
		S	$x_2 \in [x, L]$		$-1(x_2 - x)$	-
7.31d	1-2	D	$x_1 \in [L, x]$	I_{z2}	-	0
		S	$x_2 \in [x, 2L]$		-	-1
7.31e	2-3	D	$x_1 \in [0, x]$	I_{z1}	-	0
		S	$x_2 \in [x, L]$		-	-1

Legenda: D și S =regiuni aflate la dreapta și respectiv la stânga secțiunii x

Deplasările în secțiunea curentă x din regiunea 1-2 se scriu succesiv

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{1}{EI_{z2}} \int_x^{2L} M_z(x_2) m_v(x_2) dx_2; \\
 \varphi(x) &= \frac{1}{EI_{z2}} \int_x^{2L} M_z(x_2) m_\varphi(x_2) dx_2 \\
 v(x) &= \frac{1}{EI_{z2}} \int_x^{2L} Fx_2(x_2 - x) dx_2; \\
 \varphi(x) &= \frac{1}{EI_{z2}} \int_x^{2L} (-Fx_2)(-1) dx_2 \\
 v(x) &= \frac{F}{6EI_{z2}} (x^3 - 12L^2x + 16L^3); \\
 \varphi(x) &= \frac{F}{2EI_{z2}} (4L^2 - x^2)
 \end{aligned} \tag{7.137}$$

Pentru $x = 2L$ se obțin deplasările în încastrare $v(2L) = \varphi(2L) = 0$, ceea ce reprezintă o verificare.

Pentru $x = L$, se obțin deplasările în secțiunea 2

$$v(L) = v_2 = \frac{5}{6} \frac{FL^3}{EI_{z2}}; \quad \varphi(L) = \varphi_2 = \frac{3}{2} \frac{FL^2}{EI_{z2}} \tag{7.138}$$

Deplasările în secțiunea curentă x din *regiunea 2-3* sunt

$$\begin{aligned}
 v(x_2) &= \frac{1}{EI_{z1}} \left[\int_0^x M_z(x_1) m_v(x_1) dx_1 + \int_x^L M_z(x_2) m_v(x_2) dx_2 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} M_z(x_2) m_v(x_2) dx_2 \\
 \varphi(x_2) &= \frac{1}{EI_{z1}} \left[\int_0^x M_z(x_1) m_\varphi(x_1) dx_1 + \int_x^L M_z(x_2) m_\varphi(x_2) dx_2 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} M_z(x_2) m_\varphi(x_2) dx_2
 \end{aligned} \tag{7.139}$$

$$\begin{aligned}
 v(x_2) &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_x^L Fx_2(x_2 - x) dx_2 + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} Fx_2(x_2 - x) dx_2 \\
 \varphi(x_2) &= \frac{1}{EI_{z1}} \int_x^L (-Fx_2)(-1) dx_2 + \frac{1}{EI_{z2}} \int_L^{2L} (-Fx_2)(-1) dx_2
 \end{aligned} \tag{7.140}$$

$$\begin{aligned}
 v(x_2) &= \frac{F}{6E} \left[\frac{1}{I_{z1}} (x^3 - 3L^2x + 2L^3) + \frac{1}{I_{z2}} (14L^3 - 9L^2x) \right] \\
 \varphi(x_2) &= \frac{F}{2E} \left[\frac{L^2 - x^2}{I_{z1}} + \frac{3L^2}{I_{z2}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.141}$$

Valorile deplasărilor la capetele intervalului [0,L] sunt

$$\begin{aligned}
 v(0) = v_3 &= \frac{FL^3}{3E} \left(\frac{1}{I_{z1}} + \frac{7}{I_{z2}} \right); \quad \varphi(0) = \varphi_3 = \frac{FL^2}{2E} \left(\frac{1}{I_{z1}} + \frac{3}{I_{z2}} \right) \\
 v(L) = v_2 &= \frac{5FL^3}{6E}; \quad \varphi(L) = \varphi_2 = \frac{3}{2} \frac{FL^2}{EI_{z2}}
 \end{aligned} \tag{7.142}$$

Se observă că în secțiunea 2 deplasările calculate în imediata vecinătate din stânga (7.138) sunt egale cu cele calculate în imediata vecinătate din dreapta (7.142), ceea ce reprezintă o altă verificare. De asemenea, deplasările din secțiunea 3, calculate cu (7.133) și (7.142) sunt identice.

Metoda grinzii echivalente

Pentru determinarea deplasărilor grinzilor cu tronsoane, se poate porni și de la ecuația axei neutre deformată, scrisă pentru fiecare tronson în parte

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z1}}; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z2}}; \dots \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{zi}}; \dots \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{zn}} \quad (7.143)$$

unde I_{zi} este momentul de inerție al secțiunii tronsonului i față de axa Oz.

Grinda cu tronsoane poate fi înlocuită cu o *grindă echivalentă, de secțiune constantă pe toata lungimea*, având momentul de inerție axial I_{z0} . Înmulțind și împărțind membrul drept al penultimei egalități (7.143) cu I_{z0} , se obține

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z0}} \cdot \frac{I_{z0}}{I_{zi}}; \quad \frac{I_{z0}}{I_{zi}} = \beta_i \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z0}} \beta_i \quad (7.144)$$

unde β_i este un *coeficient de reducere* (fig. 7.41).

Pentru grinda din *figura 7.41*, de exemplu, alegând $I_{z2} = I_{z0}$, coeficienții de reducere pot fi scriși

$$\beta_1 = \frac{I_{z2}}{I_{z1}} = 3; \quad \beta_2 = \frac{I_{z2}}{I_{z2}} = 1; \quad \beta_3 = \frac{I_{z2}}{I_{z3}} = \frac{3}{2} \quad (7.145)$$

Momentul încovoiator este proporțional cu încărcările. Din acest motiv, în loc să înmulțim $M_z(x)$ cu coeficientul β_i în relația (7.144), putem înmulți toate încărcările și reacțiunile. Dacă ne imaginăm că grinda este secționată în cele n tronsoane, atât încărcările, reacțiunile cât și eforturile din secțiunile care fac joncțiunea între tronsoanele grinzii vor fi multiplicare cu β_i .

Asamblând apoi tronsoanele grinzii și adunând eforturile existente în joncțiuni, se obține o grindă de secțiune constantă, cu momentul de inerție I_{z0} , solicitată cu *încărcări reduse* (înmulțite cu β_i).

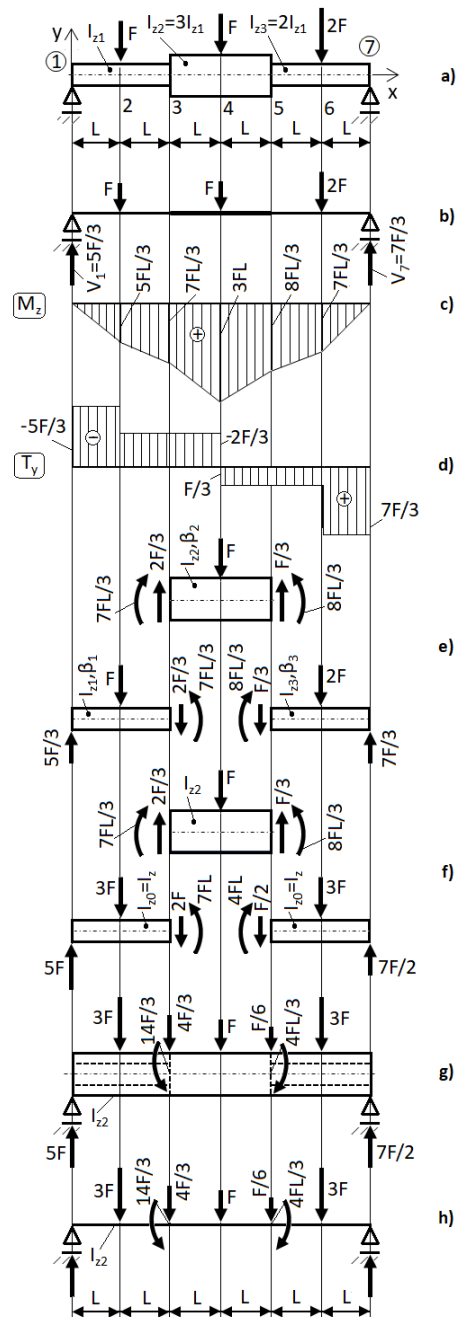


Fig. 7.41. Grindă cu tronsoane și construirea grinzii echivalente

La joncțiuni apar salturi ale eforturilor. Astfel, în secțiunea i dintre două tronsoane, apar salturile

$$\Delta T_{yi} = |T_{yi}(\beta_{i+1} - \beta_i)|; \quad \Delta M_{zi} = |M_{zi}(\beta_{i+1} - \beta_i)| \quad (7.146)$$

unde T_{yi} și M_{zi} sunt eforturile în secțiunea i a grinzii inițiale.

În secțiunile de joncțiune ale grinzii fictive de secțiune constantă se vor aplica încărcări concentrate, numeric egale cu variația eforturilor dată de (8.248). *Ecuatia axei neutre deformată a grinzii fictive echivalente astfel obținute coincide cu cea a grinzii cu tronsoane* [Pissarenko G. ș.a., 1975].

Ecuatia diferențială a axei neutre deformată a grinzii fictive este

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_{red}(x)}{EI_{z0}} \quad (7.147)$$

unde $M_{red}(x)$ este momentul încovoietor redus, scris pentru grinda echivalentă.

În vederea determinării deplasărilor se poate utiliza, de exemplu, metoda de integrare *Clebsch*, scrisă pentru ecuația (7.147).

Se prezintă mai jos etapele determinării grinzii fictive echivalentă grinzii cu tronsoane din figura 7.41.

1. *Determinarea reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi.* Reacțiunile se calculează din ecuațiile de echilibru

$$V_1 = \frac{5}{3}F; \quad V_7 = \frac{7}{3}F \quad (7.148)$$

și apoi se trasează diagramele de eforturi (fig. 7.41c,d).

2. *Se desparte grinda în tronsoane*, figurând eforturile (luate din diagramele M_z și T_y), ca în figura 7.41e.

3. *Se calculează coeficienții de reducere.* Coeficienții de reducere se determină cu (7.144). Admițând pentru grinda echivalentă $I_{z0} = I_{z2}$, coeficienții de reducere sunt dați de (7.145).

4. *Se calculează salturile eforturilor* în secțiunile de joncțiune dintre tronsoane. În secțiunile 3 și 5 salturile sunt

$$\begin{aligned} \Delta T_{y3} &= \left| \frac{2}{3} F(\beta_2 - \beta_1) \right| = \frac{4}{3} F; & \Delta M_{z3} &= \left| \frac{7}{3} FL(\beta_2 - \beta_1) \right| = \frac{14}{3} FL \\ \Delta T_{y5} &= \left| \frac{1}{3} F(\beta_3 - \beta_2) \right| = \frac{1}{6} F; & \Delta M_{z5} &= \left| \frac{8}{3} FL(\beta_3 - \beta_2) \right| = \frac{4}{3} FL \end{aligned} \quad (7.149)$$

5. *Se construiește grinda echivalentă.* Grinda echivalentă are diametrul constant pe toată lungimea. Ea se obține multiplicând încărcările și reacțiunile de pe tronsonul i cu β_i și adăugând încărcările concentrate ΔT_{yi} și ΔM_{zi} în secțiunile de joncțiune dintre tronsoane, ca în *figurile 7.41f,g,h*.

6. *Se determină deplasările grinzii echivalente.* Deplasările grinzii echivalente din *figura 7.41h* pot fi determinate printr-o metodă cunoscută (*Clebsch* sau metode energetice). Grinda reală cu tronsoane și cea echivalentă au aceeași ecuație a axei neutre deformată. Rezultă că deplasările într-o secțiune sunt aceleași la ambele grinzi.

7.9. GRINZI STATIC NEDETERMINATE

La această categorie de grinzi, numărul necunoscutelor (reacțiuni) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru independente $NN > NE$. La fel cum s-a procedat la probleme static nedeterminate cu bare supuse la alte solicitări, ecuațiile de echilibru vor fi completate cu ecuații de deplasări, formându-se un sistem compatibil. Numărul ecuațiilor rezultate din studiul deplasărilor trebuie să fie egal cu gradul de nedeterminare GN . În principiu, orice metodă care permite calculul deplasărilor poate fi utilizată la ridicarea nedeterminării.

După ridicarea nedeterminării (aflarea reacțiunilor) grinzile se rezolvă la fel ca cele static determinate. Din acest motiv, în cele ce urmează se vor prezenta numai exemple de ridicare a nedeterminării.

7.9.1. Ridicarea nedeterminării prin metoda *Clebsch*

Utilizând metoda *Clebsch* de integrare a ecuației diferențiale a axei neutre deformată, se vor calcula reacțiunile la grinda din *figura 7.42*. Aplicarea metodei este mai laborioasă, dar poate fi totuși avantajoasă atunci când se cer și deplasările în mai multe secțiuni sau ecuațiile axei neutre deformată pe regiuni.

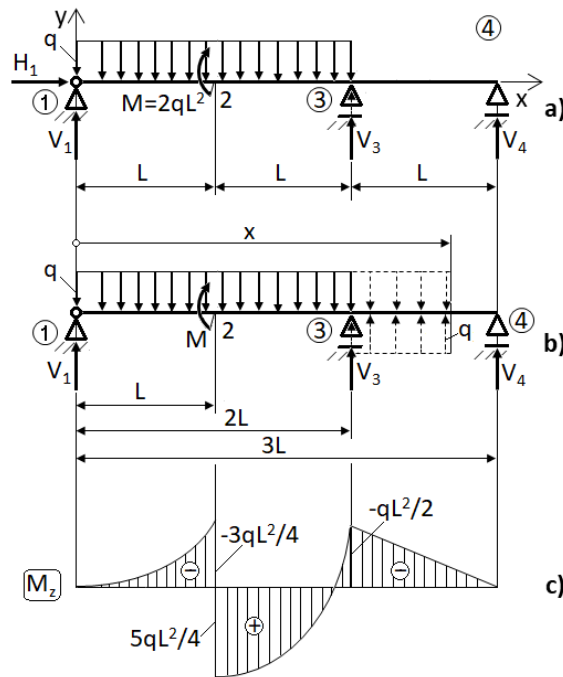


Fig. 7.42. Ridicarea nedeterminării prin metoda *Clebsch*

1. Se scriu ecuațiile staticii și se află gradul de nedeterminare. Se figurează reacțiunile și se scriu ecuațiile de echilibru

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 - 2qL + V_3 + V_4 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow V_4 \cdot 3L + V_3 \cdot 2L - q \cdot 2L \cdot L - M = 0\end{aligned}\tag{7.150}$$

Se observă că, deși este o problemă static nedeterminată, reacțiunea H_1 a putut fi calculată din ecuațiile de echilibru. Se spune că H_1 este o *reacțiune*

static determinată. Rămân trei *reacțiuni* necunoscute (*static nedeterminate*): V_1 , V_3 și V_4 și rezultă $NN = 3$. Cum ecuația de proiecție a forțelor pe direcția Ox a fost consumată pentru determinarea lui H_1 , mai rămân două ecuații în (7.150) și $NE = 2$, iar gradul de nedeterminare este

$$GN = NN - NE; \quad GN = 3 - 2 = 1 \quad (7.151)$$

Mai este nevoie de o singură ecuație de deformații care, împreună cu ecuațiile de echilibru (7.150) rămase vor forma un sistem, ale cărui soluții permit ridicarea nedeterminării. Se spune că această *problemă* este *simply static nedeterminată*.

2. *Ridicarea nedeterminării*. Se aplică metoda *Clebsch*, considerând, în această fază, reacțiunile cunoscute. Se scrie momentul $M_z(x)$ în ultima regiune (fig. 7.42b), respectând condiția (7.106), conform figurii 7.42b

$$M_z(x) = V_1x - q\frac{x^2}{2} + M(x-L)^0 + V_3(x-2L) + q\frac{(x-2L)^2}{2} \quad (7.152)$$

Se scrie ecuația diferențială a axei neutre deformată și se integrează respectând condiția (7.107):

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = V_1x - q\frac{x^2}{2} + 2qL^2(x-L)^0 + V_3(x-2L) + \frac{q(x-2L)^2}{2} \quad (7.153)$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} \approx EI_z \varphi(x) = V_1 \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} + 2qL^2(x-L) + V_3 \frac{(x-2L)^2}{2} + \frac{q(x-2L)^3}{6} + C \quad (7.154)$$

$$EI_z v(x) = V_1 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + 2qL^2 \frac{(x-L)^2}{2} + V_3 \frac{(x-2L)^3}{6} + \frac{q(x-2L)^4}{24} + Cx + D \quad (7.155)$$

Constantele de integrare C și D se determină din condițiile de rezemare.

În reazemele considerate rigide săgeata va fi nulă

$$v(0) = v_1 = 0; \quad v(2L) = v_3 = 0; \quad v(3L) = v_4 = 0 \quad (7.156)$$

Pentru fiecare săgeată se reține din (7.155) numai termenii corespunzători regiunii. Există trei condiții de rezemare (7.156) și numai două constante de integrare necunoscute. Două condiții vor fi utilizate pentru calculul constantelor C și D iar a treia, după înlocuirea constantelor, va forma un sistem compatibil împreună cu ecuațiile de echilibru (7.150):

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \frac{1}{EI_z} \left(\frac{V_1}{6} \cdot 0 - q \cdot 0 + C \cdot 0 + D \right) = 0 \Rightarrow D = 0 \\
 v(2L) &= \frac{1}{EI_z} \left[V_1 \frac{(2L)^3}{6} - q \frac{(2L)^4}{24} + qL^2(2L - L)^2 + C \cdot 2L \right] = 0 \\
 \Rightarrow C &= -\frac{L^2}{6} (4V_1 + qL) \quad (7.157) \\
 v(3L) &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{V_1}{6} (3L)^3 - \frac{q}{24} (3L)^4 + qL^2(3L - L)^2 + \frac{V_3}{6} (3L - 2L)^3 \right. \\
 &\quad \left. + q \frac{(3L - 2L)^4}{24} - \frac{L^2}{6} (4V_1 + qL) \cdot 3L \right] = 0
 \end{aligned}$$

Din (7.150), la care se adaugă ultima ecuație (7.157), se obține un sistem compatibil ale cărui soluții sunt reacțiunile

$$\begin{cases} V_1 + V_3 + V_4 - 2qL = 0 \\ 2V_3 + 3V_4 - 4qL = 0 \\ 15V_1 + V_3 + qL = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -\frac{1}{4}qL; \quad V_3 = \frac{11}{4}qL; \quad V_4 = -\frac{1}{2}qL \quad (7.158)$$

Reacțiunile negative au sens contrar celui din *figura 7.42*, care a fost aleator. Înlocuind valorile lui V_1 și V_3 în expresia momentului încovoietor (7.152) și păstrând numărul corespunzător de termeni pentru fiecare regiune, se poate trasa diagrama $M_z(x)$, ca în *figura 7.42c*.

Dimensionarea se va face cu momentul $M_{z,\max} = 5qL^2/4$. Înlocuind V_1 , V_3 , C și D în ecuația rotirilor (7.154) și cea a săgeților (7.155), dând valori lui x și păstrând numărul de termeni corespunzător regiunii, se pot determina *deplasările grinzii în orice secțiune*.

7.9.2. Metoda eforturilor

Se va aplica metoda eforturilor pentru ridicarea nedeterminării la grinda din *figura 7.42a*, parcurgând etapele de mai jos.

1. *Se scriu ecuațiile de echilibru și se află gradul de nedeterminare.* Această etapă a fost parcursă la ridicarea nedeterminării cu metoda *Clebsch*.

2. *Stabilirea sistemului de bază.* Pentru $GN = 1$, se va stabili o singură necunoscută static nedeterminată X_1 și se scrie o singură ecuație suplimentară (canonică)

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (7.159)$$

Sistemul de bază este static determinat. Pentru cazul $GN = 1$, acesta se obține prin îndepărtarea unei singure legături corespunzătoare unei reacțiuni static nedeterminate. Reacțiunea H_1 a fost determinată din ecuațiile staticii și este necunoscută static determinată. Se poate îndepărta, de exemplu, reazemul simplu 3 și reacțiunea din acest reazem se alege ca necunoscută static nedeterminată $X_1 = V_3$, ca în *figura 7.43b*. Sistemul de bază nu este unic. Ca necunoscută static nedeterminată ar putea fi aleasă V_1 sau V_4 .

3. *Studiul sistemului de bază.* Sistemul de bază se studiază în atâtea situații distincte de încărcare câți indici independenți au coeficienții de influență δ_{ij} din ecuațiile canonice. În ecuația (7.159) există doi indici independenți (0 și 1) și sistemul de bază se va studia în două situații cu încărcări prestabilite:

- Cu încărcările reale și $X_1 = 0$ se trasează diagrama M_0 , ca în *figura 7.43c,d*;
 - Încărcat numai cu $X_1 = 1$ se trasează diagrama m_1 ca în *figura 7.43e,f*.
- Secțiunile stabilite pentru trasarea diagramei M_0 sunt obligatoriu menținute și la trasarea tuturor celorlalte diagrame, chiar dacă numărul regiunilor scade. Momentele $M_0(x)$ și $m_1(x)$ sunt prezentate în *tabelul 7.18*.

Coeficienții δ_{ij} vor fi calculați prin integrare analitică. Metoda de integrare grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin* este de obicei mai simplă, dar prezintă și unele dezavantaje: volumul de calcul crește în cazul încărcărilor complexe, nu poate fi aplicată la bare curbe etc.

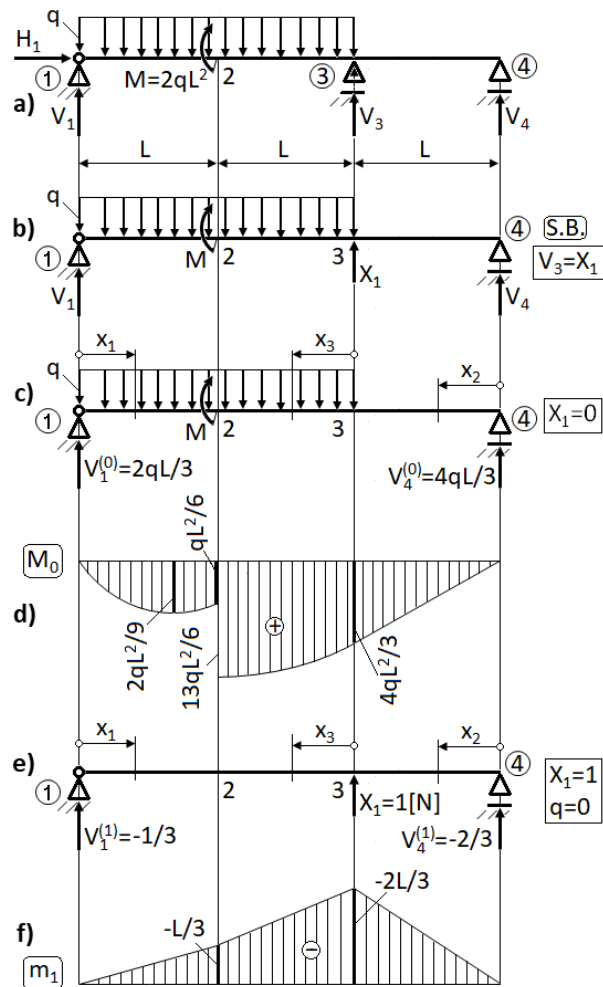


Fig. 7.43. Metoda eforturilor: grinda reală (a), sistemul de bază (b), trasarea diagramelor M_0 (c,d) și respectiv m_1 (e,f)

Tab. 7.18. Momente încovoietoare utilizate la metoda eforturilor (fig. 7.43)

Reg.	Limite	$M_0(x_i)$ (fig. 7.43c,d)	$m_1(x_i)$ (fig. 7.43e,f)
1-2	$x_1 \in [0, L]$	$M_z(x_1) = \frac{2}{3}qLx_1 - \frac{qx_1^2}{2}$	$m_1(x_1) = -\frac{1}{3}x_1$
2-3	$x_3 \in [0, L]$	$M_z(x_3) = \frac{4}{3}qL(L + x_3) - \frac{qx_3^2}{2}$	$m_1(x_3) = -\frac{2}{3}(L + x_3) + 1 \cdot x_3$
3-4	$x_2 \in [0, L]$	$M_z(x_2) = \frac{4}{3}qLx_2$	$m_1(x_2) = -\frac{2}{3}x_2$

4. *Calculul coeficienților de influență și a necunoscutelor.* Indicii coeficienților δ_{ij} arată ce funcții de folosesc pentru calculul acestora. Astfel, pentru calculul lui δ_{10} se utilizează produsul $M_0 \cdot m_1$, iar pentru δ_{11} produsul $m_1 \cdot m_1$. Pentru încovoiere, suma tuturor integralelor se înmulțește cu $1/EI_z$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z} \left(\int_0^L M_0(x_1) m_1(x_1) dx_1 + \int_0^L M_0(x_2) m_1(x_2) dx_2 + \int_0^L M_0(x_3) m_1(x_3) dx_3 \right) \quad (7.160)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \left(\int_0^L m_1^2(x_1) dx_1 + \int_0^L m_1^2(x_2) dx_2 + \int_0^L m_1^2(x_3) dx_3 \right)$$

Înlocuind în (7.160) funcțiile din *tabelul 7.18* și integrând, se obține

$$\delta_{10} = -\frac{11}{9} \cdot \frac{qL^4}{EI_z}; \quad \delta_{11} = \frac{4}{9} \cdot \frac{qL^3}{EI_z} \quad (7.161)$$

Din (7.159) și (7.161) rezultă

$$X_1 = \frac{11}{4} qL = V_3 \quad (7.162)$$

Reacțiunile V_1 și V_4 se obțin din (7.150) și (7.162).

5. *Trasarea diagramei $M_z(x)$.* Trasarea diagramei $M_z(x)$ poate fi făcută clasic sau, mai ușor, prin suprapunerea efectelor. Această ultimă metodă constă în adunarea punct cu punct a diagramei $M_0(x)$ cu diagrama $m_1(x)$, înmulțită cu constanta X_1

$$M_z(x_i) = M_0(x_i) + X_1 \cdot m_1(x_i) \quad (7.163)$$

De exemplu, în secțiunea 3 avem $x_2 = L$ și rezultă (*fig. 7.43d, f* și *tab. 7.18*):

$$M_{(3)} = M_z(x_2 = L) = \frac{4}{3} qL^2 + \frac{11}{4} qL \cdot \left(-\frac{2}{3} L \right) = -\frac{1}{2} qL^2 \quad (7.164)$$

În secțiunea 2 infinit vecină dreapta $x_3 \rightarrow L$ și rezultă

$$M_{(2.D)} = M_z(x_2 = L) = \frac{13}{6}qL^2 + \frac{11}{4}qL\left(-\frac{L}{3}\right) = \frac{15}{12}qL^2 \quad (7.165)$$

Prin metoda a suprapunerii efectelor prezentată mai sus se calculează momentele în secțiunile de interes. La adunarea unor funcții de moment polinomiale se ține cont de faptul că momentul rezultat va fi o funcție polinomială care are gradul cel mai mare dintre cele două polinoame.

6. *Dimensionare.* Știind forma secțiunii transversale, se dimensionează grinda cu formula lui Navier (7.13) și $M_{z,\max} = 15qL^2/12$, luat din diagrama M_z .

7. *Calculul deplasărilor.* Având funcția $M_z(x)$, deplasările pot fi calculate prin metodele prezentate mai sus, sau tot prin suprapunerea efectelor. Se scrie, de exemplu, săgeata în secțiunea 3, unde s-a aplicat forța unitară $X_1=1$. Se determină săgeata v_3 prin metoda *Castigliano*, cu calculul derivatelor parțiale prin metoda *Maxwell-Mohr*

$$v_3 = \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^3 \int_0^L M_z(x_i) \cdot m_1(x_i) dx_i \quad (7.166)$$

Exemplul 7.12

Se va ridica nedeterminarea grinzii din figura 7.44 prin metoda eforturilor.

1. *Ecuatiile de echilibru și stabilirea GN.* Se figurează reacțiunile și se scriu ecuațiile staticii, din care poate fi determinat reacțiunea H_1 , care este astfel static determinată. Celelalte reacțiuni sunt static nedeterminate:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - F = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow M_1 + V_2 L + V_3 \cdot 2L + V_4 \cdot 3L - F \frac{7L}{2} = 0 \end{aligned} \quad (7.167)$$

După aflarea lui H_1 au rămas 5 reacțiuni static nedeterminate ($NN=5$) și două ecuații de echilibru ($NE=2$). Gradul de nedeterminare este $GN = 5 - 2 = 3$. Problema este triplu static nedeterminată.

2. *Ecuatiile canonice și stabilirea sistemului de bază.* Indiferent de sistemul de baza adoptat, se scrie un sistem de GN ecuații canonice

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases} \quad (7.168)$$

unde $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Pentru construirea sistemului de bază (static determinat) se vor înlătura un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare GN . Se pot îndepărta, de exemplu, cele trei reazeme simple, care vor fi înlocuite cu forțele necunoscute, egale cu reacțiunile (*fig. 7.51b*):

$$X_1 = V_2; \quad X_2 = V_3; \quad X_3 = V_4 \quad (7.169)$$

3. *Studiul sistemului de bază.* Coeficienții de influență δ_{ij} din sistemul (7.168) au patru indici distincți (0, 1, 2 și 3) și sistemul de bază se studiază în patru situații prestabilite:

- solicitat numai cu încărcările reale, respectiv F , în cazul de față (*fig. 7.44c,e*);
- solicitat pe rând numai cu $X_1=1$ (*fig. 7.44e,f*), $X_2=1$ (*fig. 7.44g,h*) și respectiv $X_3=1$ (*fig. 7.44i,j*).

Pentru aceste cazuri fictive de încărcare se trasează diagramele de momente încovoietoare M_0 (*fig. 7.44d*), m_1 (*fig. 7.44f*), m_2 (*fig. 7.44h*) și m_3 (*fig. 7.44j*). Fiind încărcări simple, cu forțe concentrate, diagramele au o variație liniară și pot fi trasate direct, fără a mai scrie ecuațiile momentelor încovoietoare.

4. *Calculul coeficienților de influență δ_{ij} .* Aplicarea metodei *Maxwell-Mohr* pentru calculul coeficienților de influență conduce la calculul unor sume de integrale de forma

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} M_0(x_i) \cdot m_1(x_i) dx_i; & \delta_{11} &= \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} m_1^2(x_i) dx_i \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} m_1(x_i) m_2(x_i) dx_i \dots etc. \end{aligned} \quad (7.170)$$

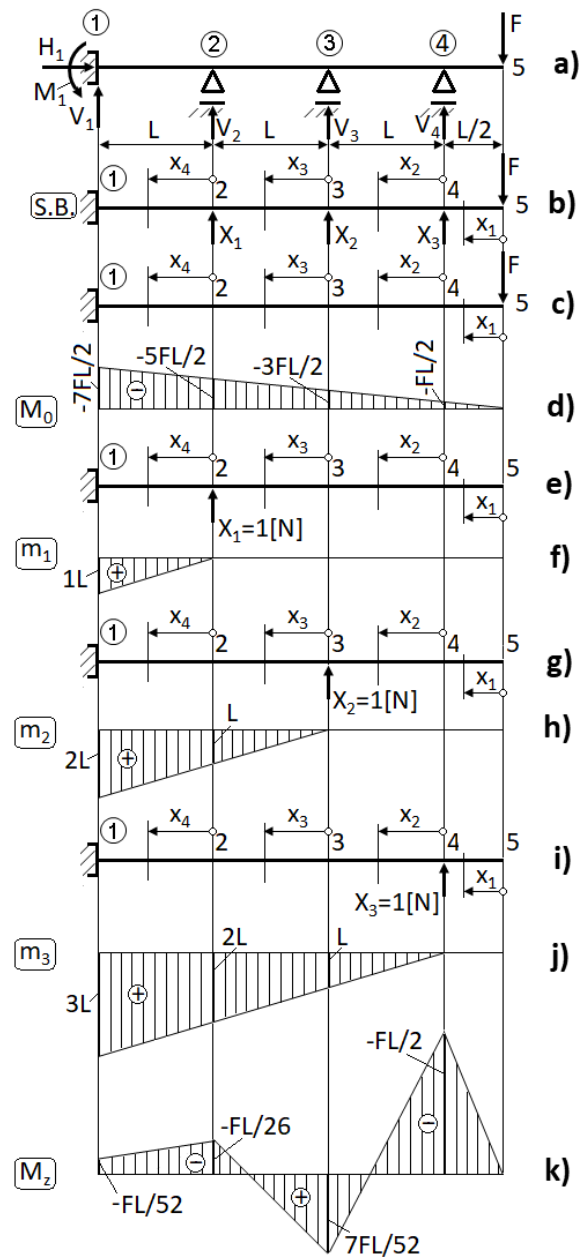


Fig. 7.44. Grindă triplu static nedeterminată: ridicarea nedeterminării prin metoda eforturilor

În cazul unui grad de nedeterminare mai mare, integrarea este laborioasă. Din acest motiv, coeficienții de influență δ_{ij} vor fi calculați mai jos prin metoda de integrare grafo-analitică *Mohr-Vereșceaghin*. Conform acestei metode, prezentată în *Capitolul 3*, integralele (7.170) sunt numeric egale cu produsul dintre suprafața uneia dintre diagrame cu abscisa din cealaltă diagramă, măsurată în dreptul centrului de greutate al primei diagrame. În cazul coeficienților δ_{ii} , care au indici identici, se face produsul dintre suprafața diagramei m_i și abscisa în dreptul propriului centru de greutate. Indicii coeficienților δ_{ij} indică diagramele folosite pentru calculul acestora.

În *figura 7.45* se prezintă diagramele de moment izolate din *figura 7.44*, utilizate pentru calculul grafo-analitic al coeficienților de influență. Se remarcă faptul că *toate triunghiurile sunt dreptunghice isoscele*. Acest fapt simplifică calculul unor catete din triunghiurile asemenea. În cele ce urmează, triunghiurile vor fi desemnate prin numele diagramei. Se exemplifica prin calculul câtorva coeficienți de influență, restul fiind determinați în mod similar

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{L^2}{2} \left[-F \left(\frac{5}{2}L + \frac{2}{3}L \right) \right] = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \left(-\frac{19FL}{6} \right) \quad (7.171)$$

În (7.171) $L^2/2$ reprezintă suprafața triunghiului m_1 , iar factorul din paranteză ordonata în diagrama M_0 , măsurată în dreptul centrului de greutate G_1 al diagramei m_1 (*fig. 3.12*).

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{2L}{3} \quad (7.172)$$

În (7.171) $L^2/2$ este suprafața triunghiului m_1 , iar $2L/3$ ordonata în diagrama m_1 , măsurată în dreptul centrului său de greutate G_1 .

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{L^2}{2} \left(L + \frac{2L}{3} \right) = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{5}{3}L \quad (7.173)$$

În (7.173) $L^2/2$ este suprafața triunghiului m_1 , iar $5L/3$ ordonata în diagrama m_2 , măsurată în dreptul centrului de greutate G_1 al diagramei m_1 .

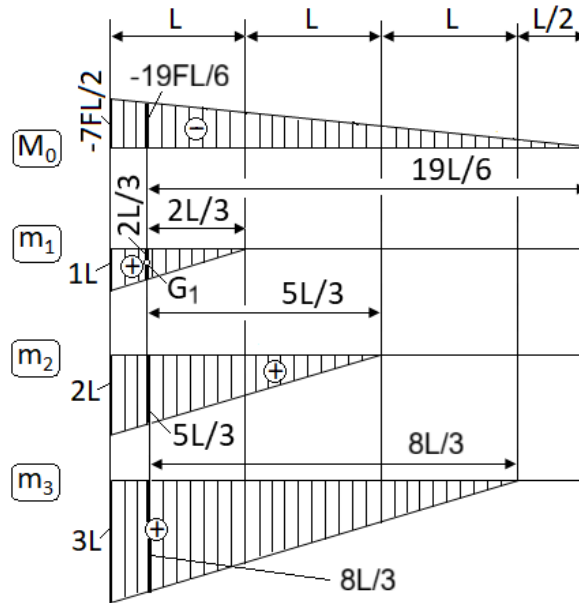


Fig. 7.45. Diagramele de moment extrase din fig. 7.44 pentru aplicarea metodei Mohr-Vereșceaghin

Astfel, coeficienții de influență sunt

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= -\frac{19}{12} \cdot \frac{FL^3}{EI_z}; & \delta_{20} &= -\frac{17}{3} \cdot \frac{FL^3}{EI_z}; & \delta_{30} &= -\frac{45}{4} \cdot \frac{FL^3}{EI_z}; \\ \delta_{11} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z}; & \delta_{22} &= \frac{8}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z}; & \delta_{33} &= \frac{14}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{5}{6} \cdot \frac{L^3}{EI_z}; & \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z}; & \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{14}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z}\end{aligned}\quad (7.174)$$

Din (7.168) și (7.174) rezultă necunoscutele

$$X_1 = V_2 = \frac{3}{13} F; \quad X_2 = V_3 = -\frac{21}{26} F; \quad X_3 = V_4 = \frac{85}{52} F \quad (7.175)$$

Din (7.167) și (7.175) se află $V_1 = -\frac{3}{52} F$ și $M_1 = -\frac{1}{52} FL$.

5. *Trasarea diagramei $M_z(x)$.* Diagrama de moment încovoietor $M_z(x)$ pentru grinda reală poate fi trasată prin suprapunere de efecte, adunând în orice secțiune abscisa din diagrama M_0 cu abscisa din diagrama m_1 înmulțită cu X_1 , cu abscisa din m_2 înmulțită cu X_2 și cu cea din m_3 , înmulțită cu X_3

$$M_z(x_i) = M_0(x_i) + m_1(x_i)X_1 + m_2(x_i)X_2 + m_3(x_i)X_3 \quad (7.176)$$

Diagrama $M_z(x)$ este prezentată în *figura 7.44k*.

6. *Calculul de rezistență și al deplasărilor.* Dimensionarea grinzii și calculul deplasărilor pot fi făcute cu metode care au fost prezentate mai sus.

7.9.3. Metoda elementelor finite

Grinda va fi descompusă în elemente finite (tip bară), iar încărcările și reacțiunile acționează numai în noduri. Spre deosebire de solicitările axiale și torsiune, unde nodurile aveau un singur grad de libertate (translație sau rotire), în cazul încovoierii nodurile au două grade de libertate (săgeata și rotirea). Rezultă că numărul gradelor de libertate pentru un element este patru și, în consecință, matricea de rigiditate a elementului va fi pătrată de ordinul patru. Pentru un element finit (*fig. 7.46*) se poate scrie sistemul

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\Delta^e\} \quad (7.177)$$

unde matricele coloană ale forțelor și deplasărilor generalizate sunt

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta^e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (7.178)$$

În (7.178) indicele 1 se referă la nodul 1, iar indicele 2 la nodul 2.

Pentru forțele și momentele din noduri se adoptă sensuri pozitive arbitrare.

Matricea de rigiditate a elementului este simetrică față de diagonala principală și poate fi scrisă [Rockey L. ș.a., 1979]:

$$[K^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7.179)$$

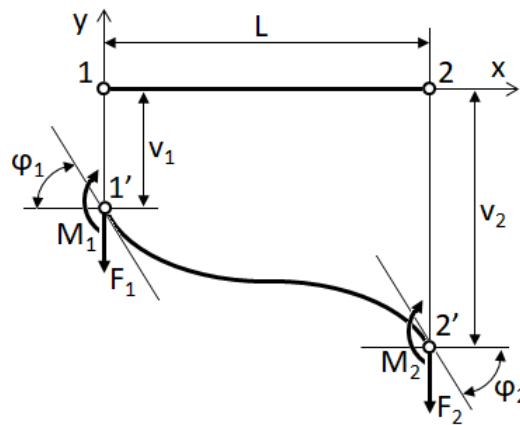


Fig. 7.46. Deformarea unui element finit de grindă

Matricea de rigiditate a întregii grinzi se obține prin asamblarea matricelor elementelor finite. Această operație se realizează după același procedeu ca la solicitări axiale: la matricele elementare se adaugă, în poziție corespunzătoare, linii și coloane nule până ajung la gradul $2n$ (numărul de noduri înmulțit cu numărul de grade de libertate al unui nod), după care se adaugă toate matricele elementare orientate după diagonala principală și suprapuse la colțuri prin adunare.

După cum s-a arătat la aplicarea MEF la bare supuse la solicitări axiale sau la torsiune, nu se face deosebire între probleme static determinate. Acesta constituie un avantaj al metodei. Se dă în continuare câte un exemplu de aplicare a MEF la o problemă static nedeterminată.

Exemplul 7.13

Cu MEF se va rezolva grinda simplu static nedeterminată din figura 7.47.

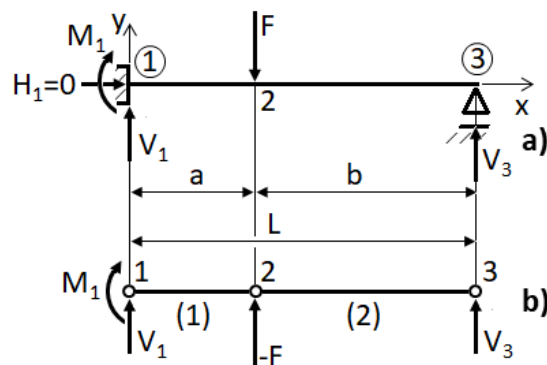


Fig. 7.47. Grindă static nedeterminată (a) descompusă în elemente finite (b)

Se considera pozitive: sensul forțelor în direcția axei Oy; sensul momentelor - direct trigonometric. Se descompune grinda în două elemente finite. Pentru fiecare element finit se scrie matricea de rigiditate, cu (7.179). Se scrie apoi matricea de rigiditate a grinzii și sistemul (7.177):

$$\begin{aligned} [K^{(1)}] &= \frac{EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \\ [K^{(2)}] &= \frac{EI_z}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.180)$$

Matricea de rigiditate a grinzii este pătrată, având gradul este egal cu produsul dintre numărul gradelor de libertate ale unui nod (două, la încovoiere) și numărul de noduri (\$2 \cdot 3 = 6\$). La matricea \$[K^{(1)}]\$ se adaugă ultimele două linii și coloane nule. La matricea \$[K^{(2)}]\$ se adaugă primele două linii și coloane nule. Prin adunarea matricelor elementelor se obține astfel matricea de rigiditate a grinzii, care este pătrată, de ordinul șase. Se scrie (7.177), pentru întreaga grindă:

$$\begin{Bmatrix} V_1 = ? \\ M_1 = ? \\ -F \\ 0 \\ V_3 = ? \\ 0 \end{Bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{6}{a^2} & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a^3} & -\frac{6}{a^2} & \left(\frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3}\right) & \left(-\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right) & -\frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} \\ \frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} & \left(-\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right) & \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b}\right) & -\frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{b^3} & -\frac{6}{b^2} & \frac{12}{b^3} & -\frac{6}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & -\frac{6}{b^2} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ v_2 = ? \\ \varphi_2 = ? \\ v_3 = 0 \\ \varphi_3 = ? \end{Bmatrix}$$

(7.181)

În (7.181) s-au considerat nule deplasările din încastrare ($v_1 = \varphi_1 = 0$) și săgeata din reazemul simplu ($v_3 = 0$). Sistemul de șase ecuații poate fi descompus în două sisteme de ecuații, care vor fi rezolvate succesiv. Primul sistem este format din ecuațiile 3, 4 și 6 și nu conține reacțiuni. Rezolvând sistemul se obțin deplasările necunoscute $v_2, \varphi_2, \varphi_3$

$$\begin{cases} -\frac{F}{EI_z} = \left(\frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3}\right) \cdot v_2 + \left(-\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right) \cdot \varphi_2 + \frac{6}{b^2} \cdot \varphi_3 \\ 0 = \left(-\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right) \cdot v_2 + \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b}\right) \cdot \varphi_2 + \frac{2}{b} \cdot \varphi_3 \\ 0 = \frac{6}{b^2} \cdot v_2 + \frac{2}{b} \cdot \varphi_2 + \frac{4}{b} \cdot \varphi_3 \end{cases} \Rightarrow v_2, \varphi_2, \varphi_3 \quad (7.182)$$

Al doilea sistem conține reacțiunile și este format din ecuațiile 1, 2 și 5. Sistemul poate fi rezolvat după înlocuirea deplasărilor v_2, φ_2 și φ_3 și se obțin astfel reacțiunile V_1, M_1 și V_3 :

$$\begin{cases} V_1 = EI_z \left(\frac{-12}{a^3} v_2 + \frac{6}{a^2} \varphi_2 \right) \\ M_1 = EI_z \left(\frac{-6}{a^2} v_2 + \frac{2}{a} \varphi_2 \right) \\ V_3 = EI_z \left(\frac{-12}{b^3} v_2 - \frac{6}{b^2} \varphi_2 - \frac{6}{b^2} \varphi_3 \right) \end{cases} \Rightarrow V_1, M_1, V_3 \quad (7.183)$$

Când exista încărcări distribuite, grinda se descompune într-un număr mare de elemente finite, încărcate cu forțe concentrate static echivalente, care acționează numai în noduri. În cazul grinzilor cu multe regiuni, sau încărcate cu forțe distribuite, numărul elementelor finite poate fi foarte mare. În consecință, matricea de rigiditate a grinzii este foarte mare și nu poate fi rezolvată decât cu ajutorul calculatorului. MEF se pretează bine la programare și în prezent există *soft-uri* specializate bazate pe această metodă (ANSYS, ABAQUS etc.).

7.10. RAȚIONALIZARE ȘI OPTIMIZARE

7.10.1. Secțiuni raționale pentru încovoiere

La încovoiere repartiția tensiunilor normale pe secțiunea transversală a grinzii este liniară, conform formulei lui *Navier*, așa cum este prezentată în *figura 7.48*. Axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunilor transversale și este conținută în suprafața neutră. Este evident faptul că, în cazul în care tensiunile admisibile la tracțiune și respectiv compresiune sunt egale în modul (comportament ductil), poziția rațională a axei Oz este la distanță egală de fețele superioară și inferioară a grinzii, adică ea trebuie să fie axă de simetrie a secțiunii. Dacă această condiție este îndeplinită, tensiunile extreme vor fi egale în modul (*fig. 7.48a*). Pentru materiale cu comportament ductil se adoptă pentru încovoiere secțiuni cu două axe de simetrie.

La secțiunea trapezoidală din *figura 7.48b*, axa Oz , care trece prin centrul de greutate, este mai apropiată de baza mare. În consecință, pentru $M_z > 0$, scad tensiunile normale pozitive (de tracțiune) și cresc în modul cele negative (de compresiune). Soluția este avantajoasă pentru materiale cu comportament

fragil, care are tensiunea de rupere la tracțiune mai mică decât modulul tensiunii de rupere la compresie. O secțiune rațională pentru o grindă confecționată din aceste materiale trebuie să aibă centrul de greutate astfel amplasat încât să se atingă simultan tensiunile admisibile la tracțiune și compresie σ_{at} și σ_{ac} în secțiunea periculoasă a grinzii. Pentru materiale cu comportament fragil se vor adopta secțiuni cu o singură axă de simetrie.

Secțiunile raționale ale grinzilor au puțin material în vecinătatea suprafeței neutre și mai mult la distanță de acesta, acolo unde tensiunile normale au valori mari în modul. Secțiunile tip I (fig. 7.48c) și tip *cheson* (fig. 7.48d) sunt frecvent utilizate. Însă profilele închise se comportă mai bine la torsiune decât cele deschise (v. volumul 2). Soluția din fig. 7.48e face apel la materiale diferite: cel cu rezistență ridicată (1) este amplasat la extremități și cel cu rezistență mai scăzută (2), în centrul secțiunii, fiind solidarizate între ele.

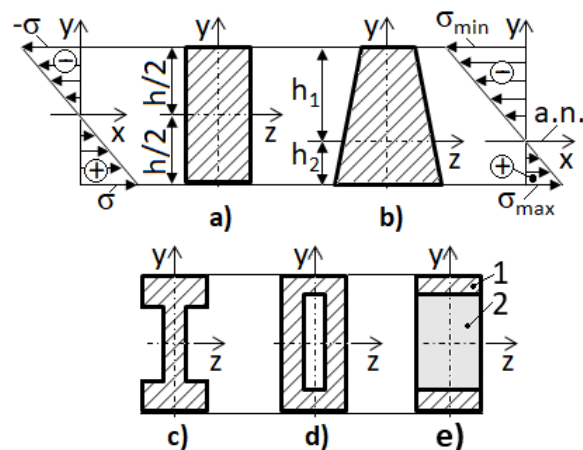


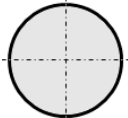
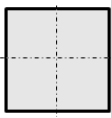
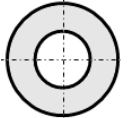
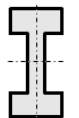
Fig. 7.48. Repartiția tensiunilor normale în secțiunea unei grinzii (a);
secțiuni raționale pentru încovoiere (b,c,d)

Grinzile cu secțiuni raționale au greutatea mai mică, dar și rigiditate mai mică. Secțiunea unei grinzii este cu atât mai economică, cu cât coeficientul de formă a secțiunii

$$\Phi = \frac{16\pi W_z^2}{A^3} \quad (7.184)$$

are valori mai mari (tab. 7.19). Coeficientul a fost astfel ales încât să fie 1 pentru secțiunea circulară [Pissarenko G. ș.a., 1975].

Tab. 7.19. Coeficientul de formă Φ pentru diferite secțiuni

Secțiune				
Φ	1	1,4	4,4 (d/D=0,7)	7-10 Pofile standardizate

7.10.2. Grinzi de egală rezistență

La o grindă cu secțiune constantă pe lungime, supusă la încovoiere simplă, momentul nu este constant. În consecință, nici tensiunile normale din fibrele cele mai depărtate de planul neutru nu sunt constante (fig. 7.49a,b,c). Tensiunea admisibilă se va atinge numai în secțiunea periculoasă, iar în celelalte secțiuni tensiunile sunt mult mai mici (fig. 7.49c). Volumul grinzii va fi minim dacă în orice secțiune tensiunile din fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră vor fi egale în modul cu σ_a . Se obține astfel o *grindă de egală rezistentă*, care poate fi construită în diferite variante (fig. 7.49d și fig. 7.49f,g).

Grinzi cu secțiune dreptunghiulară, de lățime constantă

Pentru grinda din figura 7.49d se admite o secțiune dreptunghiulară cu $b =$ constant și h variabil. În ipoteza că formula lui Navier mai poate fi aplicată cu o precizie satisfăcătoare și în asemenea situații, se va determina funcția $h = f(x)$. Diagrama $\sigma_x(x)$ este impusă (fig. 7.49e). Pentru $y \rightarrow h/2$ se impune $\sigma_x(x) = \sigma_a$. Diagrama $M_z(x)$ din figura 7.49b este valabilă atât pentru grinda din figura 7.49a cât și cele din figura 7.49 d și f. Înlocuind în formula lui Navier se obține

$$\sigma_a = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{6Fx}{bh^2(x)} \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{6Fx}{b\sigma_a}} \quad (7.185)$$

La stabilirea acestei legi de variație (fig. 7.49d) nu s-a ținut cont de influența forței tăietoare. Se observă că la capătul liber al grinzii secțiunea în care se aplică forța F este nulă, tensiunile tind la infinit și grinda se va distruge prin forfecare. Pentru a evita acest lucru, în regiunea în care se aplică forța F secțiunile se majorează arbitrar, după linia întreruptă din fig. 7.49d.

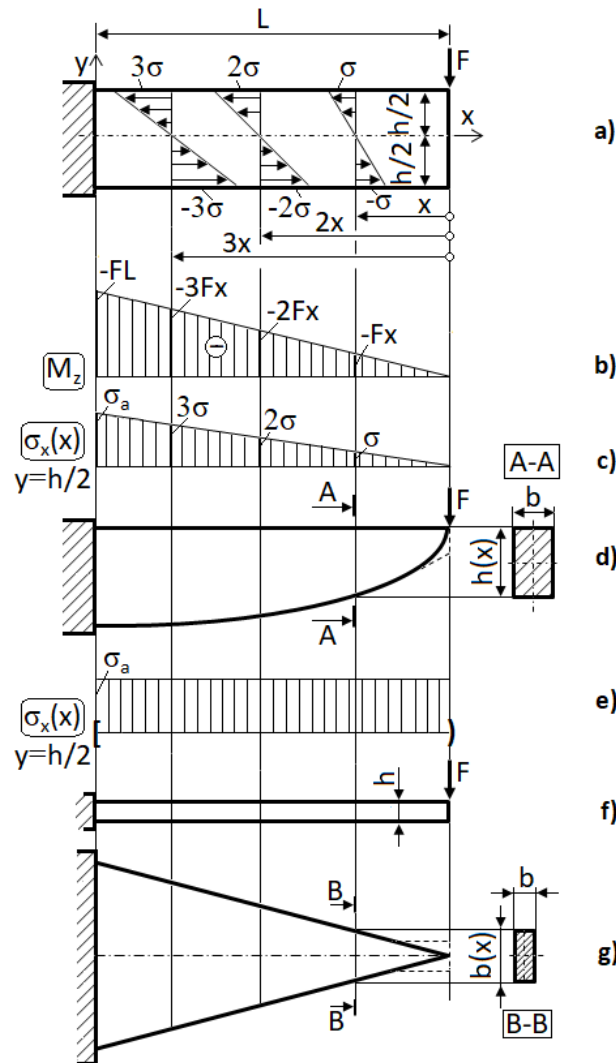


Fig. 7.49. Grindă de secțiune constantă (a), diagramele M_z și σ_x (b,c), grinzi de egală rezistentă (d, f) și diagrama lor σ_x (e)

Observație:

Formula lui *Navier* dă rezultate satisfăcătoare și pentru grinzi la care secțiunea variază lent (unghiul de înclinare a fețelor superioară și inferioară nu depășește 15°-20°). În consecință, relația (7.185) este aproximativă, erorile mai mari obținându-se în vecinătatea capătului liber al grinzii. Oricum, în această regiune secțiunile se majorează din cauza prezenței forțelor tăietoare și astfel erorile vor fi mai mici.

Grinzi cu secțiune dreptunghiulară, de înălțime constantă

O asemenea grindă este prezentată în *figurile 7.49f,g*. Diagramele din *figura 7.49b* și *e* sunt valabile și pentru această grindă. Se aplică formula lui *Navier* pentru secțiunea x

$$\sigma_a = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{6Fx}{b(x) \cdot h^2} \Rightarrow b(x) = \frac{6F}{\sigma_a h^2} x \quad (7.186)$$

Variația lățimii secțiunii este liniară. Pentru a nu introduce torsiune, grinda trebuie să fie simetrică față de axa x (*fig. 7.49g*). La fel ca în cazul anterior, secțiunea grinzii se majorează în vecinătatea capătului liber, pentru limitarea tensiunilor tangențiale (modificarea prezentată cu linie întreruptă în vederea de sus din *figura 7.49g*).

Realizarea grinzilor de egală rezistență

Grinzile de egală rezistență au greutatea și rigiditatea minime. Sunt utilizate pentru a realiza economii de material, când creșterea flexibilității este acceptabilă. În cazul unor legi complexe de variație a secțiunii, realizarea unei grinzi de egală rezistență este dificilă din punct de vedere tehnologic. Grinda poate fi aproximată printr-o variație în trepte, cum ar fi în cazul arcurilor cu foi, utilizate la suspensia vehiculelor (*fig. 7.50a*). Un caz similar se poate întâlni la arborii (secțiune circulară) variabili în trepte (*fig. 7.50b*). Uneori aceste grinzi sunt utilizate pentru obținerea unor deformații mari. Astfel, lamela bimetalică a unui termostat are forma prezentată în *figura 7.49g*. Săgeata maximă la aceasta grindă este $f' = FL^3/2EI_z$ față de $f = FL^3/3EI_z$ la grinda de secțiune constantă [Buzdugan Gh. ș.a., 1973]. În *figura 7.50* se prezintă aproximările grinzilor de egală rezistență, care au fost trasate cu linie întreruptă.

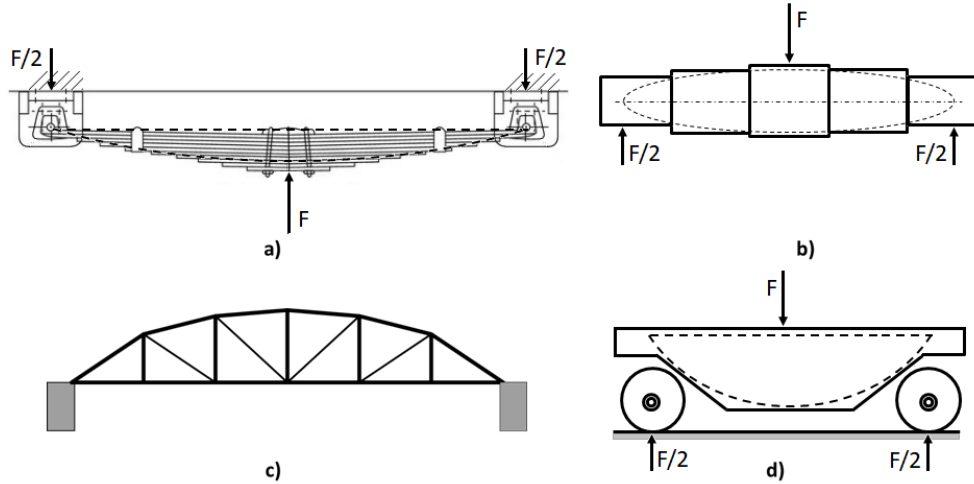


Fig. 7.50. Aproximări ale grinzilor de egală rezistență: arc cu foi (a); arbore de transmisie (b), structură cu zăbrele tip Parker (c) și șasiu de vagon (d)

7.10.3. Optimizarea amplasării reazemelor

Prin amplasarea optimă a unor reazeme poate fi micșorat momentul încovoietor maxim. În consecință, tensiunile maxime scad și secțiunea transversală poate fi micșorată.

Se studiază, de exemplu, cazul unei bare de greutate mare, rezemată la capete (fig. 7.51a). Dacă reazemele sunt așezate la capetele grinzii, momentul încovoietor maxim are valoarea $M_{z,max} = qL^2/8$ și este localizat la mijlocul grinzii, după cum se vede în figura 7.26. Se deplasează apoi reazemele cu distanța x , pentru a se obține o micșorare a momentului. Se va determina x astfel încât tensiunea din grindă să fie minimă.

Pentru grinda din figura 7.51c, ținând cont de simetrie, se poate scrie

$$\begin{aligned} V_2 = V_4 = \frac{qL}{2}; \quad M_z(x_1) = -q \frac{x_1^2}{2}; \quad x_1 \in [0, x] \\ M_z(x_2) = \frac{qL}{2}(x_2 - x) - q \frac{x_2^2}{2}; \quad x_2 \in [x, \frac{L}{2}] \end{aligned} \quad (7.187)$$

Valorile funcțiilor la capetele intervalelor sunt

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_z(0) = 0; \quad x_1 = x_2 = x \Rightarrow M_z(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad (7.188)$$

$$x_2 = \frac{L}{2} \Rightarrow M_z(L/2) = q\frac{L^2}{8} - q\frac{L}{2}x$$

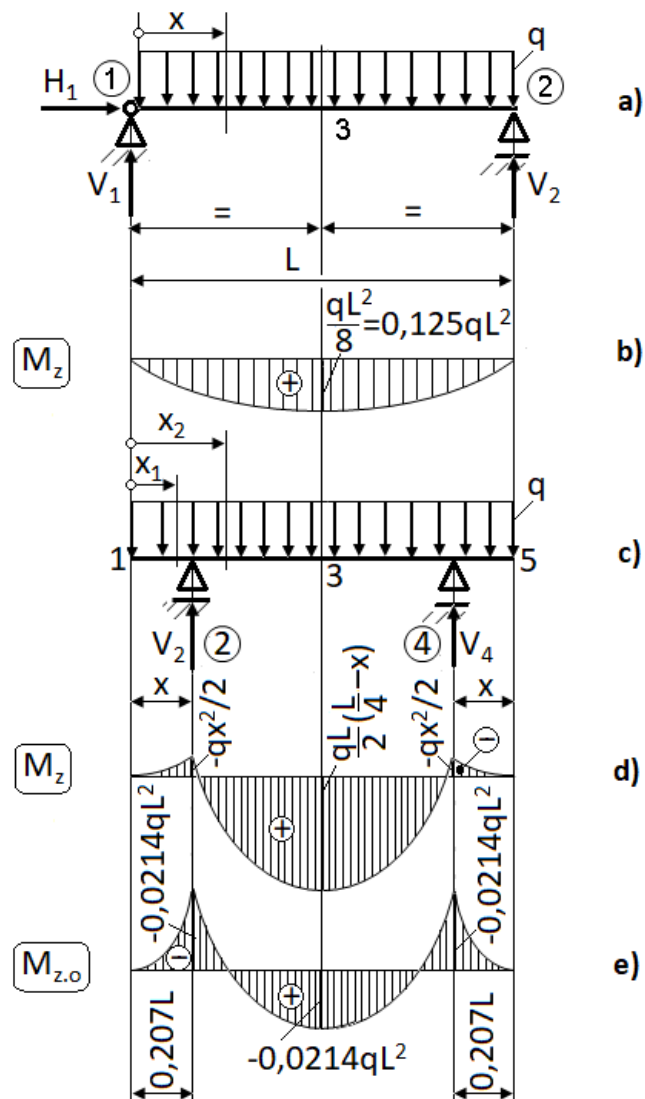


Fig. 7.51. Optimizarea amplasării reazemelor ($M_{z,0}=M_{z,optim}$)

Funcțiile $M_z(x_1)$ și $M_z(x_2)$ au puncte de maxim la $x_1 = 0$ și respectiv $x_2 = L/2$. Diagrama M_z este simetrică (*fig. 7.51d*). La fel ca la aproximarea solidului de egală rezistență la bare cu tronsoane, volumul corpului va fi cu atât mai mic cu cât numărul secțiunilor în care se atinge σ_a este mai mare. Acest deziderat poate fi îndeplinit numai dacă momentele încovoietoare din secțiunile 2,3 și 4 sunt egale în modul

$$\left| -\frac{qx^2}{2} \right| = \frac{qL}{2} \left(\frac{L}{4} - x \right) \Rightarrow 4x^2 + 4Lx - L^2 = 0 \quad (7.189)$$

Rezolvând ecuația, se obține valoarea optimă de amplasare a reazemelor

$$x_{opt} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} L \approx 0,207L \quad (7.190)$$

Diagrama de moment optimizată este prezentată în *figura 7.51e*, unde momentul maxim $M_{z,max.0} = 0,02145qL^2$, față de $M_{z,max} = 0,125qL^2$ la varianta inițială, rezemată la capete (*fig. 7.51.b*). Raportul momentelor încovoietoare maxime în variantele constructive de mai sus este

$$\frac{M_{z,max}}{M_{z,optim,max}} = \frac{0,125qL^2}{0,02145qL^2} \approx 5,82 \quad (7.191)$$

Prin optimizarea amplasării reazemelor s-a realizat deci un moment maxim de circa 5,82 ori mai mic. Această soluție este valabilă și pentru ridicarea în macara a grinzilor aflate în poziție orizontală. Este recomandabil ca acestea să nu fie prinse cu cabluri de la capete ci la o distanță de circa 0,207L de acestea. În cele prezentate mai sus s-a considerat amplasarea optimă a reazemelor din punct de vedere al condițiilor de rezistență. Se poate face un calcul similar privind condițiile de rigiditate (deformațiile grinzii să fie minime). Astfel, pentru grinda rezemată la capete din *figura 7.51a*, săgeata maximă se produce în secțiunea de la mijlocul grinzii și are valoarea

$$f = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_z} \approx 0,013 \frac{qL^4}{EI_z} \quad (7.192)$$

Deplasând reazemele cu distanța x , săgeata la mijlocul grinzii scade. Valoarea optimă a lungimii consolei x se obține egalând modulele săgeților din secțiunile 1,3 și 5 (fig. 7.58c). Se obține astfel lungimea optimă a consolei, calculată din condiții de rigiditate, $x_{optim} = 0,233L$.

Studiul amplasării optime a reazemelor este mai dificil în cazul grinzilor static nedeterminate. În figura 7.52 sunt prezentate soluții optime pentru două asemenea situații [Stepine P., 1986].

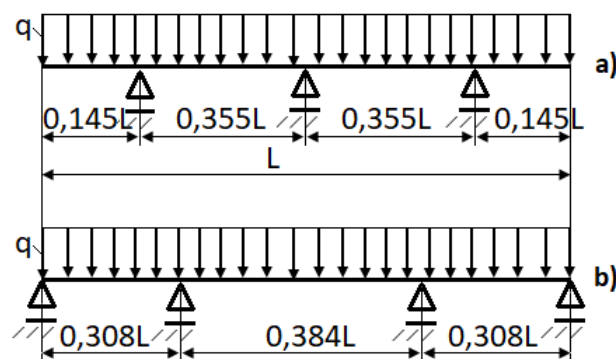


Fig. 7.52. Amplasarea optimă a reazemelor la două grinzi static nedeterminate, ținând cont de condițiile de rezistență (a) și de rigiditate (b)

7.11. GRINZI CU SECȚIUNE COMPUSĂ

În barele solicate la încovoiere simplă apar atât tensiuni normale σ_x , cât și tensiuni tangențiale τ_{xy} . Calculul acestor grinzi a fost prezentat mai sus. Experimental s-a arătat că, la grinzile metalice lungi, cu secțiune masivă, cedarea (inițierea curgerii sau a ruperii) este produsă de tensiunile normale și influența tensiunilor tangențiale poate fi neglijată. Însă în cazul grinzilor realizate prin îmbinarea unor elemente (platbande, compozite stratificate etc.) cedarea grinzii poate să fie produsă prin forfecarea solidarizărilor (șuruburi, cordoane de sudură, strat de adeziv etc.). Astfel, în cazul grinzilor cu secțiune compusă, calculul de rezistență care ține cont numai de tensiunile normale trebuie să fie completat cu unul care ține cont de tensiunile tangențiale. Acest mod de calcul va fi prezentat în cele ce urmează.

7.11.1 Lunecare longitudinală

Se aşază una peste alta platbande identice, nesolidarizate între ele, având capetele cuprinse în acelaşi plan. Se trasează o linie verticală pe suprafaţa laterală a grinzii. Solicitând grinda la încovoiere se observă că lamele lunecă una faţă de cealaltă: linia marcată iniţial variază în trepte, iar lamelele deformate sunt decalate la capete (*fig. 7.53*). Acest fenomen se numeşte *lunecare longitudinală*. El este rezultatul faptului că, pentru fiecare lamelă, fibrele de la exteriorul curburii sunt tracţionaţi (îşi măresc lungimea) iar cele de la interior sunt comprimate (îşi micşorează lungimea) şi secţiunile se rotesc.

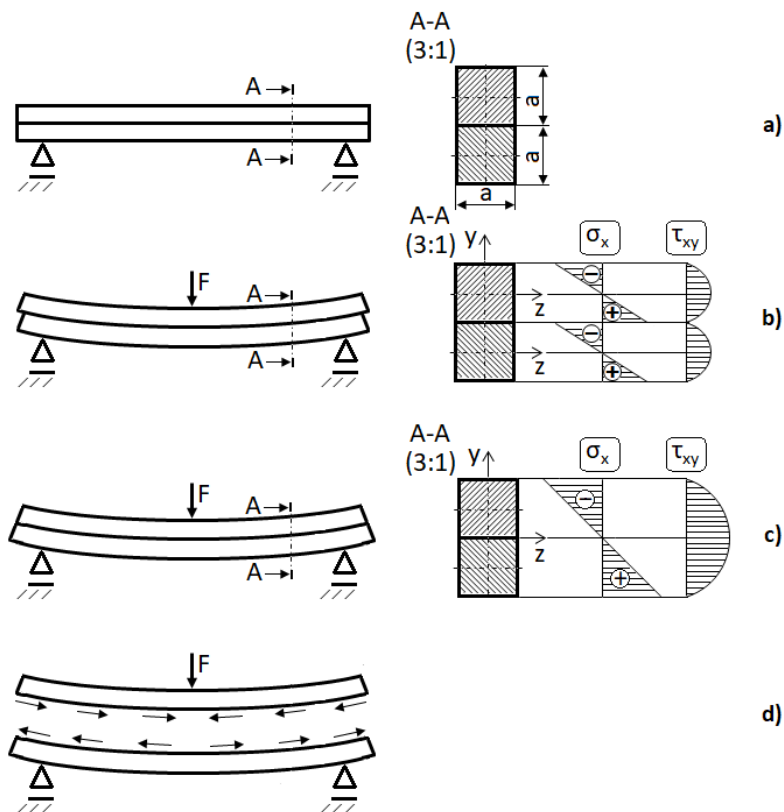


Fig. 7.53. Grindă cu secţiune compusă: nedeformată (a); deformată şi nesolidarizată (b); deformată şi solidarizată (c); evidenţierea tensiunilor tangenţiale care apar între grinzile solidarizate (d)

Pentru simplificare se consideră numai două grinzi suprapuse, având secțiunea pătrată. Grinzile sunt rezemate la capete și încărcate cu o forță concentrată la mijloc.

Se vor studia două cazuri:

1. Grinzile nu sunt solidarizate și se neglijează frecarea;
2. Cele două grinzi sunt solidarizate și nu există deplasări relative între ele.

1. *Grinzi nesolidarizate.* Cele două grinzi lucrează independent, lunecând una față de alta fără frecare. Repartiția tensiunilor σ_x (calculate cu formula Navier) și τ_{xy} (calculate cu formula Juravski) este prezentată în figura 7.53b. Momentul maxim (capabil) care poate fi preluat de grinda compusă se determină prin sumarea momentelor capabile ale grinzilor componente

$$M'_{cap} = 2\sigma_a W'_z \quad (7.193)$$

unde W'_z este modulul de rezistență axial pentru o singură grindă (din cele două suprapuse). Înlocuind W'_z pentru secțiunea pătrată în (7.193) rezultă

$$M'_{cap} = \frac{1}{3} \sigma_a \cdot a^3 \quad (7.194)$$

2. *Grinzi solidarizate.* Când grinzile sunt solidarizate, lunecarea longitudinală este împiedicată de către elementele de solidarizare și toată grinda lucrează ca una monobloc. Repartiția tensiunilor σ_x și τ_{xy} este prezentată în figura 7.53c. Momentul capabil pentru această grindă este

$$M''_{z.cap} = \sigma_a W''_z \quad (7.195)$$

unde W''_z este modulul de rezistență al întregii secțiuni compuse, de laturi a și respectiv $2a$. Înlocuind W''_z în (7.195) rezultă

$$M''_{z.cap} = \frac{2}{3} \sigma_a \cdot a^3 \quad (7.196)$$

Se observă că grinda solidarizată, formată din două grinzi suprapuse (fig. 7.53c), poate prelua un moment încovoietor dublu față de cea nesolidarizată

(fig. 7.53b). Altfel spus, prin solidarizare, adică prin împiedicarea lunecării longitudinale, se obțin grinzi cu capacitate portantă mai mare, iar grinzile nesolidarizate se utilizează pentru a obține deformații mari (arcuri cu foi).

Între elementele solidarizate apar tensiuni tangențiale (fig. 7.53d) și *elementele de solidarizare sunt supuse la forfecare*. În domeniul construcțiilor metalice, de exemplu, se utilizează următoarele tipuri de grinzi:

- Profile laminate, pentru momente încovoietoare relativ mici;
- Grinzi compuse din platbande și profile (îmbinate prin sudură sau cu șuruburi) pentru momente medii;
- Grinzi cu zăbrele (fig. 7.50c) pentru momente încovoietoare mari.

Calculul grinzilor compuse cuprinde două etape:

- a) Dimensionarea grinzii (cu formula lui *Navier*), astfel încât să reziste la momentul încovoietor maxim;
- b) Determinarea variației tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii (cu formula lui *Juravski*), urmată de calculul forței de lunecare longitudinală și dimensionarea elementelor de solidarizare, care sunt sollicitate la forfecare.

Tensiunilor tangențiale τ_{xy} din planul secțiunii le corespund, conform principiului dualității, tensiunile τ_{yx} , situate într-un plan paralel cu axa Oz (fig. 7.54). Tensiunile τ_{xy} produc forța de lunecare longitudinală pe unitate de lungime a grinzii, notată N_1 . Dacă τ_{xy} este uniform distribuit pe lățimea secțiunii, forța de lunecare pe unitatea de lungime de bară, la distanța y față de axa neutră, este

$$\frac{dN_1}{dx} = \tau_{xy} \cdot b \quad (7.197)$$

Înlocuind τ_{xy} din formula lui *Juravski* (7.25) se obține

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T_y S_z}{I_z} \quad (7.198)$$

Integrând pe o porțiune de grindă de lungime e , între x și $x+e$, rezultă forța de lunecare longitudinală N_e , pe lungimea e , când S_z și I_z sunt constante

$$N_e = \frac{S_z}{I_z} \int_x^{x+e} T_y(x) dx \quad (7.199)$$

Ținând cont de relațiile diferențiale între eforturi (1.29), se obține

$$N_e = \frac{S_z}{I_z} [M_z(x+e) - M_z(x)] \quad (7.200)$$

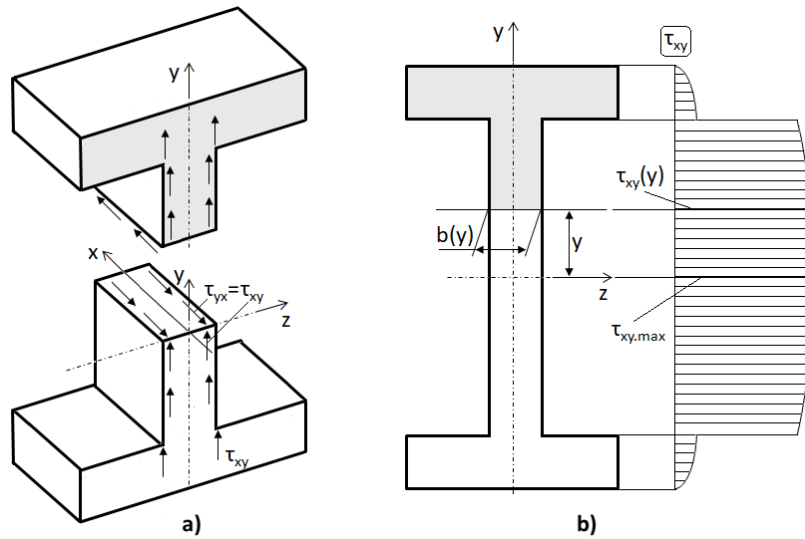


Fig. 7.54. Tensiuni tangențiale în inima unui profil I (a) și variația lor pe secțiune (b)

Astfel, la o grindă încărcată cu forțe concentrate (fig. 7.55a) forța de lunecare longitudinală pe lungimea e se calculează cu

$$N_e = \frac{T_y S_z}{I_z} \cdot e \quad (7.201)$$

iar la o grindă încărcată cu forțe uniform distribuite (fig. 7.55b) cu relația (7.200).

În (7.200) s-au notat cu: I_z momentul de inerție axial al întregii secțiuni; S_z momentul static al porțiunii de arie aflată deasupra sau dedesubtul secțiunii y , adică a porțiunii care *tinde* să lunece (S_z al suprafeței gri în *figura 7.54*, de exemplu). Forța de lunecare longitudinală este maximă pe suprafața neutră, unde τ_{xy} este maxim [Buzdugan Gh. ș.a., 1973].

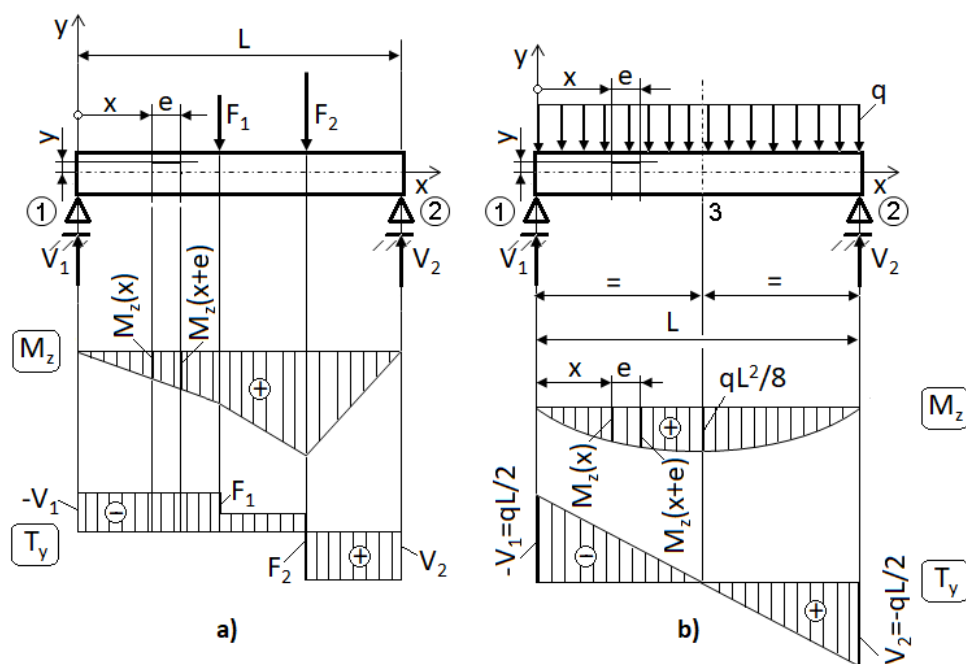


Fig. 7.55. Determinarea forței de lunecare longitudinală pe lungimea e : grindă încărcată cu forțe concentrate (a) și cu forțe distribuite (b)

La grinzi confecționate prin sudură continuă, forța de lunecare longitudinală N_1 pe unitatea de lungime se determină cu relația

$$N_1 = \frac{T_y S_z}{I_z} \quad (7.202)$$

Pentru grinzi confecționate prin *sudură discontinuă*, forța de lunecare longitudinală pe lungimea e , egală cu distanța dintre centrele a două cordoane succesive, este dată de (7.201).

Aplicația 7.4

Din trei platbande se construiește, prin sudură discontinuă, o grindă cu profil I, având dimensiunile din *figura 7.56*. Știind că $L = 2$ m, $F = 100$ kN, $\sigma_a = 120$ MPa, $\tau_{as} = 78$ MPa; s-a adoptat grosimea cordonului de sudură $a = 5$ mm și lungimea unui cordon $L_c = 70$ mm. Să se determine pasul sudurii p .

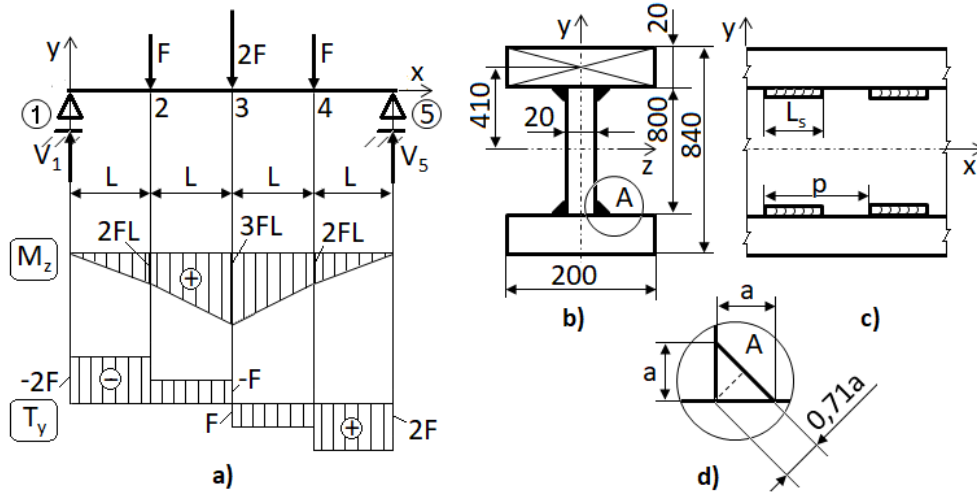


Fig. 7.56. Grindă cu secțiunea compusă, solicitată la încovoiere simplă

Se calculează reacțiunile și se trasează diagramele M_z și T_y (*fig. 7.56a*). Se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunii

$$I_z = \frac{200 \cdot 840^3}{12} - 2 \frac{90 \cdot 800^3}{12} = 2198,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; \quad (7.203)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{2198,4 \cdot 10^6}{420} \approx 5,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Se verifică dacă grinda rezistă la momentul încovoiator maxim $M_{z.\max} = 3FL$ (vezi diagrama M_z din *fig. 7.56a*):

$$\sigma_{x.\max} = \frac{M_{z.\max}}{W_z} = \frac{3FL}{W_z}; \quad \sigma_{x.\max} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3}{5,2 \cdot 10^6} \approx 115,4 \text{ MPa} < \sigma_a \quad (7.204)$$

Talpa profilului *tinde* să lunece față de inimă, solicitând cordoanele de sudură la forfecare. Se calculează momentul static al unei tălpi față de axa Oz , marcată prin trasarea diagonalelor diagonale în *figura 7.56b*

$$S_z = A \cdot y_G = 200 \cdot 20 \cdot 410 = 1,64 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \quad (7.205)$$

Forța tăietoare maximă este $T_{y,\max} = 2F$ (vezi diagrama T_y din *fig. 7.56a*). Forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime, N_1 , se calculează cu (7.202), deoarece cordonul de sudură este presupus în această fază ca fiind uniform pe lungimea grinzii și N_1 va fi calculată acoperitor cu $T_{y,\max}$

$$N_1 = \frac{T_y S_z}{I_z} = \frac{2F \cdot S_z}{I_z}; \quad N_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,64 \cdot 10^6}{2198,4 \cdot 10^6} = 149,2 \text{ N} \quad (7.206)$$

Forța totală de lunecare pentru o talpă N_e este preluată de către două cordoane de sudură (care solidarizează talpa de inimă). Dacă lungimea unui singur cordon este L_s , aria de forfecare a celor două cordoane va fi $A_f = 2a \cdot L_s$ (*fig. 7.56b,d*). Forța totală de lunecare este egală cu N_1 înmulțit cu lungimea totală a grinzii. Ea solicită cele două cordoane la forfecare cu tensiunea

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{N_1 L}{A_f} = \frac{N_1 \cdot 4L}{2aL_s} \leq \tau_{as} \quad (7.207)$$

Din (7.207) rezultă lungimea unui cordon continuu

$$L_s \geq \frac{2N_1 L}{a \cdot \tau_{as}}; \quad L_s \geq \frac{2 \cdot 149,2 \cdot 2 \cdot 10^3}{5 \cdot 78} \Rightarrow L_s \geq 1530 \text{ mm} \quad (7.208)$$

Știind că sudura este discontinuă și lungimea unei porțiuni este L_c , se calculează numărul n de porțiuni care formează un cordon

$$n \geq \frac{L_s}{L_c}; \quad n \geq \frac{1530}{70} \Rightarrow n \geq 21,86 \quad (7.209)$$

Se adoptă $n_{ad} = 22$ porțiuni de cordon discontinuu și se calculează lungimea totală a unui cordon de sudură presupus continuu

$$L_s = n_{ad} \cdot L_c = 22 \cdot 70 = 1540 \text{ mm} \quad (7.210)$$

Deoarece cordoanele încep și se termină la capătul grinzii din *figura 8.62*, pasul sudurii va fi egal cu lungimea totală a grinzii împărțită la numărul de intervale dintre cele n porțiuni în care este împărțit cordonul

$$p = e = \frac{4L - L_c}{n - 1} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^3 - 70}{21} = 377,6 \text{ mm} \quad (7.211)$$

Deoarece o precizie prea mare nu este justificată în cazul sudurii, se adoptă $p_{ad} = 380 \text{ mm}$, valoare care conduce la creșterea lungimii totale a cordonului de sudură, care se recalculează cu relația (7.211)

$$L_{c.ad} = 4L - p_{ad}(n - 1) = 4 \cdot 2 \cdot 10^3 - 380 \cdot 21 = 83 \text{ mm} \quad (7.212)$$

Lungimea totală a unui cordon continuu va fi recalculată cu (7.210)

$$L_{s.ad} = n_{ad} \cdot L_{c.ad} = 22 \cdot 83 = 1860 \text{ mm} \quad (7.213)$$

Grinzi din profile supraînălțate

La încovoiere, tensiunile normale, date de formula lui *Navier* (7.13) sunt invers proporționale cu modulul de rezistență W_z și respectiv cu momentul de inerție I_z (7.12). Secțiunile cu suprafețe mai îndepărtate de axa Oz au momente de inerție I_z mai mari.

Pentru construcții metalice se utilizează profile laminate de diverse forme: I [SR EN 10024:1988], T [SR EN 10055:2000], cornier [SR EN 10056:2000] etc.

Profilele laminate standardizate se produc într-un număr limitat de tipodimensiuni. Un profil I, de exemplu, poate prelua momente încovoietoare mai mari dacă i se mărește momentul de inerție I_z . Acest lucru poate fi realizat prin supraînălțare cu sudarea unor platbande pe lungimea tălpilor (*fig. 7.57*) sau prin metoda expandării (*fig. 7.58*), cu condiția ca tensiunile normale maxime să nu le depășească pe cele admisibile.

Expandarea profilului cuprinde următoarele faze [Bia C. ș.a., 1983]:

- Tăierea inimii profilului după traseul din *figura 7.58a*;
- Decalarea celor două jumătăți cu un pas;
- Sudarea jumătăților (*fig. 7.58b*).

Rezultă astfel un profil cu înălțime mai mare și moment de inerție I_z majorat, care are un șir de găuri hexagonale. Cordoanele de sudură se calculează la forfecare, similar cu modul de lucru de la *Aplicația 7.4*. Prin expandarea profilelor se realizează economii de material. Totuși, supraînălțarea profilelor este limitată de apariția fenomenului de flambaj al inimii (vezi volumul al doilea al lucrării).

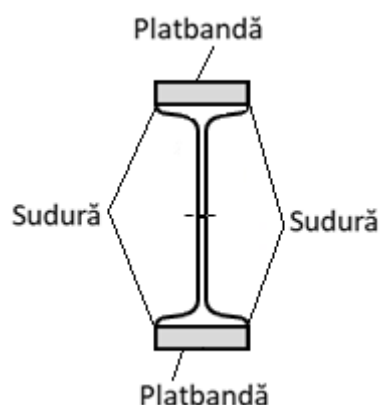


Fig. 7.57. Supraînălțarea unui profil I prin sudarea a doua platbande

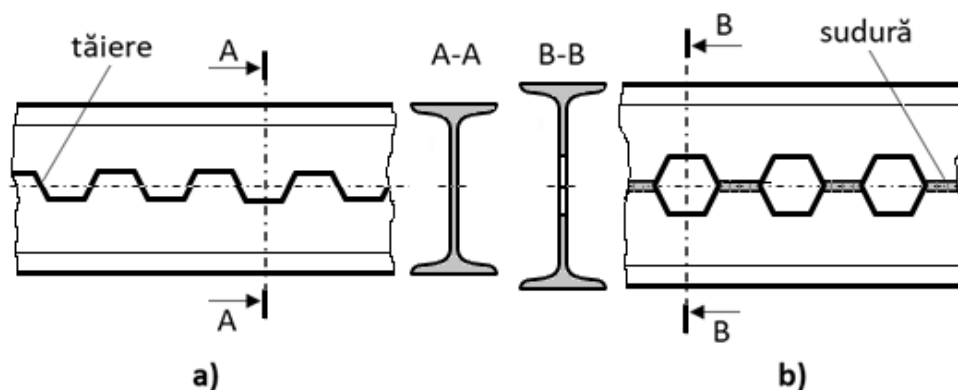


Fig. 7.58. Realizarea unui profil I expandat: tăierea profilului (a); sudare, după decalarea cu un pas (b)

Observații

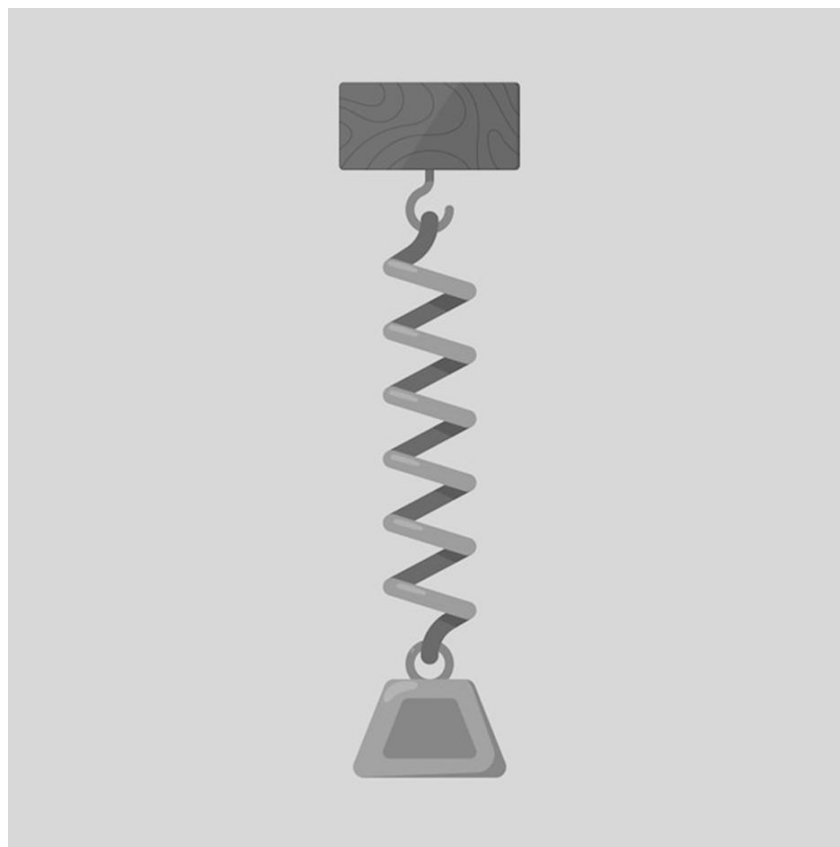
În cazul grinzilor cu pereți subțiri, care nu prezintă simetrie față de planul principal central, ipoteza secțiunilor plane (*Bernoulli*) rămâne valabilă, împreună cu formulele *Navier* și *Juravski*, doar în anumite condiții de încărcare: forțele tăietoare trebuie să fie cuprinse într-un plan care conține centrele de lunecare. La trasarea diagramelor de eforturi pentru asemenea grinzi, reducerea sistemelor de forțe trebuie făcută în raport cu centrul de lunecare, nu cu centrul de greutate. Dacă, în raport cu acesta, apar momente încovoietoare, forțe tăietoare și momente de torsiune, solicitarea este la încovoiere simplă cu torsiune. Pentru un moment de torsiune nul, solicitarea este la încovoiere simplă [Bia C. ș.a., 1983].

De reținut:

- Calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi;
- Distribuția tensiunilor normale și respectiv tangențiale în secțiunea grinzii;
- Calculul tensiunilor normale σ (formula lui *Navier*) și respectiv tangențiale (formula lui *Juravski*);
- Calculul deplasărilor (săgeată și rotire);
- Rezolvarea problemelor static nedeterminate;
- Secțiuni raționale la încovoiere;
- Grinzi de egală rezistență;
- Optimizarea amplasării reazemelor;
- Fenomenul de lunecare longitudinală;
- Calculul grinzilor cu secțiune compusă;
- Realizarea profilelor supraînnălțate sau expandate.

CAPITOLUL

8



Probleme recapitulative

Sursa: <https://www.freepik.com/vectors/helical-spring-toy/12>

8. PROBLEME RECAPITULATIVE

- 1.** În interiorul unei țevi se montează concentric, fără frecare, o bară de secțiune circulară. Ambele corpuri au aceeași lungime și sunt fixate la capete de două discuri rigide. Ansamblul astfel format este supus la tracțiune, în domeniul elastic. Știind că cele două corpuri sunt din materiale diferite, să se determine raportul diametrelor astfel încât volumul fiecărui corp să fie minim.
- 2.** Pentru ansamblul din *problema 1*, supus numai la torsiune în domeniul elastic, să se determine raportul diametrelor astfel încât volumul fiecărui corp să fie minim, știind caracteristicile elastice și mecanice ale celor două materiale.
- 3.** Pentru ansamblul din problema 1, știind tensiunile de curgere σ_{c1} , σ_{c2} și modulele de elasticitate E_1 și E_2 pentru materialele celor două corpuri, să se determine în care corp se atinge prima dată tensiunea de curgere. Știind diametrul barei d_1 , (care este aproximativ egal cu cel interior al țevii) și diametrul exterior al țevii d_2 , să se determine forța maximă (capabilă) pe care o suporta ansamblul. Pentru cele două materiale se consideră diagrama caracteristică liniară, până la apariția curgerii.
- 4.** O foarfecă este formată din două fălci suprapuse, unite la mijloc cu un șurub. Când șurubul este strâns prea puțin foarfeca nu taie, iar când este strâns prea mult taie, dar se închide și se deschide greu. Între cele două poziții extreme se află un domeniu redus de strângere a șurubului, pentru care foarfecile funcționează corect (taie bine, fără efort mare). Explicați acest comportament.
- 5.** Arborele unui electromotor se construiește în două variante: cu secțiune circulară plină și respectiv inelară. Să se determine economia de material

(procentual, ca greutate) realizată la a doua variantă constructivă, comparativ cu prima, luând în considerare numai calculul de predimensionare (solicitarea statică la torsiune).

6. Osia unei remorci poate fi construită în două variante: cu secțiune circulară și respectiv pătrată. Să se arate care variantă dintre cele două trebuie să fie preferată din punct de vedere al calculului de rezistență. Să se explice rezultatul obținut. Care secțiuni sunt mai indicate pentru construirea osiilor decât cele enumerate mai sus?

7. Arcurile cu foi ale vehiculelor pot fi construite în două variante:

- *multilamelare*, din foi de oțel de lungime inegală, suprapuse în forma de piramidă în trepte;
- *unilamelare*, din materiale compozite (polimeri armați cu fibre de înaltă rezistență), lamela fiind de grosime maximă în partea centrală și minimă la extremități.

Explicați de ce s-au ales aceste variante constructive.

8. Aparatul de gimnastică numit bârnă este format dintr-o grindă de lemn cu secțiunea dreptunghiulară, rezemată pe două picioare metalice, având două console egale. Să se determine lungimea x a consolelor astfel încât secțiunea grinzii să fie minimă. Știind că bârna se prelucreează dintr-un bușean cilindric, să se dimensioneze grinda astfel încât să se elimine cât mai puțin material la prelucrare. Care fibre ar ceda primele în secțiunile periculoase?

9. Explicați forma turnului *Eiffel*.

10. O șină de cale ferată, cu lungimea $L=10m$, este ridicată cu macaraua, fiind tot timpul în poziție orizontală. Fie Oy orientată după axa de simetrie a secțiunii transversale a șinei. Pentru ridicare pot fi utilizate următoarele variante:

- cablul de ridicare este fixat de capetele șinei, ridicarea realizându-se cu șina având axa Oy paralelă cu solul;
- la capetele șinei se atașează câte un cablu, cele două cabluri sunt prinse în cârligul macaralei într-un punct comun și fac unghiul α cu șinele, axa Oz a secțiunii șinei fiind paralelă cu solul;
- în cârligul macaralei se prinde o grindă masivă, în poziție orizontală, de capetele căreia sunt fixate două cabluri. Cablurile se fixează de capetele șinei și rămân în poziție verticală, iar șina poziție orizontală, pe durata ridicării;

- la soluția de mai sus cablurile verticale se prind la o distanță x față de capetele șinelor.

Să se arate care variantă de ridicare a șinei este preferabilă și care este valoarea optimă a distanței x .

11. Filamentul unui bec cu incandescentă este așezat între doi suporți din sârmă. După un mare număr de ore de funcționare, se observă că filamentul este mai lung decât era inițial, între suporți el prezentând săgeți mari. Din ce cauză se va rupe filamentul? Prezentați o soluție mecanică pentru mărirea duratei de funcționare a becului.

12. Un pachet cu n coli de furnir suprapuse poate fi îndoit cu ușurință. Dacă toate colile sunt lipite între ele, această operație devine cu mult mai dificilă. Explicați acest fenomen.

13. Barele sau profilele laminate pot fi tăiate (debitate) la lungimea necesară prin așchiere sau prin forfecare pe mașini speciale. Această ultimă metodă este mai rapidă și nu consumă material prin așchiere. Explicați de ce s-a adoptat pentru această operație solicitarea la forfecare în loc de alte solicitări simple.

14. Pentru a traversa un șanț lat, un om dorește să-și construiască o punte improvizată din scânduri. El nu dispune decât de o scândură cu secțiunea dreptunghiulară, cu laturile $h \gg b$. Din calcul reiese că scândura așezată pe sol cu b pe verticală nu îi poate susține greutatea. Ce soluție ar putea adopta pentru construirea punții care să permită traversarea?

15. Când un om care traversează un râu înghețat aude zgomotul gheții care începe să cedeze, se recomandă să se întindă pe burtă și să se îndrepte târându-se către mal. Explicați acest lucru.

16. Explicați de ce se încălzește oțelul sub liniile de transformare metalografică, în vederea unor prelucrări cu deformări plastice mari (forjare, laminare etc.).

17. Acoperirea unor incinte poate fi realizată cu plăci ondulate din materiale compozite sau polimeri. De asemenea, unele parapete de pe șosele sunt confecționate din tablă ondulată. Explicați de ce se confecționează aceste repere sub forma ondulată și nu plană.

18. Un cablu electric poate fi confecționat în două variante: cu un conductor masiv din cupru și respectiv cu multe conductoare subțiri (lițe). În ambele variante

secțiunea netă a conductorului din cupru este aceeași. Explicați de ce este preferată a doua variantă, deși este mai scumpă.

19. O bară dreaptă este încastrată la capete. După montare temperatura variază cu Δt grade. Tensiunea din bară depinde de lungimea barei? Pentru două bare de aceeași lungime, una confecționată din oțel și cealaltă din aluminiu, să se arate în care dintre ele apare tensiunea normală mai mare și în care se atinge pentru prima dată limita de proporționalitate. Se cunoaște $\alpha_{OL} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_{Al} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $E_{OL} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{POL} = 2100 \text{ MPa}$, $\sigma_{pAl} = 1200 \text{ MPa}$.

20. O grindă de beton este armată cu bare de oțel. De ce se armează betonul? Cum trebuie să fie amplasate barele în secțiunea grinzii pentru ca eficiența armării să fie maximă în cazul solicitărilor statice? Dar în cazul unui stâlp? Cum influențează solicitările dinamice modul de armare?

21. O grinda cu secțiunea constantă este așezată pe două reazeme simple la capete și este încărcată simetric. Dacă reazemele se apropie de mijlocul grinzii, păstrând tot timpul simetria rezemării, să se arate cum variază reacțiunile.

22. Explicați forma secțiunii unui barajului de la lacul de acumulare a unei hidrocentrale.

23. De ce aripile avioanelor de mici dimensiuni au secțiune constantă pe lungime, iar cele ale avioanelor mari au secțiune variabilă pe lungime (mai mică la vârful aripii și mai mare lângă fuzelaj)?

24. Două table relativ groase sunt găurite și îmbinate cu ajutorul unui șurub cu piuliță. Îmbinarea este solicitată cu două forțe F de sensuri contrare, care acționează în planul median al tablelor. Cu un șurub similar este îmbinat apoi un pachet de trei table. Această îmbinare este solicitată cu trei forțe aplicate asupra tablelor, astfel: asupra tablei de la mijlocul pachetului acționează forța F , iar asupra fiecărei table de la exteriorul pachetului câte o forță de sens contrar $F/2$. La care dintre îmbinări șurubul se foarfecă la o forță F mai mare?

25. O bară dreaptă, cu secțiune constantă, este încastrată la capete (reazeme perfect rigide), încălzită și menținută la o temperatură uniformă, aceeași în tot volumul sau. Ce deplasări axiale se produc în bară? Se neglijează flambajul.

8.1. RĂSPUNSURI

1. Se notează cu 1 bara și cu 2 țeava. Se poate scrie o singură ecuație de echilibru

$$N_1 + N_2 = F \quad (8.1)$$

Se ridică nedeterminarea scriind egalitatea deformațiilor celor două corpuri

$$\delta_1 = \delta_2 \quad (8.2)$$

Explicitând, se obține succesiv

$$\begin{aligned} \frac{N_1 L}{A_1 E_1} = \frac{N_2 L}{A_2 E_2} &\Rightarrow \frac{N_1}{A_1 E_1} = \frac{N_2}{A_2 E_2} = \frac{N_1 + N_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} = \frac{F}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \\ &\Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Rezultă că forța F se repartizează pe cele două corpuri astfel încât raportul tensiunilor este egal cu raportul modulelor de elasticitate longitudinală și nu depinde de mărimea secțiunilor transversale. Pentru ca fiecare din cele două corpuri să aibă dimensiunile secțiunii transversale minime (astfel volumul va fi minim, deoarece lungimile sunt aceleași) trebuie ca în acestea să se atingă simultan tensiunile admisibile. Se admite ca limită periculoasă tensiunea de curgere și se consideră același coeficient de siguranță pentru ambele corpuri. Astfel relația devine

$$\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a2}} = \frac{E_1}{E_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sigma_{c1}}{c}}{\frac{\sigma_{c2}}{c}} = \frac{E_1}{E_2} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} = \frac{E_1}{E_2} \quad (8.4)$$

Această relație nu poate fi satisfăcută deoarece toate mărimile pe care le conține sunt caracteristici de material. În consecință, optimizarea cerută nu este posibilă, decât numai întâmplător, pentru o eventuală împerechere favorabilă de materiale.

2. Diametrul barei d_1 se consideră aproximativ egal cu diametrul interior al țevii (jocul este foarte mic în comparație d_1). Se notează cu d_2 diametrul exterior al țevii.

Se scrie ecuația de echilibru

$$M_{x1} + M_{x2} = M_t \quad (8.5)$$

Se ridică nedeterminarea scriind egalitatea rotirilor pentru ambele corpuri

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (8.6)$$

sau, explicitând

$$\frac{M_{x1}}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_{x2}}{G_2 I_{p2}} = \frac{M_{x1} + M_{x2}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} = \frac{M_t}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} \quad (8.7)$$

Înmulțind (8.7) cu $d_1 d_2 / 2$, ținând cont de expresia modului de rezistență polar, în baza criteriului de rezistență rezultă

$$\frac{M_{x1} d_2}{G_1 W_{p1}} = \frac{M_{x2} d_1}{G_2 W_{p2}} = \frac{M_t}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} \cdot \frac{d_1 d_2}{2} \quad (8.8)$$

$$\frac{\tau_1 d_2}{G_1} = \frac{\tau_2 d_1}{G_2} \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{\tau_2 G_1}{\tau_1 G_2} \quad (8.9)$$

În cele două corpuri trebuie să se atingă simultan tensiunile admisibile. Se admite ca limită periculoasă tensiunea de curgere și se consideră același coeficient de siguranță pentru ambele corpuri. Astfel, relația (8.7) devine

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\tau_{a2} G_1}{\tau_{a1} G_2} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{\tau_{c2}}{c} G_1}{\frac{\tau_{c1}}{c} G_2} \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{\tau_{c2}}{\tau_{c1}} \cdot \frac{G_1}{G_2} \quad (8.10)$$

Se observă că numai membrul drept al relației (8.10) conține caracteristici de material și soluția problemei este cea dată de această relație.

3. Relațiile (8.3) și (8.4) dau raportul tensiunilor din cele două corpuri, care poate fi comparat cu cel al tensiunilor de curgere. Deoarece nu se cunoaște în care corp se va atinge prima dată tensiunea admisibilă, se face un studiu pentru a evalua posibilitățile existente.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} > \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (8.11)$$

Dacă $\sigma_1 = \sigma_{c1} \rightarrow \sigma_2 < \sigma_{c2}$;

Dacă $\sigma_2 = \sigma_{c2} \rightarrow \sigma_1 > \sigma_{c1}$;

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} < \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (8.12)$$

Dacă $\sigma_1 = \sigma_{c1} \rightarrow \sigma_2 > \sigma_{c2}$;

Dacă $\sigma_2 = \sigma_{c2} \rightarrow \sigma_1 < \sigma_{c1}$.

Dintre situațiile prezentate mai sus, nu pot fi acceptate cele în care se depășește o tensiune de curgere. Rămân numai două posibilități pentru care, ținând cont de relațiile (8.3), se obțin următoarele forțe capabile

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} < \frac{E_1}{E_2}, \quad \sigma_1 = \sigma_{c1} \Rightarrow F_{cap1} &= (A_1 E_1 + A_2 E_2) \frac{\sigma_{c1}}{E_1}; \\ \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} > \frac{E_1}{E_2}, \quad \sigma_2 = \sigma_{c2} \Rightarrow F_{cap2} &= (A_1 E_1 + A_2 E_2) \frac{\sigma_{c2}}{E_2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Se observă că, dacă raportul tensiunilor de curgere este mai mic decât cel al modulelor de elasticitate, tensiunea de curgere se atinge pentru prima dată în bară (corpul 1). Dacă însă dacă raportul tensiunilor de curgere este mai mare decât cel al modulelor de elasticitate, tensiunea de curgere se atinge pentru prima dată în țeavă (corpul 2).

4. Obiectul de tăiat este supus la forfecare cu încovoiere, deoarece fălcile foarfecii nu sunt coplanare, ci ușor decalate. Pentru o bună funcționare a foarfecii, efectul încovoierii trebuie să fie neglijabil. Când șurubul este strâns prea puțin, fălcile foarfecii sunt prea distanțate, momentul încovoiator (egal cu modulul forței dintr-o falcă înmulțit cu distanța dintre fălci) crește semnificativ și foarfeca nu taie bine. Când șurubul este prea strâns, momentul este mic, foarfeca taie, însă forțele de frecare dintre fălci (egale cu produsul dintre coeficientul de frecare și forța normală de apăsare) sunt prea mari. Când șurubul este corect strâns, forțele de frecare și momentul sunt suficient de mici, predominantă este solicitarea de forfecare (tăiere) și foarfeca taie corect.

5. Arborii sunt piese supuse la solicitarea compusă de torsiune cu încovoiere. La stabilirea diametrului minim final se face un calcul care ține cont de solicitarea

compusă, de prezența secțiunilor slăbite (cele în care există canale de pană etc.), a solicitărilor variabile, a șocurilor și vibrațiilor. Predimensionarea arborelui se face numai pentru solicitarea statică la torsiune.

Se notează cu D_1 diametrul arborelui de secțiune plină și cu D și d diametrul exterior și respectiv interior al secțiunii inelare.

Între cele două variante constructive ale arborelui diferă numai forma și dimensiunile secțiunii transversale. Modul de încărcare și rezemare, precum și materialul din care este confecționat, se presupune că rămân aceleași. Rezultă că momentul de torsiune M_x este același pentru ambele variante, pentru care se face predimensionarea din inecuațiile

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{M_x}{W_{p1}} \leq \tau_a; & \tau_2 &= \frac{M_x}{W_{p2}} \leq \tau_a; \\ W_{p1} &= \frac{\pi D_1^3}{16}; & W_{p2} &= \frac{\pi D^3}{16} \cdot (1 - k^4)\end{aligned}\tag{8.14}$$

unde s-a notat

$$k = \frac{d}{D}\tag{8.15}$$

Din (8.14) și (8.15) rezultă

$$\frac{16M_x}{\pi D_1^3} \leq \tau_a; \quad \frac{16M_x}{\pi D^3 (1 - k^4)} \leq \tau_a\tag{8.16}$$

Rezolvând inecuațiile (8.16) se obține

$$D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi \tau_a}}; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi \tau_a (1 - k^4)}}\tag{8.17}$$

Diametrele arborilor nu pot fi stabilite, deoarece depind de mărimi care nu au fost indicate. Însă economia procentuală, ca greutate, se poate calcula cu relația

$$\left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \cdot 100\%\tag{8.18}$$

Se calculează raportul greutateilor arborelui realizat în cele două variante constructive

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma A_1 L}{\gamma A_2 L} = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{D_1}{D} \right)^2 \cdot \frac{1}{1-k^2} \quad (8.19)$$

Din (8.17) și (8.18) se obține

$$\frac{G_1}{G_2} = \sqrt[3]{\frac{(1+k^2)^2}{1-k^2}} \quad (8.20)$$

Economia de material se determină funcție de raportul diametrelor k , înlocuind (8.20) în (8.18):

$$\left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\sqrt[3]{\frac{(1+k^2)^2}{1-k^2}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (8.21)$$

Raportul k nu poate lua valori prea apropiate de 1, datorită pericolului apariției flambajului la torsiune, manifestat prin voalarea pereților subțiri. Se recomandă reprezentarea grafică a acestei funcții, de exemplu pentru $k \in [0, 0,5]$. În cazul arborelui de secțiune inelară, pentru $k = 0,5$, se obține o economie de material de 27,72%.

6. Fie d diametrul cercului și a latura pătratului. Osia este solicitată cu momentul încovoietor M . Dimensionând în cele două variante se obține

$$\begin{aligned} \frac{M}{W_{z1}} = \frac{M}{W_{z2}} \leq \sigma_a \Rightarrow W_{z1} = W_{z2} \\ W_{z1} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_{z2} = \frac{a^3}{6} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Notând

$$\frac{d}{a} = k \quad (8.23)$$

Din (8.22) și (8.23) rezultă

$$k = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}} \quad (8.24)$$

Raportul greutateilor osiilor realizate în cele două variante este

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma V_1}{\gamma V_2} = \frac{\pi d^2 \cdot L}{4} \cdot \frac{1}{a^2 \cdot l} = \frac{\pi}{4} k^2 \quad (8.25)$$

Din (8.24) și (8.25) rezultă

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^{2/3} \approx 1,1177 \quad (8.26)$$

Rezultă că osia cu secțiunea circulară este cu circa 11,77% mai grea față de cea cu secțiune pătrată. În consecință, secțiunea pătrată va fi preferată în acest caz celei circulare. Rezultatul poate fi explicat prin faptul că în cazul secțiunii circulare numai în fibra superioară și cea inferioară se atinge tensiunea admisibilă, pe când în cazul secțiunii pătrate această tensiune există în toate fibrele de pe latura superioară sau inferioară. În consecință, în cazul secțiunii pătrate un volum mai mare de material este solicitat la tensiuni apropiate de cea admisibilă. Prin adoptarea unor secțiuni cu mase mai îndepărtate de axa neutră (profil *I*, cheson etc.), se pot obține economii suplimentare de material. Aceste secțiuni sunt preferate la construirea osiilor.

7. Arcurile pentru vehicule trebuie să aibă deformații mari (pentru a prelua șocuri) și să fie ușoare. Forma arcurilor lamelare din oțel aproximează în trepte grinda de egală rezistență, care are volum minim și deformații maxime. Oțelul are modulul de elasticitate mai mare decât polimerii armați (în general, cu circa un ordin de mărime). Din acest motiv, deformațiile pieselor din oțel vor fi cu același ordin de mărime mai mici decât cele ale pieselor similare construite din materiale compozite. Energia potențială de deformare elastică înmagazinată de un corp sau sistem elastic este invers proporțională cu modulul de elasticitate al materialului din care acesta este confecționat. Pentru mărirea deformațiilor unei grinzi se poate utiliza fenomenul de lunecare longitudinală, adoptând varianta construcției multi-lamelare în locul celei masive. Tensiunile din lamele sunt mai mici decât tensiunile din grinda masivă. Din cauza modulului de elasticitate relativ scăzut, la polimerii armați se poate adopta secțiunea masivă. Pentru aceasta variantă constructivă prețul manoperei este mai mic.

8. Grinda de lungimea L este considerată simplu rezemată, cu două console de lungime x , încărcată cu o forță uniform distribuită (provenită din greutatea proprie a grinzii) de intensitate q și o forță concentrată F provenită din acțiunea sportivei asupra grinzii. Situațiile cele mai nefavorabile pentru grindă sunt cele în care forța F acționează la capătul consolei sau la mijlocul distanței dintre reazeme. Aceste două cazuri vor fi studiate în cele ce urmează.

Cazul 1. Forța F acționează la capătul consolei

Momentul încovoietor maxim este în secțiunea în care se află reazemul din vecinătatea forței și are valoarea

$$M'_z = -\frac{qx^2}{2} - Fx \quad (8.27)$$

Tensiunea maximă în această secțiune este

$$\sigma'_x = \frac{|M'_z|}{W_z}; \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (8.28)$$

Cazul 2. Forța F acționează la mijlocul deschiderii

Momentul încovoietor maxim este în secțiunea de la mijlocul deschiderii (a distanței dintre reazeme) și are valoarea

$$M''_z = \frac{qL}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) - \frac{qL^2}{8} + \frac{F}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (8.29)$$

Tensiunea maximă în această secțiune este

$$\sigma''_z = \frac{|M''_z|}{W_z} \quad (8.30)$$

Determinarea lungimii consolei

Este rațional ca tensiunile maxime din cele două secțiuni periculoase să fie egale în modul. Deoarece grinda are secțiune constantă pe toată lungimea, aceasta condiție echivalează cu egalarea momentelor încovoietoare în cele două secțiuni și astfel se asigură un volum minim al grinzii

$$\frac{qx^2}{2} + Fx = \frac{qL}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) - \frac{qL^2}{8} + \frac{F}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (8.31)$$

Ecuația (8.31) mai poate fi scrisă

$$4qx^2 + 4(3F + qL)x - (qL^2 + 2FL) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2q} \left(-3F - qL + \sqrt{9F^2 + 8FqL + 2q^2L^2} \right) \quad (8.32)$$

Trebuie să fie îndeplinită condiția $x \geq 0$.

În (8.32) $qL = G$ este greutatea grinzii, iar F forța maximă cu care acționează sportiva, adică forța dinamică, care este mai mare decât greutatea sportivei. Dacă, de exemplu, se presupune $F = G$, se obține $x \approx 0,1795L$. Pentru lungimea grinzii de 5m, rezultă $x \approx 0,9m$.

Secțiunile periculoase sunt cele în care momentele încovoietoare sunt maxime. Când forța F acționează la capătul consolei, secțiunea periculoasă este în dreptul celui mai apropiat reazem. Când forța F acționează la mijlocul deschiderii, secțiunea periculoasă este în dreptul forței. Lemnul uscat are o rupere fragilă și din acest motiv, fibrele de la exteriorul curburii, care sunt supuse la tracțiune și sunt cele mai îndepărtate de axa neutră, vor ceda primele: fibrele de la partea superioară a grinzii în primul caz de încărcare și respectiv cele de la partea inferioară a grinzii în al doilea caz de încărcare.

Stabilirea diametrului minim al bușteanului

Din (8.28) și (8.30) se observă că, pentru un moment încovoiător maxim fixat, tensiunile normale sunt minime atunci când modulul de rezistență W_z este maxim. Considerând secțiunea grinzii un dreptunghi de laturi b și h , înscris în cercul de diametru d , aplicând teorema lui *Pitagora*, se obține

$$d^2 = b^2 + h^2 \quad (8.33)$$

Din formula lui W_z (8.28) și (8.33) rezultă

$$W_z(b) = \frac{1}{6} b(d^2 - b^2) \quad (8.34)$$

Pentru a determina maximul funcției $W_z(b)$ se anulează prima derivată

$$W'_z = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2) = 0 \quad (8.35)$$

Din (8.35) și (8.36) rezultă succesiv

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \approx 0,577d \quad (8.36)$$

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d \approx 0,816d \quad (8.37)$$

Din relațiile de mai sus se pot determina b , h și d .

9. Turnul *Eiffel* are forma unui solid de egală rezistență, cu secțiunea pătrată.

10. Când ridicarea are loc astfel încât șina este paralelă cu solul, aceasta este solicitată la încovoiere. Ea ar putea fi aproximată cu o grindă încărcată cu o forță uniform distribuită de intensitate q , egală cu greutatea șinei împărțită la lungimea ei.

În *prima variantă* de ridicare șina este așezată în poziția de rezistență minimă pentru această solicitare (axa Oy este paralelă cu solul, W_y este modulul de rezistență axial minim). În consecință, această metodă de ridicare este dezavantajoasă.

În *a doua variantă* de ridicare grinda este suspendată la capete cu cabluri care fac unghiul α cu direcția șinelor. Șinele sunt solicitate la încovoiere cu compresiune. Componentele forței din cablu pe direcție orizontală și verticală sunt

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \sin \alpha \quad (8.38)$$

Scriind echilibrul forțelor pe verticală se obține

$$2F_y = G \quad (8.39)$$

unde G este greutatea întregului tronson.

Egalând forța F_y calculată cu (8.38) și (8.39) se obține forța din cablu

$$F = \frac{G}{2 \sin \alpha} \quad (8.40)$$

Această forță este mai mare decât cea care solicită cablul în cazul în care acesta ar fi vertical. Forța de compresiune F_x poate produce flambajul șinei, care este un fenomen nedorit.

În *a treia variantă* de ridicare cablurile sunt verticale, dar sunt prinse la distanțele x față de capetele șinei. Problema este cea din *figura 7.58c*, dar grinda fiind susținută de cabluri în locul reazemelor simple. În consecință, rămâne valabilă soluția de la această problemă de optimizare, $x = 0,207L$. În această variantă, tensiunile din grinda ridicată sunt minime.

11. Presupunem că în bulbul de sticlă al becului nu există oxigen. Filamentul este supus la încovoiere sub efectul greutății proprii. Datorită temperaturii ridicate, în material apare fenomenul de fluaj. În consecință, acumularea deformațiilor plastice conduce la creșterea lungimii și la scăderea secțiunii filamentului în timp. Când secțiunea devine prea mică, filamentul se va rupe prin fluaj la încovoiere. Pentru a prelungi durata de funcționare nu se poate recurge la mărirea secțiunii filamentului, deoarece aceasta are efect asupra puterii becului. O soluție ar fi micșorarea tensiunilor din filament. Acest lucru se poate realiza prin mărirea numărului de suporti de sârmă, adică a micșorării distanței dintre două reazeme consecutive.

12. În primul caz colile nu sunt solidarizate și se produce fenomenul de lunecare longitudinală la încovoierea pachetului. Ansamblul lucrează ca n grinzi (coli) suprapuse. Când colile sunt solidarizate, se împiedică deplasarea lor pe direcție longitudinală și ansamblul lucrează ca o singură grindă. Dacă se neglijează frecarea, raportul momentelor care produc încovoierea în cele două cazuri este același cu cel al modulelor de inerție

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\sigma_a W_{z2}}{\sigma_a W_{z1}} = \frac{b(nh)^2}{6} \cdot \frac{6}{n(bh^2)} = n \quad (8.41)$$

unde: b = lățimea filei; h = grosimea unei file.

Rezultă că în cazul solidarizării (lipirii) colilor pachetul poate suporta un moment egal cel necesar încovoierii pachetului normal de înmulțit cu numărul de file. Raportul săgeților va fi însă invers proporțional cu cel al momentelor de inerție din cele două cazuri

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{I_{z1}}{I_{z2}} = n \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{b(nh)^3} = \frac{1}{n^2} \quad (8.42)$$

S-a presupus că are loc cedarea colilor înaintea cedării adezivului prin forfecare.

13. În cazul solicitării la forfecare volumul de material deformat este minim, comparativ cu celelalte solicitări simple. În consecință, energia înmagazinată în volumul de material deformat va fi minimă. Pe lângă consumul redus de energie solicitarea la forfecare mai prezintă avantajul unei prinderi mai simple și al unor deformații plastice minime. Pentru ruperea la tracțiune, de exemplu, se consumă multă energie, prinderea este dificilă iar deformațiile plastice din zona de rupere sunt mari. Ruperea prin compresiune sau încovoiere nici nu poate fi obținută la materiale tenace care se deformează mult, fără să se rupă la aceste solicitări.

14. Puntea poate fi considerată ca o grindă rezemată la capete, încărcată cu o forță concentrată. Situația periculoasă este cea în care forța (greutatea omului) acționează la mijlocul grinzii (deschiderii). În acest caz momentul maxim este

$$M_{\max} = \frac{FL}{4} \quad (8.43)$$

Scândura ar putea fi așezată cu latura mare pe verticală, caz în care ar trebui să fie susținută cu doi țăruiși, de o parte și de alta, pentru a nu se răsturna. Așezată în cele două poziții, scândura poate prelua momentul maxim

$$M_{cap1} = W_{z1} \sigma_a = \frac{hb^2}{6} \sigma_a; M_{cap2} = W_{z2} \sigma_a = \frac{bh^2}{6} \sigma_a \quad (8.44)$$

De unde rezultă

$$h \gg b \Rightarrow M_{cap2} \gg M_{cap1} \quad (8.45)$$

Dacă scândura astfel așezată poate suporta greutatea omului, rămâne problema menținerii echilibrului la traversare. Ridicarea mâinilor în poziție orizontală, de o parte și de alta a corpului, ajută la menținerea echilibrului.

15. Forțele distribuite produc tensiuni și deformații mai mici în comparație cu forțele concentrate static echivalente. Mărind suprafața de distribuite a forței, se vor micșora tensiunile din gheață. De exemplu, pentru o grindă simplu rezemată la capete și încărcată cu o forță uniform distribuită de intensitate q , momentul încovoietor maxim este localizat la jumătatea deschiderii și are valoarea

$$M_1 = \frac{qL^2}{8} \quad (8.46)$$

Pentru aceeași grindă, încărcată la jumătatea deschiderii cu forță concentrată static echivalentă $Q = qL$, momentul încovoietor maxim este localizat tot la jumătatea deschiderii și are valoarea

$$M_2 = \frac{QL}{4} = \frac{qL^2}{4} \quad (8.47)$$

Se observă că grinda încărcată cu forța uniform distribuită poate prelua un moment maxim (capabil) de doua ori mai mare.

16. Prin încălzire scad mult modulul de elasticitate și tensiunea de curgere (*fig. 2.20*). Astfel, deformările plastice mari pot fi produse cu forțe mult mai mici.

17. Plăcile ondulate au o rigiditate mult mai mare la încovoiere, în comparație cu cele plane de aceeași grosime, deoarece prin ondulare crește momentul de inerție al secțiunii transversale a plăcii. Astfel se realizează economii de material, deoarece o placă plană care să aibă aceeași rigiditate ar fi mult mai groasă.

18. Cablul construit în a doua variantă este mai flexibil, datorită fenomenului de lunecare longitudinală. Tensiunile normale produse în filamente la îndoirea cablului sunt mai mici, în comparație cu cablul masiv. Deoarece și tensiunile dintr-un filament al cablului lițat sunt cu mult mai mici (*fig. 7.60b*), el va rezista la un număr mai mare de îndoiri și dezdoiri repetate, până la rupere (fenomenul de oboseală a materialelor).

19. Înlăturând un reazem, lungimea barei variază cu cantitatea

$$\delta = \alpha L \Delta t \quad (8.48)$$

Alungirea specifică este

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \alpha \Delta t \quad (8.49)$$

iar tensiunea

$$\sigma = E\varepsilon = \alpha E \Delta t \quad (8.50)$$

Se observă că alungirea specifică și tensiunea nu depind de lungimea barei. Raportul alungirilor specifice este

$$\frac{\varepsilon_{OL}}{\varepsilon_{Al}} = \frac{\alpha_{OL}}{\alpha_{Al}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{2,4 \cdot 10^{-5}} = 0,5 \quad (8.51)$$

Din (8.51) și legea lui *Hooke* rezultă raportul tensiunilor

$$\frac{\sigma_{OL}}{\sigma_{Al}} = \frac{\alpha_{OL} E_{OL}}{\alpha_{Al} E_{Al}} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2,1 \cdot 10^5}{2,4 \cdot 10^{-5} \cdot 0,7 \cdot 10^5} = 1,5 \quad (8.52)$$

Deși alungirea specifică este mai mare în bara de aluminiu, tensiunea mai mare se atinge în bara de oțel. Deoarece

$$\frac{\sigma_{p.OL}}{\sigma_{p.Al}} = \frac{2100}{1200} = 1,75 \quad (8.53)$$

rezultă că limita de proporționalitate se atinge prima dată în bara de aluminiu.

20. Barele de armare trebuie să fie amplasate cât mai departe de axa neutră a grinzii, în zona tensiunilor normale maxime. În cazul solicitărilor statice forțele acționează numai pe verticală și barele de armare trebuie să fie amplasate cât mai aproape de fața superioară și inferioară a grinzii. Ele ar trebui să fie mai numeroase pe partea grinzii cu tensiuni pozitive (la exteriorul curburii), deoarece betonul este un material cu rupere fragilă, care rezistă mult mai bine la compresiune decât la tracțiune. În timpul cutremurelor, grinzile pot fi solicitate la încovoiere și în plan orizontal, iar distribuția barelor de armare rațională este la periferia secțiunii, pe întreg perimetrul. Aceeași armare este utilizată la stâlpi.

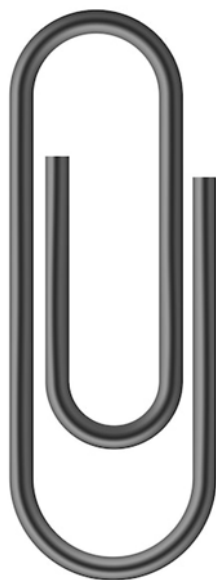
21. Reacțiunile nu se modifică la deplasarea reazemelor, dacă se păstrează simetria.

22. Barajul unui lac de acumulare este supus la compresiune datorită greutateii proprii și la încovoiere cu o forță liniar distribuită, datorită presiunii apei din lac. Barajul să fie un solid de egală rezistență, supus simultan la aceste două solicitări.

23. Aripile avioanelor sunt grinzi în consolă. Pentru avioanele mari, ele sunt realizate ca solid de egală rezistență. La avioanele mici, această formă nu este rentabilă economic.

24. La îmbinarea cu două table șurubul are o secțiune de forfecare, iar la cea cu trei table are două secțiuni de forfecare. În consecință, acest șurub este forfecat la o forță $2F$.

25. În bară nu se produc deplasări axiale, dar apar tensiuni normale de compresiune. Capetele barei nu se deplasează (sunt încastrate), la fel și secțiunea din mijloc (datorită simetriei). Se aplică apoi același raționament pentru fiecare jumătate și așa mai departe.



ANEXE

Sursa: <https://www.freepik.com/free-photos-vectors/paperclip>

9. ANEXE

ANEXA 1. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR PLANE

În această categorie generică sunt încadrate *aria*, *momentele statice*, *momentele de inerție*, *razele de inerție*, *module de inerție* etc. Suprafața plană poate fi cea a secțiunii transversale a unei bare. Deoarece axa Ox se alege pe direcția axei barei, se va lucra în sistemul de referință zOy .

A.1. ARIE, MOMENT STATIC

Aria cuprinsă între o curbă $y = f(z)$ și axa absciselor, luată între z_1 și z_2 se calculează cu integrala definită

$$A = \int_{z_1}^{z_2} f(z) \cdot dz \quad (A.1)$$

Momentul static al unei suprafețe față de o axă (fig. A.1) se calculează cu relațiile

$$S_z = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A z \cdot dA \quad (A.2)$$

Momentul static se măsoară în $[mm^3]$. În figura A.1 s-a notat cu G centrul de greutate al suprafeței A . Dacă z_G și y_G sunt coordonatele centrului de greutate G al unei figuri de arie A , se pot scrie relațiile (fig. A1):

$$S_z = A \cdot y_G; \quad S_y = A \cdot z_G \quad (A.3)$$

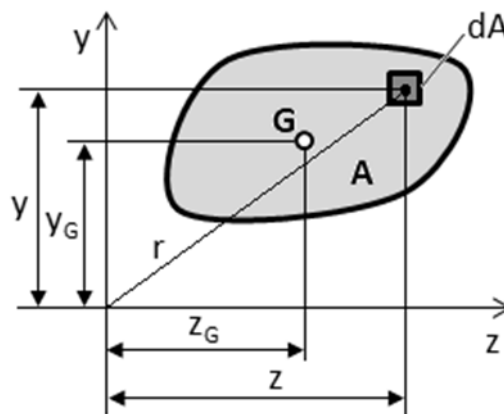


Fig. A.1. Schema pentru stabilirea momentelor statice si a celor de inerție

În vederea determinării momentului static figurile complexe se divid în figuri mai simple (dacă este posibil), la care se cunosc aria și poziția centrului de greutate. Momentul static al întregii figuri se poate determina prin sumarea algebrică a momentelor statice ale figurilor componente

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Gi}; \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{Gi} \quad (\text{A.4})$$

unde A_i este suprafața figurii i iar z_{Gi} și y_{Gi} sunt coordonatele centrului de greutate al figurii i . *Ariile, momentele statice și momentele de inerție ale unor cavități sunt considerate negative.*

A.2. POZIȚIA CENTRULUI DE GREUTATE

Din relația (A.3) rezultă coordonatele centrului de greutate

$$z_G = \frac{S_y}{A}; \quad y_G = \frac{S_z}{A} \quad (\text{A.5})$$

S_z și S_y pot fi determinate cu relația (A.2). Pentru cazul unei figuri complexe, care poate fi descompusă în figuri simple, S_z și S_y se pot determina cu (A.4) iar relațiile (A.5) devin

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{Gi}}{A}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A} \quad (\text{A.6})$$

unde aria întregii figuri este

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (\text{A.7})$$

Orice axă de simetrie conține centrul de greutate al figurii. Rezultă că la intersecția a două axe de simetrie se găsește centrul de greutate al figurii.

A.3. MOMENTE DE INERȚIE

A.3.1. Momente de inerție axiale

Momentele de inerție ale unei figuri, stabilite față de axele Oz și respectiv Oy (fig. A.1) sunt

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad (\text{A.8})$$

A.3.2. Moment de inerție centrifugal

Momentul de inerție centrifugal se determină cu relația

$$I_{zy} = \int_A zy \cdot dA \quad (\text{A.9})$$

I_{zy} poate fi pozitiv, nul sau negativ. Axele în raport cu care $I_{zy} = 0$ se numesc axe principale de inerție. Față de aceste axe, momentele de inerție axiale I_z și I_y au valori maxime, respectiv minime. Axele de simetrie sunt și axe principale de inerție.

A.3.3. Moment de inerție polar

Momentul de inerție polar se definește ca (*fig. A.1*):

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (\text{A.10})$$

Se scrie teorema lui *Pitagora* pentru unul dintre triunghiurile formate în *figura A.1* ($r^2 = z^2 + y^2$), se înlocuiește în (A.9) și ținând cont de (A.7) se obține

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A r^2 dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA \Rightarrow \\ I_p &= I_z + I_y \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Unitatea de măsură pentru toate momentele de inerție este $[\text{mm}^4]$.

A.3.4. Variația momentelor de inerție

Variația momentelor de inerție la translația axelor

Fie o suprafață plană și un sistem de referință central zOy (cu originea în centrul de greutate G al suprafeței), față de care momentele de inerție ale suprafeței sunt I_z , I_y și I_{zy} . Momentele de inerție ale suprafeței față de un alt sistem de referință, z_1Oy_1 , având axele paralele cu primul (*fig. A.2*) sunt date de relațiile lui *Steiner*

$$\begin{cases} I_{z1} = I_z + y_G^2 A \\ I_{y1} = I_y + z_G^2 A \\ I_{z1y1} = I_{zy} + z_G y_G A \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

În relația (A.12) coordonatele z_G și y_G sunt luate cu semnul lor.

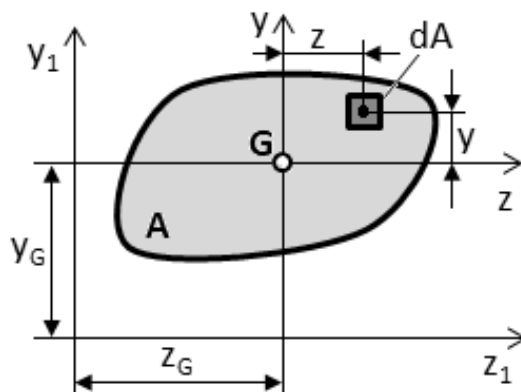


Fig. A.2. Raportarea momentelor de inerție la un sistem de axe paralele

Variația momentelor de inerție la rotirea axelor

Fie o suprafață plană raportată la un sistem de referință cu originea în centrul ei de greutate (fig. A.3). Cunoșcând momentele de inerție față de aceste axe, I_z , I_y și I_{zy} , momentele de inerție față de un sistem de referință rotit cu unghiul α se determină cu ajutorul relațiilor

$$\begin{cases} I_{z1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \\ I_{y1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \\ I_{z1y1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Adunând primele două relații (A.13) rezultă

$$I_{z1} + I_{y1} = I_z + I_y = I_p = \text{const.} \quad (\text{A.14})$$

La rotirea sistemului de axe de coordonate suma momentelor de inerție axiale rămâne constantă și egală cu momentul de inerție polar în raport cu originea sistemului.

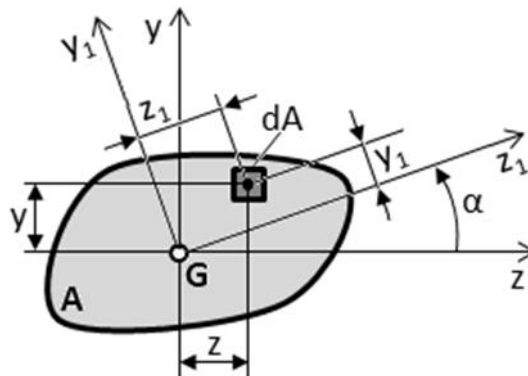


Fig. A.3. Raportarea momentelor de inerție la un sistem de axe rotit

Momente de inerție principale, axe de inerție principale

Din relațiile (A.13) se observă că momentele de inerție I_z și I_y variază cu unghiul α . Ele prezintă *valori extreme* (maxime și minime), numite *momente de inerție principale*, care sunt notate cu I_1 și I_2 ($I_1 > I_2$). Momentele de inerție principale se determină cu

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (\text{A.15})$$

unde $I_1 = I_{\max}$, $I_2 = I_{\min}$. Semnul (+) se consideră pentru I_1 , (-) pentru I_2 .

Axele de referință în raport cu care momentele de inerție au valori extreme se numesc *axe principale de inerție* și se notează cu 1 și 2. *Axele de simetrie* ale unei figuri sunt axe principale de inerție. *Momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul în raport cu axele principale de inerție*. Direcțiile axelor principale, (*direcțiile principale*) sunt date de ecuația

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (\text{A.16})$$

Direcția axei principale 1, (față de care momentul de inerție este maxim) poate fi stabilită studiind semnul modului de inerție centrifugal. Pentru $I_{zy} < 0$ axa principală 1 trece prin primul cadran, iar pentru $I_{zy} > 0$ prin cadranul al doilea. Față de axa 1 există puncte ale suprafeței mai îndepărtate, comparativ cu axa 2.

Direcțiile principale sunt ortogonale. Valorile extreme ale momentului de inerție centrifugal I_{zy} corespund unui sistem de axe care fac un unghi de 45° față de axele principale.

A.3.5. Module de inerție

Modulele de rezistență față de axe sunt definite cu relațiile

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad (\text{A.17})$$

unde:

- $y_{\max}$ = distanța de la axa Oz la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii;
- $z_{\max}$ = distanța de la axa Oy la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii.

Se definește modul de rezistență polar raportul dintre momentul de inerție polar și distanța de la pol până la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} \quad (\text{A.18})$$

Modulele de rezistență se măsoară în $[\text{mm}^3]$.

A.3.6. Elipsa de inerție și raze de inerție

Razele de inerție (de rotație) față de axele de referință sunt

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{A.19})$$

Unitatea de măsură pentru razele de inerție este cea de lungime $[\text{mm}]$. Axelor de inerție principale centrale le corespund razele de inerție principale

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}; \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad (\text{A.20})$$

Acestea sunt chiar semiaxele elipsei centrale de inerție, (*fig.A.4*), având ecuația

$$\frac{z^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} = 1 \quad (\text{A.21})$$

Pentru $i_2=i_1$ există simetrie cilindrică și elipsa se reduce la un cerc.

În calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunilor plane pot fi utilizate și reprezentări matriceale [Goia I., 2000]. În *tabelul A.1* sunt date caracteristicile geometrice pentru câteva figuri simple.

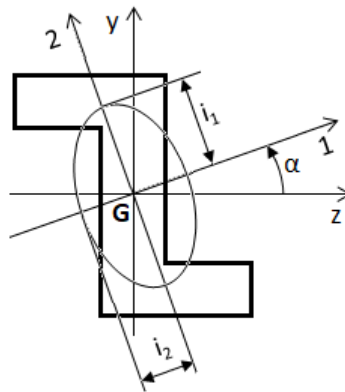


Fig. A.4. Elipsa centrală de inerție

A.4. ETAPELE CALCULULUI CARACTERISTICILOR GEOMETRICE

Pentru determinarea poziției axelor centrale principale și a momentelor de inerție principale centrale ale unei secțiuni care poate fi descompusă în figuri simple se vor parcurge următoarele etape:

1. Alegerea unui sistem de referință arbitrar. Se descompune secțiunea în figuri simple și se determină poziția centrului de greutate al secțiunii cu relația (A.6);
2. Cu relațiile (A.12) se determină momentele de inerție axiale I_z , I_y și I_{zy} față de un sistem de axe central (cu originea în centrul de greutate), axele sale fiind paralele cu cele ale sistemului inițial;
3. Cu relația (A.16) se determină unghiul de rotire al axelor principale;
4. Cu (A.15) se calculează momentele de inerție principale;
5. Cu (A.17), (A.18) și (A.21) se determină modulele de rezistență axiale și respectiv razele de inerție principale.

Aceste etape au fost prezentate pentru cazul general. Existența axelor de simetrie simplifică acest calcul, după cum se va arăta în exemplele care urmează.

Exemplul A.1

Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii din *figura A.5*.

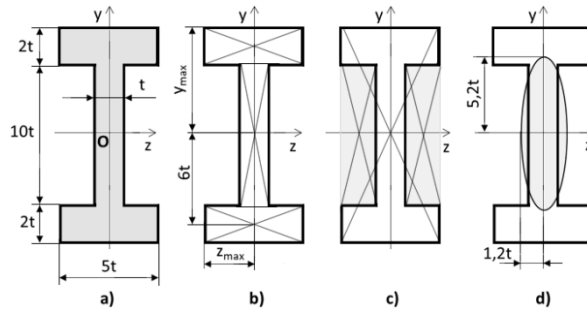


Fig. A.5. Profil I nestandardizat (a): descompunere în dreptunghiuri pentru determinare I_y (b) și I_z (c); elipsa de inerție (d)

La intersecția axelor de simetrie se află centrul de greutate al secțiunii. În vederea determinării I_y se alege sistemul principal central zOy și se descompune profilul în dreptunghiul central (inima profilului) și două dreptunghiuri periferice (tălpi), ca în *figura A5b*. Aria profilului este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor componente.

$$A = t \cdot 10t + 2 \cdot 5t \cdot 2t = 30t^2 \quad (\text{A.22})$$

Dacă toate dreptunghiurile au centrul de greutate pe axa față de care se calculează momentul de inerție, nu se mai utilizează relațiile (A.12) și calculul se simplifică. Din acest motiv s-au ales descompuneri diferite pentru calculul celor două momente de inerție axiale (*fig. A.5*). Utilizând descompunerea din *figura A5b* și datele din *tabelul A.1* pentru secțiune dreptunghiulară se obține

$$I_y = I_2 = \frac{10t \cdot t^3}{12} + 2 \cdot \frac{2t \cdot (5t)^3}{12} = 42,5t^4 \quad (\text{A.23})$$

Cu descompunerea din *figura A.5c* se calculează I_z și se determină modulele de rezistență axiale

$$I_z = \frac{5t(14t)^3}{12} - 2 \cdot \frac{2t(10t)^3}{12} = 810t^4 \quad (\text{A.24})$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{810t^4}{7t} \approx 115,7t^3; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{42,5t^4}{2,5t} = 17t^3 \quad (\text{A.25})$$

Razele de inerție sunt

$$i_z = i_1 = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{810t^4}{30t^2}} \approx 5,2t; \quad i_y = i_2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{42,5t^4}{30t^2}} \approx 1,2t \quad (\text{A.26})$$

Elipsa de inerție este prezentată în *figura A.5d*.

Exemplul A.2

Să se determine caracteristicile geometrice pentru profilul T nestandardizat, prezentat în *figura A.6*.

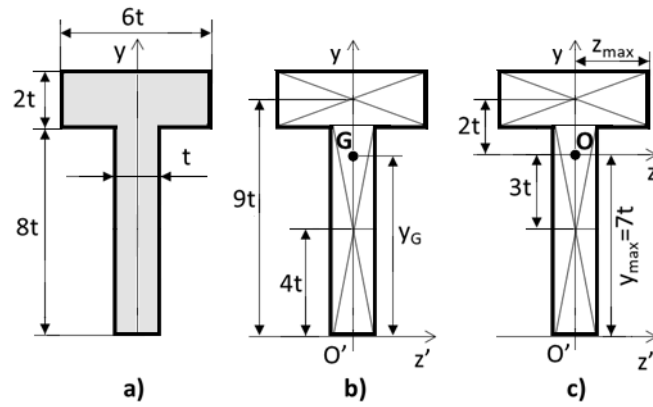


Fig. A.6. Profil T nestandardizat (a), descompunerea în figuri simple și alegerea sistemelor de referință (b, c); în fig. (c) s-a notat G cu O

În continuare vor fi parcurse etapele prezentate la *paragraful A.4*.

1. Axa de simetrie verticală trece prin centrul de greutate al secțiunii și se va calcula numai y_G , față de axa $O'z'$, aleasă arbitrar. În sistemul de axe prezentat în *figura A.6b*, centrul de greutate al secțiunii are abscisa $z_G = 0$ și ordonata

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_{Gi}}{A} = \frac{t \cdot 8t \cdot 4t + 6t \cdot 2t \cdot 9t}{t \cdot 8t + 6t \cdot 2t} = 7t \quad (\text{A.27})$$

2. Axa Oy coincide cu axa de simetrie și, în consecință, este axa de inerție principală. Sistemul de referință zOy este sistem principal central. Având o axă de simetrie, $I_{zy}=0$. Momentele de inerție axiale se determină din *tabelul A.1* și cu relațiile (A.12):

$$I_z = I_1 = \frac{t(8t)^3}{12} + (3t)^2 \cdot t \cdot 8t + \frac{6t(2t)^3}{12} + (2t)^2 \cdot 6t \cdot 2t = 166,6t^4$$

$$I_y = I_2 = \frac{8t \cdot t^3}{12} + \frac{2t \cdot (6t)^3}{12} = 36,6t^4 \quad (\text{A.28})$$

Nu mai trebuie să fie parcurse etapele 3 și 4, sistemul de referință fiind principal. Se trece la ultima etapă și se calculează modulele de rezistență axiale și razele principale de inerție

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{166,6t^4}{7t} \approx 23,8t^3; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{36,6t^4}{3t} \approx 12,2t^3 \quad (\text{A.29})$$

$$i_z = i_1 = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{166,6t^4}{20t^2}} \approx 2,89t; \quad i_y = i_2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{36,6t^4}{20t^2}} \approx 1,35t \quad (\text{A.30})$$

Exemplul A.3

Să se determine caracteristicile geometrice ale profilului din *figura A.7*.

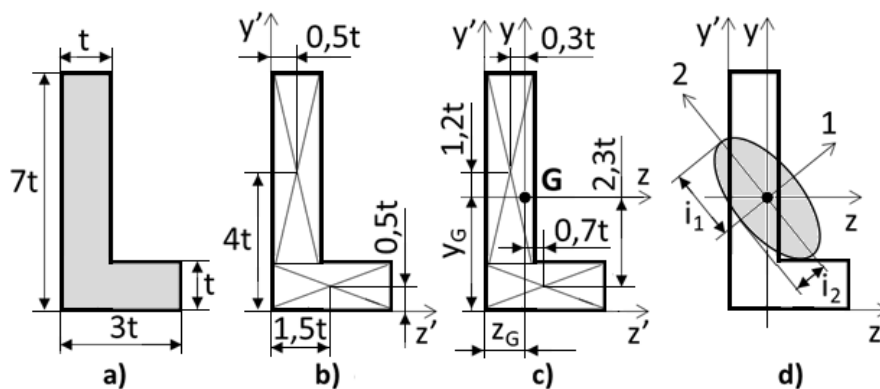


Fig. A.7. Profil cornier (a), descompunere în dreptunghiuri (b), determinarea centrului de greutate G (c) și trasarea elipsei de inerție (d)

În continuare vor fi parcurse etapele prezentate la *paragraful A.4.*

Etapa 1. Se descompune figura în dreptunghiuri și se determină coordonatele centrului de greutate față de sistemul de coordonate $z'O'y'$, arbitrar ales.

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_{Gi}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{3t \cdot t \cdot 0,5t + t \cdot 6t \cdot 4t}{3t \cdot t + t \cdot 6t} \approx 2,8t;$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i z_{Gi}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{3t \cdot t \cdot 1,5t + t \cdot 6t \cdot 0,5t}{3t \cdot t + t \cdot 6t} \approx 0,8t$$
(A.31)

Etapa 2. Determinarea momentelor de inerție

$$I_z = \frac{3t(t)^3}{12} + 3t \cdot t \cdot (2,3t)^2 + \frac{t(6t)^3}{12} + t \cdot 6t \cdot (1,2t)^2 \approx 42,8t^4$$

$$I_y = \frac{t(3t)^3}{12} + 3t \cdot t \cdot (0,7t)^2 + \frac{6t \cdot t^3}{12} + t \cdot 6t \cdot (0,3t)^2 = 4,8t^4$$

$$I_{zy} = t \cdot 3t \cdot 0,7t \cdot (-2,3t) + t \cdot 6t \cdot (-0,3t) \cdot 1,2t \approx -7t^4$$
(A.32)

Etapa 3. Determinarea direcțiilor principale

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot 7t^4}{4,8t^4 - 42,8t^4} \approx 0,368$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \approx 10^0; \alpha_2 = 10^0 + 90^0 = 100^0$$
(A.33)

Etapa 4. Determinarea momentelor de inerție principale

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$

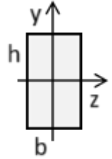
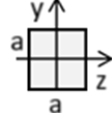
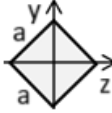
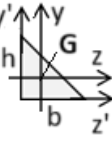
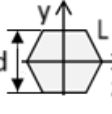
$$= \frac{42,8t^4 + 4,8t^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{42,8t^4 - 4,8t^4}{2}\right)^2 + (-7t^4)^2}$$
(A.34)

Rezultă $I_1 = 43,75t^4$; $I_2 = 3,15t^4$.

Etapă 5. Determinarea razelor de inerție principale

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{44,05t^4}{9t^2}} \approx 2,2t; \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{3,55t^4}{9t^2}} \approx 0,6t \quad (\text{A.35})$$

Tab. A.1. Caracteristici geometrice ale unor secțiuni plane

Nr.	Figura	Aria	Momente de inerție	Module de inerție
1		$A = bh$ Dreptunghi	$I_z = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_z = \frac{bh^2}{6}; W_y = \frac{hb^2}{6}$
2		$A = a^2$ Pătrat	$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{a^3}{6}$
3		$A = a^2$ Pătrat rotit	$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$
4		$A = \frac{\pi d^2}{4}$ Cerc	$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
5		$A = \frac{bh}{2}$ $G\left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$ Triunghi dr.	$I_z = \frac{bh^3}{36}; I_y = \frac{hb^3}{4}$	$W_{zi} = \frac{bh^2}{12}; W_{zs} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{yst} = \frac{b^2h}{12};$ $W_{ydr} = \frac{b^2h}{24}$
6		$A = 2,598L^2$ Hexagon regulat	$I_z = I_y = \frac{5\sqrt{3}}{16}L^4$	$W_z = 0,12d^3;$ $W_y = 0,06d^3$

Legenda: a, b, h, L = lungimile unor laturi;

W_{zi}, W_{zs} = modulele de inerție pentru triunghi dreptunghic, raportate la fibrele extreme superioare/inferioare

W_{yst}, W_{ydr} = modulele de inerție pentru triunghi dreptunghic, raportate la fibrele extreme din stânga/dreapta

ANEXA 2. STAS 75-90 Dimensiuni liniare normale (extras)

La alegerea dimensiunilor, șirurile se preferă în ordinea: Ra 5, Ra 10, Ra 20, Ra 40 și suplimentare.

Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40	Suplimentar	Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40	Suplimentar
10	10	10	10,0	10,2	63	63	63	63,0	65,0
			10,5	10,8				67,0	70,0
			11,0	11,2			71	71,0	73,0
			11,5	11,8				75,0	78,0
		12	12,0	12,5		80	80	80,0	82,0
			13,0	13,5				85,0	88,0
			14,0	14,5			90	90,0	92,0
			15,0	15,5				95,0	98,0
16	16	16	16,0	16,5	100	100	100	100	102
			17,0	17,5				105	108
			18,0	18,5			110	110	112
			19,0	19,5					115
		20	20,0	20,5				120	118
			21,0	21,5					
			22,0	23,0			125	125	135
			24,0					130	145
								140	155
								150	
25	25	25	25,0	27,0	160	160	160	160	165
			26,0	29,0				170	175
			28,0	31,0			180	180	185
			30,0	33,0				190	195
		32	32,0	35,0				200	205
			34,0	37,0			200	210	215
			36,0	39,0				220	230
			38,0					240	
40	40	40	40,0	41,0	250	250	220	220	270
			42,0	44,0				240	290
			45,0	46,0			250	250	310
			48,0	49,0				260	315
		50	50,0	52,0				280	
			53,0	55,0			280	300	
			56,0	58,0					
			60,0	62,0					



Bibliografie

Sursa: <https://turismiasi.wixsite.com/blog/biblioteca-universit%C4%83%C8%9Bii-tehnice?lang=en>

BIBLIOGRAFIE

- Anghel A., *Rezistența materialelor*, partea 1-a, Ed. Tehnică, București, 2001
- Belyaev N.M., *Strength of Materials*, Mir Publishers, Moscow, 1979
- Beer F.P., Johnston R.E., Jr., Dewolf J.T., Mazurek D.F., *Mechanics of Materials*, 6th Ed., McGraw Hill, 2012
- Bia C., Ilie V., Soare M.V., *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, EDP, București, 1983
- Bârsanescu P.D., O nouă metodă energetică de calcul a deformațiilor liniar-elastice ale unui solid deformabil, *Construcția de mașini*, 37, nr. 6, 1985, pag. 343-348
- Black P., *Strength of Materials. A Course for Students*, Pergamon Press, Oxford, 1966
- Buzdugan Gh. (coord.), *Manualul inginerului mecanic*, vol. 2, Ed. Tehnică, București, 1973
- Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București, 1986
- Chandupatla T.R., Belegundu A.D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*, Pearson Ed., 4th Ed., 2012
- Conte R.R., *Eléments de cryogénie*, Ed. Masson et C-ie, Paris, 1970
- Crawford R.J., *Plastics Engineering*, 2nd Ed., 1987, Pergamon Press, Oxford
- Curtu I., Sperchez F., *Rezistența materialelor*, Univ. Brașov, 1988
- Deutsch I., *Rezistența materialelor*, EDP, București, 1976
- Dieter G. (vol. chair), *ASM Handbook*, vol. 20, Materials Selection and Design, ASM, 1997
- Drăgănescu M., *Electronica corpului solid*, Ed. Tehnică, București, 1972
- Gellert W., ș.a. (ed.), *Mică enciclopedie matematică*, Ed. Tehnică, București, 1980
- Goia I., *Rezistența materialelor*, vol. 1, ediția a 3-a, Editura Transilvania, Brașov, 2000

Hibbeler R.C., *Mechanics of Materials*, 10th ed., Pearson Ed. Inc., 2018

Horbaniuc D., *Rezistența materialelor*, vol. 1-2, Inst. Politehnic-Iași, 1979

Horbaniuc D. (coord.), *Rezistența mat. Elasticitate. Probleme*, Ed. „Gh. Asachi”, Iași, 1993

Mocanu D.R. (coord) ș.a., *Încercarea materialelor*, vol. 1-3, Ed. Tehnică, București, 1982

Mocanu D.R., *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980

Neatherley R., *Applied Strength of Materials*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982

Pascariu I., *Elemente finite. Concepte. Aplicații*. Ed. Militară, București, 1985

Pissarenko G., Yakovlev A., Matveev V., *Aide-mémoire de résistance des matériaux*, Ed. Mir, Kiev, 1975

Ponomariov S.D. ș.a., *Calculul de rezistență în construcție de mașini*, vol. 1, Ed. Tehnică, București, 1964

Posea N., *Rezistența materialelor*, EDP, București, 1979

Rao S.S., *The Finite Element Method in Eng.*, 4th Ed., Elsevier, 2005

Rockey L., Griffiths W., Nethercot D. (editors), *Introduction à la méthode des éléments finis*, Eyrolles, Paris, 1979

Stepine P., *Résistance des matériaux*, Editions Mir, Moscou, 1986

SR EN 10024:1988, *Profile I cu aripi înclinate, laminate la cald*

SR EN 10055:2000, *Profile T cu aripi egale și muchii rotunjite, laminate la cald din oțel*

SR EN 10056:2000, *Corniere cu aripi egale și inegale din oțel pentru construcții. Partea 1: Dimensiuni*

STAS 75-90, *Dimensiuni liniare normale*

Tripa M., *Rezistența materialelor*, EDP, București, 1967

Voinea R., Voiculescu D., Simion P.F., *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, EA, București, 1989

